arXiv:2301.02392v1 [physics.plasm-ph] 6 Jan 2023

环形约束等离子体中离子平行流体闭合关系与输运的矩-傅里叶方法

Jeong-Young Ji, * Eric D. Held 和 J. Andrew Spencer美国犹他州洛根，犹他州立大学物理系，邮编 *84322*

Yong-Su Na

核工程系，

韩国首尔，首尔大学，邮编 *08826*

摘要

针对轴对称磁场，本文提出了一种求解漂移动理学方程的通用方法。将分布函数展开为一般矩，可得到一组常微分方程。再依次将各矩以及涉及磁场的量展开为傅里叶级数，可得到一组线性代数方程。求解完整的（麦克斯韦分布和非麦克斯韦分布）矩方程组，可将密度、温度和流速扰动表示为平衡压强和温度的径向梯度的函数。通过求解非麦克斯韦分布的矩方程，还可得到将平行热流密度和黏度与温度和流速的径向梯度及平行梯度联系起来的闭合关系。将这些闭合关系与线性化流体方程结合，可重现直接求解完整矩方程组所得的相同解。该方法可推广至一般磁场中的电子-离子等离子体和多离子等离子体，以推导闭合关系和输运。

* j.ji@usu.edu

I. 引言

对于磁约束等离子体，新经典输运理论描述了稳态等离子体在非均匀磁场中因库仑碰撞而产生的粒子、热量和动量输运 [1–7]。新经典输运通过求解一阶漂移动理学方程得到 [8, 9] ，并假设零阶背景分布（综述见参考文献 [10, 11]）。由于难以在速度空间中处理积分微分碰撞算子，解析研究采用了修正碰撞算子。数值研究则可通过提高速度空间分辨率，采用精度所需的朗道（福克-普朗克）碰撞算子。已有许多输运代码被开发出来，用于求解采用修正碰撞算子 [12, 13] 或精确朗道碰撞算子 [14–19]的连续漂移动理学方程。

为了描述托卡马克等离子体的宏观状态，流体变量至关重要，因此，与求解动理学方程相比，求解流体方程可能已经足够。由于位置空间的维数远低于相空间，数值求解流体方程比求解动理学方程具有显著优势 [20–24]。关键问题在于获得适当的闭合关系，以捕捉所需的物理效应。尽管新经典输运理论推导出了热流密度，但它不能作为温度方程的闭合关系之一，因为它是从流体方程推导出来的，因此以零阶密度和温度表示，而不是以其演化方程需要闭合的（一阶）流体变量表示。也就是说，由无散条件推导出的热流，对温度方程中的散度项不起作用。

在这项工作中，我们介绍了一种解析方法，用于求解漂移动理学方程，以获得闭合关系和输运。对于磁化等离子体，平行矩方程见参考文献 [25]。矩方法的一个优点是可以获得线性化朗道算子的精确碰撞矩 [26]。基于矩的碰撞算子可用于线性和非线性回旋动理学库仑碰撞算子 [27–29]。对于磁场强度沿磁力线保持不变的平板几何，漂移动理学方程可转化为具有常系数的常微分方程线性系统。利用特征向量方法，可以解析求解该线性系统中的

平行矩 [30]。

另一方面，对于托卡马克的非均匀磁场，漂移动理学方程会变为具有变系数的常微分方程线性系统。这意味着，积分闭合关系 [30] 中使用的特征向量方法并不适用。对于具有变系数的线性微分方程组，我们可以对变系数和矩进行傅里叶展开，从而构建线性代数方程组。尽管对矩和傅里叶模进行截断不可避免，但随着矩数和傅里叶模数的增加而达到收敛时，截断系统的解与漂移动理学方程的解等价。随后，可以利用所得的矩解构造分布函数，而该分布函数就是漂移动理学方程的解。因此，矩解可用于对众多流体与动理学代码进行基准测试。

在第 II 节中，我们给出与一阶漂移动理学方程等价的平行矩方程。在第 III 节中，我们利用傅里叶展开，以傅里叶级数求解流体量的一般矩方程。随着矩数和傅里叶模数的增加，所得收敛解将在文中给出。在第 IV 节中，我们推导闭合关系，并将其纳入流体方程，以再现流体量。在第 V 节中，我们总结全文，并讨论将该工作扩展到更一般等离子体的可能性。

II. 漂移动理学方程与矩方程

在标准新经典输运理论中（一般性综述参见文献 [11] ），通过求解漂移动理学方程来研究离子和电子输运。对于轴对称磁场，可以得到解析解

$$\mathbf{B} = I\nabla\zeta + \nabla\zeta \times \nabla\psi \tag{1}$$

其中， $2\pi\psi$ 是极向磁通， $2\pi I/\mu_0$ 是极向电流， μ_0 是磁导率， ζ 是环向角。为简单起见，我们假设磁场为圆形磁场

$$B = \frac{B_0}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{2}$$

其中， θ 是极向角， B_0 是恒定的参考磁场， $\epsilon = r/R_0$ 是逆纵横比， R_0 和 r 分别是圆形磁通面的长半径和短半径。

对于离子输运，通常忽略离子-电子碰撞，简化后的离子漂移动理学方程中，一阶分布函数 f_1 满足

$$v_\parallel \partial_\parallel (f_1 - F) = C(f_1) \tag{3}$$

with

$$F = -\frac{I v_\parallel}{\Omega}\frac{df_0}{d\psi} = -\frac{I v_\parallel}{\Omega}\left[\frac{d\ln p_0}{d\psi} + \left(s^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{d\ln T_0}{d\psi}\right] f_0 \tag{4}$$

and

$$f_0(\psi, w) = \frac{n_0(\psi)}{[2\pi m T_0(\psi)]^{3/2}} e^{-w/T_0(\psi)} = \frac{n_0}{\pi^{3/2} v_0^3} e^{-s^2} \tag{5}$$

在（ψ、 θ、 $w = mv^2/2$、 $\mu = mv_\perp^2/2B$）坐标中，其中 $\partial_\parallel = \mathbf{b}\cdot\nabla = (\mathbf{B}/B)\cdot\nabla$、 $v_\parallel = \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}$、 $\Omega = qB/m$、 $v_0 = \sqrt{2T_0/m}$ 和 $s = v/v_0$。请注意，磁通面可以用最低阶密度 n_0、温度 T_0 或压力 $p_0 = n_0 T_0$ 来标记。碰撞算子是相对于静态麦克斯韦分布函数 f_0 线性化的朗道算子，

$$C(f_1) = C(f_1, f_0) + C(f_0, f_1). \tag{6}$$

求解动理学方程（3）的一项难点在于处理碰撞算子，它是一个作用于速度空间的积分-微分算子。在标准的新古典理论解析处理中，朗道算子通常近似为洛伦兹俯仰角散射算子，并额外加入一个恢复动量项。在矩方法中，线性化碰撞算子可以解析计算，并明确表示为由碰撞系数组成的矩阵。本文求解了参考文献 [25, 26] 中引入的一组平行矩方程。如下所示，矩方程也可以从漂移动理学方程推导得到。

在本文的矩方法中，陀螺平均分布函数 f_1 展开为

$$f_1 = f_0 \sum_{l,k} \hat{P}^{lk} \hat{M}^{lk} \tag{7}$$

使用正交归一多项式

$$\hat{P}^{lk} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\sigma}_{lk}}} P^{lk} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\sigma}_{lk}}} s^l P_l(v_\parallel / v) L_k^{(l+1/2)}(s^2),$$

其中， P_l 是勒让德多项式， $L_k^{(l+1/2)}$ 是伴随拉盖尔（索尼）多项式，归一化常数为

$$\bar{\sigma}_{lk} = \bar{\sigma}_l \lambda_{lk},\ \bar{\sigma}_l = \frac{1}{2l+1},\ \lambda_{lk} = \frac{(l+k+1/2)!}{k!(1/2)!}. \tag{8}$$

f_1 的若干最低阶矩为: $\hat{M}^{00} = n_1/n_0$ （密度）、$\hat{M}^{01} = -\sqrt{3/2} T_1/T_0$（温度）、$\hat{M}^{10} = \sqrt{2} u/v_0$（平行流速 $u = V_{1\parallel}$）、$\hat{M}^{11} = -\sqrt{4/5} h_\parallel / v_0 p_0$（平行热流密度）和$\hat{M}^{20} = \sqrt{3/4}\pi_\parallel / p_0$ （平行黏度），其中 $p_0 = n_0 T_0$。新经典热力学驱动项也可展开为

$$\begin{aligned} v_\parallel \partial_\parallel F =& \frac{v_0 \partial_\parallel \ln B}{B/B_0} f_0 \left[\left(2\hat{P}^{00} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \hat{P}^{01} + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{P}^{20} \right) \hat{p}_{0,\psi} \right. \\ & \left. + \left(-5\sqrt{\frac{2}{3}} \hat{P}^{01} + 2\sqrt{\frac{10}{3}} \hat{P}^{02} + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{P}^{20} - \sqrt{\frac{7}{6}} \hat{P}^{21} \right) \hat{T}_{0,\psi} \right], \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$\hat{p}_{0,\psi} = \frac{I}{q v_0 B_0 n_0} \frac{dp_0}{d\psi}, \tag{10}$$

$$\hat{T}_{0,\psi} = \frac{I}{q v_0 B_0} \frac{dT_0}{d\psi}. \tag{11}$$

对公式（3）取$\hat{P}^{jp}$ 矩，得到

$$\sum_{lk} \psi^{jp,lk} \partial_\parallel \hat{M}^{lk} + \psi_B^{jp,lk} (\partial_\parallel \ln B) \hat{M}^{lk} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{C}}} c^{jp,lk} \hat{M}^{lk} + \frac{\partial_\parallel \ln B}{B/B_0} \left(g_p^{jp} \hat{p}_{0,\psi} + g_T^{jp} \hat{T}_{0,\psi} \right), \tag{12}$$

其中 $\lambda_{\mathrm{C}} = v_0 \tau_{\mathrm{ii}}$（离子平均自由程）。注意，从公式（12）中消去 $(j,p) = (0,0)$、$(0,1)$ 和 $(1,0)$ 矩方程，可得到一组闭合矩方程，与平板几何中的闭合矩方程类似，参见文献 [31]。常系数 $\psi^{jp,\ lk}$，$\psi^{jp,\ _B\ lk}$ 和 $c^{jp,\ lk}$ 定义如下

$$\int \mathrm{d}^3 v v_\parallel \hat{P}^{jp} \hat{P}^{lk} f_0 = n_0 v_0 \psi^{jp,lk}, \tag{13}$$

$$\int \mathrm{d}^3 v v_\parallel \hat{P}^{jp} (\partial_\parallel \hat{P}^{lk}) f_0 = n_0 v_0 (\partial_\parallel \ln B) \psi_B^{jp,lk}, \tag{14}$$

$$\int \mathrm{d}^3 v \hat{P}^{jp} C(f_0 \hat{P}^{lk}) = \frac{n_0}{\tau_{\mathrm{ii}}} c^{jp,lk} = \frac{n_0}{\tau_{\mathrm{ii}}} \delta_{jl} c^j_{pk}. \tag{15}$$

公式（9）中的非零 g^{jp} 为

$$g_p^{0,0} = 2,\ g_p^{0,1} = -2\sqrt{\frac{2}{3}},\ g_p^{2,0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{16}$$

and

$$g_T^{0,1} = -5\sqrt{\frac{2}{3}},\ g_T^{0,2} = 2\sqrt{\frac{10}{3}},\ g_T^{2,0} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ g_T^{2,1} = -\sqrt{\frac{7}{6}}. \tag{17}$$

注意到 $\psi^{jp,lk} = \delta_{j,j\pm1}\psi^{j\pm}_{lk}$，$\psi^{jp,}{}_{B}{}^{j+1\,k} = -(j+2)\psi^{jp,j+1,k}/2$，以及 $\psi^{jp,}{}_{B}{}^{j-1\,k} = (j-1)\psi^{jp,j-1,k}/2$（参见参考文献 [25]），并定义

$$\begin{aligned}
\partial_\parallel^{j+} &= \partial_\parallel - \frac{j+2}{2}\partial_\parallel \ln B, \\
\partial_\parallel^{j-} &= \partial_\parallel + \frac{j-1}{2}\partial_\parallel \ln B,
\end{aligned} \tag{18}$$

我们可以合并 ψ 和 ψ_B 项，将公式（12）改写为

$$\sum_k \psi^{j-}_{pk}\partial_\parallel^{j-}\hat{M}^{j-1,k} + \sum_k \psi^{j+}_{pk}\partial_\parallel^{j+}\hat{M}^{j+1,k} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{C}}}\sum_k c^j_{pk}\hat{M}^{jk} + \frac{\partial_\parallel \ln B}{B/B_0}\left(g_p^{jp}\hat{p}_\psi + g_T^{jp}\hat{T}_\psi\right). \tag{19}$$

尽管关于 $j = 0, 1, \cdots, L-1$ 和 $k = 0, 1, \cdots, K-1$ 的公式（12）是一个截断系统，但存在 L 和 K，使得当矩的数量增加到高于 L 和 K 时，解不会发生变化。换言之，公式（12）存在一个收敛解，可视为公式（3）的解。因此，对于截断矩集，公式（12）在定量上等价于公式（3）。

III. 求解矩方程的傅里叶方法 NS

在轴对称磁场（1）中，磁通面上的物理量仅依赖于 θ。使用 $\partial_\parallel = (\mathbf{B}\cdot\nabla\theta/B)\partial/\partial\theta = (B^\theta/B)\partial_\theta$ 并将公式（12）除以 B^θ/B，得到一个常微分方程组

$$\sum_{lk}\psi^{jp,lk}\partial_\theta\hat{M}^{lk} + \psi_B^{jp,lk}(\partial_\theta \ln B)\hat{M}^{lk} = \frac{B}{B^\theta\lambda_{\mathrm{C}}}c^{jp,lk}\hat{M}^{lk} + \frac{\partial_\theta \ln B}{B/B_0}\left(g_p^{jp}\hat{p}_\psi + g_t^{jp}\hat{T}_\psi\right). \tag{20}$$

由于系数 $\partial_\theta \ln B$ 依赖于 θ，推导积分闭合关系时所用的特征向量方法 [30] 并不适用。因此，我们采用傅里叶方法，将微分方程组转换为代数方程组。注意，公式（20）构成了关于平行矩$\hat{M}^{lk}$ 的线性常微分方程组；对系数、矩和驱动项进行傅里叶展开后，微分方程组将转换为线性代数方程组。

在傅里叶方法中，所有物理量都展开为傅里叶级数。对于 $A = \hat{M}^{lk}(\theta)$ 和 $\partial_\theta \ln B/(B/B_0)$,

$$A(\theta) = A_{(0)} + A_{(1-)} \sin\theta + A_{(1+)} \cos\theta + A_{(2-)} \sin 2\theta + A_{(2+)} \cos 2\theta + \cdots = \sum_m A_{(m)} \varphi_{(m)}, \quad (21)$$

其傅里叶模为

$$\varphi_{(0)} = 1,\ \varphi_{(1)} = \varphi_{(1-)} = \sin\theta,\ \varphi_{(2)} = \varphi_{(1+)} = \cos\theta, \cdots,$$
$$\varphi_{(2n-1)} = \varphi_{(n-)} = \sin n\theta,\ \varphi_{(2n)} = \varphi_{(n+)} = \cos n\theta, \cdots \quad (22)$$

其中括号内表示傅里叶指标。 $A(\theta)$ 的傅里叶系数可由下式求得:

$$A_{(m)} = \frac{1}{\sigma_{(m)}} \int d\theta \varphi_{(m)} A(\theta), \quad (23)$$

其中，对于 $m > 0$， $\sigma_{(0)} = 2\pi$ 和 $\sigma_{(m)} = \pi$ 。导数 ∂_θ 以及式 (20) 中与 θ 有关的系数，在傅里叶表示中变为矩阵。对于 $O = \partial_\theta$、 $\partial_\theta \ln B$ 和 $B/B^\theta \lambda_{\mathrm{C}}$，傅里叶矩阵元 $O_{(i,j)}$ 可由下式求得:

$$O_{(i,j)} = \frac{1}{\sigma_{(i)}} \int d\theta \varphi_{(i)} O \varphi_{(j)}, \quad (24)$$

而 $O\hat{M}^{lk}$ 的傅里叶表示变为

$$\left(O\hat{M}^{lk}\right)_{(i)} = \frac{1}{\sigma_{(i)}} \int d\theta \varphi_{(i)} O \sum_j \hat{M}^{lk}_{(j)} \varphi_{(j)} = \sum_j O_{(i,j)} \hat{M}^{lk}_{(j)}. \quad (25)$$

那么，方程 (20) 的第 (m) 个傅里叶分量可写为一个代数方程组

$$\psi^{jp,lk} (\partial_\theta)_{(m,n)} \hat{M}^{lk}_{(n)} + \psi^{jp,lk}_B (\partial_\theta \ln B)_{(m,n)} \hat{M}^{lk}_{(n)} =$$
$$c^{jp,lk} \left(\frac{B}{B^\theta \lambda_{\mathrm{C}}}\right)_{(m,n)} \hat{M}^{lk}_{(n)} + \left(\frac{\partial_\theta \ln B}{B/B_0}\right)_{(m)} \left(g_p^{jp} \hat{p}_{0,\psi} + g_T^{jp} \hat{T}_{0,\psi}\right), \quad (26)$$

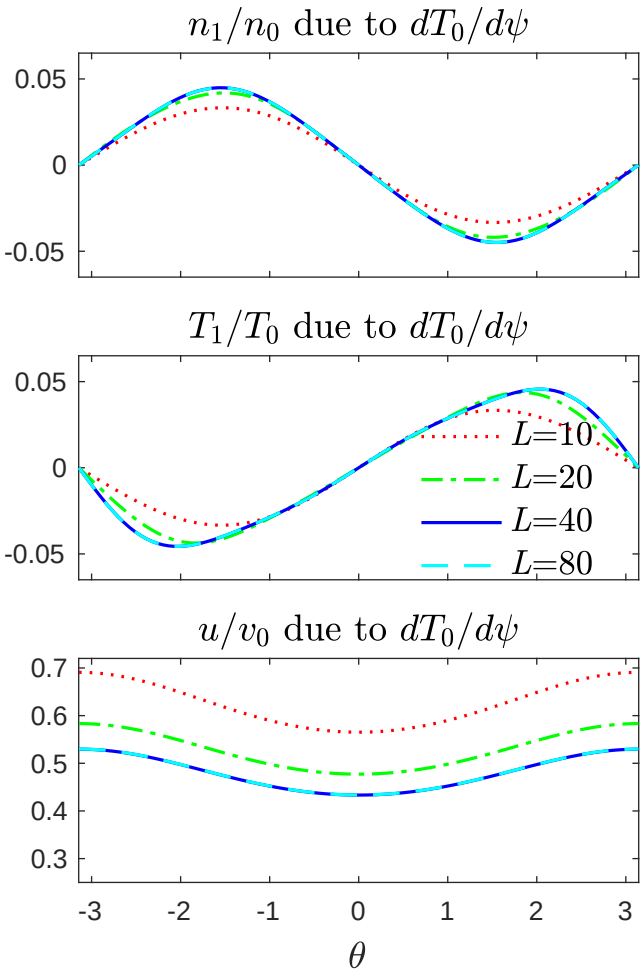


图 1. 对于 $\epsilon = 0.1$、$\mathrm{K}_0 = 100$、$\mathrm{n}_\mathrm{F} = 4$，以及 $LK = 10 \times 20$（红色点线）、 20×40（绿色点划线）、 40×80（蓝色实线）和 80×160ˆ（青色虚线），一阶密度、温度和平行流速。比值 n_1/n_0、 T_1/T_0 和 u/v_0 以 T_0, ψ 为单位绘出。

其中默认对 l、 k 和 n 求和。该代数方程组可写成矩阵形式,

$$[\![\psi\partial_\theta]\!]\left[\!\left[\hat{M}\right]\!\right]+[\![\psi_B\partial_\theta \ln B]\!]\left[\!\left[\hat{M}\right]\!\right] = [\![cB/B^\theta\lambda_\mathrm{C}]\!]\left[\!\left[\hat{M}\right]\!\right]+\left[\!\left[(g_p\hat{p}_0+g_T\hat{T}_0)(B_0/B)(\partial_\theta \ln B)\right]\!\right], \quad (27)$$

其中 $[\![\psi\partial_\theta]\!] = [\psi]\otimes(\partial_\theta)_\mathrm{F}$、 $[\![\psi_B\partial_\theta \ln B]\!] = [\psi_B]\otimes(\partial_\theta \ln B)_\mathrm{F}$，以及 $[\![cB/B^\theta\lambda_\mathrm{C}]\!] = [c]\otimes\left(B/B^\theta\lambda_\mathrm{C}\right)_\mathrm{F}$，其中 $\otimes$ 表示两个矩阵的张量积。傅里叶矩阵（O）的第 i 行、第 j列为 $O_{(i,j)}$，线性系统的维度为 $N = LKF =$（勒让德多项式的数量）（拉盖尔多项式的数量）（傅里叶模的数量）。

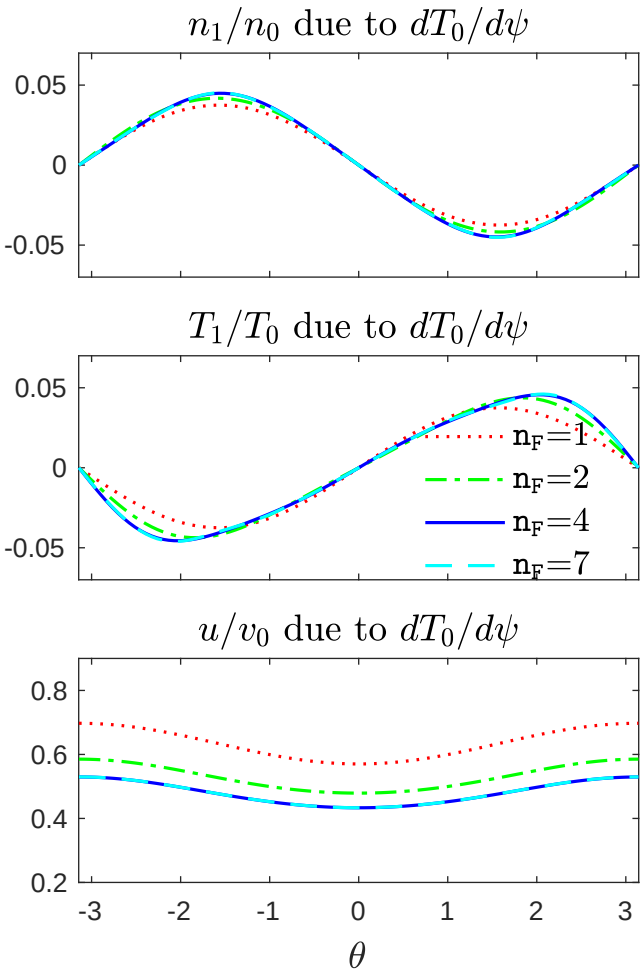


图 2。 $\epsilon = 0.1$、$\mathrm{K}_0 = 100$ LK =40 × 80对应的一阶密度、温度和平行流速，以及 $\mathrm{n_F} = 1$ （红色点线）、2（绿色点划线）、4（蓝色实线）和 7（青色虚线）对应的结果。ˆ 比值 n_1/n_0、T_1/T_0 和 u/v_0 以 T_0, ψ 为单位绘出。

解 $\left[\!\left[\hat{M} \right]\!\right]$ 可通过对该矩阵求逆或进行奇异值分解得到，

$$\left[\!\left[\hat{M}\right]\!\right] = \left([\![\psi\partial_\theta]\!] + [\![\psi_B\partial_\theta \ln B]\!] - [\![cB/B^\theta\lambda_\mathrm{C}]\!]\right)^{-1}_{\mathrm{ns}} \left[\!\left[(g_p\hat{p}_{0,\psi} + g_T\hat{T}_{0,\psi})(B_0/B)(\partial_\theta \ln B)\right]\!\right], \quad (28)$$

其中，下标“ns”表示矩阵的非奇异部分。结果发现，消去 $n_{(0)}$ 和 $T_{(0)}$ 分量后，矩阵变为非奇异矩阵 [另请参阅关于方程（48）和（50）的说明]。随后可从解中读出一阶流体量的傅里叶分量

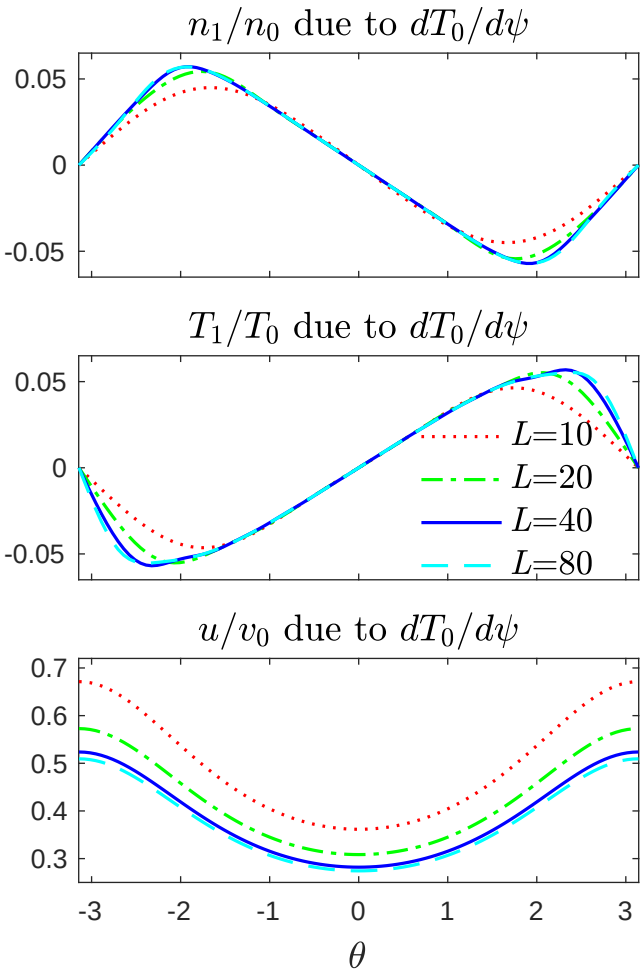


图 3. 对于 $\epsilon = 0.3$、$\mathrm{K}_0 = 100$、$\mathrm{n}_\mathrm{F} = 4$，以及 $LK = 10 \times 20$（红色，点线）、 20×40（绿色，点划线）、 40×80（蓝色实线）和 80×160（青色，虚线）的一阶密度、温度和平行流速。

为 $[\![\hat{M}]\!]$，

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \hat{p}_{0,\psi}\mathbb{N}^{p_0} + \hat{T}_{0,\psi}\mathbb{N}^{T_0}, \\ \mathbb{T} &= \hat{p}_{0,\psi}\mathbb{T}^{p_0} + \hat{T}_{0,\psi}\mathbb{T}^{T_0}, \\ \mathbb{U} &= \hat{p}_{0,\psi}\mathbb{U}^{p_0} + \hat{T}_{0,\psi}\mathbb{U}^{T_0}, \end{aligned} \tag{29}$$

其中，$\mathbb{N} = (\hat{n})_\mathrm{F} = (n_1/n_0)_\mathrm{F}$、$\mathbb{T} = (\hat{T})_\mathrm{F} = (T_1/T_0)_\mathrm{F}$、$\mathbb{U} = (\hat{u})_\mathrm{F} = (u/v_0)_\mathrm{F}$、$\mathbb{N}^\alpha$、$\mathbb{T}^\beta$和 $\mathbb{U}^\beta(\beta = p_0, T_0)$是傅里叶分量的列向量。利用这些傅里叶分量，可根据式（21）构造一阶流体量。例如，由$\hat{p}_{0,\psi}$和$\hat{T}_{0,\psi}$分别产生的密度为$\hat{n} = \sum_m \mathbb{N}^{p_0}_m(\,)\varphi_{(m)}\hat{p}_{0,\psi}$和$\hat{n} = \sum_m \mathbb{N}^{T_0}_{(m)}\varphi_{(m)}\hat{T}_{0,\psi}$，其中$\mathbb{N}^\beta{}_{(m)}$是列向量 $\mathbb{N}^\beta$的第(m)个傅里叶分量。

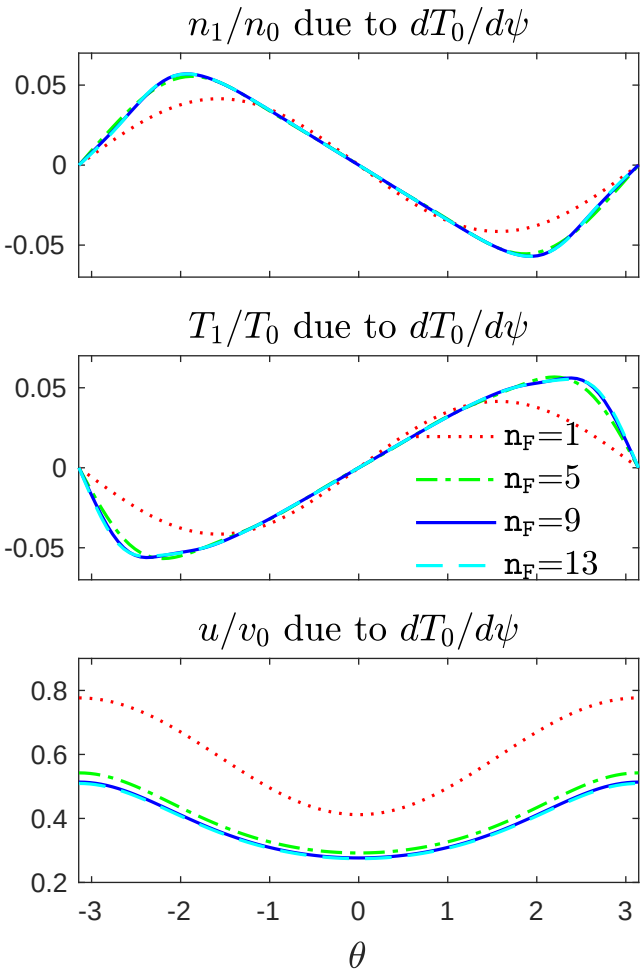


图 4. $\epsilon = 0.3$、$\mathrm{K}_0 = 100$、 $N = LK = 40 \times 80$ 时的一阶密度、温度和平行流速，以及 $\mathrm{n_F} = 1$（红色点线）、5（绿色点划线）、9（蓝色实线）和 13（青色˜虚线）时的对应量。比值 n_1/n_0、T_1/T_0 和 u/v_0 以 T_0, ψ 为单位绘出。

系统的逆碰撞性用克努森数表征，即平均自由程与梯度尺度长度之比。定义托卡马克 $\mathrm{K}_0 = B/B^\theta \lambda_C$的基本克努森数后，有效克努森数大致为 $\mathrm{K}_0 \partial_\theta \ln B \sim m\mathrm{K}_0$，其中 m 是系统的典型傅里叶模态。尽管式（28）的解适用于任意轴对称磁场，本文考虑的是圆形磁场 [，见式（2）]。对于圆形磁场（2），基本克努森数为 $\mathrm{K}_0 \sim \lambda_C/qR_0$，其中 q 是安全因子，傅里叶模态 m 由逆纵横比 $\epsilon = r/R_0$决定。一般而言，有效克努森数会随着λ_C 和 ϵ 的增大而增大。

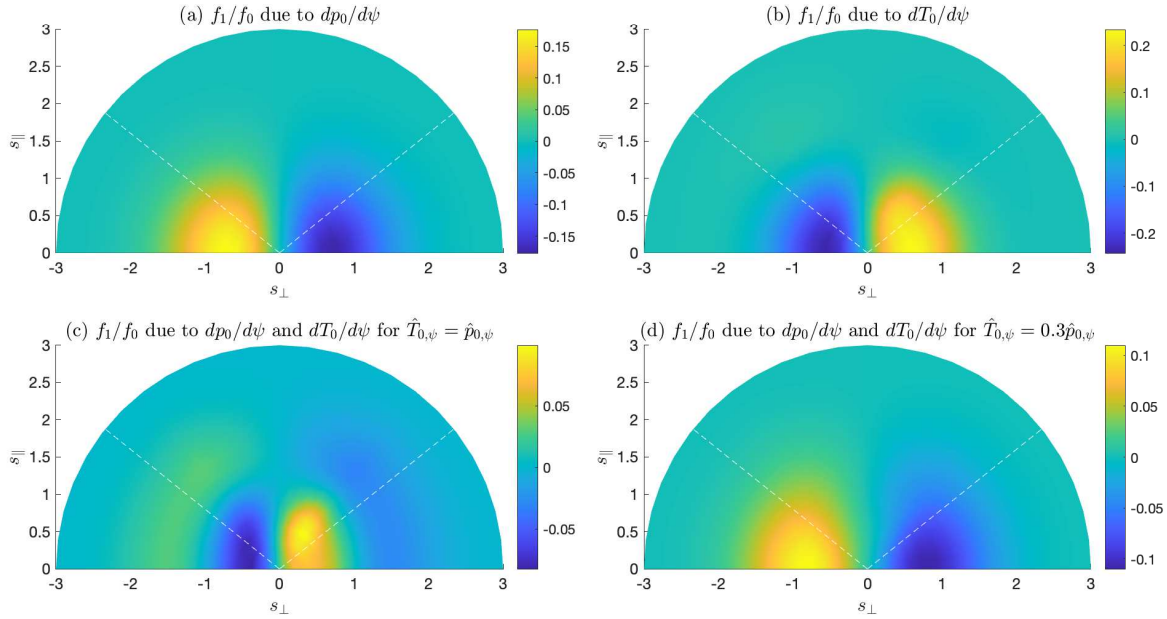


图 5. 在 $\epsilon = 0.3$和 $\mathrm{K}_0 = 100$条件下， $s_\perp$-$s_\parallel$ 平面上 $\theta = -\pi/3$处的 f_1 一阶分布函数。白色虚线表示通过/俘获边界。比值 f_1/f_0 在 (a)、(c) 和 (d) 中以$\hat{}p_{0,\psi}$ 为单位绘制，在 (b) 中以$T_{0,\psi}$ 为单位绘制。

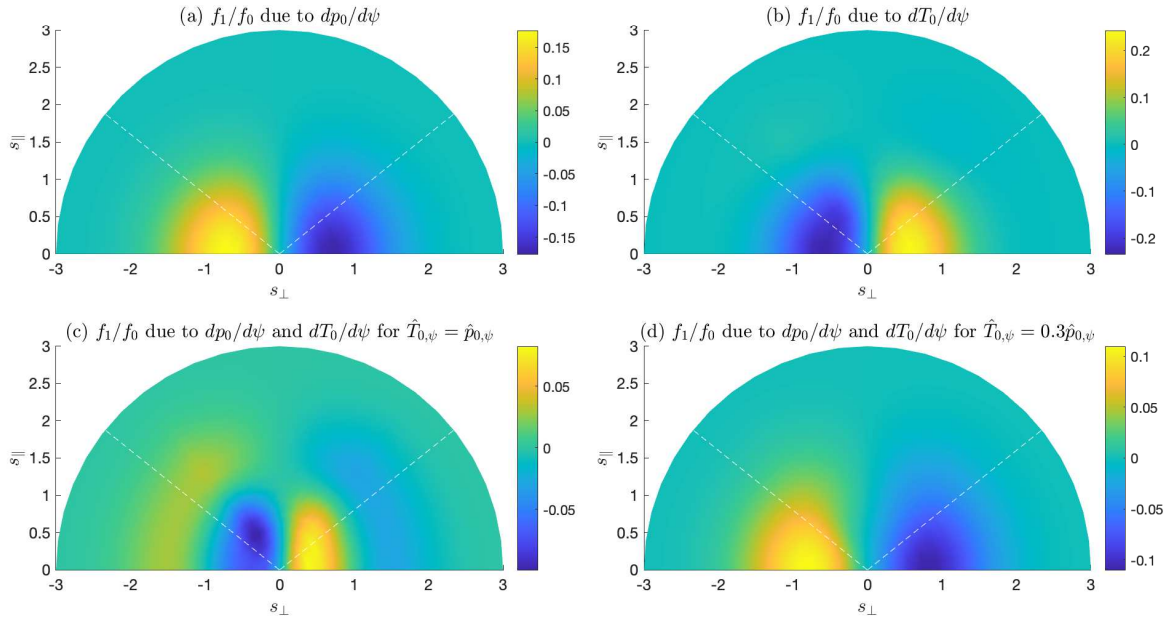


图 6. 在 $\epsilon = 0.3$ 和 $\mathrm{K}_0 = 100$条件下， $s_\perp$-$s_\parallel$ 平面上 $\theta = \pi/3$ 处的 f_1 一阶分布函数。白色虚线表示通过/俘获边界。比值 f_1/f_0 在 (a)、(c) 和 (d) 中以$\hat{}p_{0,\psi}$ 为单位绘制，在 (b) 中以$T_{0,\psi}$ 为单位绘制。

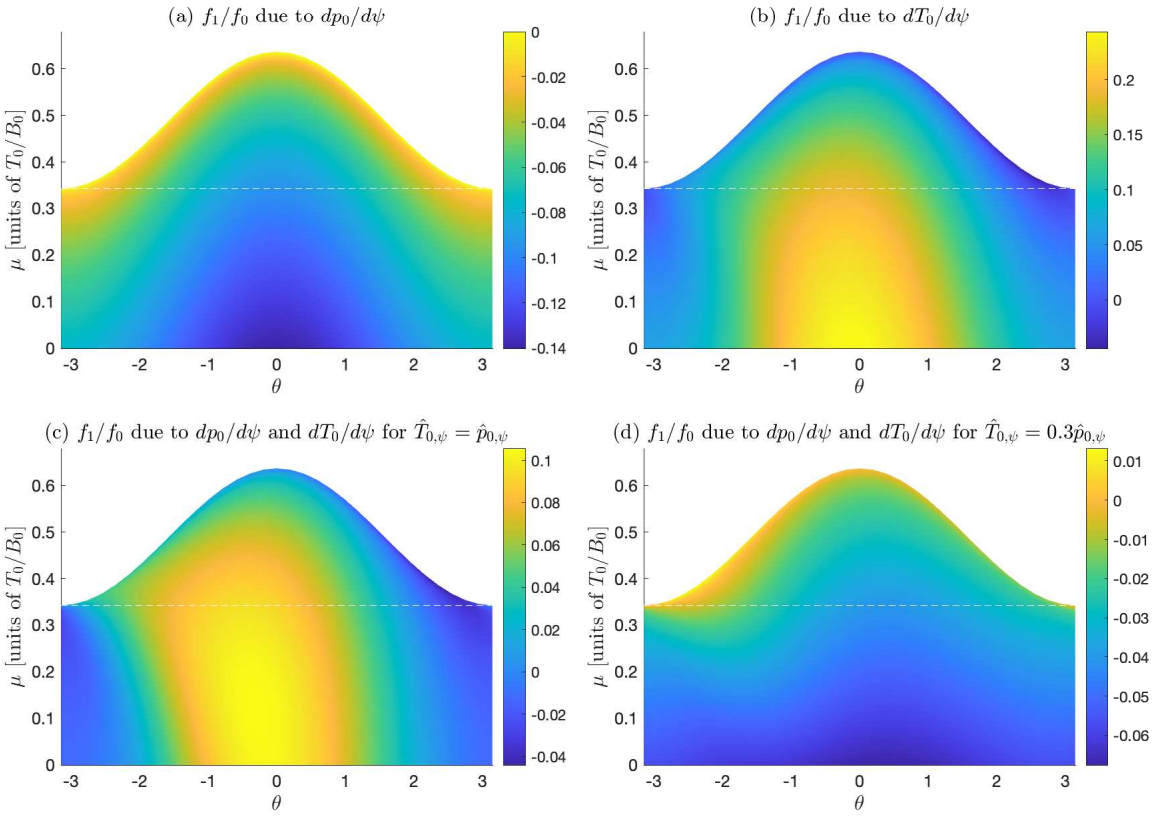


图 7. 在 θ-μ 平面上，$\epsilon = 0.3$ 且 $\mathrm{K}_0 = 100$ 时，f_1 在 $s = 0.7$ 处的一阶分布函数。白色虚线表示通过/俘获边界。比值 f_1/f_0 以 $\hat{}p_{0,\psi}$ 为单位绘制于 (a)、(c) 和 (d) 中，以 $T_{0,\psi}$ 为单位绘制于 (b) 中。

对径向压力梯度 $dp_0/d\psi$ 作出响应的解表明，$\mathbb{N}^{p_0} = 0$、$\mathbb{T}^{p_0} = 0$ 和 $\mathbb{U}^{p_0} = -(1, 0, \epsilon, \cdots)^{\mathrm{T}} = -(B_0/B)_{\mathrm{F}}$。这意味着 $\hat{}p_{0,\psi}$ 驱动仅对流速 $\hat{}u = -\hat{}p_{0,\psi} B_0/B + \gamma^u B/B_0$ 有贡献，这与连续性方程 $\nabla \cdot (n_0 \mathsf{V}_1) = 0$ 一致。这里的 γ^u 是一个积分常数，可由温度方程和流速方程确定。结果表明，γ^u 与 $T_{0,\psi}$ 成正比，这一点已由解证实，并在第 IV 节中讨论。

对于响应径向温度梯度 $dT_0/d\psi$ 的解，在 $\epsilon = 0.1$、$\mathrm{K}_0 = 100$ 和 $\mathrm{n}_{\mathrm{F}} = 4$（$F = 2\mathrm{n}_{\mathrm{F}} + 1 = 9$）的情况下，图 1 显示了密度、温度和平行流速。通过增加矩的数量进行收敛性研究，结果表明 $LK = 40 \times 80$ 矩解收敛，因此可认为在实际应用中是精确的。请注意，式 (7) 中的多项式 $\hat{}P^{lk}$ 构成一个完备集。随着 K_0 增大，达到收敛所需的矩数也随之增加。增加

傅里叶模态数从 1 增至 7（见图 2）的研究表明，$\mathtt{n_F} = 4$ 模解收敛，可认为非常准确。随着 ϵ 增大，达到收敛所需的傅里叶模态数也随之增加。

图 3 和图 4 展示了 $\epsilon = 0.3$、较大的逆纵横比以及 $\mathtt{K_0} = 100$ 条件下的密度、温度和平行流速。$LK = 40 \times 80$ 矩解虽然不如 $\epsilon = 0.1$ 情况下准确，但在实际应用中仍然非常准确；预计 $LK = 80 \times 160$ 解也会很准确。这是因为，为了准确展开磁场，$\epsilon = 0.3$ 比 $\epsilon = 0.1$ 需要更多傅里叶模。更多的傅里叶模会增大有效克努森数。达到收敛所需的傅里叶模数量为 $\mathtt{n_F} = 13$。

矩解可用于构造满足动理学方程 (3) 的分布函数。由于与可观测物理量相关的所有流体量都涉及若干个最低阶矩，因此从矩重构分布函数可能是多余的。尽管如此，分布函数本身对于理解等离子体的动理学行为仍然很重要。在矩展开中，接近矩展开截断阶数的高阶矩可能不准确，并可能对分布函数的收敛产生不利影响。然而，我们发现这些接近截断阶数的矩比流体矩小几个数量级，因此一旦达到收敛，截断误差便可忽略不计。图 5 和图 6 分别展示了在 $\theta = -\pi/3$ 和 $\pi/3$ 条件下，由矩解构造的 $s_\perp$-$s_\parallel$ 平面上的分布函数。图 7 展示了 $s = 0.7$ 条件下 θ-μ 平面上的分布函数。

IV. 流体方程与闭合关系

在新经典输运理论中，通过求解公式（3），可将 f_1 表示为 f_0（或 F）的函数，再对解 f_1 取矩，将 u 表示为 $dp_0/d\psi$ 和 $dT_0/d\psi$的函数。这些表达式可通过求解公式（12）直接得到。本节推导的闭合关系可用于闭合并推进密度、流速和温度的（非线性）流体方程。它们也可纳入线性化流体方程，以重现第 III 节中得到的 n_1、T_1 和 u 的表达式。尽管这些闭合关系

以傅里叶基表示，但此处建立的形式体系也可应用于数值方法中的任何基，例如有限元基或有限差分基。

n_1、 u和 T_1 的线性化流体方程可由原始流体方程得到，其中 $n = n_0 + n_1$、$T = T_0 + T_1$、$\mathsf{V} = u\mathsf{b} + \mathsf{b} \times \nabla p_0/n_0 qB$、$\mathsf{h} = h_\parallel \mathsf{b} + 5p_0 \mathsf{b} \times \nabla T_0/2qB$，以及 $\boldsymbol{\pi} = (3\pi_\parallel/2)(\mathsf{bb} - b^2\mathsf{I}/3)$，其中 $\mathsf{b} = \mathsf{B}/B$。它们等价于公式（3）的$\{P^{00}, mv_0 P^{10}, -T_0 P^{01}\}$矩，并可由公式（20）中$(j, p) = (0, 0)$、$(1, 0)$和$(0, 1)$对应的项读出：

$$\partial_\theta^{0+} \hat{u} = 2\hat{p}_{0,\psi} \frac{\partial_\theta \ln B}{B/B_0}, \tag{30}$$

$$\partial_\theta^{0+} \hat{u} + \partial_\theta^{0+} \hat{h} = (2\hat{p}_{0,\psi} + 5\hat{T}_{0,\psi}) \frac{\partial_\theta \ln B}{B/B_0}, \tag{31}$$

$$\partial_\theta^{1-} \hat{n} + \partial_\theta^{1-} \hat{T} + \partial_\theta^{1+} \hat{\pi} = 0, \tag{32}$$

其中，$\hat{u} = u/v_0$、$\hat{h} = h_\parallel/v_0 p_0$、$\hat{\pi} = \pi_\parallel/p_0$和 $\partial_\theta^{l\pm}$ 由公式（18）定义，其中 $\partial_\parallel$ 替换为$\hat{\partial}_\theta$。为了闭合该流体系统，闭合量 h 和$\hat{\pi}$ 应与一阶$\hat{}$ $\hat{}$ ($\hat{n}$、$\hat{u}$和 T)及平衡态($\hat{p}_{0,\ \psi}$ 和$T_{0,\ \psi}$)流体量相关联。

为得到闭合关系，需要从方程（20）中移除对应于流体方程的行。随后，对应的列便作为系统中的驱动项（源项） $[g_\theta]$:

$$[\psi'] \left[\partial_\theta \hat{M}'\right] + [\psi'_B] (\partial_\theta \ln B) \left[\hat{M}'\right] = \frac{B}{B^\theta \lambda_{\mathrm{C}}} [c'] \left[\hat{M}'\right] + [g_\theta] + \frac{\partial_\theta \ln B}{B/B_0} \left(\left[g'_p\right] \hat{p}_{0,\psi} + \left[g'_T\right] \hat{T}_{0,\psi} \right), \tag{33}$$

其中，$'$ 表示移除流体列和行。例如，$\left[\hat{M}'\right]$ 是一个列向量（$\hat{M}^{0,\ 2}$，$\cdots \hat{M}^{0,\ K+1}$，$\hat{M}^{1,\ 1}$，$\cdots$，$\hat{M}^{1,\ K}$，$\hat{M}^{2,\ 0}$，$\cdots$，$\hat{M}^{2,\ K-1}$，$\cdots$，$\hat{M}^{L-1,\ 0}$，$\cdots$，$\hat{M}^{L-1,\ K-1}$）。$[g_\theta]$ 的非零元素为

$$g_\theta^{1,1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \partial_\theta \hat{T}, \tag{34}$$

$$g_\theta^{2,0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} W_\theta,\ W_\theta = \frac{4}{3} \partial_\parallel^{2-} \hat{u}. \tag{35}$$

由式（33）的傅里叶表示可得，

$$[\![\psi' \partial_\theta]\!] \left[\hat{M}'\right] + [\![\psi'_B \partial_\theta \ln B]\!] \left[\hat{M}'\right] = [\![cB/B^\theta \lambda_{\mathrm{C}}]\!] \left[\hat{M}'\right] + [\![g_\theta]\!] + \left[(g'_p \hat{p}_0 + g'_T \hat{T}_0)(B_0/B)(\partial_\theta \ln B) \right],$$

(36)

可得解,

$$\left[\!\left[\hat{M}'\right]\!\right] = \left([\![\psi'\partial_\theta]\!] + [\![\psi'_B\partial_\theta \ln B]\!] - [\![cB/B^\theta\lambda_{\mathrm{C}}]\!]\right)^{-1}\left[\!\left[g_\theta + (g_p\hat{p}_{0,\psi} + g_T\hat{T}_{0,\psi})(B_0/B)(\partial_\parallel \ln B)\right]\!\right]. \tag{37}$$

闭合关系的傅里叶分量 $\hat{h} = -\sqrt{5}\hat{M}^{1,\ 1}/2$和 $\hat{\pi} = 2\hat{M}^{2,\ 0}/\sqrt{3}$可从 $\hat{}$ 解中读取，并表示为 $\hat{p}_{0,\ \psi}$、$\hat{T}_{0,\ \psi}$、 T和 $\hat{u}$的函数:

$$\mathbb{H} = \hat{p}_{0,\psi}\mathbb{H}^{p_0} + \hat{T}_{0,\psi}\mathbb{H}^{T_0} + \mathsf{K}^{hh}\mathsf{D}\mathbb{T} + \mathsf{K}^{h\pi}\mathbb{W}, \tag{38}$$

$$\mathbb{S} = \hat{p}_{0,\psi}\mathbb{S}^{p_0} + \hat{T}_{0,\psi}\mathbb{S}^{T_0} + \mathsf{K}^{\pi h}\mathsf{D}\mathbb{T} + \mathsf{K}^{\pi\pi}\mathbb{W}, \tag{39}$$

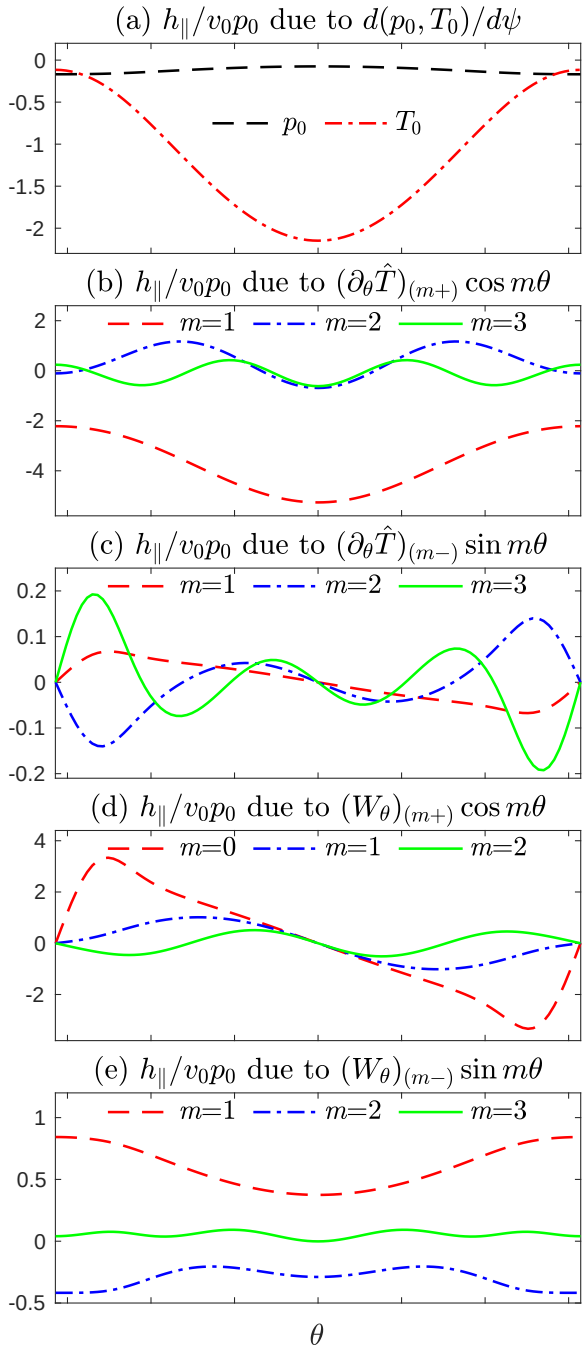
其中， $\mathbb{H} = (\hat{h})_{\mathrm{F}}$、 $\mathbb{S} = (\hat{\pi})_{\mathrm{F}}$和 $\mathbb{W} = (W_\theta)_{\mathrm{F}} = (4/3)\mathsf{D}^{2-}\mathbb{U} \equiv \mathsf{D}_W\mathbb{U}$、 $\mathbb{H}^\beta$以及 $\mathbb{S}^\beta(\beta = p_0, T_0)$是列向量，而$\mathsf{D} = (\partial_\theta)_{\mathrm{F}}$、$\mathsf{D}^{l\pm} = (\partial_\theta^{l\pm})_{\mathrm{F}}$和$\mathsf{K}^{\alpha\beta}(\alpha, \beta = h, \pi)$是矩阵。这里，列向量 $\mathbb{H}^\beta$ 和 $\mathbb{S}^\beta$ 将闭合关系 $h_\parallel$ 和$\pi_\parallel$ 与零阶压强（$\beta = p_0$）或温度（$\beta = T_0$）的径向梯度相连，而矩阵$\mathsf{K}^{\alpha\beta}$ 将闭合关系 $\alpha = h$ 和π 与一阶温度（$\beta = h$）或平行流速（$\beta = \pi$）的平行梯度相连。位置空间中的闭合关系可由解向量构造，例如，$\hat{h}(\theta) = \sum_i \varphi_{(i)}\{\mathbb{H}_i^{p_0}(\theta)\hat{p}_{0,\psi} + \mathbb{H}_i^{T_0}(\theta)\hat{T}_{0,\psi} + \sum_j[\mathsf{K}^{hh}_{(i,j)}(\mathsf{D}\mathbb{T})_{(j)} + \mathsf{K}^{h\pi}_{(i,j)}\mathbb{W}_{(j)}]\varphi_{(j)}\}$，其中 $\mathbb{H}^\beta(i)$是列向量 $\mathbb{H}^\beta$ 的第（i）个傅里叶分量，而$\mathsf{K}^{\alpha\beta}(i,j)$是矩阵$\mathsf{K}^{\alpha\beta}$的第（$i$）行、第（$j$）列。图 8 和图 9 分别展示了由$\hat{p}_{0,\ \psi}$、 $T_{0,\ \psi}$以及 $\partial_\theta T$ 和 W_θ的若干傅里叶模产生的平行热流密度和$\hat{}$黏度。随着热力学驱动项的傅里叶模态增大，其对闭合量的贡献会减小。

通过将闭合关系与定常线性流体方程结合，我们可以重现第 III 节中的流体变量。使用 $(B_0/B)\partial_\theta \ln B = -\partial_\theta(B_0/B)$，并从式 (31) 中消去式 (30)，我们将式 (30)–(32) 写成傅里叶表示:

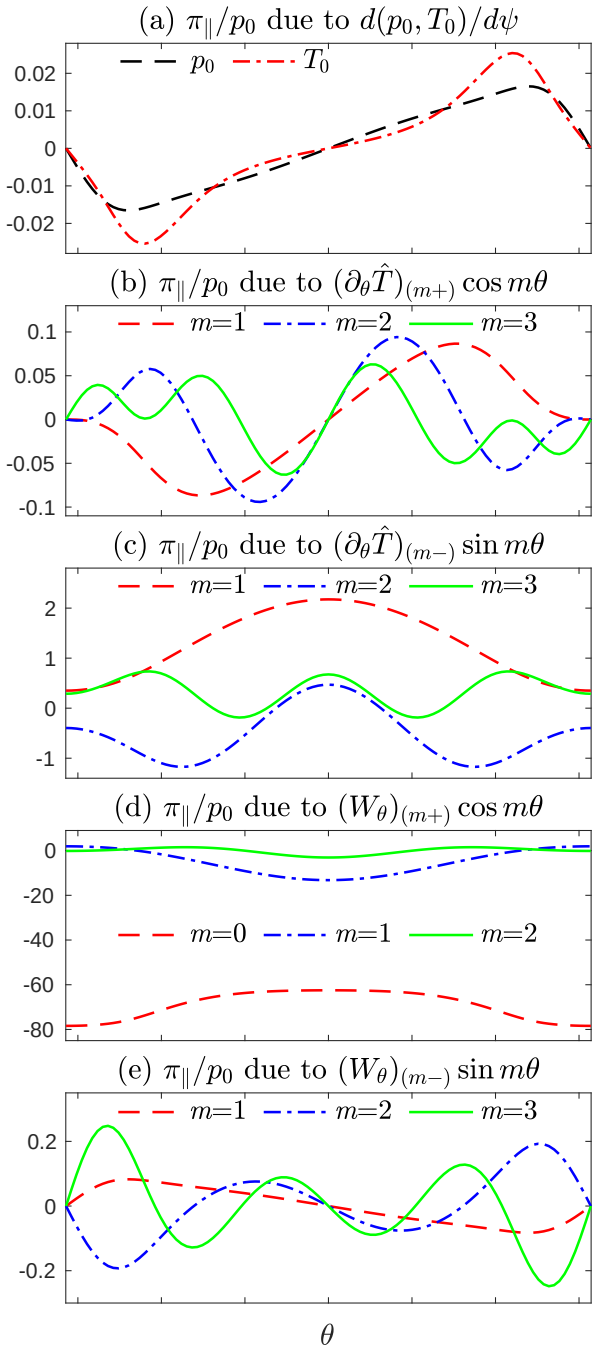
$$\mathsf{D}^{0+}\mathbb{U} = -2\hat{p}_{0,\psi}\mathsf{D}\mathbb{B}_{-1}, \tag{40}$$

$$\mathsf{D}^{0+}\mathbb{H} = -5\hat{T}_{0,\ \psi}\mathsf{D}\mathbb{B}_{-1}, \tag{41}$$

$$\mathsf{D}\mathbb{N} + \mathsf{D}\mathbb{T} + \mathsf{D}^{1+}\mathbb{S} = 0, \tag{42}$$



ˆ 图8. 由 (a) $dp_0/d\psi$ 和 $dT_0/d\psi$、(b) $(\partial_\theta T)^{(m+)}\cos m\theta$、(c) ˆ$(\partial_\theta T)^{(m-)}\sin m\theta$、(d) $(W_\theta)^{(m+)}\cos m\theta$ 和 (e) $(W_\theta)^{(m-)}\sin m\theta$ 产生的平行热流密度。无量纲热流 ˆ ˆ ˆ$h_\parallel/v_0p_0$ 以以下单位绘制：(a) ˆ$p_{0,\ \psi}$ 和 $T_{0,\ \psi}$，(b) $(\partial_\theta T)^{(m+)}$，(c) $(\partial_\theta T)^{(m-)}$，(d) $(W_\theta)^{(m+)}$，以及 (e) $(W_\theta)^{(m-)}$。



ˆ 图9. 由 (a) $dp_0/d\psi$ 和 $dT_0/d\psi$、(b) $(\partial_\theta T)^{(m+)} \cos m\theta$、(c) ˆ$(\partial_\theta T)^{(m-)} \sin m\theta$、(d) $(W_\theta)^{(m+)} \cos m\theta$ 以及 (e) $(W_\theta)^{(m-)} \sin m\theta$ 引起的平行黏度。无量纲黏度 $\pi_{\|}/p_0$ˆ ˆ ˆ 的单位为 (a) ˆp_0, $_\psi$ 和 T_0, $_\psi$、(b) $(\partial_\theta T)^{(m+)}$、(c) $(\partial_\theta T)^{(m-)}$、(d) $(W_\theta)^{(m+)}$ 以及 (e) $(W_\theta)^{(m-)}$。

where $\mathbb{B}_{-1} = (B_0/B)_{\mathrm{F}}$。然后我们结合闭合关系 (38) 和 (39)，得到 te

$$\mathsf{L}\begin{pmatrix}\mathbb{N}\\ \mathbb{T}\\ \mathbb{U}\end{pmatrix} = \mathbb{R}^{p_0}\hat{p}_{0,\psi} + \mathbb{R}^{T_0}\hat{T}_{0,\psi}. \tag{43}$$

其中

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathsf{D}^{0+} \\ 0 & \mathsf{D}^{0+}\mathsf{K}^{hh}\mathsf{D} & \mathsf{D}^{0+}\mathsf{K}^{h\pi}\mathsf{D}_W \\ \mathsf{D} & \mathsf{D}+\mathsf{D}^{1+}\mathsf{K}^{\pi h}\mathsf{D} & \mathsf{D}^{1+}\mathsf{K}^{\pi\pi}\mathsf{D}_W \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$\mathbb{R}^{p_0} = -\begin{pmatrix} 2\mathsf{D}\mathbb{B}^{-1} \\ \mathsf{D}^{0+}\mathbb{H}^{p_0} \\ \mathsf{D}^{1+}\mathbb{S}^{p_0} \end{pmatrix},\ \mathbb{R}^{T_0} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 5\mathsf{D}\mathbb{B}^{-1} \\ \mathsf{D}^{1+}\mathbb{S}^{T_0} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

利用奇异值分解，我们可以对 L 的非奇异部分求逆，并得到以 $\hat{}p_{0,\psi}$ 和 $T_{0,\psi}$表示的解向量 $\hat{}(\mathbb{N},\mathbb{T},\mathbb{U})$。该解向量通过列向量 $(\mathbb{N}^\beta,\mathbb{T}^\beta,\mathbb{U}^\beta) = (\mathsf{L}_{\mathrm{ns}}^{-1})\ \mathbb{R}^\beta$ 重现了方程 (29)，其中 $\beta = p_0$ 和 T_0。

现在我们讨论不使用奇异值分解，而是通过解析计算积分常数，如何求得平行流速和热流密度。由方程 (40) 和 (41)，可得

$$\mathbb{U} = -\hat{p}_{0,\psi}\mathbb{B}_{-1} + \gamma^u\mathbb{B}, \tag{46}$$

$$\mathbb{H} = -\frac{5}{2}\hat{T}_{0,\psi}\mathbb{B}_{-1} + \gamma^h\mathbb{B}, \tag{47}$$

其中，γ^u 和 γ^h 是 D^{0+} ($\mathsf{D}^{0+}\mathbb{B} = 0$) 的零空间的展开系数，而$\mathbb{B} = (B/B_0)_{\mathrm{F}}$。将方程 (38) 与 (47) 结合，可得

$$\mathsf{D}\mathbb{T} = \gamma^u\mathbb{F}^u + \gamma^h\mathbb{F}^h + \hat{p}_{0,\psi}\mathbb{F}^p + \hat{T}_{0,\psi}\mathbb{F}^T, \tag{48}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^u &= -\mathsf{K}^{hh,-1}\mathsf{K}^{h\pi}\mathsf{D}_W\mathbb{B}, \\
\mathbb{F}^h &= \mathsf{K}^{hh,-1}\mathbb{B}, \\
\mathbb{F}^p &= -\mathsf{K}^{hh,-1}\left(\mathbb{H}^{p_0} - \mathsf{K}^{h\pi}\mathsf{D}_W\mathbb{B}_{-1}\right), \\
\mathbb{F}^T &= -\mathsf{K}^{hh,-1}\left(\mathbb{H}^{T_0} + \frac{5}{2}\mathbb{B}_{-1}\right),
\end{aligned} \tag{49}$$

将式（39）与式（42）结合，并利用式（46）和式（48），可得

$$\mathsf{D}\mathbb{N}+\mathsf{D}\mathbb{T}=\gamma^{u}\mathbb{G}^{u}+\gamma^{h}\mathbb{G}^{h}+\hat{p}_{0,\psi}\mathbb{G}^{p}+\hat{T}_{0,\psi}\mathbb{G}^{T} \tag{50}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}^{u}&=-\mathsf{D}^{1+}\left(\mathsf{K}^{\pi h}\mathbb{F}^{u}+\mathsf{K}^{\pi\pi}\mathsf{D}_{W}\mathbb{B}\right),\\
\mathbb{G}^{h}&=-\mathsf{D}^{1+}\mathsf{K}^{\pi h}\mathbb{F}^{h},\\
\mathbb{G}^{p}&=-\mathsf{D}^{1+}\left(\mathbb{S}^{p_0}+\mathsf{K}^{\pi h}\mathbb{F}^{p}-\mathsf{K}^{\pi\pi}\mathsf{D}_{W}\mathbb{B}_{-1}\right),\\
\mathbb{G}^{T}&=-\mathsf{D}^{1+}\left(\mathbb{S}^{T_0}+\mathsf{K}^{\pi h}\mathbb{F}^{T}\right).
\end{aligned} \tag{51}$$

温度和密度可以通过对方程（48）和（50）中的 D 的非奇异部分求逆得到。D 的零空间由 $[\varphi_{(0)}]_{\mathsf{F}}$ 张成，这对应于傅里叶级数中的常数项。由于最低阶密度（n_0）和温度（T_0）均为常数，我们不失一般性地设 $n_{(0)}=0$ 和 $T_{(0)}=0$。由对应于常数（0）傅里叶模态的第一行可得，

$$0=\gamma^{u}\mathbb{F}^{u}_{(0)}+\gamma^{h}\mathbb{F}^{h}_{(0)}+\hat{p}_{0,\psi}\mathbb{F}^{p}_{(0)}+\hat{T}_{0,\psi}\mathbb{F}^{T}_{(0)}, \tag{52}$$

$$0=\gamma^{u}\mathbb{G}^{u}_{(0)}+\gamma^{h}\mathbb{G}^{h}_{(0)}+\hat{p}_{0,\psi}\mathbb{G}^{p}_{(0)}+\hat{T}_{0,\psi}\mathbb{G}^{T}_{(0)}, \tag{53}$$

我们可以确定积分常数 γ^{u} 和 γ^{h}，

$$\begin{pmatrix}\gamma^{u}\\ \gamma^{h}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\mathbb{F}^{u}_{(0)} & \mathbb{F}^{h}_{(0)}\\ \mathbb{G}^{u}_{(0)} & \mathbb{G}^{h}_{(0)}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbb{F}^{p}_{(0)} & \mathbb{F}^{T}_{(0)}\\ \mathbb{G}^{p}_{(0)} & \mathbb{G}^{T}_{(0)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{p}_{0,\psi}\\ \hat{T}_{0,\psi}\end{pmatrix}. \tag{54}$$

随后，带有方程（54）中所得常数的方程（46）和（47）与解（28）的相应列向量一致。注意，这里得到的热流不是闭合关系，并满足 $\nabla\cdot\mathsf{h}=0$。

在结束本节之前，有几点需要说明。首先，公式（40）和（41）等价于 $\nabla\cdot(n_0\mathsf{V}_1)=0$ and $\nabla\cdot\mathsf{h}=0$。代入由 $\nabla p_0-n_0q\mathsf{V}_1\times\mathsf{B}/m=\hat{}\,0$ 和 $(5/2)p_0\nabla T_0-q\mathsf{h}\times\mathsf{B}=0$ 得到的最低阶解 $\mathsf{V}_{1\perp}=(1/qB^2)\mathsf{B}\times\nabla p_0$ and $\mathsf{h}_{\perp}=(5p_0/2qB^2)\mathsf{B}\times\nabla T_0$，可以推导出 $\hat{}u=-\hat{}p_{0,\psi}B_0/B+\gamma^{u}B/B_0$ and $h=_{-5}\hat{}T_{0,\psi}B_0/2B+\gamma^{h}B/B_0$，其中 γ^{u} and γ^{h} 是积分常数。其次，忽略离子-电子碰撞时，$\mathbb{F}^{p}$ and $\mathbb{G}^{p}$ 为零。令 $f_1=g+F$，公式（3）变为 $v_{\parallel}\partial_{\parallel}g=C(g)+C(F)$。注意，$C(F)=C(F,f^0)+C(f^0,F)$ 中的 $\hat{}p_{0,\psi}$ 项因

动量守恒而为零，不会影响 g_a。因此，$\hat{}p_{0,\psi}$ 项仅对 f_1 的流速矩有贡献，所以公式（48）中的 $\mathbb{F}^p$ 和公式（50）中的 $\mathbb{G}^p$ 必须为零。第三，在闭合计算中，黏性方程中的 $\hat{}p_{0,\psi}$ 驱动项出现在 W_θ 中，并会影响闭合量。然而，W_θ 的 $V_{1\|}$ 中的 $\hat{}p_{0,\psi}$ 项恰好抵消 W_θ 的 $V_{1\perp}$ 中的 $\hat{}p_{0,\psi}$ 项，因此 n_1 and T_1 与 $\hat{}p_{0,\psi}$ 驱动项无关。第四，对于电子 - 离子等离子体（a, b）$=$(e, i) and (i, e)，在 g_a 方程的碰撞算子 $C(F_a, f_b^0) + C(f_a^0, F_b)$ 中，$\hat{}p_{a0,\psi}$ 和 $\hat{}p_{b0,\psi}$ 驱动项并不为零，且会影响 g_a，除非 $V_{1a\|} = V_{1b\|}$。

V. 结论与未来工作

我们展示了如何利用一般矩方程求解漂移动理学方程，从而得到输运和闭合关系。利用本文提出的矩-傅里叶方法，可以直接求解一整套平行矩方程；对于流体变量（密度、流速和温度）和/或通量（粒子通量、电流、热流等），这套方程与漂移动理学方程等价。解的矩可用于构造漂移动理学方程的解——分布函数。还可以求解非麦克斯韦矩方程，以流体变量表示平行闭合关系。将这些闭合关系与线性化流体方程结合，可再现通过完整的平行矩方程组得到的流体变量和/或通量。更重要的是，当非线性效应显著时，可利用这些闭合关系，在数值模拟中推进包含非线性项的流体方程组。需要注意的是，漂移动理学方程本质上只能导出线性化流体方程，例如式（30）—（32），因此无法捕捉非线性效应。

尽管本文建立的形式体系仅应用于圆形轴对称磁场中的单组分等离子体，但可推广至具有任意形状嵌套磁通面的托卡马克中的多组分等离子体。只要磁场可作傅里叶展开，本文建立的矩-傅里叶方法便适用。对于多组分等离子体，碰撞加热项和摩擦项将分别修正方程（31）和（32）。碰撞项会引入不同种类粒子之间温度和流速的耦合，因此，如第 IV 节末尾所述，$dp_0/d\psi$ 项将影响所有其他流体矩和闭合关系矩。尽管现有理论（包括本文）基于小质量比近似而忽略了离子理论中的离子-电子碰撞，但

动量守恒和能量守恒要求在离子流体方程中纳入这些项。可通过傅里叶方法求解耦合矩方程来研究这些效应。电子-离子等离子体的输运和闭合关系将在不久后发表。

本文提出的矩-傅里叶方法适用于一般磁场中具有任意克努森数的等离子体，只要增加矩和傅里叶模的数量便能实现收敛。在高碰撞性极限下，$B/B^{\theta}\lambda_{\mathrm{C}} \ll 1$，方程（38）和（39）中的 $\mathrm{K}^{\alpha\beta}$ 可重现相应的布拉金斯基闭合系数 [32, 33]。在逆纵横比很小的极限下，$\epsilon \ll 1$，$\mathrm{K}^{\alpha\beta}$可重现相应的积分闭合 [31]。原则上，一旦达到收敛，矩-傅里叶解在实际应用中便是精确的。所需的矩数和傅里叶模数分别随克努森数和逆纵横比的增大而增加。实际上，矩方法受到方程（28）和（37）中逆矩阵精度的限制。对于低碰撞性 $\mathtt{n_F K_0} \gtrsim 10^4$，实现收敛所需的矩阵维数为 $LKF \gtrsim 10^6$；由于条件数较大，逆矩阵会变得不准确，即使在方程（28）的情形下已消去精确零空间也是如此。对于低碰撞性，可以数值求解漂移动理学方程。然而，在无碰撞极限下，我们发现，为了获得准确的闭合关系和输运关系，应解析求解漂移动理学方程。无碰撞极限下的结果也将在近期发表。还值得注意的是，参考文献 [18] 和 [19]中使用的有限元基，比勒让德多项式基收敛更快。

当有效碰撞性较低时，计算收敛闭合关系所需的计算开销巨大，因此在流体模拟过程中计算闭合关系可能并不切实可行。对于实际应用，我们计划开发显式闭合关系公式，使其可表示为磁场参数的函数： ϵ 对于圆形几何，或对于一般磁场则表示为傅里叶分量的函数。我们将针对实际的 $\epsilon \lesssim 0.4$ （ITER托卡马克边缘处）和$\mathtt{n_F K_0} \lesssim 10^4$ （ITER核心处）开发闭合关系的显式表达式。一旦获得磁场参数对应的闭合关系，就可以直接使用，而无需耗时的矩计算。此外，我们还将针对一般的 ϵ 和碰撞性，计算方程（46）中的 γ^u ，以便

定量分析收敛性随矩数目和傅里叶模态数目的变化。

数据可用性声明

支持本研究结论的数据可向作者索取。

致谢

本研究得到美国能源部资助（资助编号：DE-SC0022048 和 DE- FG02-04ER54746），并得到韩国科学技术信息通信部资助的国家研发计划项目支持，该项目由韩国国家研究基金会（NRF）负责实施（2021M3F7A1084419）。

---

[1] A. A. Galeev 和 R. Z. Sagdeev，苏联物理学—JETP **26**，233（1968）。[2] M. N. Rosenbluth、R. D. Hazeltine 和 F. L. Hinton，《流体物理学》**15**，116（1972）。[3] R. D. Hazeltine、F.L. Hinton 和 M. N. Rosenbluth，《流体物理学》**16**，1645（1973），https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1694191。[4] F. L. Hinton 和 R. D. Hazeltine，《现代物理评论》**48**，239（1976）。[5] S. P. Hirshman 和 D. J. Sigmar，《核聚变》**21**，1079（1981）。[6] C. S. Chang 和 F. L. Hinton，《流体物理学》**25**，1493（1982），https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.863934。[7] M. Taguchi，《等离子体物理与受控聚变》**30**，1897（1988）。[8] R. D. Hazeltine，《等离子体物理》**15**，77（1973）。[9] R. D. Hazeltine 和 J. D. Meiss，等离子体约束 （Dover Pub., Inc.，纽约，2003）。[10] R. Balescu，等离子体中的输运过程 （North-Holland，阿姆斯特丹，1988），第1卷和第2卷。[11] P. Helander 和 D. J. Sigmar，磁化等离子体中的碰撞输运 （剑桥大学出版社，剑桥，2002）。[12] E. A. Belli 和 J. Candy，《等离子体物理与受控聚变》**50**，095010（2008）。

[13] E. A. Belli 和 J. Candy，《等离子体物理与受控聚变》**51**，075018（2009）。[14] E. A. Belli 和 J. Candy，《等离子体物理与受控聚变》**54**，015015（2011）。[15] M. Landreman 和 D. R. Ernst，《等离子体物理与受控聚变》**54**，115006（2012）。[16] M. Landreman 和 D. R. Ernst，《计算物理学杂志》**243**，130（2013）。

[17]E. D. Held、S. E. Kruger、J.-Y. Ji、E. A. Belli 和 B. C. Lyons，《等离子体物理学》**22**，032511（2015），https://doi.org/10.1063/1.4914165。

[18]J. R. Jepson, C. C. Hegna, E. D. Held, J. A. Spencer 和 B. C. Lyons，等离子体物理学 **28**, 082503 (2021), https://doi.org/10.1063/5.0054978.[19]J. A. Spencer, B. Adair, E. D. Held, J.-Y. Ji 和 J. R. Jepson，计算物理学杂志 **450**, 110862 (2022).[20] C. Sovinec, A. Glasser, T. Gianakon, D. Barnes, R. Nebel, S. Kruger, D. Schnack, S. Plimpton, A. Tarditi 和 M. Chu，计算物理学杂志 **195**, 355 (2004).[21] S. C. Jardin, N. Ferraro, X. Luo, J. Chen, J. Breslau, K. E. Jansen 和 M. S. Shephard，物理学杂志：会议系列 **125**, 012044 (2008).[22] J. Breslau, N. Ferraro 和 S. Jardin，等离子体物理学 **16**, 092503 (2009), https://doi.org/10.1063/1.3224035.[23]B. Dudson, M. Umansky, X. Xu, P. Snyder 和 H. Wilson，计算物理通讯 **180**, 1467 (2009).[24] M. Hoelzl, G. Huijsmans, S. Pamela, M. Bécoulet, E. Nardon, F. Artola, B. Nkonga, C. Atana- siu, V. Bandaru, A. Bhole, D. Bonfiglio, A. Cathey, O. Czarny, A. Dvornova, T. Fehér, A. Fil, E. Franck, S. Futatani, M. Gruca, H. Guillard, J. Haverkort, I. Holod, D. Hu, S. Kim, S. Korving, L. Kos, I. Krebs, L. Kripner, G. Latu, F. Liu, P. Merkel, D. Meshcheriakov, V. Mitterauer, S. Mochalskyy, J. Morales, R. Nies, N. Nikulsin, F. Orain, J. Pratt, R. Ra- masamy, P. Ramet, C. Reux, K. Särkimäki, N. Schwarz, P. S. Verma, S. Smith, C. Sommariva, E. Strumberger, D. van Vugt, M. Verbeek, E. Westerhof, F. Wieschollek 和 J. Zielinski，核聚变 **61**, 065001 (2021).[25] J.-Y. Ji 和 E. D. Held，等离子体物理 **21**, 042102 (2014).[26] J.-Y. Ji 和 E. D. Held，等离子体物理 **13**, 102103 (2006).[27] J.-Y. Ji 和 E. D. Held，等离子体物理 **16**, 102108 (2009).[28] R. Jorge, P. Ricci 和 N. F. Loureiro，等离子体物理学杂志 **83**, 905830606 (2017).[29] R. Jorge, B. J. Frei 和 P. Ricci，等离子体物理学杂志 **85**, 905850604 (2019).

[30] J.-Y. Ji, E. D. Held 和 C. R. Sovinec，等离子体物理 **16**, 022312 (2009).[31] J.-Y. Ji, H. Q. Lee 和 E. D. Held，等离子体物理 **24**, 022127 (2017).[32] S. I. Braginskii，载于等离子体物理评论，第 1 卷，由 M. A.Leontovich 编（Consultants Bureau，纽约，1965 年），第 205 页。[33] J.-Y. Ji 和 E. D. Held，等离子体物理 **22**, 062114 (2015).