arXiv:2301.02400v1 [cs.IT] 6 Jan 2023

具有灵活阵列尺寸和较大集合大小的最优二维零相关区互补序列集的直接构造

Gobinda Ghosh[1], Sudhan Majhi[2*]和 Shubhabrata Paul[1]

[1]数学，印度理工学院巴特那分校，Bihta，巴特那，801103，比哈尔邦，印度。[2*]电气通信工程，印度科学研究所班加罗尔分校，C. V. Raman路，班加罗尔，560012，卡纳塔克邦，印度。

*通讯作者。电子邮箱：smajhi@iisc.ac.in；贡献作者：gobinda 1921ma06@iitp.ac.in；shubhabrata@iitp.ac.in；

摘要

本文提出一种基于多变量函数（MVFs）的最优二维零相关区互补阵列集（2D-ZCACS）直接构造方法。与以往研究不同，所提出的构造方法支持灵活的阵列尺寸和较大的集合大小。此外，该设计还可以转换为一维零相关区互补序列集（1D-ZCCS）。文献中许多一维零相关区互补序列集似乎都是这一构造方法的特例。最后，我们将本研究与当前最先进的成果进行比较，并得出结论。

关键词：二维完全互补码（2D-CCC）、多变量函数（MVF）、二维零相关区互补阵列集（2D-ZCACS）。

1 引言

对于异步二维多载波码分多址（2D-MC-CDMA）系统，可适当利用二维完全互补码（2D-CCCs）的理想二维相关特性[1]，从而实现无干扰性能 [2]。与一维完全互补码（1D-CCC）类似[3–5]，，最重要的

2 最优二维零相关幅度互补集的直接构造

二维互补码集的缺点是集合大小受到限制 [6]。受灵活集合大小的二维互补码集数量稀少这一问题的启发，Zeng 等人于 [6, 7]提出了二维 Z-互补阵列码集（2D-ZCACSs）。对于一个 $2D-(K,Z_1\times Z_2)-\mathrm{ZCACS}$，$M^{L_1\times L_2}$、$K$、$Z_1\times Z_2$、$L_1\times L_2$和 M分别表示集合大小、二维零相关区（2D-ZCZ）宽度、阵列尺寸以及组成阵列的数量。在 [6, 7], 中，作者通过向现有的二元二维 Z-互补阵列码集中插入一些零，获得了三元二维 Z-互补阵列码集。2021年，Pai 等人提出了一种二维二元 Z-互补阵列对（2D-ZCAP）的新构造方法[8]。近期，Das 等人在 [9] 提出了一种利用 Z-酉矩阵（ZPU）构造二维零相关区互补阵列集的方法。所有这些二维零相关区互补阵列集的构造都高度依赖初始序列和矩阵，增加了硬件存储需求。Roy 等人首次在文献中于[10] 提出了一种基于多变量函数的二维零相关区互补阵列集直接构造方法。所提出的二维零相关区互补阵列集的阵列尺寸为 $L_1\times L_2$的形式，其中 $L_1=2^m$、$L_2=2p_1^{m_1}p_2^{m_2}\dots p_k^{m_k}$、$m\geq 1$、$m_i\geq 2$，集合大小为 $2p_1^2p_2^2\dots p_k^2$的形式，其中 p_i 是一个素数。因此，阵列尺寸和集合大小仅限于某些偶数。

文献中通过直接构造得到的阵列大小和集合大小受到限制，这促使我们探索多变量函数（MVF），以获得更灵活的阵列大小和集合大小。我们提出的构造可生成参数为 $2D-(R_1R_2M_1M_2,N_1\times N_2)-\mathrm{ZCACS}_{M_1M_2}^{R_1N_1\times R_2N_2}$的二维零相关区互补阵列集，其中 $M_1=\prod_{i=1}^{a}p_i^{k_i}$, $M_2=\prod_{j=1}^{b}q_j^{t_j}$, p_i 为任意素数或 1，q_j 为素数，$a,b,k_i,t_j\geq 1$, R_1和 R_2 为正整数，且满足 $R_1\geq 1$ 和 $R_2\geq 2$, $N_1=\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i}$,$N_2=\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j}$, $m_i,n_j\geq 1$。我们提出的二维零相关区互补阵列集构造的集合大小 $R_1R_2M_1M_2$比文献 [10]中给出的二维零相关区互补阵列集更灵活。与 [10], 不同，所提出的二维零相关区互补阵列集也可约化为一维零相关区互补序列集 [11–18]。因此，许多已有的最优一维 Z-互补码集都成为所提出构造的特例 [16–18]。所提出的构造还导出了一组此前未通过直接方法给出的最优一维零相关区互补序列集。

本文其余部分安排如下。第2节讨论与构造相关的定义和引理。第3节介绍二维零相关区互补阵列集的构造，并与现有最先进成果进行比较。最后，第4节给出结论。

2 符号与定义

本文全文采用以下符号：$\omega_n=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}/n\right)$,
$\mathbb{A}_n=\{0,1,\dots,n-1\}\subset\mathbb{Z}$，其中 n是正整数，$\mathbb{Z}$ 是整数环。

2.1 二维数组

定义 1（[9]）设 $\mathrm{A}=(a_{g,i})$ 和 $\mathrm{B}=(b_{g,i})$ 为大小为 $l_1\times l_2$ 的复值数组，其中 $0\leq g<l_1, 0\leq i<l_2$。二维非周期互相关

函数（二维非周期互相关函数，2D-ACCF）是数组 A 和 B 在位移 (τ_1,τ_2) 处的函数，定义为

$$\boldsymbol{C}(\mathbf{A},\mathbf{B})(\tau_1,\tau_2)=\begin{cases}\sum_{g=0}^{l_1-1-\tau_1}\sum_{i=0}^{l_2-1-\tau_2}a_{g,i}b^*_{g+\tau_1,i+\tau_2}, & \text{if } \begin{matrix}0\le\tau_1<l_1,\\0\le\tau_2<l_2;\end{matrix}\\ \sum_{g=0}^{l_1-1-\tau_1}\sum_{i=0}^{l_2-1+\tau_2}a_{g,i-\tau_2}b^*_{g+\tau_1,i}, & \text{if } \begin{matrix}0\le\tau_1<l_1,\\-l_2<\tau_2<0;\end{matrix}\\ \sum_{g=0}^{l_1-1+\tau_1}\sum_{i=0}^{l_2-1-\tau_2}a_{g-\tau_1,i}b^*_{g,i+\tau_2}, & \text{if } \begin{matrix}-l_1<\tau_1<0,\\0\le\tau_2<l_2;\end{matrix}\\ \sum_{g=0}^{l_1-1+\tau_1}\sum_{i=0}^{l_2-1+\tau_2}a_{g-\tau_1,i-\tau_2}b^*_{g,i}, & \text{if } \begin{matrix}-l_1<\tau_1<0,\\-l_2<\tau_2<0.\end{matrix}\end{cases}$$

这里，$(.)^*$ 表示复共轭。若 $\mathrm{A}=\mathrm{B}$，则 $\boldsymbol{C}(\mathrm{A},\mathrm{B})(\tau_1,\tau_2)$ 称为 A 的二维非周期自相关函数（二维非周期自相关函数），记作 $\boldsymbol{C}(\mathrm{A})(\tau_1,\tau_2)$。

当 $l_1=1$ 时，复值数组 A 和 B 化简为一维复值序列 $\mathrm{A}=(a_j)_{j=0}^{l_2-1}$ 和 $\mathrm{B}=(b_j)_{j=0}^{l_2-1}$，其对应的一维非周期互相关函数（1D- ACCF）定义为

$$\boldsymbol{C}(\mathbf{A},\mathbf{B})(\tau_2)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{l_2-1-\tau_2}a_ib^*_{i+\tau_2}, & 0\le\tau_2<l_2,\\ \sum_{i=0}^{l_2+\tau_2-1}a_{i-\tau_2}b^*_i, & -l_2<\tau_2<0,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{1}$$

定义 **2** [19],[9] 对于一个由 s 阵列集组成的集合 $\boldsymbol{A}=\left\{\mathbf{A}^k\mid k=0,1,\ldots,s-1\right\}$，每个集合 $\mathbf{A}^k=\left\{\mathbf{A}_0^k,\mathbf{A}_1^k,\ldots,\mathbf{A}_{s-1}^k\right\}$ 由 s 个大小为 的阵列组成 $l_1\times l_2$。若集合 $\boldsymbol{A}$ 满足以下条件，则称其为参数为（s,s,l_1,l_2）的二维互补码集

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\left(\mathbf{A}^k,\mathbf{A}^{k'}\right)(\tau_1,\tau_2)&=\sum_{i=0}^{s-1}\boldsymbol{C}\left(\mathbf{A}_i^k,\mathbf{A}_i^{k'}\right)(\tau_1,\tau_2)\\&=\begin{cases}sl_1l_2, & (\tau_1,\tau_2)=(0,0),k=k';\\0, & (\tau_1,\tau_2)\ne(0,0),k=k';\\0, & k\ne k'.\end{cases}\end{aligned}\tag{2}$$

定义 **3** [10],[9] 设 z_1,z_2,l_1,l_2 为正整数，且 $z_1\le l_1,z_2\le l_2$。考虑由 $\hat{s}$ 个阵列集合 $\boldsymbol{A}=\left\{\mathrm{A}^k\mid k=0,1,\ldots,\hat{s}-1\right\}$ 组成的集合，其中每个集合 $\mathrm{A}^k=\left\{\mathrm{A}_0^k,\ldots,\mathrm{A}_{s-1}^k\right\}$ 由 s 个大小为 $l_1\times l_2$的阵列组成。集合 $\boldsymbol{A}$ 称为

4 最优二维零相关区互补阵列集的直接构造

若满足以下条件，则称为 $2D-(\hat{s},z_1\times z_2)-\mathrm{ZCACS}_s^{l_1\times l_2}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\left(\mathbf{A}^k,\mathbf{A}^{k'}\right)(\tau_1,\tau_2)&=\sum_{i=0}^{s-1}\boldsymbol{C}\left(\mathbf{A}_i^k,\mathbf{A}_i^{k'}\right)(\tau_1,\tau_2)\\&=\begin{cases}sl_1l_2, & (\tau_1,\tau_2)=(0,0),k=k';\\0, & (\tau_1,\tau_2)\neq(0,0),|\tau_1|<z_1,|\tau_2|<z_2,k=k';\\0, & |\tau_1|<z_1,|\tau_2|<z_2,k\neq k'.\end{cases}\end{aligned}\tag{3}$$

当 $z_1=l_1,z_2=l_2,\hat{s}=s$ 该二维零相关区互补阵列集变为二维互补码集[19, 20]，其参数为 (s,l_1,l_2)。需要注意的是，对于 $l_1=1$，每个阵列 $\mathbf{A}_i^k$都会变为l_2长度的序列。因此，二维零相关区互补阵列集可简化为传统的一维-$(\hat{s},z_2)$ −零相关区码集合$l_s^{l_2}$[21], [22],[23]，其中，$\hat{s},s,z_2,l_2$ 分别表示集合数量、集合大小、零相关区宽度和序列长度。

Lemma 1 *[9] For a $2D-(\hat{s},z_1\times z_2)-ZCACS_s^{l_1\times l_2}$, the following inequality hold*

$$\hat{s}z_1z_2\leq s\left(l_1+z_1-1\right)\left(l_2+z_2-1\right).\tag{4}$$

We called 2D-ZCACS is optimal if the following equality holds

$$\hat{s}=s\left\lfloor\frac{l_1}{z_1}\right\rfloor\left\lfloor\frac{l_2}{z_2}\right\rfloor,\tag{5}$$

where $\lfloor.\rfloor$ denotes the floor function.

2.2 多变量函数

设 a、b、m_i和 n_j 为 $1\leq i\leq a$ 和 $1\leq j\leq b$的正整数。设 p_i 为任意素数或1， q_j 为素数。多变量函数（MVF）可定义为

$$f:\mathbb{A}_{p_1}^{m_1}\times\mathbb{A}_{p_2}^{m_2}\times\cdots\times\mathbb{A}_{p_a}^{m_a}\times\mathbb{A}_{q_1}^{n_1}\times\mathbb{A}_{q_2}^{n_2}\times\cdots\times\mathbb{A}_{q_b}^{n_b}\to\mathbb{Z}.$$

设 c、$d\geq 0$ 为整数，使得 $0\leq c<r$ 和 $0\leq d<s$，其中 $r=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_a^{m_a}$和$s=q_1^{n_1}q_2^{n_2}\ldots q_b^{n_b}$。则 c 和 d 可写为

$$\begin{aligned}c&=c_1+c_2p_1^{m_1}+\cdots+c_ap_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_{a-1}^{m_{a-1}},\\d&=d_1+d_2q_1^{n_1}+\cdots+d_bq_1^{n_1}q_2^{n_2}\ldots q_{b-1}^{n_{b-1}},\end{aligned}\tag{6}$$

其中，$0\leq c_i<p_i^{m_i}$和 $0\leq d_j<q_j^{n_j}$。令$\mathbf{C}_i=(c_i,1,c_i,2,\ldots,c_{i,m_i})\in\mathbb{A}_{p_i}^{m_i}$为 c_i以基数 p_i表示的向量表示，即$c_i=\sum_{k=1}^{m_i}c_{i,k}p_i^{k-1}$；令$\mathbf{D}_j=(d_j,1,d_j,2,\ldots,d_{j,n_j})\in\mathbb{A}_{q_j}^{n_j}$为 d_j以基数q_j表示的向量表示，即$d_j=\sum_{l=1}^{n_j}d_{j,l}q_j^{l-1}$，其中$0\leq c_{i,k}<p_i$，且$0\leq d_{j,l}<q_j$。我们定义与 c 和 d 相关联的向量如下

$$\begin{aligned}\phi(c)&=(\mathbf{C}_1,\mathbf{C}_2,\ldots,\mathbf{C}_a)\in\mathbb{A}_{p_1}^{m_1}\times\mathbb{A}_{p_2}^{m_2}\times\cdots\times\mathbb{A}_{p_a}^{m_a},\\\phi(d)&=(\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2,\ldots,\mathbf{D}_b)\in\mathbb{A}_{q_1}^{n_1}\times\mathbb{A}_{q_2}^{n_2}\times\cdots\times\mathbb{A}_{q_b}^{n_b},\end{aligned}$$

分别。我们还定义与 f 相关联的阵列如下

$$\psi_\lambda(f)=\begin{pmatrix} \omega_\lambda^{f_{0,0}} & \omega_\lambda^{f_{0,1}} & \cdots & \omega_\lambda^{f_{0,r-1}} \\ \omega_\lambda^{f_{1,0}} & \omega_\lambda^{f_{1,1}} & \cdots & \omega_\lambda^{f_{1,r-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_\lambda^{f_{s-1,0}} & \omega_\lambda^{f_{s-1,1}} & \cdots & \omega_\lambda^{f_{s-1,r-1}} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中 $f_{c,d}=f\left(\phi(c)\ \phi(d)\right)$ 且 λ 是正整数。

引理

2 [24] *Let t and t' be two non-negative integers where $t\neq t'$ and p is a () ,, prime number. Then*

$$\sum_{j=0}^{p-1}\omega_p^{(t-t')j}=0. \tag{8}$$

考虑集合 $\mathcal{C}$，其为

$$\mathcal{C}=\left(\mathbb{A}_{p_1}^{m_1}\times\mathbb{A}_{p_2}^{m_2}\times\cdots\times\mathbb{A}_{p_a}^{m_a}\right)\times\left(\mathbb{A}_{q_1}^{n_1}\times\mathbb{A}_{q_2}^{n_2}\times\cdots\times\mathbb{A}_{q_b}^{n_b}\right). \tag{9}$$

设 $0\leq\gamma<p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_a^{m_a}$和 $0\leq\mu<q_1^{n_1}q_2^{n_2}\ldots q_b^{n_b}$为正整数，使得

$$\begin{aligned}\gamma&=\gamma_1+\sum_{i=2}^{a}\gamma_i\left(\prod_{i_1=1}^{i-1}p_{i_1}^{m_{i_1}}\right),\\ \mu&=\mu_1+\sum_{j=2}^{b}\mu_j\left(\prod_{j_1=1}^{j-1}q_{j_1}^{n_{j_1}}\right),\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $0\leq\gamma_i<p_i^{m_i}$和 $0\leq\mu_j<q_j^{n_j}$。设 $\boldsymbol{\gamma}_i=(\gamma_{i,1},\gamma_{i,2},\ldots,\gamma_{i,m_i})\in\mathbb{A}_{p_i}^{m_i}$为 γ_i 以 p_i为基数的向量表示，即 $\gamma_i=\sum_{k=1}^{m_i}\gamma_{i,k}p_i^{k-1}$，其中 $0\leq\gamma_{i,k}<p_i$。类似地，$\boldsymbol{\mu}_j=(\mu_{j,1},\mu_{j,2},\ldots,\mu_{j,n_j})\in\mathbb{A}_{q_j}^{n_j}$为 μ_j 以 q_j 为基数的向量表示，即 $\mu_j=\sum_{l=1}^{n_j}\mu_{j,l}q_j^{l-1}$，其中 $0\leq\mu_{j,l}<q_j$。设

$$\phi(\gamma)=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\ldots,\boldsymbol{\gamma}_a)\in\mathbb{A}_{p_1}^{m_1}\times\mathbb{A}_{p_2}^{m_2}\times\cdots\times\mathbb{A}_{p_a}^{m_a}, \tag{11}$$

为与 γ 相关联的向量，并且

$$\phi(\mu)=(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\ldots,\boldsymbol{\mu}_b)\in\mathbb{A}_{q_1}^{n_1}\times\mathbb{A}_{q_2}^{n_2}\times\cdots\times\mathbb{A}_{q_b}^{n_b}, \tag{12}$$

是与 μ 相关联的向量。令 π_i 和 σ_j 分别为集合 $\{1,2,\ldots,m_i\}$ 和 $\{1,2,\ldots,n_j\}$ 的任意排列。我们还定义多变量函数

6 最优二维零相关区互补序列集的直接构造

f: $\mathcal{C} \to \mathbb{Z}$, 其中

$$\begin{aligned} & f(\phi(\gamma), \phi(\mu)) \\ & = f\left(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_a, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \ldots, \boldsymbol{\mu}_b\right) \\ & = \sum_{i=1}^{a} \frac{\lambda}{p_i} \sum_{e=1}^{m_i - 1} \gamma_{i,\pi_i(e)} \gamma_{i,\pi_i(e+1)} + \sum_{i=1}^{a} \sum_{e=1}^{m_i} d_{i,e} \gamma_{i,e} + \sum_{j=1}^{b} \frac{\lambda}{q_j} \sum_{o=1}^{n_j - 1} \mu_{j,\sigma_j(o)} \mu_{j,\sigma_j(o+1)} \\ & + \sum_{j=1}^{b} \sum_{o=1}^{n_j} c_{j,o} \mu_{j,o}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $d_{i,\ e}$、 $c_{j,\ o} \in \{0, 1, \ldots, \lambda - 1\}$ 和 $\lambda = l.c.m.\ (p_1,\ \ldots,\ p_a,\ q_1,\ \ldots,\ q_b)$ 。定义集合 Θ 和 T 如下:

$$\begin{aligned} \Theta &= \{\theta : \theta = (r_1, r_2, \ldots, r_a, s_1, s_2, \ldots, s_b)\}, \\ T &= \{t : t = (x_1, x_2, \ldots, x_a, y_1, y_2, \ldots, y_b)\}, \end{aligned}$$

其中 $0 \le r_i$、 $x_i < p_i^{k_i}$和 $0 \le s_j$、 $y_j < q_j^{r_j}$和 k_i、 r_j为正整数。现在，我们定义函数 a_t^{θ}:$\mathcal{C} \to \mathbb{Z}$, 如下:

$$\begin{aligned} & a_t^{\theta}\left(\phi(\gamma), \phi(\mu)\right) \\ & = a_t^{\theta}\left(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_a, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \ldots, \boldsymbol{\mu}_b\right) \\ & = f\left(\phi(\gamma), \phi(\mu)\right) + \sum_{i=1}^{a} \frac{\lambda}{p_i} \gamma_{i,\pi_i(1)} r_i + \sum_{j=1}^{b} \frac{\lambda}{q_j} \mu_{j,\sigma_j(1)} s_j + \sum_{i=1}^{a} \frac{\lambda}{p_i} \gamma_{i,\pi_i(m_i)} x_i \\ & + \sum_{j=1}^{b} \frac{\lambda}{q_j} \mu_{j,\sigma_j(n_j)} y_j + d_{\theta}, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $0 \le d_{\theta} < \lambda$、 $\gamma_{i,\ \pi_i}$**(1)** $\gamma_{i,\ \pi_i}\ (m_i)$ 分别表示 π_i**(1)**–个和 $\pi_i\ (m_i)$ –个元素。类似地, $\mu_{j,\ \sigma_j}$**(1)** $\mu_{j,\ \sigma_j}\ (n_j)$ 分别表示 σ_j**(1)**–个和 $\sigma_j\ (n_j)$ $-th$个元素。为简洁起见，我们用 $(a_t^{\theta})_{\gamma,\ \mu}$表示 $a_t^{\theta}\left(\phi\ (\gamma)\ \ \phi\ (\mu)\ \right)$, 并用 $f_{\gamma,\ \mu}$表示 $f\left(\phi\ (\gamma)\ \ \phi\ (\mu)\ \right)$。

引理 **3** ([20]) *We define the ordered set of arrays* $\mathbf{A}^t = \left\{\psi_{\lambda}\left(a_t^{\theta}\right) : \ \theta \in \Theta\right\}$. *Then the set* $\{\mathbf{A}^t : t \in T\}$ *forms a 2D-CCC with parameter* (α, α, m, n) *where,* $\alpha = \prod_{i=1}^{a} p_i^{k_i} \prod_{j=1}^{b} q_j^{r_j}$ $m = \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}$ $n = \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}$ *and* k_i m_i n_j r_j *are non-negative integers.*

3 二维零相关区互补阵列集的拟议构造

设 a'、b' 是满足 $1 \le i' \le a'$ 的正整数，$1 \le j' \le b'$、$p'_{i'}$ 为任意素数或 1，且 $q'_{j'}$ 为素数。设 γ'、μ' 是满足 $0 \le \gamma' < \left(\prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}\right)\left(\prod_{i'=1}^{a'} p'_{i'}\right)$ 和 $0 \le \mu' < \left(\prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}\right)\left(\prod_{j'=1}^{b'} q'_{j'}\right)$ 的正整数。那么，γ'、μ' 可写为

$$\begin{aligned}\gamma' &= \gamma_1 + \sum_{i=2}^{a} \gamma_i \left(\prod_{i_1=1}^{i-1} p_{i_1}^{m_{i_1}}\right) + \left(\gamma'_1 + \sum_{i'=2}^{a'} \gamma'_{i'} \left(\prod_{i_1=1}^{i'-1} p'_{i_1}\right)\right) m, \\ \mu' &= \mu_1 + \sum_{j=2}^{b} \mu_j \left(\prod_{j_1=1}^{j-1} q_{j_1}^{n_{j_1}}\right) + \left(\mu'_1 + \sum_{j'=2}^{b'} \mu'_{j'} \left(\prod_{j_1=1}^{j'-1} q'_{j_1}\right)\right) n,\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $m = \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}$、$n = \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}$、$0 \le \gamma_i < p_i^{m_i}$、$0 \le \mu_j < q_j^{n_j}$、$0 \le \gamma'_{i'} < p'_{i'}$ 和 $0 \le \mu'_{j'} < q'_{j'}$。我们将与 γ' 和 μ' 相关联的向量记为

$$\begin{aligned}\phi(\gamma') &= \left(\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_a, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_a\right) \in \mathbb{A}_{p_1}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{p_a}^{m_a} \times \mathbb{A}_{p'_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{p'_{a'}}, \\ \phi(\mu') &= \left(\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_b, \mu'_1, \ldots, \mu'_b\right) \in \mathbb{A}_{q_1}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{q_b}^{n_b} \times \mathbb{A}_{q'_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{q'_{b'}},\end{aligned} \tag{16}$$

分别地，其中 $\boldsymbol{\gamma}_i \in \mathbb{A}_{p_i}^{m_i}$、$\boldsymbol{\mu}_j \in \mathbb{A}_{q_j}^{n_j}$ 分别是与 γ_i 和 μ_j 相关联的向量，即 $\boldsymbol{\gamma}_i = (\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \ldots, \gamma_{i,m_i}) \in \mathbb{A}_{p_i}^{m_i}$，$\boldsymbol{\mu}_j = (\mu_{j,1}, \mu_{j,2}, \ldots, \mu_{j,n_j}) \in \mathbb{A}_{q_j}^{n_j}$，$\gamma_i = \sum_{k=1}^{m_i} \gamma_{i,k} p_i^{k-1}$，$\mu_j = \sum_{l=1}^{n_j} \mu_{i,l} q_j^{l-1}$，$0 \le \gamma_{i,k} < p_i$ 和 $0 \le \mu_{j,l} < q_j$。我们考虑集合 $\mathcal{D}$，其

$$\mathcal{D} = \mathbb{A}_{p_1}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{p_a}^{m_a} \times \mathbb{A}_{p'_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{p'_{a'}} \times \mathbb{A}_{q_1}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{q_b}^{n_b} \times \mathbb{A}_{q'_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{q'_{b'}}. \tag{17}$$

令 f 为定义如（13）的函数。我们将多变量函数 $M^{\mathbf{c},\mathbf{d}} : \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$\begin{aligned}&M^{\mathbf{c},\mathbf{d}}\left(\phi(\gamma'), \phi(\mu')\right) \\ &= M^{\mathbf{c},\mathbf{d}}\left(\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_a, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{a'}, \boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_b, \mu'_1, \ldots, \mu'_{b'}\right) \\ &= \frac{\delta}{\lambda} f\left(\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_a, \boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_b\right) + \sum_{i'=1}^{a'} c_{i'} \frac{\delta}{p'_{i'}} \gamma'_{i'} + \sum_{j'=1}^{b'} d_{j'} \frac{\delta}{q'_{j'}} \mu'_{j'},\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $0 \le c_{i'} < p'_{i'}$，$0 \le d_{j'} < q'_{j'}$，$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_{a'})$ 和 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_{b'})$。为简单起见，从现在起，我们用 $M_{\mathbf{c},\mathbf{d}}$ 表示 $M^{\mathbf{c},\mathbf{d}}(\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_a, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{a'}, \boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_b, \mu'_1, \ldots, \mu'_{b'})$。考虑集合 Θ 和 T，其中

$$\begin{aligned}\Theta &= \{\theta : \theta = (r_1, r_2, \ldots, r_a, s_1, s_2, \ldots, s_b)\}, \\ T &= \{t : t = (x_1, x_2, \ldots, x_a, y_1, y_2, \ldots, y_b)\},\end{aligned}$$

8 最优二维零相关区互补序列集的直接构造

其中 $0 \le r_i, x_i < p_i^{k_i}$ 和 $0 \le s_j, y_j < q_j^{r_j}$ 以及 k_i, r_j 均为正整数。定义多变量函数 MVF，$b_t^{\theta}{}_{,\ \mathbf{c}\ \mathbf{d}\ ,}: \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$，如下：

$$\begin{aligned} b_t^{\theta,\mathbf{c},\mathbf{d}} =& M^{\mathbf{c},\mathbf{d}} + \sum_{i=1}^{a} \frac{\delta}{p_i} \gamma_{i,\pi_i(1)} r_i + \sum_{j=1}^{b} \frac{\delta}{q_j} \mu_{j,\sigma_j(1)} s_j + \sum_{i=1}^{a} \frac{\delta}{p_i} \gamma_{i,\pi_i(m_i)} x_i \\ &+ \sum_{j=1}^{b} \frac{\delta}{q_j} \mu_{j,\sigma_j(n_j)} y_j + \frac{\delta}{\lambda} d_\theta, \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $0 \le d_\theta < \lambda$。由 (14)、(18) 和 (19) 可得

$$b_t^{\theta,\mathbf{c},\mathbf{d}} = \frac{\delta}{\lambda} a_t^{\theta} + \sum_{i'=1}^{a'} c_{i'} \frac{\delta}{p'_{i'}} \gamma'_{i'} + \sum_{j'=1}^{b'} d_{j'} \frac{\delta}{q'_{j'}} \mu'_{j'}. \tag{20}$$

我们将有序数组集定义为

$$\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}} = \{\psi_\delta(b_t^{\theta,\mathbf{c},\mathbf{d}}) : \theta \in \Theta\}. \tag{21}$$

其中 $\delta = l.c.m(\lambda, p'_1, p'_2, \ldots, p'_{a'}, q'_1, q'_2, \ldots, q'_{b'})$。

定理 **1** *Let* $m = \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}, n = \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_{a'})$, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_{b'})$。*Then the set* $S = \{\Omega_t^{\mathbf{c}\ \mathbf{d}}{}_{,} : t \in T, 0 \le c_{i'} < p'_{i'}, 0 \le d_{j'} < q'_{j'}\}$ *forms a* $2D - (\alpha_1, z_1 \times z_2) - ZCACS_{\alpha}^{l_1 \times l_2}$, *where,* $\alpha_1 = \left(\prod_{i'=1}^{a'} p'_{i'}\right)\left(\prod_{j'=1}^{b'} q'_{j'}\right)\alpha$, $l_1 = m\left(\prod_{i'=1}^{a'} p'_{i'}\right)$, $l_2 = n\left(\prod_{j'=1}^{b'} q'_{j'}\right)$, $z_1 = m, z_2 = n$, $\alpha = (\prod_{i=1}^{a} p_i^{k_i})(\prod_{j=1}^{b} q_j^{r_j})$ $k_i, r_j, m_i, n_j \ge 1$.

Proof 设$\hat{\gamma}$、$\hat{\mu}$ 为正整数，满足 $0 \le \hat{\gamma} < l_1$ 且 $0 \le \hat{\mu} < l_2$。则$\hat{\gamma}$、$\hat{\mu}$可表示为

$$\hat{\gamma} = \gamma_1 + \sum_{i=2}^{a} \gamma_i \left(\prod_{i_1=1}^{i-1} p_{i_1}^{m_{i_1}}\right) + \left(\gamma'_1 + \sum_{i'=2}^{a'} \gamma'_{i'} \left(\prod_{i_1=1}^{i'-1} p'_{i_1}\right)\right) m,$$

$$\hat{\mu} = \mu_1 + \sum_{j=2}^{b} \mu_j \left(\prod_{j_1=1}^{j-1} q_{j_1}^{n_{j_1}}\right) + \left(\mu'_1 + \sum_{j'=2}^{b'} \mu'_{j'} \left(\prod_{j_1=1}^{j'-1} q'_{j_1}\right)\right) n,$$

其中 $0 \le \gamma_i < p_i^{m_i}$、$0 \le \mu_j < q_j^{n_j}$、$0 \le \gamma'_{i'} < p'_{i'}$ 和 $0 \le \mu'_{j'} < q'_{j'}$。证明将分为以下几种情况。情况 1.（$\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$）

$\Omega_t^{\mathbf{c}\ \mathbf{d}}$、和 $\Omega_{t'}^{\mathbf{c}'\ \ \mathbf{d}'}$，$\mathbf{d}$在 $\tau_1=0$ 和 $\tau_2=0$ 处的非周期互补相关函数可表示为

$$\begin{aligned}
&C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}},\Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(0,0)\\
&=\sum_{\theta\in\Theta}C(\psi_\delta((b_t^{\theta,\mathbf{c},\mathbf{d}})),\psi_\delta((b_{t'}^{\theta,\mathbf{c}',\mathbf{d}'})))(0,0)\\
&=\sum_{\theta\in\Theta}\sum_{\hat\gamma=0}^{l_1-1}\sum_{\hat\mu=0}^{l_2-1}\omega_\delta^{(b_t^{\theta,\mathbf{c},\mathbf{d}})_{\hat\gamma,\hat\mu}-(b_{t'}^{\theta,\mathbf{c}',\mathbf{d}'})_{\hat\gamma,\hat\mu}}\\
&=\sum_{\theta\in\Theta}\sum_{\gamma=0}^{m-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{\gamma_1'=0}^{p_1'-1}\cdots\sum_{\gamma_{a'}'=0}^{p_{a'}'-1}\sum_{\mu_1=0}^{q_1'-1}\cdots\sum_{\mu_{b'}'=0}^{q_{b'}'-1}\omega_\delta^{D},
\end{aligned}\tag{22}$$

其中 $D=\frac{\delta}{\lambda}\left((a_t^\theta)_{\gamma,\ \mu}-(a_{t'}^\theta)_{\gamma,\ \mu}\right)+\sum_{i'=1}^{a'}\frac{\delta}{p_{i'}'}(c_{i'}-c_{i'}')\gamma_{i'}+\sum_{j'=1}^{b'}\frac{\delta}{q_{j'}'}(d_{j'}-d_{j'}')\mu_{j'}$。

将 (22) 分拆后，我们得到

$$\begin{aligned}
&C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}},\Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(0,0)\\
&=\left(\sum_{\theta\in\Theta}\sum_{\gamma=0}^{m-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}\omega_\delta^{\frac{\delta}{\lambda}\left((a_t^\theta)_{\gamma,\mu}-(a_{t'}^\theta)_{\gamma,\mu}\right)}\right)\mathcal{EF}\\
&=\left(\sum_{\theta\in\Theta}\sum_{\gamma=0}^{m-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}\omega_\lambda^{\left((a_t^\theta)_{\gamma,\mu}-(a_{t'}^\theta)_{\gamma,\mu}\right)}\right)\mathcal{EF}\\
&=C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(0,0)\mathcal{EF},
\end{aligned}\tag{23}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}&=\prod_{i'=1}^{a'}\left(\sum_{\gamma_{i'}'=0}^{p_{i'}'-1}\omega_{p_{i'}'}^{(c_{i'}-c_{i'}')\gamma_{i'}'}\right),\\
\mathcal{F}&=\prod_{j'=1}^{b'}\left(\sum_{\mu_{j'}'=0}^{q_{j'}'-1}\omega_{q_{j'}'}^{(d_{j'}-d_{j'}')\mu_{j'}'}\right).
\end{aligned}\tag{24}$$

Subcase (i): $(t\neq t')$
根据 *lemma* 2，我们知道，集合 $\{\mathbf{A}^t:t\in T\}$ 构成一个二维互补码集。因此，根据 *lemma* 2，我们有

$$C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(0,0)=0.\tag{25}$$

因此，由（23）和（25）可得

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}},\Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(0,0)=0.\tag{26}$$

Subcase (ii): $(t=t')$
由 *lemma* 2，可知

$$C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(0,0)=\left(\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i+k_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j+r_j}\right).\tag{27}$$

10 最优二维零相关区互补集的直接构造

令 $M = \left(\prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i+k_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j+r_j}\right)$ 因此由 *Lemma* 2, （23）、（24）、（27），可得如下

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}}, \Omega_t^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(0,0) = \begin{cases} M\left(\prod_{i'=1}^{a'} p'_{i'}\right)\left(\prod_{j'=1}^{b'} q'_{j'}\right) & \mathbf{c}=\mathbf{c}', \mathbf{d}=\mathbf{d}' \\ 0, & \mathbf{c}\neq\mathbf{c}', \mathbf{d}=\mathbf{d}' \\ 0, & \mathbf{c}=\mathbf{c}', \mathbf{d}\neq\mathbf{d}' \\ 0, & \mathbf{c}\neq\mathbf{c}', \mathbf{d}\neq\mathbf{d}'. \end{cases} \tag{28}$$

情形 2. ($0 < \tau_1 < \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}, 0 < \tau_2 < \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}$)

设 σ、ρ 为正整数，使得 $0 \le \sigma < m'$ 和 $0 \le \rho < n'$，其中 $m' = \prod_{i'=1}^{a'} p'_{i'}$、$n' = \prod_{j'=1}^{b'} q'_{j'}$。那么，$\sigma$ 和 ρ 可分别写为

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 p'_1 + \ldots + \sigma_{a'}\left(\prod_{i'=1}^{a'-1} p'_{i'}\right), \\ \rho &= \rho_1 + \rho_2 q'_1 + \ldots + \rho_{b'}\left(\prod_{j'=1}^{b'-1} q'_{j'}\right), \end{aligned} \tag{29}$$

分别，其中 $0 \le \sigma_{i'} < p'_{i'}$ 和 $0 \le \rho_{j'} < q'_{j'}$。我们将与 σ 和 ρ 相关联的向量定义为

$$\begin{aligned} \phi(\sigma) &= (\sigma_1, \ldots, \sigma_{a'}) \in \mathbb{A}_{p'_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{p'_{a'}}, \\ \phi(\rho) &= (\rho_1, \ldots, \rho_{b'}) \in \mathbb{A}_{q'_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{q'_{b'}}, \end{aligned} \tag{30}$$

分别。对于 $0 < \tau_1 < \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}$ 和 $0 < \tau_2 < \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}$，$\Omega_t^{\mathbf{c}\ \mathbf{d}}$，与 $\Omega_{t'}^{\mathbf{c}'\ \ '}$，$\mathbf{d}$ 之间的非周期互补相关函数可推导为

$$\begin{aligned} C(\Omega_t^{c,d}, \Omega_{t'}^{c',d'})(\tau_1,\tau_2) = & C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(\tau_1,\tau_2)DE + C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(\tau_1 - \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}, \tau_2)D'E + \\ & C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(\tau_1, \tau_2 - \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j})DE' + C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(\tau_1 - \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}, \tau_2 - \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j})D'E', \end{aligned} \tag{31}$$

其中

$$D = \sum_{\sigma=0}^{m'-1}\left(\prod_{i'=1}^{a'} \omega_{p'_{i'}}^{(c_{i'}-c'_{i'})(\sigma_{i'})}\right), \tag{32}$$

$$E = \sum_{\rho=0}^{n'-1}\left(\prod_{j'=1}^{b'} \omega_{q'_{j'}}^{(d_{j'}-d'_{j'})(\rho_{j'})}\right), \tag{33}$$

$$D' = \sum_{\sigma=0}^{m'-2}\left(\prod_{i'=1}^{a'} \omega_{p'_{i'}}^{\left(c_{i'}(\sigma_{i'})-c'_{i'}(\sigma+1)_{i'}\right)}\right), \tag{34}$$

$$E' = \sum_{\rho=0}^{n'-2}\left(\prod_{j'=1}^{b'} \omega_{q'_{j'}}^{\left(d_{j'}(\rho_{j'})-d'_{j'}(\rho+1)_{j'}\right)}\right), \tag{35}$$

以及（$\sigma+1$）$_{i'}$、（$\rho+1$）$_{j'}$分别表示 i'-第和 j'-第个分量 ϕ（$\sigma+1$）和ϕ（$\rho+1$）。根据*Lemma* 2，对于 $0<\tau_1<\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i}$和 $0<\tau_2<\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j}$，有

$$C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(\tau_1,\tau_2)=0, \tag{36}$$

$$C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(\tau_1-\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i},\tau_2)=0, \tag{37}$$

$$C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(\tau_1,\tau_2-\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j})=0, \tag{38}$$

$$C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(\tau_1-\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i},\tau_2-\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j})=0. \tag{39}$$

根据（31）、（36）、（37）、（38）、（39），我们有

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}},\Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(\tau_1,\tau_2)=0. \tag{40}$$

情况 3. ($0<\tau_1<\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i},-\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j}<\tau_2<0$) $\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}}$ $0<\tau_1<\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i}$ $-\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j}<\tau_2<$,与 $\Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}}$之间的非周期 0
互补相关函数可推导为

$$\begin{aligned}
&C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}},\Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(\tau_1,\tau_2)\\
&=C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(\tau_1,\tau_2)DE+C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(\tau_1-\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i},\tau_2)D'E\\
&+C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(\tau_1,\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j}+\tau_2)DE''+C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(\tau_1-\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i},\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j}+\tau_2)D'E'',
\end{aligned} \tag{41}$$

其中

$$E''=\sum_{\rho=0}^{n'-2}\left(\prod_{j'=1}^{b'}\omega_{q'_{j'}}^{\left(d_{j'}(\rho+1)_{j'}-d'_{j'}(\rho_{j'})\right)}\right). \tag{42}$$

根据 *Lemma* 2，对于$0<\tau_1<\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i}$和 $-\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j}<\tau_2<0$，我们有

$$C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(\tau_1,\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j}+\tau_2)=0, \tag{43}$$

$$C(\mathbf{A}^t,\mathbf{A}^{t'})(\tau_1-\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i},\prod_{j=1}^{b}q_j^{n_j}+\tau_2)=0. \tag{44}$$

由（41）、（43）和（44）可得

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}},\Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(\tau_1,\tau_2)=0. \tag{45}$$

情况 4. ($0<\tau_1<\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i},\tau_2=0$)

12 最优二维零相关区互补集的直接构造

$\Omega_t^{\mathbf{c}\ \mathbf{d}}$、与 $\Omega_{t'}^{\mathbf{c}'\ \ '}$、d之间的非周期互补相关函数，对于 $0 < \tau_1 < \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}$ 和 $\tau_2 = 0$，可推导为

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}}, \Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(\tau_1, 0) = C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(\tau_1, 0)DE + C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(\tau_1 - \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}, 0)D'E. \tag{46}$$

由 *Lemma* 2，对于 $0 < \tau_1 < \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}$，我们有

$$\begin{aligned} &C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(\tau_1, 0) = 0. \\ &C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(\tau_1 - \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}, 0) = 0, \end{aligned} \tag{47}$$

由（46）和（47）可得

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}}, \Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(\tau_1, 0) = 0. \tag{48}$$

情况 5。
$(\tau_1 = 0, 0 < \tau_2 < \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j})$

对于 $\tau_1 = 0$ 和 $0 < \tau_2 < \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}$，$\Omega_t^{\mathbf{c}\ \mathbf{d}}$，与 $\Omega_{t'}^{\mathbf{c}'\ \ '}$，d之间的非周期互补相关函数可推导为

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}}, \Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(0, \tau_2) = C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(0, \tau_2)DE + C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(0, \tau_2 - \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j})DE'. \tag{49}$$

根据 *Lemma* 2，对于 $0 < \tau_2 < \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}$，有

$$\begin{aligned} &C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(0, \tau_2) = 0, \\ &C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(0, \tau_2 - \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}) = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

根据（49）和（50），有

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}}, \Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(0, \tau_2) = 0. \tag{51}$$

情形 6.（$\tau_1 = 0$，$-\prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j} < \tau_2 < 0$）类似

地，对于 $\tau_1 = 0$ 和 $-\prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j} < \tau_2 < 0$，$\Omega_t^{\mathbf{c}\ \mathbf{d}}$，与 $\Omega_{t'}^{\mathbf{c}'\ \ '}$，d之间的非周期互补相关函数 is

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}}, \Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(0, \tau_2) = C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(0, \tau_2)DE + C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(0, \tau_2 + \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j})DE''. \tag{52}$$

根据 *Lemma* 2，对于 $-\prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j} < \tau_2 < 0$，有

$$C(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t'})(0, \tau_2 + \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}) = 0. \tag{53}$$

因此，由式（50）、（52）和（53）可得

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}}, \Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(0, \tau_2) = 0. \tag{54}$$

综合所有情况可得

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}},\Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(\tau_1,\tau_2)=\begin{cases} M\left(\prod_{i'=1}^{a'}p_{i'}'\right)\left(\prod_{j'=1}^{b'}q_{j'}'\right), & (\mathbf{c},\mathbf{d},t)=(\mathbf{c}',\mathbf{d}',t')\\ & (\tau_1,\tau_2)=(0,0),\\ 0, & (\mathbf{c},\mathbf{d},t)\neq(\mathbf{c}',\mathbf{d}',t')\\ & (\tau_1,\tau_2)=(0,0),\\ 0, & 0\leq\tau_1<\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i},\\ & (\tau_1,\tau_2)\neq(0,0). \end{cases} \tag{55}$$

类似地，可以证明

$$C(\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}},\Omega_{t'}^{\mathbf{c}',\mathbf{d}'})(\tau_1,\tau_2)=0,\ -\prod_{i=1}^{a}p_i^{m_i}<\tau_1<0. \tag{56}$$

因此，由（55）、（56）可得结论。 □

Example 1 设 $a=1, b=1, a'=1, b'=1, p_1=2, m_1=2, k_1=1, q_1=3,$ $n_1=2\ \ r_1=1\ \ p_1'=3\ \ q_1'=2\qquad \delta=6\ \ \lambda=6\ \ \boldsymbol{\gamma}_1=\ \gamma_{11}\ \gamma_{12}\ \in\mathbb{A}_2^2=\{0,1\}^2,,,.$ 令,,(,)为与 γ_1 相关联的向量，其中 $0\leq\gamma_1\leq 3$，即 $\gamma_1=\gamma_{11}+2\gamma_{12}$ 和 $\boldsymbol{\mu}_1=($ $\mu_{11},\mu_{12})\in\mathbb{A}_3^2=\{0,1,2\}^2$ 为与 μ_1 相关联的向量，其中 $0\leq\mu_1\leq 8$，即 $\mu_1=\mu_{11}+3\mu_{12}$ 和 $0\leq\gamma_1'\leq 2, 0\leq\mu_1'\leq 1$。我们定义多变量函数 f: $\mathbb{A}_2^2\times\mathbb{A}_3^2\to\mathbb{Z}$如下:

$$f\left(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\mu}_1\right)=3\gamma_{1,2}\gamma_{1,1}+\gamma_{1,1}+2\gamma_{1,2}+2\mu_{1,2}\mu_{1,1}+2\mu_{1,1}+\mu_{1,2}.$$

考虑多变量函数 $M^{\mathbf{c},\mathbf{d}}$: $\mathbb{A}_2^2\times\mathbb{A}_3\times\mathbb{A}_3^2\times\mathbb{A}_2\to\mathbb{Z}$ as

$$\begin{aligned} &M^{\mathbf{c},\mathbf{d}}\left(\boldsymbol{\gamma}_1,\gamma_1',\boldsymbol{\mu}_1,\mu_1'\right)\\ &=f(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\mu}_1)+2c_1\gamma_1'+3d_1\mu_1'\\ &=3\gamma_{1,2}\gamma_{1,1}+\gamma_{1,1}+2\gamma_{1,2}+2\mu_{1,2}\mu_{1,1}+2\mu_{1,1}+\mu_{1,2}+2c_1\gamma_1'+3d_1\mu_1', \end{aligned} \tag{57}$$

其中 $0\leq c_1<p_1'=2$、$0\leq d_1<q_1'=3$、$\mathsf{c}=c_1\in\{0,1\}$ 和 $\mathsf{d}=d_1\in\{0,1,2\}$。我们有

$$\begin{aligned} \Theta&=\{\theta:\theta=(r_1,s_1):0\leq r_1\leq 1,0\leq s_1\leq 2\},\\ T&=\{t:t=(x_1,y_1):0\leq x_1\leq 1,0\leq y_1\leq 2\}. \end{aligned} \tag{58}$$

令 $d_\theta=0$，现在由（19）可得

$$b_t^{\theta,\mathbf{c},\mathbf{d}}=M^{\mathbf{c},\mathbf{d}}+3\gamma_{1,2}r_1+2\mu_{1,2}s_1+3\gamma_{1,1}x_1+2\mu_{1,2}y_1, \tag{59}$$

and

$$\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}}=\left\{\psi_6(b_t^{\theta,\mathbf{c},\mathbf{d}}):\theta=(r_1,s_1)\in\{0,1\}\times\{0,1,2\}\right\}. \tag{60}$$

因此，集合

$$S=\{\Omega_t^{\mathbf{c},\mathbf{d}}:t\in T,0\leq c_1\leq 1,0\leq d_1\leq 2\}, \tag{61}$$

构成一个最优的 $2D-(36,4\times 9)-\mathrm{ZCACS}_6^{12\times 18}$，定义在 $\mathbb{Z}_6$ 上。

14 最优二维零相关区互补集的直接构造

表1 与已有研究的比较

来源	集合数量	阵列尺寸	条件	基于
[7]	$K = K'r$	$L'_1 \times (L'_2 + r + 1)$	$r \geq 0$	$2D-ZCACS\ of\ set\ size\ K'\ and\ array\ size\ L'_1 \times L'_2$
[8]	1	$2^m \times 2^n L$	$m, n \geq 0$	长度为 L的零相关配对
[9]	K	$K \times K$	K 整除集合大小	BH矩阵
[10]	$2\prod_{i=1}^{k_i} p_i^2$	$2^m \times \prod_{i=1}^{k_i} p_i^{m_i}$	k_i、 $m_i \geq 1$、 p_i均为素数	MVF
Thm 2	$rs\alpha$	$rm \times sn$	$\alpha = (\prod_{i=1}^{a} p_i^{k_i})(\prod_{j=1}^{b} q_j^{r_j})$, $m = \prod_{i=1}^{a} p_i^{m_i}$、 $n = \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}$, r、 s、 $\alpha \geq 1$、 p_i、 q_j $are\ primes$	MVF

Remark 1 在 *Theorem 1*中，若取 $a = 1$、 $p_1 = 1$、 $a' = 1$、 $p'_1 = 1$、 $b = 1$、 $q_1 = 2$、 $b' = l$、 $r_1 \geq 2$，则可得到参数为 $(\prod_{i=1}^{l} q'_i 2^{r_1},\ 2^{n_1})$ 的最优一维零相关区互补序列集 $-\mathrm{ZCCS}_{2^{r_1}}^{\prod_{i=1}^{l} q'_i 2^{n_1}}$，这与[18]中的结果完全相同。此外，若取 $l = 1$，则可得到形式为 $(q'_1 2^{r_1},\ 2^{n_1})$ 的最优一维零相关区互补序列集 $-\mathrm{ZCCS}_{2^{r_1}}^{q'_1 2^{n_1}}$，这与 [17]中的结果完全相同。因此， [17, 18] 给出的最优一维零相关区互补序列集是所提出构造的一个特例

Remark 2 在 *Theorem 1*中，若 $a = 1$、 $p_1 = 1$、 $a' = 1$、 $p'_1 = 1$、 $b = 1$、 $q_1 = 2$、 $b' = l$、 $r_1 = 1$，则可得到参数为 $(2\prod_{i=1}^{l} q'_i,\ 2^{n_1})$ 的 $-\mathrm{ZCCS}_{2}^{\prod_{i=1}^{l} q'_i 2^{n_1}}$ 一维零相关区互补序列集，它实际上是由 $2\prod_{i=1}^{l} q'_i$ 个长度为 $\prod_{i=1}^{l} q'_i 2^{n_1}$ 且零相关区宽度为 2^{n_1}的 $2\prod_{i=1}^{l} q'_i$ 零相关配对组成的集合。因此，我们的工作同样产生了零相关配对集合[15]。

*Remark 3*在 *Theorem 1*中，若取 $a = 1, p_1 = 1, a' = 1, p'_1 = 1, b = 1, q_1 = 2, b' = r\ \ q'_1 = q'_2 = \ldots = q'_r = 2\ \ n_1 = m - r\ \ \ \ r_1 = s + 1\ \ \ \ \ \ \ \ 1$ ，则可得到参数为 $(2^{s+r+1}, 2^{m-r})$ $-\mathrm{ZCCS}_{2^{s+1}}^{2^m}$的 D-ZCCS，这与[16]中的结果完全相同。因此，[16] 中的 ZCCS 是我们所提出构造的一个特例。

Remark 4 所提出的构造得到的二维零相关区互补阵列集满足式（5）。因此，该构造得到的二维零相关区互补阵列集是最优的。

Remark 5 若取 $a = 1$、 $a' = 1$、 $p_1 = 1$ 和 $p'_1 = 1$，在 *Theorem 1* 中，我们得到参数为 $\left(\left(\prod_{j'=1}^{b'} q'_{j'}\right)\prod_{j=1}^{b} q_j^{r_j}\text{、}\ n\right) -$ 的最优一维零相关区互补序列集 $\frac{n\left(\prod_{j'=1}^{b'} q'_{j'}\right)}{\prod_{j=1}^{b} q_j^{r_j}}$，其中 $n = \prod_{j=1}^{b} q_j^{n_j}$。因此，我们得到长度为 nm 的最优一维零相关区互补序列集，其中 n、 $m > 1$ 和 $m = \prod_{j'=1}^{b'} q'_{j'}$。因此，我们的构造通过直接方法生成了具有新长度的最优一维零相关区互补序列集，该长度此前尚未见于文献中。

Remark 6我们提出的二维零相关区互补阵列集的集合大小为 $\left(\prod_{i'=1}^{a'} p_{i'}'\right)\left(\prod_{j'=1}^{b'} q_{j'}'\right)\prod_{i=1}^{a} p_i^{k_i}\prod_{j=1}^{b} q_j^{r_j}$ 其中，k_i，$t_j \geq 1$。如果取$a=1$，$p_1=1$，$a'=1$，$p_1'=1$，$r_1=r_2=\ldots=r_b=2$，$b'=1$，以及 $q_1'=2$ 则集合大小为 $2\prod_{j=1}^{b} q_j^2$，这就是[10]中的二维零相关区互补阵列集的集合大小。因此，与[10]相比，我们具有灵活数量的集合大小。

3.1 与先前工作的比较

表 I 将所提出的工作与 [7–9] 中的间接构造以及 [10] 中的直接构造进行了比较。[7–9] 中的构造高度依赖初始序列，从而增加了硬件存储需求。[10] 中的构造是直接的，但集合大小和阵列尺寸仅限于某些偶数。我们的构造不需要初始矩阵或初始序列，并且能够产生灵活的参数。

4 结论

本文利用多变量函数（MVF）设计了二维 Z-互补阵列码集。所提出的设计不依赖初始序列或矩阵，因此是一种直接构造。与现有工作相比，我们提出的设计具有灵活的阵列尺寸和集合大小。此外，我们提出的构造可以约化为一维零相关区互补序列集。因此，许多一维零相关区互补序列集都成为我们工作的特例。最后，我们将本文工作与现有最先进成果进行了比较，并表明本文方法更具通用性。

参考文献

[1]Farkas, P., Turcs´any, M.：二维正交完全互补码。载于：IEEE第一届移动未来研讨会暨通信趋势专题讨论会（sympoTIC），第 21–24 页（2003）[2] Turcs´any, M., Farka˘s, P.：基于二维正交完全互补码的新型 2d-mc-ds-ss-cdma 技术。载于《多载波扩频》，德国柏林：Springer，第 49–56 页（2004）[3] Chen, C.-Y., Wang, C.-H., Chao, C.-C.：完全互补码与广义Reed-Muller码。IEEE Commun. Lett. 12(11)，849–851（2008）[4] Das, S., Majhi, S., Liu, Z.：一种新型完全互补码及其在 APU 矩阵中的应用。IEEE Sig. Process. Lett. 25(9)，1300–1304（2018）[5] Liu, Z., Guan, Y.L., Parampalli, U.：用于多载波码分多址峰均功率控制的新型完全互补码。IEEE Trans. Commun. 62(3)，1105–1113（2014）

[6] Xeng, F., Zhang, Z., Ge, L.：超宽带通信中具有零相关区的二维广义互补正交序列集的理论极限。UWBST与IWUWBS国际研讨会，197–201（2004）[7] Zeng, F., Zhang, Z., Ge, L.：具有ZCZ的二维互补正交序列构造及其下界。英国工程技术学会（2005）[8]Pai, C.-Y., Ni, Y.-T., Chen, C.-Y.：二维二进制Z互补阵列对。IEEE Trans. Inf. Theory 67(6)，3892–3904（2021年）[9] Das, S., Majhi, S.：基于生成多项式矩阵的二维Z互补阵列码集。IEEE Trans. Signal Process. 68，5519–5532（2020）[10] Roy, A., Majhi, S.：基于多变量函数的组间互补码集与二维Z互补阵列码集构造（2021年）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.00970[11]Shen, B., Meng, H., Yang, Y., Zhou, Z.：Z互补码集与互相正交互补序列集的新构造。Des. Codes Cryptogr.，1–19（2022年）[12] Sarkar, P., Roy, A., Majhi, S.：基于广义布尔函数构造非二次幂长度的Z互补码集。IEEE Commun. Lett. 24(8)，1607–1611（2020）[13] Sarkar, P., Majhi, S.：面向多载波码分多址系统的最大列序列峰均功率比为二的最优零相关区码集合的直接构造。IEEE Commun. Lett 25(2)，337–341（2020）[14] Wu, S.-W., Ş.ahin, A., Huang, Z.-M., Chen, C.-Y.：基于广义布尔函数的灵活长度Z互补码集。IEEE Access 9，4642–4652（2020）[15] Kumar, P., Sarkar, P., Majhi, S., Paul, S.：具有高零相关区比率的偶数长度零相关区互补对的直接构造。Cryptogr. Commun.，1–10（2022年）[16] Sarkar, P., Majhi, S., Liu, Z.：基于广义Reed-Muller码的最优Z互补码集。IEEE Trans. Commun. 67(3)，1783–1796（2018）[17] Sarkar, P., Majhi, S., Liu, Z.：用于构造具有灵活长度的最优Z互补码集的伪布尔函数。IEEE Signal Process. Lett. 28，1350–1354（2021年）

[18] Ghosh, G., Majhi, S., Sarkar, P., Upadhaya, A.K.：利用广义布尔函数直接构造偶数长度的最优Z互补序列集。IEEE Signal Process. Lett. **29**，872–876（2022年）[19]Pai, C.-Y., Liu, Z., Zhao, Y.-Q., Huang, Z.-M., Chen, C.-Y.：为大规模MIMO系统中的全向传输设计二维完全互补码。载于：国际信息论研讨会（ISIT），第2285–2290页（2022年）。*IEEE*[20] Ghosh, G., Majhi, S., Upadhyay, A.K.：利用多变量函数构造具有任意阵列尺寸和灵活的集合大小的二维互补码集（2022年）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.13395[21] Wu, S.-W., Chen, C.-Y.：具有优良峰均功率比特性的最优Z互补序列集。IEEE Signal Process. Lett.**25**（10），1500–1504（2018）[22] Yu, T., Adhikary, A.R., Wang, Y., Yang, Y.：新型最优Z互补码集。IEEE Trans. Signal Process. **29**，1477–1481（2022年）[23]Shen, B., Yang, Y., Fan, P., Zhou, Z.：具有非二次幂长度和低峰均功率比的新型Z互补/互补序列集。Cryptogr. Commun. **14**（4），817–832（2022年）[24]Vaidyanathan, P.：信号处理背景下的拉马努金和——第一部分：基础。IEEE Trans. Signal Process. **62**（16），4145–4157（2014）

