arXiv:2301.02411v1 [math.AG] 6 Jan 2023

代数循环与动机的若干算术和几何方面

GIUSEPPE ANCONA

研究指导资格认证

于2022年11月17日在由以下成员组成的评审委员会面前答辩：

Yves André，评审人；Joseph Ayoub，报告人；Jean-BenoîtBost，评审人；Anna Cadoret，报告人；François Charles，报告人；Carlo Gasbarri，评审人；Rutger Noot，担保人

目录

致谢3 0. 引言 7 1. 动机有何用？ 10 2. Weil 上同调 12 3. 标准猜想与不那么标准的猜想 18 4. 例 23 5. 自对偶性与保守性 29 6. 正特征下的正性 32 7. André 式的 p-进周期 39 8. 交换群概形的动机 46 9. 代数类的构造 52 参考文献 57

致谢

人们常把博士资格认证说成是一项必须经历的手续。如今我意识到，自己不仅乐在撰写这篇论文的过程中，也怀着几分激动之情走近这场答辩。我身边将有许多我珍视的同事和朋友，因此我想借这几行文字向他们致谢。

感谢三位评审人愿意拨冗阅读我的论文。Joseph Ayoub 曾是我的博士后导师，也是动机理论领域的一位核心人物。我曾与他进行过许多讨论，他对我的研究给予关注，我深感荣幸。

我在攻读博士论文期间，参加由 Anna Cadoret 的法国国家研究署项目组织的一次工作组活动时认识了 Anna Cadoret。我记得当时的氛围轻松而开放，尤其欢迎年轻人；在我们这个行业里，这样的情形并不多见（我们曾尝试通过 RéGA，后来又通过 JAVA，重现这种氛围）。我一直很欣赏她提出问题时的独到之处，也很高兴她能对这篇论文作出评价。

François Charles 比我早两年进入高等师范学院，他是我们当中许多人的榜样。他敏锐的直觉一直令我印象深刻，我感谢我们之间的交流，也感谢他对我的研究成果的关注。

Rutger Noot 曾担任我博士论文的评审人，并在此后给予我许多鼓励，我对此深表感激。自从我来到斯特拉斯堡以来，我多次受益于他深厚的数学素养。由他担任我的担保人是自然而然的选择，我感谢他欣然接受。

这篇论文大概没有哪一节不会提到 Yves André 的名字。尽管我一直努力拓宽兴趣、涉足新的领域，最终总会在那里发现一条归功于他的基本定理。他能出席我的评审委员会，是我的荣幸。

我硕士二年级时听过 Jean-Benoît Bost 的一门课：他的清晰表达和远见卓识成为了我的榜样。我感谢他从那时起给予我的支持；能请他加入我的博士资格认证评审委员会，我感到十分荣幸。

食堂午餐时，Carlo Gasbarri 总会穿插一些数学话题（而且总是充满热情），为用餐增添乐趣。我感谢他与我分享过、今后还会分享的这些话题，也感谢他接受邀请加入评审委员会。

感谢 Emiliano Ambrosi、Pierre Baumann、Mattia Cavicchi、Frédéric Chapoton、Dragos Fratila、Florence Lecomte 和 Rutger Noot 阅读本文的早期版本。

这里介绍的一些成果来自我与多位数学家的合作，他们教会了我很多。我在此一并感谢他们，从我的第一位合作者 Annette Huber——我们至今仍经常交流——到最年轻的 Mattia Cavicchi。这位才华横溢的数学家即将开启职业生涯，祝愿他一切顺利。

我的数学研究离不开我亲爱的数学家朋友 Olivier Benoist、Yohan Brunebarbe、Javier Fresán 和 Marco Maculan 的交流、建议与指点。

回顾自己的数学之路，我要感谢我的博士论文导师 Jörg Wildeshaus，以及博士论文期间在巴黎第十三大学任研究员的 Frédéric Déglise，他教会了我很多。

在 IRMA 工作的这些年里，我很高兴能与许多同事讨论数学问题，他们既有我所在团队的成员，也有其他团队的同事。我特别想到 Emilano Ambrosi、Dragos Fratila、Robert Laterveer、Yohann Le Floch、Adriano Marmora、Pierre Py 和 Ana Rechtman。

实验室的氛围很好，我通过教学、咨询等机会与几乎所有人都有过交流，也常常感受到大家的同理心与善意。亲爱的同事们，感谢你们阅读这些文字！

教师兼研究人员的工作需要大量的行政与技术支持。在这方面，我们在斯特拉斯堡十分幸运：我特别要感谢 Alexandra Carminati、Sandrine Cerdan、Pascale Igot、Delphine Karles- kind、Jessica Maurer-Spoerk、Alexis Palaticky 和 Alain Sartout。

许多住在斯特拉斯堡以外、特地长途跋涉前来观看我答辩的朋友和同事出现在这里，让我十分感动：Javier、Mattia、Olivier、Quentin 和 Yohan，谢谢你们！也有一些朋友决定花上人生中的一个小时，看我在蓝色黑板前胡言乱语，这同样令我感动：Joanne、Cédric、François……这让我深受触动。

最后，感谢我生命中所有与数学无关、却让生活如此幸福的事。我想到了 Hermosa 这个美好协会里的探戈朋友：感谢你们带来的热烈友好气氛，也感谢探戈舞会。我想到了五号球场的足球朋友：感谢那些激烈的比赛，以及更加激烈的赛后时光。我想到了和 Gianluca 一起慢跑的日子（一路上总少不了彼此交流问题、互提建议）。我想到了那些年轻的父母朋友，我们一起喝开胃酒，话总是说不完，还有那些第二天醒来便后悔参加的派对。当然，我也想到了活力四射的家人。感谢 Nonna Michelina 家族的每一代人：Nonna Michelina 一边准备意面，一边为我唱歌剧；还有我的女儿们，她们总是扑进我的怀里。感谢 Anna，她总是想听我做报告，也总是乐于庆祝。感谢母亲为我们准备了一口很棒的大锅（到时候你们就知道了……），感谢父亲开车送我去练柔道时，一路上和我聊科学；感谢我的兄弟们，以及我们三个人共用的房间，在那里我们什么运动都玩；感谢马利耶的家人，他们始终以爱陪伴着我们；也感谢我的姻亲家人，我们一起旅行、享用美食、畅谈世界。

献给旅伴 Anna。献给 Camilla 和
Gaia，我们共同的旅程。

0. 引言

本文的核心是一个分次环同态[1]，称为循环类映射

$$\mathrm{cl}_X : \mathrm{CH}(X) \longrightarrow \mathrm{H}(X).$$

这里，X 是定义在域 k上的光滑射影簇，H 是 Weil 上同调[2]，而 CH(X) 是具有有理系数的肖氏环。应将 CH(X) 视为 X 的一种代数性质的不变量，将 H(X) 视为一种拓扑性质的不变量：映射 cl_X 比较了这两种不同的性质。

围绕 cl_X 的问题大致可分为三类：

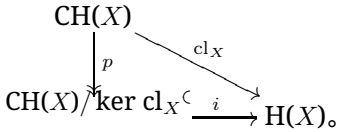
(1) 描述 cl_X的像,

(2) 描述 cl_X 的核,

(3) 描述 cl_X 的乘法结构。

例如，属于第一类的猜想有 Hodge 猜想、Tate 猜想、Grothendieck 周期猜想，以及 Künneth 型和 Lefschetz 型标准猜想。第二类中有布洛赫–贝林森猜想或幂零猜想。有些猜想横跨第一类和第二类，例如保守性猜想或 Kimura 有限维猜想。第三类包括 Hodge 型以及“hom $=$ num”型标准猜想。

为了将研究分解为这三类，我们可以先将 cl_X（作为环态射）分解，得到如下图表：



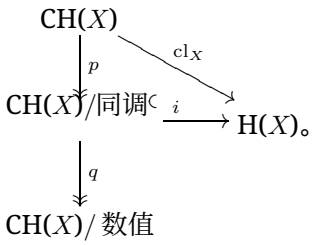
商环 CH(X)/ kercl$_X$ 也记作 CH(X)/ hom，称为模同调等价的代数循环的环。

上述第 (1) 类问题归结为研究单射 i，而第 (2) 类问题则归结为研究投影 p。为表达第 (3) 类，我们考虑数值等价[3]，并将图表补充如下：

---

1. CH(X)中的分次由子簇的余维所诱导，乘法称为交叉乘积。2. 例如，若 $k = \mathbb{C}$，可以选择奇异上同调；对于 k 特征为$p \geq 0$ 且 ℓ 是满足 $\ell \neq p$ 的素数的情形，可以选择 ℓ-进上同调。3. 这种等价关系使簇上的所有点都等价，而余维互补的循环则通过交叉乘积形成对偶。

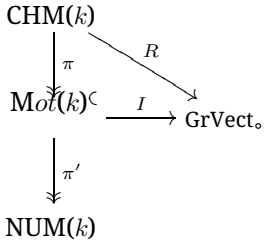
(0.1)



理解代数 CH(X)/num 和投影 q，便能涵盖上述第 (3) 类问题的大部分内容。

关于代数循环的主要猜想，若转而考虑动机，表述起来会更加简洁。这大致相当于同时考虑所有簇 X 的图表 (0.1)：

(0.2)



这里， R 表示从肖氏动机到分次向量空间的实现：它是一组循环类映射。此外，还有投影到同调动机和数值动机的满函子 π， π'，以及从同调动机到分次向量空间的忠实函子 I，后者也称为实现。

动机理论不仅有助于提出关于代数循环的问题，也有助于证明关于它们的结果；关于这一点的讨论，参见第1节。举例来说，下面列出一些结果——其中有些来自我的研究——值得注意的是，动机并未出现在这些结果的陈述中，却在其证明中发挥着关键作用。

定理 0.1. *(1) (Kahn* [Kah03]*)* 对有限域上的椭圆曲线乘积，循环类映射是单射。

(2) (Kimura [Kim05]*)* 设 S 为一由曲线乘积支配的光滑复射影曲面。若循环类映射是满射，则它是单射。*(3)* [Anc21] 设 A 为一个四维阿贝尔簇，则交叉乘积

$$\mathrm{CH}^2(A)/\mathrm{num} \times \mathrm{CH}^2(A)/\mathrm{num} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

其符号为 $(\rho_2 - \rho_1 + 1; \rho_1 - 1)$，其中 $\rho_n =$ 维数$\mathbb{Q}(\mathrm{CH}^n(A)/$数值$)$。

(4) [AHPL16] 设 S 为一个正则基概形，且 G 为一个 S-交换群概形。那么态射的作用

$$n_G : G \longrightarrow G$$

乘以 n 后，将空间 $\mathrm{CH}(G)$ 分解为有限个特征子空间的直和（此外，特征值是 n 的显式幂次，且该分解不依赖于所选的整数 $n \geq 2$）。

动机理论本身的性质决定了它与我们所考虑的各种 Weil 上同调相互交织。因此，根据基域 k 的不同，我们会使用霍奇理论（$k = \mathbb{C}$）、伽罗瓦表示（k 数域）、Weil 数的算术（k 有限）或 p-进霍奇理论（在混合特征下）。由此凸显了该理论的算术和几何方面。

这些不同的上同调理论之间存在类比，这些类比在动机中通过定理或猜想得以体现；它们之间也存在差异，而动机理论旨在弥补这些差异，见第2节。

动机领域的不同成果，可以从两个方面加以区分：一方面是所研究的图表 0.2 的部分，另一方面是相关基域 k 的几何或算术性质。为了便于阅读下文，现将介绍的研究成果分类如下。

	算术	几何
CHM(k)	§5 [Anc22]	§8 [AEWH15，AHPL16]
Mot(k)	§7 [AF22]	§9 [ACLS22]
NUM(k)	§6 [Anc21]	

文本结构。本文前几节对这一理论作了部分介绍。我们已经提到，动机有助于研究代数循环，并以定理 0.1 为例，但尚未说明它们为何有用：这正是第1节的目的。第 2 节介绍霍奇理论及其算术对应物；文中强调其中的类比，但更着重于差异。第 3 节给出关于代数循环的猜想，第 4 节则提供动机的例子。后续各节会重新探讨这些问题和例子，并按照上图所示的图表来组织介绍不同的结果。第 5 节证明了关于定义在有限域上的阿贝尔簇所产生的动机的保守性猜想。第§6节涉及霍奇型标准猜想，并证明定理 0.1(3)。第§7节引入一类新的 p-进周期，它们出现在混合特征下代数类的研究中。第§8节证明定理 0.1(4)，这需要运用现代动机技术。第§9节研究某些具有拉格朗日纤维化的超凯勒簇的代数类。

1. 动机有何用途?

在一篇同名文章 [Del94a]，中，Deligne 解释说，动机的用途本质上只是哲学性的：它们使我们能够将一种上同调中的思想转移到另一种上同调中，大致来说，就是将图表 0.2 应用于不同的上同调。如今我们认识到，动机也是一种真正的技术工具，正如格罗滕迪克所预见的那样。Deligne 甚至在他关于多重ζ值的布尔巴基报告中重新审视了自己的立场，并解释说，布朗的工作是“动机哲学不仅是宝贵指引，而且还能带来证明”的一个例子 [Del13]。

我想在此说明动机的用途，尤其是在代数循环理论中的用途：定理 0.1 已经列出了一些论述，其中动机的运用至关重要。不过，仍有几点需要提醒。首先，我并不认为这是唯一可用的工具；许多关于肖氏环的有趣结果都是通过其他方法得出的。其次，迄今为止，动机最引人注目的应用更多出现在周期理论中 [Bro12, Ayo15] ——我们可以期待，动机理论在肖氏环中的重大应用仍有待出现。

在构建纯动机理论（即针对光滑完备簇的理论）时，格罗滕迪克设想在代数循环与例如 ℓ-进上同调之间架起一座桥梁。他的想法是，对前者的理解将由此带来关于后者的结果；例如，标准猜想将会推出韦伊猜想。从某种意义上说，这似乎是合理的方向：代数循环早已存在（可以说，自贝祖定理以来便是如此），而且它们的定义可能让人觉得更容易理解。

如今我们明白，它们比我们所能想象的更加神秘。这一点大概随着芒福德定理[Mum68] 而变得显而易见：该定理表明，零循环群一般无法由有限型簇参数化。另一方面，上同调方面已经取得了许多进展。因此，这座桥梁依然十分有用，但我们应当从相反的方向走过它：我们将尝试利用上同调信息，并通过动机将其转化为代数循环上的信息。

于是，一个自然而然的问题是：循环类映射本身为何不足以充当肖氏环与上同调之间的桥梁？简短的回答是，上同调具有一些良好的性质（Künneth、庞加莱、.....），而肖氏环并不具备这些性质。动机则是重新组织循环类映射的一种方式，使我们仍能保有这些良好的性质。

1.1. 纯动机。 为了解释这一构造背后的思路，我们考虑以下情形（受坦纳克形式体系启发）。设 $\phi\colon H \to G$ 是一个群同态，并研究它所诱导的函子

$$f = \phi^* : \mathrm{Rep}_F(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_F(H) \tag{1.1}$$

在 F 某个固定域上的 F-线性表示之间。假设我们在此研究中仅能使用映射集

$$c_V : V^G \longrightarrow V^H \subset f(V) \tag{1.2}$$

对于每个 $V \in \mathrm{Rep}(G)$。这个集合的定义当然不如 f 的定义方便。不过，注意到它在态射上的作用由下式给出，仍然可以找回 f

$$c_{W\otimes V^\vee} : \mathrm{Hom}_G(V,W) = (W\otimes V^\vee)^G \longrightarrow (W\otimes V^\vee)^H = \mathrm{Hom}_H(V,W). \tag{1.3}$$

这种从不变量转向等变不变量的思路，是格罗滕迪克构造动机时的关键步骤。在这种情形下，对于每个簇 X，V将是它的动机 $\mathfrak{h}(X)$（构造中的范畴里的抽象对象），V^G 将是肖氏环 $\mathrm{CH}(X)$，$f(V)$将是奇异上同调（或 ℓ-进上同调，...）$\mathrm{H}(X)$，V^H将是霍奇类 $\mathrm{Hdg}(X)$（或伽罗瓦不变类，...），而 c_V将是循环类映射 cl_X。总结如下：

$$\begin{array}{rcl} V & \rightsquigarrow & \mathfrak{h}(X), \\ V^G & \rightsquigarrow & \mathrm{CH}(X), \\ f(V) & \rightsquigarrow & \mathrm{H}(X), \\ V^H & \rightsquigarrow & \mathrm{Hdg}(X), \\ c_V & \rightsquigarrow & \mathrm{cl}_X\,. \end{array} \tag{1.4}$$

要使 (1.3) 中的构造适用，必须为动机的对偶以及两个动机的张量积赋予意义。此处有必要考虑光滑完备簇。事实上，Künneth 公式和庞加莱对偶提示了 $\mathfrak{h}(X)\otimes\mathfrak{h}(Y) = \mathfrak{h}(X\times Y)$ 和 $\mathfrak{h}(X)^\vee = \mathfrak{h}(X)$（相差一个 Tate 扭曲）。此时，$\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}(X)\ \mathfrak{h}(Y))$ 将由 $\mathrm{CH}(X\times Y)$ 控制[4]。

一旦构造出这个范畴，我们就可以设想——并尝试证明——$\mathrm{H}(X)$ 与 $\mathfrak{h}(X)$ 之间存在某种类比；若换作 $\mathrm{CH}(X)$，这种类比便不合理。随后，我们可以通过考察该范畴中的 Hom，推导出关于肖氏环的信息。例如，我们可以设想 $\mathrm{H}(X)$ 与 $\mathfrak{h}(X)$ 具有 “ 相同的维数 ”，而 $\mathrm{CH}(X)$ 则不可能如此 —— 参见类比 (1.1)。这一想法是 Kimura 和奥沙利文提出动机维数概念的基础；该概念是定理 0.1(1) 证明中的关键要素，在同一定理的 (2) 和 (4) 部分中也发挥作用。

1.2. 混合动机。 自理论奠基以来，它已取得长足发展。霍奇理论的发展便是如此：它最初借助与不一定是射影或光滑的簇相关联的混合霍奇结构不断演进，继而发展到旨在研究一般基底上簇族的混合霍奇模。动机理论也同样取得了显著进展，从 Voevodsky 的混合动机三角范畴发展到一般基底上的相对动机 [Ayo07, CD19]。这些范畴通过六函子形式体系彼此关联，与混合霍奇模的情形相同。此外，这些范畴中的某些 Hom 可以用来恢复肖氏环。

4. 对于非光滑、非射影的一般簇，上述论证表明，我们不应指望 $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}(X)\ \mathfrak{h}(Y))$ 与肖氏环之间存在联系。事实上，在 Voevodsky 动机中，这些 Hom 并不能用经典不变量来解释，另见注 8.7(4)。

此外，还存在实现函子，例如取值于可构造层的实现函子，它们可以用来恢复代数循环类的映射。

正如前文所述的光滑射影簇情形，这些范畴的优势在于它们与上同调范畴有着类似之处。例如，动机上存在权重滤过，这与混合霍奇理论中的情况相同 [Bon10]。（肖氏环中没有良好的类似结构：例如，仿射空间的一个开集的肖氏环是平凡的，而上同调中的权重滤过却可能并不平凡。）另一个例子是 Ayoub 的以下结果 [Ayo14，命题 3.24]： f 基底 S 上的动机之间的映射是同构，当且仅当它在 S 的每个点上的限制都是同构。显然，这一陈述借鉴了可构造层或 étale 层的对应结果。

这些新范畴还有第二个优点：如今我们拥有了更大的灵活性，类似于混合霍奇模所提供的灵活性。例如，若想研究光滑射影簇 X的肖氏环，我们可能会想对 X 进行分层并研究每个分层，或者将 X 纤维化到一个基底之上，并研究纤维如何变化。这类构造往往会产生并非光滑的簇，而对于这些簇，肖氏环及其函子性并未定义；这些动机范畴则能帮助我们绕过这一问题。

这些技术使得构造某些“具体的”代数循环成为可能，例如由霍奇猜想结合分解定理所预言的某些代数循环；这些代数循环此前无法通过直接方法获得。特别是，这些技术已应用于志村簇 [Wil17]，、二次曲面丛 [CDN22]以及具有拉格朗日纤维化的超凯勒簇 [ACLS22]。

1.3. **动机复形**。 动机之所以有助于研究代数循环，第三个原因来自其现代定义（自 Voevodsky 以来）。在 Grothendieck 理论中，动机是形式符号，它们与代数循环的联系通过构造建立。在现代范畴中，动机是层复形，可以明确地构造出其中相当一部分。它们与代数循环的联系远非同义反复，事实上，这是该理论更深刻的成果之一。于是，人们可以希望，关于代数循环的某些棘手问题能够在其层论对应物中变得具体。这尤其体现在 Betti 实现 [Ayo10] 的构造中，或定理 0.1(4)的证明中，见第 8 节。

2. Weil 上同调

本节回顾霍奇结构的经典定义（定义 2.1），以及一种便于更好地描述正性性质的等价表述（定义 2.2）。本节的主要目的是回顾这些正性性质以及霍奇结构的自对偶性质，随后说明它们在 ℓ-进上同调中的类似性质一般并不成立（注 2.16 和例 2.17）。极化定义至关重要，我们尝试在注 2.12 中对此作出解释。

关于霍奇理论及其算术类似理论的其他差异，散见于全文各处，例如猜想 3.18 或注6.9。

定义 2.1.（霍奇结构，经典定义。）权为 $n \in \mathbb{Z}$ 的纯霍奇结构是由一个有限维 $\mathbb{Q}$向量空间 V及其分解给出的

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p,q\in\mathbb{Z}}} V^{p,q} \tag{2.1}$$

满足 $V^{p,\,q} = \overline{V^{q,\,p}}$。

若考虑空间 $V^{\{p,\,q\}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cap (V^{p,\,q} + V^{q,\,p})$，则可得到以下等价定义。

定义 2.2.（霍奇结构，等价定义。）权为 $n \in \mathbb{Z}$ 的纯霍奇结构是一个三元组，由一个有限维 $\mathbb{Q}$向量空间 V、一个分解

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \bigoplus_{\substack{p\le q \\ p+q=n \\ p,q\in\mathbb{Z}}} V^{\{p,q\}} \tag{2.2}$$

为实子空间，以及空间 $V^{\{p,q\}}$ 上对于 $p \neq q$的一个复结构组成。

分解中出现的配对（p, q）称为 V 的类型。

注记 2.3.（定义之间的联系。）以上两种表述确实等价。注意，对于 $p < q$，空间 $V^{\{p,q\}} \otimes \mathbb{C}$ 配备了两种复结构，因此有如下分解

$$V^{\{p,q\}} \otimes \mathbb{C} = V^{p,q} \oplus V^{q,p},$$

其中， $V^{p,q}$ 是两种结构重合的空间，而 $V^{q,p}$ 是两种结构互为共轭的空间 [5]。

定义 2.2 更便于表述正性性质 [6]，例如参见定义 2.6。

例 2.4. (1)（奇异上同调。）如果 X 是复数域上的光滑射影簇，其奇异上同调配备有一个

5. 也可以互换这两个空间的作用；在这种情形下，需要更改定义 2.9 中的符号，才能符合经典的符号约定。6. 相比之下，张量结构用定义 2.1 和以下规则表述得更为自然

$$(V \otimes W)^{p,q} = \bigoplus_{\substack{a+c=p \\ b+d=q}} V^{a,b} \otimes W^{c,d}.$$

在实数情形下，我们注意到 $V^{\{a,\,b\}} \otimes W^{\{c,d\}}$ 在 $a < b$且 $c < d$时具有两种复结构。这会像前面一样诱导出到两个空间的分解，其中复结构重合的部分贡献于 $(V \otimes W)^{a+c,\,b+d}$ 而另一部分贡献于 $(V \otimes W)^{m,\,M}$其中 m和 M分别是对偶对 $\{a+d,\ b+c\}$ 的最小值和最大值。

在 X 上的函子霍奇结构，更准确地说， $H^n(X)$ 是纯权 n 的。所有可以设想的定理（庞加莱、Künneth、Lefschetz、...）都保持这一额外结构。

(2)（阿贝尔簇。）对于复阿贝尔簇 A，其底层解析簇为 $\mathbb{C}^g/\Lambda$，有 $H_1(A) \otimes \mathbb{R} = \Lambda \otimes \mathbb{R} = \mathbb{C}^g$，这显式体现了空间 $H_1(A) \otimes \mathbb{R}$ 的定义 2.2 中的复结构。

(3)（Tate 扭曲。）在权 $2n$ 下，除同构不唯一外，存在唯一一个维数为 1 的霍奇结构。固定这样一个霍奇结构，并记为 $\mathbb{Q}(-n)$。对于霍奇结构 V，记 $V(-n) = V \otimes \mathbb{Q}(-n)$，并称之为 Tate 扭曲；选取 $\mathbb{Q}(-n)$，使得有如下恒等识别： $\mathbb{Q}(a) \otimes \mathbb{Q}(b) = \mathbb{Q}(a+b)$。

通常选择 $\mathbb{Q}(n) = (2i\pi)^n\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$，因为霍奇结构自然地出现在最高次数的奇异上同调中。这一特定选择在接下来的构造中不起作用，但极化的概念除外，见注释 2.7(1)。

注释 2.5。（自对偶性。）霍奇结构一般不是自对偶的，即 V 和 $V^\vee$ 通常并不同构，即使相差一个扭曲也不行（唯一使这种自对偶性合理的扭曲是权扭曲）。

例如，取一个权为 0 的霍奇结构，并假设分解 (2.2) 有两个非零因子 $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = V^{\{0,0\}} \oplus V^{\{-1,+1\}}$. 。进一步假设 $V^{\{0,0\}}$ 与有理结构相容，而 $V_{\{-1,+1\}}$ 不相容，也就是说，有等式 $\dim_{\mathbb{Q}}(V_{\{0,0\}} \cap V) = \dim_{\mathbb{R}} V_{\{0,0\}}$，但 $\dim_{\mathbb{Q}}(V_{\{-1,+1\}} \cap V) < \dim_{\mathbb{R}} V_{\{-1,+1\}}$。

如果 V 是自对偶的，那么特别存在一个定义在 V 上的双线性形式，使得 $V^{\{0,0\}}$ 和 $V^{\{-1,+1\}}$ 彼此正交。然而，由于这样的双线性形式定义在 $\mathbb{Q}$上，空间 $V^{\{-1,+1\}}$ 也必然与有理结构相容。

事实上，所有源自代数几何的霍奇结构都是自对偶的。不仅如此，它们还带有一个“尽可能正定”的双线性形式，这正是下文重述的极化定义所要描述的对象。

定义 2.6.（极化——偶权。）纯权 $2n$ 的霍奇结构 V 上的一个极化，是定义在 $\mathbb{Q}$-向量空间 V 上的对称双线性形式 b，满足：

(1) 关于 b，空间 $V^{\{p,q\}}$ 两两正交；(2) 关于 b 的 $V^{\{p,q\}}$ 上复结构的伴随为其共轭；(3) b 在因子 $V_{\{n-a,\ n+a\}}$ 上的限制是定义的 $(-1)^a$-正的[7]。

7. 也就是说，当 a 为偶数时正定，当 a 为奇数时负定。

注 2.7. 定义的前两个性质等价于存在一个霍奇结构的态射

$$b : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{Q}(-2n).$$

反过来，给定这样一个 b，必须选择一个恒等态射 $\mathbb{Q}(-2n) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$，才能表述最后一条性质（正性）。例 2.4(3) 固定了这样一种选择。

(2) 在 $V = H^{2n}(X)$ 的情形下，可以推知极化在代数类上是正定的，因为它在 $V^{\{n,n\}}$ 上是正定的。即使只是为了理解代数类，了解其他因子上的符号也很有用，参见例 4.9 和第 6 节。

(3) 极化自动是非退化的，因此具有极化的霍奇结构都是自对偶的。另一方面，也存在不允许极化的自对偶霍奇结构，甚至包括单的情形，参见例 2.8。换言之，可极化性是比自对偶性更强的概念。

例 2.8. （自对偶性与极化。）构造一个没有极化的简单自对偶霍奇结构。设 A 是一个维数为 4 且非常一般的复阿贝尔簇。那么，本原部分 $V = \mathrm{H}^{4,\,\mathrm{prim}}(A)$ 是一个简单霍奇结构，其类型为 (0，4)，(1，3) 和 (2，2)，并且可极化（由推论 2.14 得出）。定义一个新的霍奇结构 W，其 $\mathbb{Q}$-向量空间与 V 相同，分解也相同，但将 (0，4) 部分与 (1， 3) 部分的角色对调，即

$$W^{\{0,4\}} = V^{\{1,3\}}, \qquad W^{\{1,3\}} = V^{\{0,4\}} \qquad \text{et} \qquad W^{\{2,2\}} = V^{\{2,2\}}.$$

我们断言 W 满足所需性质。首先注意到， V 上的一个极化会在 W 上诱导一个配对 b，使其成为自对偶的。另一方面，这个 b 不可能是极化，因为它不满足定义 2.6 中的符号条件。还需证明 W 不存在极化；为此，只需说明 b 是 W 上唯一的配对（相差一个标量），因此 $\mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(W) = \mathbb{Q}\cdot$ 恒等态射。然而，根据构造，$\mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(W) = \mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(V)$。为了解 V 的自同态，我们采用坦纳克观点。与 $\mathrm{H}^1(A)$ 相关联的坦纳克群是 GSp_8，而 $\mathrm{H}^{4,\,\mathrm{prim}}(A) \subset \mathrm{H}^1(A)^{\otimes 4}$ 的底层表示在几何上不可约，因此 $\mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathbb{Q}\cdot$ 恒等态射。

下面我们回顾奇数权情形下的极化定义，它不那么令人满意。即使我们只关注代数类，奇数次上同调群也可能很有用（例如，阿贝尔簇 A 的上同调由其 H^1 控制），但通常只需记住，极化定义在张量积下保持不变（因此， $H^1(A)$上的极化会通过 $H^n(A) = \Lambda^n H^1(A)$在 $H^n(A)$上诱导出一个极化）。

定义 2.9. （极化——奇数权。）纯权 $2n+1$霍奇结构 V上的极化是 $\mathbb{Q}$-向量空间 V上的交替双线性形式 b，满足：

(1) 空间 $V^{\{p,q\}}$ 相对于 b彼此正交，

(2) 复结构 b 在 $V^{\{p,q\}}$ 上的关于该结构的伴随算子是其共轭，(3) 对称双线性形式 $b(\cdot\ i\cdot)$ 在因子 $V^{\{n-a,n+1+a\}}$上是定义的（-1）^{a}-正定。

注 2.10. (1) 注 2.7 同样适用于这种情形。

(2) 可以考虑使用 $b(i\cdot,\cdot)$，而不是 $b(\cdot\ i\cdot)$；在这种情况下，符号会反转。我们认为在「中央部分」 $V^{\{n,n+1\}}$上具有正性更为合适，这与定义 2.6 中中央部分 $V^{\{n,n\}}$ 的情形类似。

例 2.11. (源自几何的极化。)设 X 是一个维数为 d_X 的复代数簇。一方面，庞加莱对偶给出一个同一化 $H^n(X) = H^{2d_X-n}(X)^\vee(-d_X)$。另一方面，困难的 Lefschetz 定理给出一个同构 $H^n(X) \cong H^{2d_X-n}(X)(d_X-n)$，该同构通过选取一个超平面截面 L 得到。将两者结合起来，便得到一个非退化双线性形式

$$b_L : H^n(X) \otimes H^n(X) \longrightarrow \mathbb{Q}(-2n).$$

这确实是一个霍奇结构态射，但它不具备极化所要求的符号。要得到这些符号，必须改变 Lefschetz 分解中某些因子的符号。

例如，将六次的 Lefschetz 分解写为

$$H^6 = H^{6,\mathrm{prim}} \oplus H^{4,\mathrm{prim}}(-1) \oplus H^{2,\mathrm{prim}}(-2) \oplus H^{0,\mathrm{prim}}(-3),$$

它关于上述配对 b_L 是正交的。这四个霍奇结构各自的霍奇分解也都是正交的；b_L 的符号如下（空白格对应始终为零的子空间）。

符号 b_L	$H^{6,\mathrm{prim}}$	$H^{4,\mathrm{prim}}(-1)$	$H^{2,\mathrm{prim}}(-2)$	$H^{0,\mathrm{prim}}(-3)$
(3, 3)	-	+	-	+
(2, 4)	+	-	+	
(1, 5)	-	+		
(0, 6)	+			

因此，要得到极化，就必须改变因子$H^{6,\mathrm{prim}}$ 和 $H^{2,\mathrm{prim}}(-2)$。

注 2.12。 （为什么要这样定义极化？）考虑上例中所说明的符号变化。乍看之下，似乎可以再改变一次符号，这次是相对于 $V^{\{p,q\}}$上的分解，从而使定义 2.6 中的二次型成为正定二次型。问题在于，这第二种分解通常并非定义在 $\mathbb{Q}$上，因此这种符号变化会得到一个未定义在 $\mathbb{Q}$上的双线性形式。

一般而言，对于源自几何的霍奇结构，我们不能指望存在一个既定义在$\mathbb{Q}$上、又与霍奇分解相容且正定的二次型，参见例 2.15。因此，我们应将定义 2.6 视为

代数簇所导出的霍奇结构所能具有的内积的最佳近似。此外，下面的命题表明，极化具备我们希望从内积中推导出的所有性质。

命题 2.13. 设 V 为一个霍奇结构，b 是 V上的一个极化，$W \subset V$ 是一个霍奇子结构。那么，将 b 限制到 W 上仍是一个极化。此外，W 关于 b 的正交补 $W^{\perp} \subset V$ 是一个霍奇子结构，并且有霍奇结构的等式 $V = W \oplus W^{\perp}$。

推论 2.14. 设 X 是一个光滑射影复代数簇。那么，X 的奇异上同调的任意霍奇子结构都是可极化的。

例 2.15.（极化与内积。）构造一个零权且具有几何来源的霍奇结构 V，使得 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{HS}}(V \otimes V, \mathbb{Q}(0))$ 不包含正定二次型。

设 E 是一条非 CM 椭圆曲线，并考虑 $H^1(E)$。我们有霍奇结构的分解 $H^1(E) \otimes H^1(E)^{\vee} = \mathbb{Q}(0) \oplus V$，其中 V的维数为 3，类型为 $(0,0)$ 和 $(-1,1)$。

据称 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{HS}}(V, V^{\vee}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{HS}}(V \otimes V, \mathbb{Q}(0))$ 是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间，维数为 1。为证明这一点，我们采用坦纳克观点。可以看出，与 $H^1(E)$ 相关联的坦纳克群是 GL_2，而 $H^1(E)$ 是标准表示。群 GL_2 作用于 V，并且有如下同构：$\mathrm{Hom}_{\mathrm{HS}}(V, V^{\vee}) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{GL}_2}(V, V^{\vee})$。另一方面，经典表示论告诉我们，$V$是几何不可约的，因此 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{GL}_2}(V, V^{\vee})$ 是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间，维数至多为 1。

另一方面，根据推论 2.14，空间 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{HS}}(V \otimes V, \mathbb{Q}(0))$ 含有一个极化，因此该空间仅由极化的倍数组成。特别地，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{HS}}(V \otimes V, \mathbb{Q}(0))$ 不可能含有正定二次型。

由此还可推出，$H^2(E \times E)$ 不存在一个尊重霍奇结构的正定二次型，因为 $V(-1)$ 是它的一个直和因子。

本节余下部分着重讨论霍奇理论与 ℓ-进上同调之间的差异，尤其是极化的概念和自对偶性质。

注 2.16.（ℓ-进上同调中的极化？）上述命题特别指出，源自代数几何的霍奇结构构成一个半单范畴，并且每个对象在一个扭曲意义下都是自对偶的。这与 ℓ-进上同调有很大不同：半单性仅是一个猜想，而自对偶性通常并不成立，参见例 2.17。

极化这一概念本身没有对应的类比：我们甚至无法表述类似定义 2.6 中的正性性质，原因很简单：在 $\mathbb{Q}_{\ell}$ 中，正这一概念毫无意义。

我们可以像霍奇理论中那样，在 ℓ-进上同调上构造配对，如例 2.11 所示。我们还不知道任何能够描述这个 $\mathbb{Q}_{\ell}$二次型的表述，即使是猜想性的。

此外，此类二次型的不变量（如其希尔伯特符号）并不能控制其子二次型的不变量（这与符号的情形不同）。这表明，即便我们能为上同调群 $H^n_\ell(X)$找到类似定义 2.6 的性质，该性质也未必适用于 $H^n_\ell(X)$的直和因子。

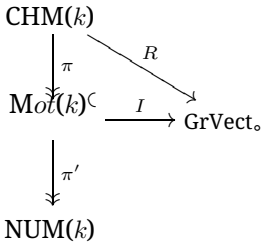
例 2.17. （ ℓ-进上同调中的非自对偶性。）设 k 为有限生成域， E为定义在 k上的椭圆曲线，且 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}$为一个虚二次域。取一个与 k 的特征不同的素数 ℓ，并使得 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell \oplus \mathbb{Q}_\ell$.。那么， $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ 的作用给出伽罗瓦表示的分解 $H^1_\ell(E) = V \oplus W$.。杯积在 $H^1_\ell(E)$上诱导出自对偶性；由罗萨蒂正性，它将 W 实现为 V的对偶。

另一方面，我们声称 V 和 W 作为伽罗瓦表示并不同构，这尤其意味着 V 不是自对偶的。事实上，若它们同构，则有 $\mathrm{End}_{\mathrm{Gal}}\, H^1_\ell(E) = M_{2\times 2}(\mathbb{Q}_\ell)$，然而根据 Tate 猜想， $\mathrm{End}_{\mathrm{Gal}}\, H^1_\ell(E) \cong \mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ ；该猜想在此情形下由 Tate、Faltings 和扎林证明。

注 2.18. 上面的例子取决于所选的素数 ℓ。人们预期无法找到一种几何来源的表示，它“独立于 ℓ”且非自对偶。动机使这一思想得以精确表达，参见猜想 3.5 及其后的注。

3. 标准猜想与较不标准的猜想

设 k 为基域， H^* 为一种 Weil 上同调。考虑表示动机范畴的图 (0.2):



我们始终将它们视为具有有理系数。对于每个维数为 d_X 的光滑射影簇 X，我们考虑其动机 $\mathfrak{h}(X)$；在不同范畴中将使用同一符号，若范畴相关，则会予以说明。

本节旨在列出一组猜想，以帮助人们对动机形成直观认识。这些猜想基本上都是经典的，只有关于自对偶性的猜想 3.5 和关于正性的猜想 3.7，据我们所知是新的。

本节分为三个小节。第一小节介绍理论的主要猜想（这些猜想基本上蕴含了其他猜想）。第二小节介绍格罗滕迪克的标准猜想。最后一小节讨论木村有限维性的概念。

以目前的技术，这些猜想一般而言仍遥不可及，但可以证明一些特殊情形，正如我们将在后续各节中看到的那样。

主要猜想。

猜想 3.1. *(Chow–Künneth.)* 存在一个（非唯一的）分解

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_{n=0}^{2d_X} \mathfrak{h}^n(X)$$

在范畴 $\mathrm{CHM}(k)$ 中，使得 $R(\mathfrak{h}^n(X)) = \mathrm{H}^n(X)$。

注 3.2. (1)（非唯一性。）因子 $\mathfrak{h}^0(X)$ 总是存在的。构造它只需考虑一个从 X 到 X 的常值映射：它在 $\mathrm{H}^0(X)$ 上确为恒等映射，在其他群上则为零。如此定义的因子取决于这个常值映射的像，更准确地说，取决于其模有理等价的类。尤其是，一般而言，这样的分解并非唯一。

(2)（自对偶性。）可以猜想存在一个具有额外自对偶性质的 Chow–Künneth 分解；也就是说，若考虑庞加莱对偶 $\mathfrak{h}(X)^\vee = \mathfrak{h}(X)(d_X)$，那么因子 $\mathfrak{h}^n(X)^\vee$ 对应于 $\mathfrak{h}^{2d_X-n}(X)(d_X)$。从代数循环的角度看，这意味着投影算子 p_n 由 $X\times X$ 中的一组代数循环给出，且满足 $\sigma^* p_n = p_{2d-n}$，其中 $\sigma\colon X\times X \to X\times X$ 是交换两个因子的映射。从 Chow–Künneth 分解构造自对偶分解并非自动可行：即使令 $p_{2d-n} = \sigma^* p_n$，投影算子 p_n 和 $\sigma^* p_n$ 也可能不正交。

猜想 3.3. *(保守性。)* 图表 (0.2) 中的所有函子都是保守的，也就是说，若一个动机之间的态射经图表中的某个函子映射后是同构，那么它本身就是同构。

定义 3.4. 若一个动机是形如 $\mathfrak{h}^n(X)$的动机的直和因子，就称它具有权 n。

猜想 3.5. *(自对偶性。)* 若 M 是一个权为 n 的动机（系数始终取有理数），则存在一个同构（不唯一）

$$M^\vee \cong M(n).$$

注 3.6. (1)（动机的自对偶性与上同调中的自对偶性。）上同调群 $\mathrm{H}^n(X)$ 借助庞加莱对偶和困难的勒夫谢茨同构（后者取决于超平面截面的选取）具有这种自对偶性；但一般而言，$\mathrm{H}^n(X)$ 的直和因子并不具有这种自对偶性，参见例 2.17。这与上述猜想并不矛盾：所构造的例子并非有理系数动机的实现。

(2)（与经典猜想的联系。）据我们所知，这一猜想是新的。我们认为它的表述很自然，而且它引导我们研究保守性猜想，参见第 5 节。此外，它还可由经典正性猜想推出（尤其是稍后将讨论的猜想 3.15）；这与霍奇结构的自对偶性可由极化的正性性质推出的情形相同，参见命题 2.13 及其后的注。

猜想 3.7。（正性。）假设基域 k 的特征 p。设 M 是 k 上的一个同调动机，且

$$q : \mathrm{Sym}^2 M \to \mathbb{I}$$

是 $\mathcal{M}ot(k)$中的一个态射。假设 q 是映射 $\widetilde{q}$:$\mathrm{Sym}^2 \widetilde{M} \to \mathbb{I}$ 在模 p约化后的结果，且该映射定义于零特征下。定义 q_Z为 q在 M的所有代数类 $Z(M) = \mathrm{Hom}(\mathbb{I}, M)$ 上的限制，并令 q_B 为 $\widetilde{q}$ 的奇异实现。

假设 q_B 是一个极化。那么 q_Z 是正定的。

注 3.8。（1）（关于可提升性。）在一些有意义的情形中，提升到零特征的假设成立，例如阿贝尔簇。在这种情形下，能够提升到零特征的代数类自动满足该猜想，参见注 2.7。尽管如此，仍需强调，一般而言存在不可提升的代数类，即使在阿贝尔簇的情形下也是如此。

(2)（与经典猜想的联系。）这个猜想是新的，我们不知道它是否能由经典猜想推出。我们认为它的表述很自然，而且它引导我们研究霍奇型标准猜想，见第 6 节。

标准猜想。

猜想 3.9.（*Künneth*。）在$\mathcal{M}ot(k)$ 同调动机范畴中，存在一个分解

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_{n=0}^{2d_X} \mathfrak{h}^n(X)$$

使得 $\mathfrak{h}^n(X)$的实现为 $\mathrm{H}^n(X)$。

注 3.10.（与 Chow–Künneth 的联系。）这个猜想当然是猜想 3.1 的推论。

注意，根据同调等价的定义，Künneth 分解自动唯一且自对偶：它对应于 GrVect 的分次以及上同调中的庞加莱对偶。这与 Chow–Künneth 分解有所不同，见注 3.2。

猜想 3.11. ***(Lefschetz.)*** 设 d_X 为 X 的维数， L 为 X的超平面截面。那么对于任意 $n \leq d_X$ ，存在$X \times X$ 中的一个对应 γ_n ，其在次数 $d_X + n$ 上的实现诱导出一个同构

$$R(\gamma_n) : \mathrm{H}^{d_X+n}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{d_X-n}(X)(-n)$$

它是与 L^n 作杯积的逆映射。

注 3.12. （与自对偶性的联系。）Lefschetz 型标准猜想 3.11 蕴含 Künneth 型标准猜想 3.9，这是 Kleiman 的经典论证 [Kle68]。

反过来，若 X 满足 Künneth 猜想，则 Lefschetz 型猜想等价于同调动机的自对偶性 $\mathfrak{h}^n(X)^\vee \cong \mathfrak{h}^n(X)(n)$ $\mathfrak{h}^n(X)$。这一等价关系可由命题 4.5 推出。特别是，这说明 Lefschetz 型猜想不依赖于所选的超平面截面 L，并且它由自对偶猜想 3.5 推出。

猜想3.13。（同调 =数值。）函子 π' 是一个等价。

第四个也是最后一个标准猜想是 Hodge 型猜想。要表述它，需要先引入下面的命题。

命题 3.14. *(参见 [Anc21,§3]) 假设 X 满足 Lefschetz 型标准猜想（猜想 3.11）。选取一个超平面截面 L。*

那么同调动机 $\mathfrak{h}^n(X)$存在原始部分分解，并且可以构造一个配对

$$q_{X,n,L} : \mathfrak{h}^n(X) \otimes \mathfrak{h}^n(X) \to \mathbb{Q}(-n)$$

其构造方式类似于在复代数簇的奇异上同调上构造极化 [8]，，见例 2.11。

此外，若将配对

$$q_{X,2n,L}(2n) : \mathfrak{h}^{2n}(X)(n) \otimes \mathfrak{h}^{2n}(X)(n) \to \mathbb{Q}$$

限制到代数类 $\mathcal{Z}^n(X)_{/\,\mathrm{hom}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}ot(k)}(\mathbb{I}, \mathfrak{h}^{2n}(X)(n))$ 上，就得到一个 $\mathbb{Q}$二次型

$$q_{Z,\mathrm{hom}} : \mathcal{Z}^n(X)_{/\,\mathrm{hom}} \otimes \mathcal{Z}^n(X)_{/\,\mathrm{hom}} \to \mathbb{Q}$$

其核恰好由数值平凡的循环组成 [9]。特别地，$q_{Z,\mathrm{hom}}$ 在模数值等价的代数循环上诱导出一个二次型

$$q_Z : \mathcal{Z}^n(X)_{/\,\mathrm{num}} \otimes \mathcal{Z}^n(X)_{/\,\mathrm{num}} \to \mathbb{Q}$$

它是非退化的。

猜想 3.15。（霍奇型标准猜想。）二次型

$$q_Z : \mathcal{Z}^n(X)_{/\,\mathrm{num}} \otimes \mathcal{Z}^n(X)_{/\,\mathrm{num}} \to \mathbb{Q}$$

如上所述，是正定的。

注 3.16. （与正性猜想的联系。）霍奇型标准猜想（猜想 3.15）并不要求 X 可提升到特征零，因此从这个意义上说，它比正性猜想 3.7 更一般。另一方面，对于可提升簇，猜想 3.7 比

8. 特别地，若 $k = \mathbb{C}$ 且 H^* 是奇异上同调，则 $R(q_{X,n,L})$ 是由 L 诱导的经典极化。9. 换言之，对于 X，猜想 Hom $=$NUM 等价于说 $q_{Z,\mathrm{hom}}$ 非退化。

霍奇型标准猜想更一般，因为它适用于抽象的极化，而这些极化未必来自超平面截面。

注 3.17.（零特征下的正性。）在零特征下，上文引入的二次型 $q_Z\colon \mathrm{Z}^n(X)_{/\,\mathrm{hom}} \otimes \mathrm{Z}^n(X)_{/\,\mathrm{hom}} \to \mathbb{Q}$ 是正定的：这是极化的正性性质（称为霍奇–黎曼关系）的推论，见注 2.7。特别地，在零特征下，Lefschetz 型标准猜想蕴含其他标准猜想。

零特征与正特征之间的另一个区别体现在以下猜想中。

猜想 3.18. 考虑循环类映射 ℓ-进 $\mathrm{cl}_X : \mathrm{CH}(X) \to \mathrm{H}_\ell(X)$。那么， $\mathbb{Q}$-向量空间 Imcl_X 是有限维的。更具体地说，典范映射 $\mathrm{Imcl}_X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \to \mathrm{H}_\ell(X)$ 是单射。

注 3.19。这一猜想是 hom =num 猜想的推论，因为数值等价与标量扩张交换。在特征零的情形下它已得到证明：利用比较定理可归结到奇异上同调。

有限维动机。

猜想 3.20。（有限维。）每个肖动机 M 都具有一个分解（不唯一）

$$M = M_+ \oplus M_-$$

满足 $\Lambda^N M_+ = 0$ 和 $\mathrm{Sym}^N M_- = 0$，其中 N 为足够大的自然数。

注 3.21。（1）（与其他猜想的联系。）假设 $M = \mathfrak{h}(X)$ 具有 Chow–Künneth 分解（猜想 3.1）。那么

$$M_+ = \bigoplus \mathfrak{h}^{2n}(X) \quad \text{et} \quad M_- = \bigoplus \mathfrak{h}^{2n+1}(X)$$

它们应当满足上述猜想。事实上，保守性（猜想 3.3）预言，只需在上同调中验证这些关系；而 M_+ 的实现是一个集中于偶数次数、维数有限的分次向量空间，因此当 N 大于总维数时，任意 N 次外幂都会将其消去。

对于 M_-，推理过程类似。注意到，实现集中在奇数次数上，并且根据 Koszul 符号规则，动机或簇上的对称幂会变为上同调群上的外幂。

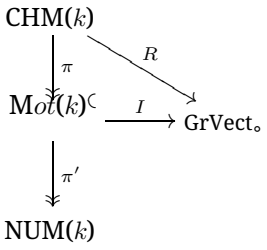
(2)（应用。）有限维这一概念不仅是一个自然的猜想，而且已被证明是有用的：它在多种运算下保持稳定，包括张量积以及取直和因子；至少对曲线而言，它成立；并且它还能推出所有张量商函子的保守性（尤其是 (0.2) 中的 π 和 π'）。这使 Kimura 得以推出布洛赫猜想适用于被

曲线乘积支配的曲面 [Kim05], , 见定理 0.1(1)。将这些保守性性质应用于弗罗贝尼乌斯后，Kahn 推出循环类映射对于有限域上的椭圆曲线乘积是单射的 [Kah03], , 见定理 0.1(2)。

4. 例

本节讨论动机的例子。这些例子分为三个小节。第一小节介绍一些经典情形，在这些情形中，前一节的猜想得到了验证。第二小节展示了不同实现之间一些相当有趣的微妙之处！最后一部分研究 CM 阿贝尔簇的动机。本节中的所有例子都会在文中多个地方再次出现。

我们继续使用图表 (0.2):



而 $\mathfrak{h}(X)$ 表示簇 X 的动机，在不同范畴中均如此；若有必要，将注明所涉及的范畴。

第3节猜想的一些显然结果。

命题 4.1。 设 $\mathfrak{h}(X) \in \mathcal{M}ot(k)$ 是一个同调动机， f 是 $\mathfrak{h}(X)$ 的一个自同态，而 $p_n(f)$ 是 f 作用于 $H^n(X)$时的特征多项式。假设对所有 $n \neq m$， $p_n(f)$ 与 $p_m(f)$ 互素。那么， $\mathfrak{h}(X)$ 具有 ***Künneth*** 分解

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_{n=0} \mathfrak{h}^n(X),$$

参见猜想 3.9。此外，该分解的投影算子属于代数 $\mathbb{Q}[f]$。

注记 4.2. (1) 证明是初等的：对 $p_n(f)$ 和 $\prod_{n\neq m} p_m(f)$ 应用贝祖恒等式，参见 [KM74]。

(2) 这个命题可应用于定义在有限域上的任意光滑射影簇及其弗罗贝尼乌斯态射 f：根据韦伊猜想，多项式 $p_n(f)$ 两两互素。

这个命题也适用于定义在任意域上的阿贝尔簇。在这种情形下， f 是乘以一个整数 N 的映射。

（3）这些结果不能自动推广为 Chow–Künneth 分解（猜想 3.1）；特别是对于有限域上的簇，这仍是一个开放问题。

对于阿贝尔簇 [DM91], , 我们有一个 Chow–Künneth 分解，但这需要使用傅里叶变换，见第 8 节。

命题 4.3. 设 M 是一个同调动机， f 是 M的一个自同态。那么 f 可逆，当且仅当它在上同调上的作用可逆。

注 4.4. (1) 证明是初等的：应用凯莱–哈密顿定理即可。

(2) 这个问题对函子在自守态射情形下的保守性猜想 3.3 给出了肯定的回答

$$I : \mathcal{M}ot(k) \longrightarrow \mathrm{GrVect}$$

。我们可以按如下方式将这一结果部分推广到任意态射。

命题 4.5. 设 M 和 N 是两个同调动机，并考虑两个映射 $f\colon M \to N$和 $g\colon N \to M$。假设 $I(f)$和 $I(g)$是上同调中的同构，那么 f 和 g 是同构。

注 4.6. (1) 这是将命题 4.3 应用于自同态 fg和 gf的结果。

(2) 请注意，这并非关于 I 保守性的完整解答：给定一个态射 f，必须能够构造一个反向的态射。尽管如此，这个命题仍然很有用，正如下述命题以及第 5 节所示。

命题 4.7. ***(Kleiman*** [Kle68]***)*** 设 A 为一个维数为 g的阿贝尔簇。那么，它的同调动机存在一个 ***Künneth*** 分解

$$\mathfrak{h}(A) = \bigoplus_{n=0}^{2g} \mathfrak{h}^n(A)$$

以及一个分次 ***Hopf*** 代数动机的同构

$$\bigoplus_{n=0}^{2g} \mathfrak{h}^n(A) = \bigoplus_{n=0}^{2g} \mathrm{Sym}^n \mathfrak{h}^1(A)$$

它在上同调中给出了经典同构[10] $H^*(A) = \Lambda^* H^1(A)$。此外，$A$ 满足 ***Lefschetz*** 型标准猜想（猜想 3.5 和猜想3.11***)***

$$\mathfrak{h}^{2g-n}(A)(g) = \mathfrak{h}^n(A)^\vee \cong \mathfrak{h}^n(A)(n).$$

证明。 Künneth 分解已在注记 4.2(3) 中讨论过。

考虑对角嵌入 $\Delta : A \hookrightarrow A^n$。它诱导出一个映射$\mathfrak{h}(\Delta) : \mathfrak{h}(A)^{\otimes n} \to \mathfrak{h}(A)$，从而得到一个映射 $\mathrm{Sym}^n \mathfrak{h}^1(A) \to \mathfrak{h}^n(A)$。类似地，我们从求和态射 $s : A^n \to A$ 出发，构造一个反向映射。

10. 从对称幂到交替幂的变换与注释 3.21(1) 中的相同。

现在可以应用命题 4.5，推出 $\bigoplus_{n=0}^{2g}\mathfrak{h}^n(A) \cong \bigoplus_{n=0}^{2g}\mathrm{Sym}^n\mathfrak{h}^1(A)$。根据这些结构的定义，上述构造的映射保持霍普夫代数结构；事实上，正是霍普夫代数结构促使这些映射在上同调中成为同构。

等式 $\mathfrak{h}^{2g-n}(A)(g) = \mathfrak{h}^n(A)^\vee$ 由庞加莱对偶给出，见注 3.10。对于自对偶性 $\mathfrak{h}^n(A)^\vee \cong \mathfrak{h}^n(A)(n)$，借助等式 $\mathrm{Sym}^n\mathfrak{h}^1(A) = \mathfrak{h}^n(A)$，可将问题归结为情形 $n = 1$。

对于 $\mathfrak{h}^1(A)^\vee \cong \mathfrak{h}^1(A)(1)$，再次应用命题 4.5。一个态射由 Lefschetz 算子 $L^{g-1}: \mathfrak{h}^1(A) \to \mathfrak{h}^{2g-1}(A)(g-1) = \mathfrak{h}^1(A)^\vee(-1)$ 给出。对于另一个方向，取 A 与其对偶阿贝尔簇 $A^\vee$ 之间的一个同源，从而得到一个同构 $\mathfrak{h}^1(A) \cong \mathfrak{h}^1(A^\vee)$。于是需要构造一个从 $\mathfrak{h}^1(A)^\vee(-1)$ 到 $\mathfrak{h}^1(A^\vee)$ 的态射。这等价于在 $A \times A^\vee$ 上给出一个除子，庞加莱除子适用。□

注 4.8. 上述命题的结果在 $\mathrm{CHM}(k)$ 中也成立，但证明更为微妙，它依赖于阿贝尔簇的肖氏环上的傅里叶变换；另见第 8 节。

动机与比较定理。

例 4.9. （超奇异约化与 $\mathbb{Q}$-结构。）设 S 是一张 Picard 秩达到最大值的复 K3 曲面，并选取一个良约化素数 p，使得约化 S_p 为超奇异。带有 $p \equiv -1 \pmod 4$ 的费马四次曲面就是这样一个例子 [SK79]。在这种情形下，同调动机满足

$$\mathfrak{h}(S) = \mathbb{1} \oplus \mathfrak{h}^2(S_0) \oplus \mathbb{1}(-2) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}^2(S_0) = \mathbb{1}(-1)^{\oplus 20} \oplus \mathfrak{h}^{2,\mathrm{tr}}(S).$$

动机 $\mathfrak{h}^{2,\mathrm{tr}}(S)$ 称为超越动机。其奇异实现是一个维数为 2、类型为 (0，2) 的霍奇结构。其模 p 约化与 $\mathbb{1}(-1)^{\oplus 2}$ 同构。

记 M 为动机 $\mathfrak{h}^{2,\mathrm{tr}}(S)(1)$，$V_B$ 为其奇异实现，M_p 为其模 p 约化，以及 Z_p 为特征 p 下的代数类，也就是说 $Z_p = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, M_p)$。注意，$V_B$ 和 Z_p 是维数为 2 的 $\mathbb{Q}$-向量空间。

考虑以下同一化

$$V_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell = R_\ell(M_0) = R_\ell(M_p) = Z_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell, \tag{4.1}$$

其中，第一个同一化由奇异上同调与 ℓ-进上同调之间的 Artin 比较定理给出，第二个同一化来自光滑适当基变换定理，最后一个则来自超奇异性。我们可以将同一化 $V_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell = Z_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ 视为一个周期同构。正是这一观点启发了第7节所介绍的工作。

自然会问，在这一恒等态射下，两个 $\mathbb{Q}$-结构 V_B 和 Z_p 是否保持不变。下面解释为什么答案是否定的。如果考虑 V_B 和 Z_p 上的杯积，便可得到两个 $\mathbb{Q}$-二次型 q_B 和 q_Z。如果这两个空间相等，那么特别地，这两个二次型

应当是同构的。然而，根据霍奇–黎曼关系， q_B 是正定的，而根据霍奇指标定理， q_Z 是负定的[11]。

注 4.10. 沿用上例中的记号。考察 $\mathbb{Q}$-二次型 q_B 和 q_Z 不仅在无穷处，而且在 $\mathbb{Q}$ 的其他完备化处的情形，也很有意思。恒等式 (4.1) 表明，对任意 $\ell \neq p$，都有 $q_B \otimes \mathbb{Q}_\ell = q_Z \otimes \mathbb{Q}_\ell$。唯一尚待确定的地方是 p。然而，它可由其他地方[12]确定，尤其是 $q_B \otimes \mathbb{Q}_p \neq q_Z \otimes \mathbb{Q}_p$，因为$q_B \otimes \mathbb{R} \neq q_Z \otimes \mathbb{R}$。

一个有趣的注：注意到二次型 q_Z 能够识别素数 p；事实上， p是唯一满足 $q_B \otimes \mathbb{Q}_p \neq q_Z \otimes \mathbb{Q}_p$的素数。特别地，如果让 p 遍历所有超奇异约化的素数，就会得到彼此不同的 $\mathbb{Q}$-二次型。

更严谨地说，注意到 $\mathbb{Q}_p$-空间 $V_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$和 $Z_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$有上同调解释：由 Artin 比较定理， $V_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ 同构于 M的 p-进实现，而 $Z_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ 是 M_p的晶体实现的 Frobenius 不变部分。因此，自然会想知道，关系 $q_B \otimes \mathbb{Q}_p \neq q_Z \otimes \mathbb{Q}_p$能否通过纯粹的$p$-进方法得到，例如借助 p-进霍奇理论。答案是肯定的，相关论证将在第 6 节略作介绍。此外，这些技巧还将有助于证明正性猜想 3.7 的若干情形，另见第 6 节。

例4.11.（周期。）考虑定义在域 $\mathbb{Q}$上的动机范畴 CHM($\mathbb{Q}$)。它带有两个函子，映到 $\mathbb{Q}$-向量分次空间

$$R_B, R_{\mathrm{dR}} : \mathrm{CHM}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GrVect}_{\mathbb{Q}}$$

奇异实现（或贝蒂实现）以及代数德拉姆实现。比较定理给出一个识别

$$R_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = R_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

该识别主要由对拓扑单形上的代数微分形式进行积分所诱导。该识别中出现的复系数称为周期，人们预期它们尽可能具有超越性。

坦纳克形式体系表明，幺半函子同构的存在性

$$R_B \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} \cong R_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$$

（但我们尚不知道如何显式构造其中一个）。然而，我们将证明， R_B 与R_{dR} 之间不可能存在幺半同构，甚至有

$$R_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \ncong R_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

为证明这一点，只需找到一个动机 M，并赋予一个映射

$$q : \mathrm{Sym}^2 M \longrightarrow \mathbb{I}$$

11. 分别参见定义 2.6 和猜想 3.15；后者对于除子已为人所知。其中出现的二次型由杯积经符号变换得到。12. 这由希尔伯特符号的乘积公式推出，论证将在第 6 节详述。

使得实现 $R_B(q)$ 和 $R_{\mathrm{dR}}(q)$ 是两个符号不同的二次型。

例如，可以取 M，使得 $R_B(M)$ 是权 0、类型为 $(-1,\ 1)$ 和 $(0,\ 0)$ 的霍奇结构，并取 q，使得 $R_B(q)$ 是 $R_B(M)$ 的极化，见定义 2.6。那么，二次型 $R_B(q)$ 的符号为 $(\dim\ R_B(M)^{0,0}, 2\cdot\dim\ R_B(M)^{-1,\ 1})$。

另一方面，实现 $R_{\mathrm{dR}}(q)$ 保持德拉姆滤过，因此空间 $\mathrm{Fil}^1 R_{\mathrm{dR}}(q)$ 是迷向的，这迫使 $R_{\mathrm{dR}}(q)$ 的符号 $(s_+,\ s_-)$ 满足 $s_+ \geq \dim \mathrm{Fil}^1 R_{\mathrm{dR}}(q)$。然而，$\dim \mathrm{Fil}^1 R_{\mathrm{dR}}(q) = \dim\ R_B(M)^{-1,\ 1}$，因此只需找到一个满足 $\dim\ R_B(M)^{-1,\ 1} > \dim\ R_B(M)^{0,0}$ 的例子即可得出结论。

这类例子存在于由方程为 C_n：$y^2 = x^n - 1$ 的曲线生成的范畴中，参见 [Sch 15]。更确切地说，对于某些整数 n, N，以及一个适当地作用于 C_n^N 且定义在 $\mathbb{Q}$ 上的有限群 G，M 将是动机 $\mathfrak{h}^2(C_n^N)(1)$ 的 G-不变部分。

此外，请注意，根据德拉姆比较定理，$R_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$同构于底层复点集的经典德拉姆上同调，它是借助具有实系数的 C^∞ 微分形式计算的。特别地，我们刚刚证明，对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的代数簇，该簇的代数 de Rham 上同调与复点集的经典德拉姆上同调之间不可能存在自然同构。

CM 阿贝尔簇的动机。命题 4.7 表明，阿贝尔簇 A 的动机由其 $\mathfrak{h}^1(A)$ 控制。若 A 是 CM阿贝尔簇，则可以利用 CM作用分解 $\mathfrak{h}^1(A)$，从而分解 A的整个动机。这一分解非常有用：Clozel 早已利用它证明了关于 hom =NUM 猜想的一个结果（见定理 5.4），我们也将利用它研究保守性与正性猜想，见第 5 节和第 6 节。

另一方面，尽管这一分解很初等，但初读时并不容易理解，建议随着它在各种应用中的展开而反复阅读。

例 4.12。设 A 是定义在有限域上的 g 维简单阿贝尔簇。固定一个极化，并考虑 $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$. 上诱导的 Rosati 对合。根据 Honda–Tate，存在一个次数为 $2g$ 的 CM 域以及一个嵌入$F \subset \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$，使得该对合保持 F不变，并在 F上表现为复共轭。

考虑 F 在范畴 $\mathrm{CHM}(k)_{\widetilde{F}}$ 中的动机 $\mathfrak{h}^1(A)$ 上的作用，其中该范畴由系数取自 F的伽罗瓦闭包 $\widetilde{F}$ 的肖氏动机组成。它将该动机分解为

$$\mathfrak{h}^1(A) = L_1 \oplus \ldots \oplus L_{2g} \tag{4.2}$$

分解为 $2g$ 个由伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/\mathbb{Q})$ 的作用互相置换的因子的和，并且每个因子的实现都是 F的作用下的一条特征直线。此外，极化的选择诱导出一个映射到 $\mathrm{CHM}(k)$ 的态射

$$q_1 : \mathfrak{h}^1(A) \otimes \mathfrak{h}^1(A) \longrightarrow \mathbb{I}(-1).$$

13. 注意，我们可能想到的第一个候选对象，即 $M = \mathfrak{h}^2(S)(1)$，其中 S 是一个曲面，并不可行。事实上，对于曲面，成立的是相反的不等式：$h^{1,1} > h^{0,2}$，参见 [Sch15，命题 22]。

相对于这一配对，一条特征直线与所有其他特征直线正交，唯独其复共轭除外。

借助公式 $\mathfrak{h}^n(A) = \mathrm{Sym}^n \mathfrak{h}^1(A)$，可以推导出 $\mathrm{CHM}(k)_{\widetilde{F}}$ 中 $\mathfrak{h}^n(A)$ 的分解，使其成为实现维数为一的因子之和：每个因子都对应于若干不同 L_i 的 n 张量积。此外，配对 $q_n = \mathrm{Sym}^n q_1$ 使得一条这样的直线的实现与其他所有直线正交，唯独其复共轭除外。

注记 4.13. 沿用上例中的记号。

(1) 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}$ 是弗罗贝尼乌斯在 $\mathfrak{h}^1(A)$ 上作用的特征值，按重数计。适当重新编号后，有 $\alpha_i \cdot \alpha_{2g-i} = q$，其中 q 是基域的基数。这种特征值对称性源自完美配对 q_1。

$\mathfrak{h}^n(A)$ 上弗罗贝尼乌斯作用的特征值，是由互不相同的 n 个 α_i 所有可能的乘积给出的。因此，$H^{2n}(A)(n)$ 中伽罗瓦不变类空间的维数，等于满足下列条件的集合 $\{\alpha_{i_1}、\ldots\ldots、\alpha_{i_{2n}}\}$ 的数量：

$$\alpha_{i_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_{2n}} = q^n. \tag{4.3}$$

Tate 猜想预言，$H^{2n}(A)(n)$ 中与此类集合相对应的每条特征直线都包含一个代数类。

对于除子，这一猜想已得到证明。因此，一条特征直线包含除子的交，当且仅当集合 $\alpha_{i_1}、\ldots\ldots、\alpha_{i_{2n}}$ 满足

$$\alpha_{i_j} \cdot \alpha_{i_{2n-j}} = q, \quad \forall j, \tag{4.4}$$

不妨重新编号。

(2) 设 F_0 是 F 的最大全实子域。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(F/F_0)$ 的阶为二，由复共轭生成。其作用将上例中的分解拼合为 $\mathrm{CHM}(k)_{F_0}$ 范畴中 $\mathfrak{h}^n(A)$ 的一个分解，该范畴由系数取自F_0的肖氏动机构成。此分解关于配对 q_n 是正交的。所得因子的秩为一或二。

(3) 伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ 的作用将上述例子的分解拼合为有理系数的肖动机范畴 $\mathrm{CHM}(k)$ 中 $\mathfrak{h}^n(A)$ 的一个分解。该分解关于配对 q_n 是正交的。所得因子的秩各不相同，且至多为 $2g$。

根据点 (1) 的描述，我们注意到 $\mathfrak{h}^{2n}(A)(n)$ 的每个因子都属于以下三个范畴之一：
(a) 因子的实现由一些类生成，而这些类都是除子的交；(b) 因子的实现是弗罗贝尼乌斯不变的，但不包含任何除子交；(c) 作用于因子的实现上的弗罗贝尼乌斯没有不动向量。

对于代数循环问题，最有趣的主要是 (b) 类。如果 A 的维数为四，这类因子的秩总是二。要证明这一点，需要研究满足 (4.3) 但不满足 (4.4) 的四元组。这是一项初等研究，但其组合结构颇为微妙；详情见 [Anc21, §7] 。

5. 自对偶性与保守性

本节讨论保守性与自对偶性的猜想 3.3 和 3.5，以及关于阿贝尔簇可以得到的结果。我们将记

$$\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}, \quad \mathcal{M}ot(k)^{\mathrm{ab}} \quad \text{et} \quad \mathrm{NUM}(k)^{\mathrm{ab}}$$

由阿贝尔簇的动机生成的动机范畴。

我们首先回顾 Jannsen 半单性和 Kimura 幂零性定理的基本定理，然后由此推出 CHM(k)$^{\mathrm{ab}}$ 的猜想 3.3 和 3.5，其中 $k = \mathbb{C}$。

第二部分将解释 [Anc22] 的内容，该文研究了关于 $k = \mathbb{F}_q$ 的这些猜想。我们需要将 Jannsen 和 Kimura 的定理与例 4.12 中由复乘诱导的分解结合起来。这种方法受到 Clozel [Clo99] 一项工作的启发，我们也会对其进行回顾。

定理 5.1. *(Jannsen* [Jan07]*)* 数值动机的范畴$\mathrm{NUM}(k)$ 是半单的。

定理 5.2. *(Kimura*–奥沙利文 [Kim05,O'S05]*)* 投影函子的核

$$\pi_{\mathrm{num}} : \mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathrm{NUM}(k)^{\mathrm{ab}}$$

是幂零的。特别地，函子 π_{num} 是保守的，并且$\mathrm{NUM}(k)^{\mathrm{ab}}$ 中的每个分解都可提升为$\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$中的一个分解。如果将$\mathrm{NUM}(k)^{\mathrm{ab}}$ 替换为$\mathcal{M}ot(k)^{\mathrm{ab}}$ （或任意张量商范畴），该结论仍然成立。

命题 5.3. 自对偶猜想3.5 和猜想$\mathrm{hom} = \mathrm{num}$对$\mathrm{CHM}(\mathbb{C})^{\mathrm{ab}}$中的所有动机均成立。此外，奇异实现函子

$$R : \mathrm{CHM}(\mathbb{C})^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathrm{GrVect}_{\mathbb{Q}}$$

是保守的（参见猜想3.3）。

证明。 Lefschetz 型标准猜想对阿贝尔簇成立（命题 4.7）。在零特征下，可由此推出 hom =num（注 3.17）。

此外，可以在 $\mathfrak{h}^n(A)$ 上赋予一个配对

$$\mathfrak{h}^n(A) \otimes \mathfrak{h}^n(A) \to \mathbb{I}(-n)$$

其奇异实现是一种极化（命题 3.14）。由此可得，对于同调动机 $\mathfrak{h}^n(A)$的任意直和因子 M，配对在 M 上的限制诱导出一个同构 $M \cong M^\vee(-n)$。（这一事实由命题 2.13 推出，而我们使用该命题的关键之处在于，动机定义在

有理数域 $\mathbb{C}$ 上。）同调动机的自对偶性也由定理 5.2 提升到 $\mathrm{CHM}(\mathbb{C})^{\mathrm{ab}}$。

现在我们转而讨论保守性，并考虑图表 (0.2)。同样，根据定理 5.2，只需证明同调动机实现 $I : \mathrm{M}ot(\mathbb{C})^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{GrVect}_{\mathbb{Q}}$ 是保守的。另一方面，在证明开头推出的猜想 hom $=$num 表明，范畴 $\mathrm{M}ot(\mathbb{C})^{\mathrm{ab}}$ 与 $\mathrm{NUM}(\mathbb{C})^{\mathrm{ab}}$ 相同。特别地，根据定理 5.1，I 是半单范畴之间的函子，因此它是保守的。□

本节后续部分将在有限域 $k = \mathbb{F}_q$ 上进行。上文证明中用于替代极化的是复乘，通过例 4.12 中的分解来实现。

定理 5.4。*(Clozel* [Clo99]*)* 设 A 是有限域上的阿贝尔簇。那么存在无穷多个素数 ℓ，使得数值等价与同调等价在 ℓ-进上同调上重合。

~证明。 我们将问题归结为 A 是单的情形。设 $\mathbb{Q} \subset F_0 \subset F$ 为例 4.12 和注 4.13(2) 中引入的数域。（这些域取决于 A，更确切地说，取决于在其自同态中选择一个 CM 域。）

固定一个素数 ℓ，使得 F_0 在 ℓ 上方存在一个位 λ，且 ~ 的完备化 $(F_0)_\lambda$ 不包含 F。我们将证明这样的 ℓ 满足要求。注意，这样的 ℓ 有无穷多个，并且可以利用切博塔廖夫定理估计它们的密度。

考虑余维为 n 的代数类，将其视为 $\mathfrak{h}^{2n}(A)(n)$ 中的类，并令 q_{2n} 为例 4.12 中构造的配对。由于它非退化，只需证明：对每个非零代数类 γ，都存在一个代数类 δ，使得 $q_{2n}(\gamma, \delta) \neq 0$。可以验证，这个问题在改变系数后仍然成立，因此我们考虑系数取在 F_0 中的代数循环，以及取值于 $(F_0)_\lambda$ 向量空间的 λ-进实现 R_λ。在这种情形下，我们使用注 4.13(2) 中将其分解为平面和直线的分解。于是只需考虑其中一个因子 M，并假设 γ 属于 M。在这种情形下，若二次型 q_{2n} 在 M 上没有各向同性向量，则选择 $\delta = \gamma$ 即可。

如果 M 的维数为一，这可由以下事实得出：q_{2n} 在分解的每个因子上都非退化，因此在 M上也非退化。如果 M 的维数为二，那么它至多有两条各向同性直线。这两条直线至少在 $M \otimes_{F_0} F$ 上存在：它们就是例 4.12 中按直线作出的分解。我们来证明这些直线不包含在（F_0）$_\lambda$-向量空间 $R_\lambda(M)$中。为此，只需在范畴 $\mathrm{CHM}(k)_{F_0}$ 中构造一个自同态 f： $M \to M$，使这~条直线成为特征直线，且对应的特征值属于 $F - F_0$。由此便可得到所需结论，因为（F_0）$_\lambda$ 不包含 F。

这个 f 的构造如下。考虑分解式（4.2）。不妨重新编号，使动机 M 具有如下形式

$$M = (L_1 \otimes \ldots \otimes L_{2n}) \oplus (\bar{L}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{L}_{2n}),$$

其中 $\bar{\cdot}$表示复共轭。为 L_i固定一个次序，这样便可在范畴 $\mathrm{CHM}(k)_{F_0}$中将M 实现为 $\mathfrak{h}^1(A)^{\otimes 2n}$ 的直和因子。于是可以

通过 $F \subset \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ 的一个生成元在张量积的第一项上的作用，以及在其余 $2n-1$ 上的恒等映射，来定义 f。□

命题 5.5。自对偶猜想 3.5 对权为偶数且实现维数为一的$\mathrm{CHM}(\mathbb{F}_q)^{\mathrm{ab}}$ 动机成立。

证明。设 X 是这样的动机，n 是其（偶）权。存在一个阿贝尔簇 A，使得 X 是 $\mathfrak{h}^n(A)$ 的直和因子。

我们要证明 $X \cong X^\vee(-n)$。根据定理 5.2，只需证明$\pi_{\mathrm{num}}(X) \cong \pi_{\mathrm{num}}(X)^\vee(-n)$。由 Jannsen 半单性，只需证明 $\mathrm{Hom}(\pi_{\mathrm{num}}(X)\ \pi_{\mathrm{num}}(X)^\vee(-n)) \neq 0$。这一结论可以在标量扩张后证明。将标量扩张到注 4.13(2)中的域 F_0 。

我们使用同一条注中的分解。由半单性，可假设 X 是该分解中某个因子 M 的直和因子。回想一下，我们在 M 上有一个非退化配对 q_n，且 M 的维数为一或二。

若 M 的维数为一，则 $X = M$，问题便已解决。若 M 的维数为二，则通过定理 5.2 回到同调动机。这样便可使用实现，只需证明限制在作为 X 之实现的直线上的配对仍然非退化，换言之，该直线不是迷向的。（这里会用到权为偶数这一点。特别要注意，若权为奇数，则 M 上的配对是交替的，因此任意直线都是迷向的。）

难点在于，同调动机范畴原则上取决于所选的上同调，但好消息是，只需研究一种经过恰当选择的上同调。因此，我们像定理 5.4 的证明中那样，使用 λ-进上同调，并采用相同的 λ 选择：在那里我们已经证明，M 的实现不含迷向向量。□

定理 5.6。 ℓ-进实现函子

$$R_\ell : \mathrm{CHM}(\mathbb{F}_q)^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathrm{GrVect}_{\mathbb{Q}_\ell}$$

是保守的。

证明。设 $f\colon X \to Y$ 是到 $\mathrm{CHM}(\mathbb{F}_q)^{\mathrm{ab}}$ 中的一个映射，使得 $R_\ell(f) : R_\ell(X) \to R_\ell(Y)$是一个同构。我们要证明 f 也是一个同构。

由定理 5.2，只需在同调等价下进行讨论。利用 Künneth 分解，只需假设 $R_\ell(X)$和 $R_\ell(Y)$集中在同一个上同调次数。

首先假设 $R_\ell(X)$和 $R_\ell(Y)$的维数均为一。我们有映射

$$\mathbb{I} \longrightarrow Y \otimes X^\vee \cong Y^\vee \otimes X \longrightarrow \mathbb{I},$$

其中，第一个和最后一个映射由f 经伴随性得到，而中间的同构来自命题 5.5。

在这种情形下，上述映射的实现都是同构，根据命题 4.5，有 $\mathbb{I} \cong Y \otimes X^\vee$ 因此 $X \cong Y$。

现在考虑一般情形：设 d 为 $R_\ell(X)$ 的维数，且$R_\ell(Y)$。假设它们的上同调次数为偶数（否则在下文中需将外积替换为对称积）。映射

$$\Lambda^d f : \Lambda^d X \longrightarrow \Lambda^d Y$$

归结为上文讨论过的维数为一的特殊情形。因此它是一个同构，并且我们有映射 $(\Lambda^d f)^{-1}$。

现在可以通过以下方式构造映射 $g : Y \to X$

$$Y \cong \Lambda^d Y \otimes (\Lambda^{d-1} Y)^\vee \longrightarrow \Lambda^d X \otimes (\Lambda^{d-1} X)^\vee \cong X$$

其中，第一个和最后一个同构来自下面的引理，而中间的映射是 $(\Lambda^d f)^{-1} \otimes (\Lambda^{d-1} f)^\vee$.。根据构造， $R_\ell(g)$ 是一个同构，因此由命题 4.5 得证。□

引理 5.7. *(*[O'S05，引理 3。2]*)* 设 M 是一个同调动机，其实现集中在一个偶数次的次数上，且维数为 d，则

$$M \cong \Lambda^d M \otimes (\Lambda^{d-1} M)^\vee$$

证明。 动机 $\Lambda^d M$ 是 $M \otimes \Lambda^{d-1} M$的一个直和因子。这给出了 M 与 $\Lambda^d M \otimes (\Lambda^{d-1} M)^\vee$ 之间两个方向的映射。它们的实现是一个同构，由命题 4.5 得证。□

6. 正特征下的正性

本节研究正性猜想 3.7。主要结果指出，对于维数为 2 且具有超奇异约化的动机，该猜想成立（定理 6.1）。随后，我们说明如何应用这一结果，推导出某些簇满足 Hodge 型标准猜想 3.15，例如维数为四的阿贝尔簇。最后，我们讨论维数 2 这一假设的作用。

定理 6.1。 设 M 是定义在特征为p 的域 k 上的一个同调动机，且 $q : \mathrm{Sym}^2 M \to \mathbb{I}$ 是到$\mathcal{M}ot(k)$中的一个态射。假设 q 是一个映射 $\widetilde{q} : \mathrm{Sym}^2 \widetilde{M} \to \mathbb{I}$ 模 p 约化所得，该映射定义在零特征下。

将 q_Z 定义为 q 在 M的所有代数类 $Z(M) = \mathrm{Hom}(\mathbb{I}, M)$ 上的限制，并将 q_B 定义为 $\widetilde{q}$的奇异实现。

假设 q_B 是一个极化，并假设有 $M \cong \mathbb{I}^{\oplus 2}$。那么 q_Z 是正定的。

注 6.2。 （关于假设：可提升性与秩 2。）存在能够提升到零特征的动机并不罕见。例如，预计有限域上的每个动机都可以提升，因为 Tate 猜想预言这样的动机应当是阿贝尔型的。一般而言，即使一个动机可以提升，其代数类也未必能提升到零特征，这使得正性结果变得困难，因为它们无法由极化的正性性质推出，参见定义 2.6。

上述定理中的限制性假设是二维。利用这一结果推导某些簇的霍奇型标准猜想的方法如下：尽可能地分解给定簇的动机。有些因子不含代数类，另一些

因子则只含某些代数类，对这些类，可以从已知情形推出霍奇型标准猜想：例如，这些类可以提升到特征零，或由除子构造而成。最后，有时仍会剩下含有无法归结为已知情形的代数类的因子。此时，关键是找到一些簇，使这些剩余因子的维数为二维。下面的推论给出了一个例子。

推论 6.3. 设 A是一个定义在特征为 p的域上的四维阿贝尔簇。那么

(1) 霍奇型标准猜想 3.15 对 A成立；*(2)* 交叉乘积的符号为 $(\rho_2 - \rho_1 + 1; \rho_1 - 1)$，其中 $\rho_n = \text{维数}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{CH}^2(A)/\mathrm{num})$；*(3)* 存在无穷多个素数 $\ell \neq p$，使得 A 上的数值等价与ℓ-进上同调的同调等价一致。$\mathrm{CH}^2(A)/\mathrm{num} \times \mathrm{CH}^2(A)/\mathrm{num} \longrightarrow \mathbb{Q}$

证明。 通过特化论证，我们可以假设定义域是有限域。于是可以使用注记 4.13(3)中的分解。对于霍奇型标准猜想 3.15 而言，先验上令人困惑的因子是同一注记中记号为 (b) 的那些因子。事实上，所有四维阿贝尔簇中的这些因子的维数都确实是二。这是一个小小的组合学奇迹，详情见 [Anc21, §7] ，或参见注 4.13(3)以了解概述。

点 (1) 和 (2) 实际上是等价的。这一等价性并不依赖于 A 是阿贝尔簇这一事实，而只依赖于四维。它可由原始部分的分解推出。

若定义域是有限域，则点 (3) 是 Clozel 的定理 5.4 的一个特例。要归约到有限域情形，可进行特化并使用命题 3.14。□

注 6.4。 (1)（高维。）对于任意维数的阿贝尔簇，还可以使用注 4.13(3) 中的分解。一般而言，该注中的因子 (b) 的维数会大于二。不过，仍可找到一些零星的例子，其中这些 (b) 型因子的秩为 2，并借助定理 6.1 推出霍奇型标准猜想。Koshikawa [Kos22] 最近对此进行了研究。

(2)（超奇异性与 Frobenius 不变性。）请注意，定理 6.1 的超奇异性假设 $M \cong \mathbb{I}^{\oplus 2}$ 与因子 (b) 的刻画之间存在细微差异。首先请注意，在 Tate 猜想成立的条件下，这两种描述是等价的。

无条件地，原则上，在（b）型因子中，某些因子可能不具有代数类：在研究霍奇型标准猜想时，可以忽略这些因子。对于其余因子，我们需要证明，只要某个因子具有代数类，它就

由代数类生成。利用 CM作用可以证明这一点，但该论证需要使用数值等价。若使用同调等价，则会遇到类似问题，而这些问题正是导致 Clozel 的定理 5.4 中的论证无法适用于任意素数 ℓ 的原因。

定义6.5。 (希尔伯特符号。)设 q 是一个 $\mathbb{Q}$维二次型，且 $\nu = 2, 3, 5, \ldots\ldots, \infty$ 是 $\mathbb{Q}$的一个素位。我们将 q 在 ν 处的希尔伯特符号$\varepsilon_\nu(q)$定义为：若 $q(x, y) = z^2$ 在完备化 $\mathbb{Q}_\nu$ 中有非零解，则其值为 $+1$ ；否则为 -1 。

命题 6.6。 沿用定理6.1中的记号，并设 n 是唯一的整数$\widetilde{\ }$，使得 M 的奇异实现是一个类型为$(-n, +n)$的霍奇结构。那么， q_Z 正定当且仅当

$$\varepsilon_p(q_Z) = (-1)^n \varepsilon_p(q_B), \tag{6.1}$$

这又等价于： $q_Z \otimes \mathbb{Q}_p$ 同构于 $q_B \otimes \mathbb{Q}_p$ ， 当且仅当 n为偶数。

注6.7. 这个命题的证明思路已在例 4.9 及其后的注中介绍。此外，这个命题是必须假设维数为二的关键之处。

证明. 首先注意到，对于任意素数 $\ell \neq p$，都有 $q_B \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong q_Z \otimes \mathbb{Q}_\ell$，这是 Artin 比较定理与上同调中光滑真基变换的 ℓ-进版本的结合。特别地，这意味着 $\varepsilon_\ell(q_Z) = \varepsilon_\ell(q_B)$，并且 q_B 与 q_Z的判别式在 $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$, 中也相同，因为一个有理数只要在几乎所有完备化中是平方，它就是平方。

另一方面，根据定义 2.6，有 q_B 是 $(-1)^n$-正定的。这特别意味着 $\varepsilon_\infty(q_B) = (-1)^n$，且 q_B的判别式为正。因此可得 q_Z 的判别式为正；又因为其秩为二，所以 q_Z 是正定或负定的。于是， q_Z 的正性等价于 $\varepsilon_\infty(q_Z) = +1$。

利用希尔伯特符号上的乘积公式，我们有

$$\prod_\nu \varepsilon_\nu(q_Z) = 1 = \prod_\nu \varepsilon_\nu(q_B). \tag{6.2}$$

化简 ℓ-进因子后，得到 $\varepsilon_\infty(q_Z) \cdot \varepsilon_p(q_Z) = \varepsilon_\infty(q_B) \cdot \varepsilon_p(q_B)$，因此 $\varepsilon_\infty(q_Z) \cdot \varepsilon_p(q_Z) = (-1)^n \cdot \varepsilon_p(q_B)$。由此得出， $\varepsilon_\infty(q_Z) = +1$ 当且仅当公式 (6.1) 成立。

命题中的最后一个等价关系源于以下事实：两个同秩的非退化 $\mathbb{Q}_p$-二次型同构，当且仅当它们具有相同的判别式和相同的希尔伯特符号。□

定理的证明 6.1。 根据前一个命题，我们归结为一个纯粹的 p-进问题。这个问题还有一种上同调解释，可以将其转化为一个 p-进霍奇理论问题。为说明这种转化，我们定义$V_{B,\ p}$ 为 p-进 étale 实现$\sim M$ ，并定义$V_{Z,\ p}$ 为 M的晶体实现中的 Frobenius 不变部分。

这两个 $\mathbb{Q}_p$向量空间的维数均为二，且分别带有由 $\tilde{q}$和 q诱导的二次型。这两个二次型分别就是 $q_B \otimes \mathbb{Q}_p$和 $q_Z \otimes \mathbb{Q}_p$。第一个恒等关系由 Artin比较定理得出。第二个则源于 Frobenius 不变部分总是包含由代数类张成的空间，而在此情形下，根据维数，这一包含关系实际上是等式。

Faltings证明的 p-进比较定理给出了一个同构

$$V_{B,p} \otimes B_{\mathrm{cris}} = V_{Z,p} \otimes B_{\mathrm{cris}} \tag{6.3}$$

它是函子性的，并且与所有可以设想的结构相容，尤其是与二次型 q_B 和 q_Z相容。利用以下两个现象即可得出结论。

(a) 基变换矩阵可以在 $\mathrm{M}at_{2\times 2}(B_{\mathrm{cris}})$ 中计算。它仅取决于 Hodge滤过的整数 n 以及自同态代数 End($V_{B,p}$)，其中自同态作用于$V_{B,p}$ ，后者视为伽罗瓦表示。

(b) 对该矩阵的描述足以推出： $q_B \otimes \mathbb{Q}_p$ 与$q_Z \otimes \mathbb{Q}_p$ 同构，当且仅当 n 为偶数。□

现在转而描述上述证明结尾处的两个现象 (a) 和 (b)。第二个现象是初等的，而第一个则是 p-进霍奇理论的一项显著性质，使其有别于经典Hodge理论。

例 6.8. 假设有两个定义在 $\mathbb{R}$ 上的二次型，其维数为二 $q_1(x,\ y) = a_1x^2 + b_1y^2$ 和 $q_2(x,\ y) = a_2x^2 + b_2y^2$，以及一个恒等态射$q_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = q_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$。假设我们知道该恒等态射的基变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

那么我们就可以推导出 q_1 和 q_2 不同构（一个是负定的，另一个是正定的）。定理 6.1 证明中 (b) 点处的论证同样非常初等，且与这个例子相似，只需将 $\mathbb{R}$和 $\mathbb{C}$ 替换为 $\mathbb{Q}_p$ 和 B_{cris}即可。

注6.9. （ p进比较定理与经典比较定理。） p进比较定理

$$R_p \otimes B_{\mathrm{cris}} = R_{\mathrm{cris}} \otimes B_{\mathrm{cris}}, \tag{6.4}$$

其中 (6.3) 是一个实例，常被视为奇异上同调与代数 de Rham 上同调之间比较定理的 p-进类比

$$R_B \otimes \mathbb{C} = R_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C} \tag{6.5}$$

正如例4.11中所讨论的。事实上， p-进比较定理相较于其经典版本具有一些优势，下面列出这些优势。（正是由于这些性质，我们才能计算某些基变换矩阵，并确定其各个元素之间的关系，参见定理 6.1证明中的(a)点。）

我们回顾一下，某个动机 M 的经典实现具有额外的结构。特别地， $R_{\mathrm{dR}}(M)$ 带有一个滤过， $R_B(M)$带有一个霍奇结构， $R_p(M)$带有某个 p-进域的伽罗瓦群作用，而 $R_{\mathrm{cris}}(M)$是一个 φ-滤过模，即它带有一个滤过以及绝对弗罗贝尼乌斯 φ 的作用。

还要指出，在比较（6.4）或（6.5）中出现的矩阵系数称为周期。

(1) 环 B_{cris} 带有绝对弗罗贝尼乌斯 φ 和 $\mathbb{Q}_p$ 的绝对伽罗瓦群的作用，以及一个滤过 [14]。比较（6.4）保持这三种结构。当我们拥有足够具体的上同调对象（例如（6.3）中的对象）时，就可以明确描述这些结构在周期上的表现。

然而，域 $\mathbb{C}$ 并没有配备可模拟滤过或霍奇结构的结构。了解 R_B（M）底层的霍奇结构，并不能帮助我们获得关于动机 M 的复周期的信息。

(2) 在 [Fal89]，中，Faltings 证明了某些称为可容许的 φ-滤过模与某些称为晶体的 p-进域伽罗瓦群表示之间存在范畴等价。几何来源的模（即动机的实现）总是满足可容许性条件。

这种等价还与比较定理（6.4）相容。特别是，在 B_{cris} 中相对于 φ 和滤过具有某种特定行为的周期，必须对应于唯一一个 φ-滤过模，因此也对应于唯一一个伽罗瓦表示。换言之，与给定动机相关的 p-进周期，由其相对于两种结构——弗罗贝尼乌斯和滤过——的行为所刻画。

霍奇结构比滤过丰富得多。例如，对于同一族中的两个簇，相应的滤过向量空间会同构，而霍奇结构通常并不同构 [15]。这两种上同调结构之间不可能存在范畴等价。

（非正式地说，从复情形（6.5）过渡到 p-进情形（6.4），相当于丰富德拉姆结构并简化霍奇结构，使二者等价。事实上，晶体实现继承了德拉姆滤过，同时还具有绝对弗罗贝尼乌斯 φ的作用。另一方面，根据 Mumford–Tate猜想，霍奇结构大致等价于一个数域上的伽罗瓦表示；然而在 $R_p(M)$ 上，我们只考察其某个分解子群的作用。）

14. 有些结构是在一个更大的环中定义的，该环记作 B_{dR}。为简化说明，这里暂且忽略这一点。
15. 若考虑椭圆曲线 $E_t\colon y^2 = x(x-1)(x-t)$，其中 $t \in \mathbb{Q} - \{0,1\}$，以及动机$M_t = \mathfrak{h}^1(E)$，那么 $R_{\mathrm{dR}}(M_t)$ 就是一个带有内部直线的 $\mathbb{Q}$-维数 2 向量空间。而霍奇结构 $R_B(M_t)$ 则确定了 E_t （相差一个同源），其中既有复乘霍奇结构，也有不具复乘的霍奇结构。

（3）上一点讨论的可容许条件，借助 [CF00]，验证起来相对简单。这使得我们能够轻松构造可容许的 φ-滤过模，从而得到具有预先指定的弗罗贝尼乌斯作用和滤过的周期矩阵。

目前没有构造复周期的初等方法。复周期是代数微分形式的积分，往往难以计算。它们之间的关系由格罗滕迪克周期猜想所预言，至今仍然神秘。

总而言之，定理 6.1 证明中的(a)点是计算与(6.3)相关联的周期矩阵。计算步骤如下：先描述φ 的作用以及这些周期上的滤过（上文的(1)点），然后证明这一描述刻画了所讨论的周期（(2)点），最后构造这样的周期（(3)点）。

例 6.10.（周期的一个计算。）设 M 是定理 6.1 中的一个动机，我们希望证明它满足关系式(6.1)。这需要计算(6.3)的周期矩阵。该计算取决于整数 n（定义见命题 6.6）以及代数 End($V_{B,p}$)，即$V_{B,p}$ 作为伽罗瓦表示时的自同态代数。

假设 $n=1$：那么我们必须证明 $q_Z\otimes\mathbb{Q}_p$ 和 $q_B\otimes\mathbb{Q}_p$ 不同构，见命题 6.6。还假设 End($V_{B,\ p}$) 是域$\mathbb{Q}_{p^2}$，即 $\mathbb{Q}_p$的唯一二次非分歧扩张。由于 B_{cris} 包含所有非分歧扩张，我们便可将 (6.3) 写成

$$(V_{B,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_{p^2})\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}}B_{\mathrm{cris}}=(V_{Z,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_{p^2})\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}}B_{\mathrm{cris}}. \tag{6.6}$$

End($V_{B,\ p}$) $=\mathbb{Q}_{p^2}$ 在 $V_{B,\ p}$ 上的作用将 $V_{B,\ p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_{p^2}$ 分解为两条直线，它们被伽罗瓦群 Gal($\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p$) 互换。特别地，我们可以选取两个向量 v_B 和 w_B，它们属于这两条直线且被伽罗瓦群互换。

代数 $\mathbb{Q}_{p^2}$ 也通过 Faltings 范畴等价作用于 $V_{Z,\ p}$，另见注6.9 的第 (2) 点。于是可以用类似的方式构造 v_Z 和w_Z。此外，由于 (6.3) 与这一作用相容，存在两个周期 $\alpha,\ \beta\in B_{\mathrm{cris}}$，使得

$$\alpha v_B=v_Z\quad\text{et}\quad\beta v_B=v_Z.$$

我断言它们满足以下关系

$$\varphi(\alpha)=\beta\quad\text{et}\quad\varphi(\beta)=\alpha \tag{6.7}$$

以及

$$\alpha\in\mathrm{Fil}^1-\mathrm{Fil}^2\quad\text{et}\quad\beta\in\mathrm{Fil}^{-1}-\mathrm{Fil}^0. \tag{6.8}$$

事实上，Gal($\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p$) 由弗罗贝尼乌斯生成；另一方面，根据定义，弗罗贝尼乌斯在 $V_{B,p}$ 和 $V_{Z,p}$ 上的作用是平凡的。至于滤过上的关系，则可由这样一个事实推出：我们构造的特征直线必须是迷向的，而由 M 的晶体实现上的滤过所定义的直线也必须是迷向的，尤其是它必须与其中一条特征直线重合（经过标量扩张后）。

关系式（6.7）和（6.8）是注6.9中所解释的原理（1）的一个例子。

现在考虑$\mathbb{Q}_{p^2}$ 向量空间

$$P = \{\gamma \in B_{\mathrm{cris}}, \quad \varphi^2(\gamma) = \gamma, \quad \gamma \in \mathrm{Fil}^1 - \mathrm{Fil}^2 \quad \text{et} \quad \varphi(\gamma) \in \mathrm{Fil}^{-1} - \mathrm{Fil}^0\}.$$

我断言它的维数为 1，也就是说， P中的任意元素实际上都是上文构造的 M 的一个周期。这是注6.9 中所阐述的原理 (2) 的一个例子。

为证明这一点，我们首先注意到， M 的一个周期 α 在B_{cris}中可逆。因此可以考虑空间 $P/\alpha \subset B_{\mathrm{cris}}$，它将对应于

$$\alpha^{-1}P = \{\lambda \in B_{\mathrm{cris}}, \quad \varphi^2(\lambda) = \lambda, \quad \lambda \in \mathrm{Fil}^0 - \mathrm{Fil}^{-1} \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda) \in \mathrm{Fil}^0 - \mathrm{Fil}^{-1}\}.$$

然而，该空间由 [表示，见 Fon94，定理 5.3.7]。

最后，我们构造一个满足以下性质的周期 t

$$t, \varphi(t) \in B^*_{\mathrm{cris}}, \quad \varphi^2(t) = p \cdot t, \quad t \in \mathrm{Fil}^1 - \mathrm{Fil}^2 \quad \text{et} \quad \varphi(t) \in \mathrm{Fil}^0 - \mathrm{Fil}^1.$$

由这些性质可推得 $\alpha = t/\varphi(t) \in P$，也就是说， α 是动机 M的一个周期，并且 $\alpha \cdot \varphi(\alpha) = 1/p$。通过一个与例 6.8 中类似的初等计算，最后这个关系可推出 $q_Z \otimes \mathbb{Q}_p$ 和$q_B \otimes \mathbb{Q}_p$ 并不同构。

t 的构造遵循注6.9中解释的原则 (3)。考虑配备弗罗贝尼乌斯算子 $N = \mathbb{Q}_p^2$ 的滤过 φ-模

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

和滤过

$$\mathrm{Fil}^{-1} = N, \mathrm{Fil}^0 = \mathbb{Q}_p \cdot e_2, \mathrm{Fil}^1 = 0.$$

我们可以验证，这是一个可容许的 φ-模，因此存在与之对应的伽罗瓦表示 V，它通过 Faltings 范畴等价给出一个比较 $V \otimes B_{\mathrm{cris}} = N \otimes B_{\mathrm{cris}} = B^2_{\mathrm{cris}}$。。由于这一同一化与所有结构相容，我们看到， $V \subset B^2_{\mathrm{cris}}$ 的向量恰好具有如下形式：$(t, \varphi(t))$，其中 t 满足所需性质。

注记 6.11。（可能的推广。）论证中涉及的 p-进部分可以推广到维数更高的动机：注6.9中解释的一般原理仍然成立，例 6.10 中的计算会变得更加复杂，但仍可处理。在与 Adriano Marmora 合作的一项工作中 [AM22] ，我们据此得到了公式 (6.1) 的推广。沿着命题 6.6 的论证，这给出了无穷远处希尔伯特符号的正性 $\varepsilon_\infty(q_Z) = +1.$。遗憾的是，这一信息不足以推出 q_Z 是正定的；这是我们使用维数 2 假设的关键之处。

若要推广到高维，就需要找到一个在所有地方都定义的不变量，使得无穷处由所有有限处控制；另一方面，无穷处的不变量能够确定整个符号。一种尝试可以从伽罗瓦上同调入手：给定秩的非退化 k-二次型与 $H^1(k, O)$ 一一对应，其中 O 是一个

秩适当的正交群。映射

$$H^1(\mathbb{Q}, O) \longrightarrow \bigoplus_{\nu} H^1(\mathbb{Q}_\nu, O).$$

是单射，这就是Hasse–Minkowski定理。其非满射性恰好由希尔伯特符号乘积公式所控制。因此，前面提出的问题可以重新表述如下：映射

$$H^1(\mathbb{Q}, O) \longrightarrow \bigoplus_{\nu \neq \infty} H^1(\mathbb{Q}_\nu, O)$$

不再是单射。

于是，我们可以尝试利用当前情形中更多的几何信息，并引出更小的群。例如，问题中出现的动机不仅带有一个二次型，还带有一个 CM 域的作用。将这一数据加入问题，相当于研究正交群 O的极大环面 T 的伽罗瓦上同调。我们仍有一个局部—整体原理：映射

$$H^1(\mathbb{Q}, T) \longrightarrow \bigoplus_{\nu} H^1(\mathbb{Q}_\nu, T).$$

是单射。此时关键在于，映射也应当是单射

$$H^1(\mathbb{Q}, T) \longrightarrow \bigoplus_{\nu \neq \infty} H^1(\mathbb{Q}_\nu, T).$$

遗憾的是，它并非单射：我们可以借助Poitou–Tate正合列计算其核。

7. André式 p进周期

本节介绍一项与 Dragos Fra- tila 合作完成的工作。研究动机源于几何——研究特征 p 下的代数类——但最终结果更偏向算术：我们构造了一个 p进周期代数，以及一个用于研究它的坦纳克范畴框架。

这类周期应当与例4.11中遇到的复周期有相似之处。Fontaine 的 p进周期具有与复周期类似、甚至更强的上同调性质（注6.9）。但复周期的算术性质，例如其超越性或与特殊函数的联系，在 Fontaine 的 p进周期中并没有很好的对应物 [And90]。

在我们的工作推进过程中，我们发现 André 也建立了类似的联系 [And95, And03]。他的工作对我们完善研究很有帮助，尤其是对表述分歧条件（定义7.10）而言。

动机。 出发点源自 Tate 的一条注：Tate 猜想预言代数类的存在，却不预言哪一个上同调类是代数的 [Mil07, Aside 6.5]。对此注的一种解读是，我们对由代数类张成的 $\mathbb{Q}_\ell$向量空间有描述，但对由这些类张成的 $\mathbb{Q}$向量空间却没有描述。这是一个微妙的问题，从 Tate 关于有限域上阿贝尔簇的除子之 Tate 猜想的研究开始便已存在 [Tat66],

，近来又出现在 Charles 关于曲面K 上除子之 Tate 猜想的研究中 3 [Cha13]。

一个说明这种微妙之处的初等例子如下：某个簇的 ℓ-进上同调中存在$\mathbb{Q}_\ell$条直线，设该簇定义在有限域上，这些直线是伽罗瓦不变的，却不含有 Im cl_X 中的任何$\mathbb{Q}$向量。要构造这样的例子，取 X一个阿贝尔曲面或 K3 曲面，并固定两个线性无关的除子类 α 和 β 。现在取一个常数 $c \in \mathbb{Q}_\ell - \mathbb{Q}$。由 $\alpha + c\beta$张成的直线便符合要求。证明这一点可以利用交叉乘积及其由有理系数定义这一事实。

一种失败： ℓ进情形。 由于我们不知道如何描述代数类的 $\mathbb{Q}$向量空间，第一步是将它与另一个 $\mathbb{Q}$向量空间进行比较。这正是我们在例 4.9 及其后续注释中所做的。

取一个定义在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上的簇 X_p ，并假设它可以提升为一个定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的簇 X 。借助嵌入 $\sigma : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ ，我们得到一个识别

$$H_B^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell = H_\ell^*(X_p) \tag{7.1}$$

该识别由 Artin比较定理和光滑真基变换诱导。在此识别下，我们可以研究代数类的 $\mathbb{Q}$-向量空间 Z_p 相对于 $H_B^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 的位置。首先注意到，交集 $Z_p \cap H_B^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 包含定义在 X 上的代数类的 $\mathbb{Q}$-向量空间 Z_0。受 Grothendieck 周期猜想的不同版本启发，我们可以进一步思考：这一包含关系实际上是否为等式。

在证明这个问题在某些情形下有肯定答案之后，我们发现一般而言答案是否定的。肯定的情形包括 Picard秩最大的曲面——采用了与例 4.9 中所述类似的方法——以及 CM阿贝尔簇 [AF22, §10]。利用非 CM 椭圆曲线的平方可以构造反例。实际上，这一论证沿用了 André 的技巧；他曾借此证明，Grothendieck 周期猜想的类似命题对于 p-进比较定理并不成立。事实上，(7.1) 取决于 σ 的选择。我们可以利用定义 X 的数域的绝对伽罗瓦群来改变 σ 。在某些情形下，我们知道这个伽罗瓦群在 $H_\ell^*(X_p)$ 上的作用高度非平凡 [Ser72], ，这使得 $\mathbb{Q}$-向量空间 $H_B^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 可以发生变化，尤其是以出乎意料的方式与 Z_p 相交。

情形 p-进。 固定一个嵌入$\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$。像之前一样，取一个定义在$\overline{\mathbb{Q}}$ 上且具有良约化的簇 X ，并记其约化为 X_p。我们有德拉姆上同调与晶体上同调之间的比较定理

$$H_{\mathrm{dR}}^*(X, \overline{\mathbb{Q}}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p = H_{\mathrm{cris}}^*(X_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$$

这归功于贝特洛。

记 Z_p 为 X_p 上代数类构成的 $\mathbb{Q}$-向量空间， Z_0 为 X. 上代数类构成的 $\mathbb{Q}$-向量空间。与 ℓ-进情形一样，有如下包含关系

$$Z_0 \subset Z_p \cap H_{\mathrm{dR}}^*(X, \overline{\mathbb{Q}})$$

我们还可以再次提出疑问：这一包含关系是否实际上是等式。

猜想 7.1。 *(pGPCw：Grothendieck* 周期猜想弱版本的 p-进类比。*)*包含关系 $Z_0 \subset Z_p \cap H^*_{\mathrm{dR}}(X, \overline{\mathbb{Q}})$ 是否为等式?

要使这个问题合理，必须施加一个分歧条件；我们稍后将讨论这一条件，目前暂且忽略它（定义 7.10）。这个问题可视为 Grothendieck 周期猜想弱版本的 p-进类比（有时称为德拉姆–贝蒂猜想 [And04, §7]）。下面的注将这一猜想与关于代数循环的若干经典猜想联系起来。

与其经典对应版本一样，这个猜想预言了超越性。事实上，它预言，特征为 p 且无法提升到零特征的代数类不能属于 $H^*_{\mathrm{dR}}(X,\overline{\mathbb{Q}})$；换言之，相对于 $H^*_{\mathrm{dR}}(X,\overline{\mathbb{Q}})$ 的某个基底，它至少有一个坐标是超越数。Grothendieck p-进猜想的强版本将精确预言所有这些坐标的超越次数（猜想 7.13）。

注7.2。 **(**pGPCw 与经典猜想。**)** 现在将上一段提出的问题（记作 pGPCw）与我们以非正式方式回顾的三个经典猜想进行比较（详见 [And04，第 §7] 节）。这三个猜想分别是霍奇猜想（HC）、Grothendieck 周期猜想的弱版本（GPCw）以及 Fontaine和Messing 的 p-进霍奇变分猜想（pHC）。

（HC）奇异上同调中的一个有理类是代数的，当且仅当它属于德拉姆滤过的适当次数。

（GPCw）德拉姆上同调中的一个有理类是代数的，当且仅当它对于奇异上同调而言是有理的

（pHC）晶体上同调中的一个代数类能够提升到零特征，当且仅当它属于德拉姆滤过的适当次数。

非正式地，我们可以将（pGPCw）视为「（pHC）与（GPCw）在（HC）上的纤维积」。

$$\begin{array}{ccc} (p\mathrm{GPCw}) & \to & (\mathrm{GPCw}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{pHC}) & \to & (\mathrm{HC}) \end{array}$$

图表右侧涉及零特征，左侧涉及混合特征。下方的猜想比较有理结构与滤过，上方的猜想则比较两种有理结构。

定义 7.3.（André 的 p-进周期。）设 $M \in \mathrm{M}ot(\overline{\mathbb{Q}})$ 是一个具有良约化的同调动机[16]，其约化记作 $M_p \in \mathrm{M}ot(\overline{\mathbb{F}}_p)$。将它们的

16. 与经典情形一样，我们只研究满足 hom $=$ num 的动机，例如来自椭圆曲线乘积的动机：这是构造坦纳克范畴所必需的。

代数类记作

$$Z_0(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}ot(\overline{\mathbb{Q}})}(\mathbb{1}, M) \quad \text{et} \quad Z_p(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}ot(\overline{\mathbb{F}}_p)}(\mathbb{1}, M_p).$$

考虑贝特洛比较定理

$$R_{\mathrm{dR}}(M) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}_p = R_{\mathrm{cris}}(M_p). \tag{7.2}$$

对于 $Z_p(M)$ 和 B′ 的 $R_{\mathrm{dR}}(M)$ 的任意基底 B，定义 $\mathrm{M}at_{\mathcal{B},\,\mathcal{B}'}(M)$ 为矩阵，其列向量是 B 中各向量相对于 B′ 的坐标。我们称该矩阵的系数为 p-进 André 周期，并将 $\mathrm{P}_p(M) \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ 定义为由这些周期生成的 $\overline{\mathbb{Q}}$-代数。

注 7.4。（经典周期与 André 的 p-进周期。）

（1）若 B 中有一个元素是无法提升到零特征的代数类，那么根据猜想 7.1，它的周期中至少有一个应当是超越数。（2）矩阵 $\mathrm{M}at_{\mathcal{B},\,\mathcal{B}'}(M)$ 确实取决于基底 B 和 B′ 的选择，但代数 $\mathrm{P}_p(M)$ 不取决于它们。（3）要使空间 $Z_p(M)$ 不等于零，M 必须包含零权的直和因子。典型地，可以设想 $M = \mathfrak{h}^{2n}(X)(n)$ 对应一个具有良约化的 X 簇。此外，要得到有意义的周期，M 必须存在模 p 下无法提升的代数类，否则所有 p- 进周期都是代数数。（4）与经典情形不同，p-进周期矩阵不是交换图；事实上，一般而言，不等式 [17] $\#\mathrm{B}' \leq \#\mathrm{B}$ 是严格的。（5）混合动机也可以定义 p-进周期。在这种情形下，只需考虑满足（7.2）的混合动机——对于开簇，这个关系并非自动成立。

例7.5。(1)（CM椭圆曲线与伽马值。）考虑E 一条CM椭圆曲线。其 $\mathfrak{h}^1(E)$的复周期，是若干伽马函数 $\Gamma_{\mathbb{C}}$ 在一些显式有理数处的特殊值之积，这些有理数仅取决于 CM 域。与 $\mathfrak{h}^1(E)$相关的 p-进周期并不存在，因为 $\mathfrak{h}^1(E)$中没有代数类；不过，我们可以考虑动机 $M = \mathfrak{h}^1(E) \otimes \mathfrak{h}^1(E)^\vee$。其代数类对应于 E的自同态。为了得到有意义的 p-进周期，我们考虑一个在 p 处具有超奇异约化的素数；否则，所有自同态都会提升，所有周期也都会是代数的。问题在于描述这些自同态相对于 $H^1_{\mathrm{dR}}(E, \overline{\mathbb{Q}})$的一组基的作用。这类计算由Coleman和Ogus处理过 [Col90, Ogu90]。其中会出现伽马函数 p-进 Γ_p 在有理数处的特殊值之积。

17. 技术要点：这一不等式仍然需要 hom = num 假设。我们利用数值等价与标量扩张可交换这一事实，参见猜想 3.18 及其后的注。

(2)（库默尔动机与对数。）考虑库默尔型混合塔特动机 $K_a = \mathfrak{h}^1(\mathbb{G}_m,\ \{1,\ a\})^\vee$，其中 $a \in \mathbb{Q}$。这个动机嵌入正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{I}(+1) \longrightarrow K_a \longrightarrow \mathbb{I} \longrightarrow 0$$

对于 $a \neq 0,1,-1$，它是非分裂的。尤其是，这个动机没有非零代数类，这正是考虑 K_a 而不是其对偶 $\mathfrak{h}^1(\mathbb{G}_m,\{1,a\})$ 的原因。它的复周期矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2\pi i & \log(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

固定一个素数 p。对于 $a \neq 0,1$ $[p]$，动机 K_a 具有良约化。此外，有限域上的 Tate 动机构成一个半单范畴，特别是，上述正合列模 p 后分裂。由此可推得，该动机模 p 后具有一个非零代数类，因此这个类无法提升。它的 p-进周期矩阵为

$$\begin{pmatrix} \log_p(a) \\ 1 \end{pmatrix}$$

它与对应复情形的类比再次令人印象深刻。这个矩阵是通过计算作用在 $R_{\mathrm{dR}}(K_a)$ 上的弗罗贝尼乌斯矩阵得到的；这一计算归功于 Deligne [Del89, §2.9]。其中出现了 $\log_p(a^{1-p})$，而从弗罗贝尼乌斯矩阵到周期矩阵的转换会修正这个指数，这一点颇为奇妙。（将 $\log_p(a^{1-p})$ 修正为 $\log_p(a)$，本可通过换基实现；然而，对于这些动机，我们有典范基，且上述所有矩阵都只用到这些基。）

(3)（超几何函数。）设 M 和 N 是两个非同构动机，但它们模 p 的约化同构。那么动机 $M \otimes N^\vee$ 具有一个模 p 的、不可提升的代数类，它恰好与这一同构相关联。其 p-进周期是 $R_{\mathrm{dR}}(N)$ 相对于 $R_{\mathrm{dR}}(M)$ 的坐标。

例如，可以考虑 $M = \mathfrak{h}^1(E)$ 和 $N = \mathfrak{h}^1(E')$，其中 E 和 E' 是有限域上某条普通椭圆曲线的两个非同源提升。特别地，可以取 E 为 Serre–Tate 的典范提升，并取 E' 为一条非 CM 椭圆曲线。此情形中出现的 p-进周期由 Katz[Kat80] 描述。其中尤其可以看到超几何函数的特殊值。

（4）（弗罗贝尼乌斯矩阵。）设 $f \in \mathrm{End}(M_p)$ 是模 p 的一个自同态。我们可以考虑其相对于$R_{\mathrm{dR}}(M)$的基底的作用矩阵。将 f 视为动机$M \otimes M^\vee$模 p 的一个代数类时，其系数可解释为 André 意义下的 p-进周期。特别值得关注的是 f 为弗罗贝尼乌斯的情形：某些作者 [Fur07、Bro17] 将与 M 相关的 p-进周期定义为其系数。

André 意义下的 p-进周期观点之所以更好，有多方面的原因。其中之一是，它为超越性给出了更精细的界，并且为某些自然关系提供了动机论解释，例如那些源自弗罗贝尼乌斯特征多项式的关系，见 [AF22，备注 9.7]。

超越性。如注 7.4 所述，猜想 7.1 预言某些 p-进周期具有超越性。接下来的目标是给出这些周期的超越次数上界（定理 7.6），并提出一个预言该次数的猜想（猜想 7.13）。我们将证明，后一个猜想实际上蕴含猜想 7.1，见命题 7.12。

沿用定义 7.3 中的记号。考虑由 M 和 M_p 生成的坦纳范畴 $\mathbf{h}M\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{h}M_p\mathbf{i}$，以及与纤维函子 R_{dR} 和 R_{cris} 相关联的坦纳群 $G_{\mathrm{dR}}(M)$ 和 $G_{\mathrm{cris}}(M_p)$。

在经典周期框架下，格罗滕迪克证明了它们的超越次数不超过 $G_{\mathrm{dR}}(M)$ 的维数。我们的主要结果是其 p-进类比。

定理 7.6。 *p-进周期的超越次数满足不等式*

$$\operatorname{degtr}\mathcal{P}_p(M) \leq \dim G_{\mathrm{dR}}(M) - \dim G_{\mathrm{cris}}(M_p).$$

注 7.7。（经典超越性与 p-进超越性。）

（1）这个不等式看起来可能比复情形中的不等式更强，但通常 p-进周期的矩形矩阵比复周期矩阵小。只有在超奇异约化情形下，它们的大小才相同，这等价于 $G_{\mathrm{cris}}(M_p) = \{1\}$。

（2）在复数框架中，关键在于将周期解释为函子 $T(M) = \mathrm{Isom}^{\otimes}{}_{\langle M\rangle}(R_B, R_{\mathrm{dR}})$ 的一个 $\mathbb{C}$-点的坐标。根据坦纳理论，这个函子可由定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的一个仿射簇表示。$G_{\mathrm{dR}}(M) = \mathrm{Aut}^{\otimes}{}_{\langle M\rangle}(R_{\mathrm{dR}})$ 在 $T(M)$ 上的自然作用使这个簇成为一个主齐性空间。

在 p-进情形下，函子 Z_p 不是纤维函子，这是维数方面的原因，因此它不属于坦纳克范畴框架。不过，它仍然是一个松幺半群函子（这就是说，代数类的乘积仍是代数类）。

函子 $\mathrm{Isom}^{\otimes}{}_{\langle M\rangle}(Z_p, R_{\mathrm{dR}})$ 通常为空，这同样是维数方面的原因。另一方面，可以考虑张量自然变换或嵌入。

定理 7.8。函子 $Emb^{\otimes}\,\mathbf{h}M\mathbf{i}(Z_p, R_{\mathrm{dR}}) \subseteq Nat^{\otimes}\,\mathbf{h}M\mathbf{i}(Z_p, R_{\mathrm{dR}})$ 的包含是一个等式。这些函子由一个在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的仿射簇 $H(M)$ 表示。$G_{\mathrm{dR}}(M)$ 在 $H(M)$ 上的自然作用是传递的。此外，我们有一个同构 $H(M)_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = G_{\mathrm{dR}}(M)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}/G_{\mathrm{cris}}(M_p)$。

注 7.9。（定理 7.6 蕴含定理 7.8。）类比于经典情形，可以将其解释为

$$Z_p \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p \hookrightarrow R_{\mathrm{cris}} = R_{\mathrm{dR}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p \tag{7.3}$$

如同一个 $\overline{\mathbb{Q}}_p$-点的 $H(M)$。在该点求值给出一个代-数的态射

$$\mathrm{eval} : \mathcal{O}(H(M)) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p. \tag{7.4}$$

根据构造，此态射的像是由属于范畴 $\mathbf{h}M\mathbf{i}$ 的所有动机的全部 p-进周期生成的代数 $\mathbf{P}_p(\mathbf{h}M\mathbf{i})$。与经典情形不同，这些周期通常严格包含 M 的周期。这是因为包含关系 $Z_p(M)^{\otimes n} \subset Z_p(M^{\otimes n})$ 通常是严格的：这正是代数类缺少 Künneth 公式所造成的缺陷。

定理 7.8 及这些关系

$$\mathcal{P}_p(M) \subset \mathcal{P}_p(\langle M \rangle) = \mathrm{Im}\,\mathrm{eval} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p. \tag{7.5}$$

证明了定理 7.6，甚至证明了更强的不等式

$$\mathrm{degtr}\mathcal{P}_p(M) \leq \mathrm{degtr}\mathcal{P}_p(\langle M \rangle) \leq \dim H(M) = G_{\mathrm{dR}}(M) - G_{\mathrm{cris}}(M_p). \tag{7.6}$$

以下定义受 André 的研究 [And95, And03] 启发。

定义7.10.（分歧条件。）若 $\mathrm{End}(N)$ 是一个数域，且 $\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{End}(N) = \dim R_{\mathrm{dR}}(N)$，则称动机 N 具有复乘。

若素数 p 不在 $\mathbf{h}M\mathbf{i}$ 中分歧，则对于 $\mathbf{h}M\mathbf{i}$ 中任意具有复乘的 N，素数 p 都不在其数域 $\mathrm{End}(N)$ 中分歧。

例 7.11. 设 A 是一个阿贝尔簇。当 $N = \mathfrak{h}^1(A)$ 时，要求 $\mathrm{End}(N)$ 是一个数域，且 $\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{End}(N) = \dim R_{\mathrm{dR}}(N)$，等价于要求 A 是单的且具有复乘。在这种情况下，要求 p 不在 $\mathrm{End}(N)$ 中分歧，等价于要求 p 不在其 CM 域中分歧。

命题 7.12. 对于固定的动机 M'，在 $\langle M' \rangle$ 中分歧的素数只有有限多个。

猜想 7.13。*(p-GPCs：Grothendieck 周期猜想强版本的 p-进类比。)*

如果 p 不在 $\mathbf{h}M\mathbf{i}$ 中分歧，那么求值映射 *(7.4)* 是单射。等价地，齐性空间 $H(M)$ 是连通的，并且由 *(7.3)* 诱导的 $\overline{\mathbb{Q}}_p$-点 $H(M)$ 位于 $H(M)$ 的一般点之上（或者说，不等式 $\mathrm{degtr}\mathbf{P}_p(\mathbf{h}M\mathbf{i}) \leq \dim H(M) = G_{\mathrm{dR}}(M) - G_{\mathrm{cris}}(M_p)$ 实际上是等式。）

命题 7.14。如果 M 满足猜想 7.13，那么对于 $\langle M \rangle$ 中的任意 N，都有一个

$$Z_0(N) = Z_p(N) \cap R_{\mathrm{dR}}(N),$$

也就是说，猜想 7.1 *(pGPCw)* 对 N 有肯定的回答。

注 7.15. (1) 本节结果的证明使用了坦纳卡范畴技术。正如前面所提到的，特别是在注 7.7(2) 中，不能直接使用经典结果，而应当对其证明加以调整。

(2) 分歧条件（定义7.10）的灵感来自 André 在研究超奇异约化阿贝尔簇的这类问题时提出的一个条件。他注意到，这些簇可能具有满足非动机代数关系的 p-进周期。如例7.5(1)所述，这类动机中出现的周期与 p-进伽马函数的特殊值有关。事实证明，这些特殊值比其复数类比更常为代数数。

(3) 关于 Grothendieck 的经典周期猜想，目前所知甚少。Chudnovsky [Chu80] 已证明复乘椭圆曲线的强版本。费马椭圆曲线这一特殊情形尤其蕴含了 $\Gamma_{\mathbb{C}}(1/3)$ 的超越性。弱版本（见注7.2中的 (GPCw)）已由 Bost 和 Charles [BC16]，证明适用于阿贝尔簇和 K3 曲面上的除子，他们使用了 Wüstholtz 解析子群定理 [Wüs89] 等工具。这些结果很难，预计其p-进类比也同样困难。

唯一已证实猜想 7.13 的情形，是例7.5(2)中的 Kum- mer 动机 K_a 。这源于 p-adic 对数 [Ber77]特殊值的超越性。第一个有趣的未解情形应是具有超奇异约化的椭圆曲线，这尤其将推出 $\Gamma_p(1/3)$对 $p \equiv 2[3]$的超越性。弱版本似乎也同样困难。在具有超奇异约化的非复乘椭圆曲线情形下，[AF22，第3.命题5]给出了这方面的一项小结果。

8. 交换群概形的动机

本节概述了与 Stephan Enright-Ward、Annette Huber 和 Simon Pepin Lehalleur 合作完成的两项工作 [AEWH15, AHPL16]。这些工作研究交换群概形的肖氏环和动机，并推广了 Beauville [Bea86] 与 Deninger–Murre [DM91] 关于阿贝尔概形情形的定理。我们将说明，离开射影群概形的框架后会出现哪些微妙之处。Voevodsky 动机变得至关重要，不仅在于它们的存在，也在于其构造的性质：这是§1.3所阐释原则的一个例子。

以下设 S 是定义在域 k 上的光滑有限型簇，k 将作为固定基底。我们考虑的每个 S-群概形都假设是光滑有限型且具有连通纤维。有些结论在更一般的情形下也成立。对于光滑的 S-概形 $f\colon X \to S$，CH(X) 表示全空间 X 的肖氏环。我们继续使用有理系数。

定理 8.1。（*Beauville* [Bea86], *Deninger–Murre* [DM91]）设 A 是一个相对维数为 g 的 S-阿贝尔概形，且 $n_A : A \to A$ 是乘以 n 的态射。那么我们有如下分解

$$\mathrm{CH}^i(A) = \bigoplus_{r=i}^{g+i} \mathrm{CH}^i_{(r)}(A)$$

其中 $\mathrm{CH}^i_{(r)}(A) = \{\alpha \in \mathrm{CH}^i(A) \ n_A^*\alpha = n^r\alpha, \ \forall n \in \mathbb{Z}\}$。

注 8.2。 (1) 这个定理由 Beauville 在情形$S = \mathrm{Spec}(k)$下证明，而一般情形则由 Deninger–Murre 证明。这两个结果都关键地运用了傅里叶变换，后文将对此作回顾。

(2) 当 $S = \mathrm{Spec}(k)$ 时，我们有包含关系

$$\ker \mathrm{cl}^i_A \supseteq \bigoplus_{r\neq 2i}^{g+i} \mathrm{CH}^i_{(r)}(A) \tag{8.1}$$

这是因为 n_A^* 在次数为 s 的上同调上作用为 $n^s \cdot$ 恒等态射。

(3) 定理中的分解在环 $\mathrm{CH}^*_{(\bullet)}(A)$ 上诱导出双重分次。当 $S = \mathrm{Spec}(k)$ 时，新的分次劈开了 Bloch–Beilinson 滤过。猜想认为，该滤过相对于循环类映射具有某些性质，特别是包含关系 (8.1) 应当是等式。猜想所有定义在 k 上的光滑射影簇的所有肖环都存在 Bloch–Beilinson 滤过，但一般而言，这个滤过并不劈开。

证明。 设 $A^\vee$ 为对偶阿贝尔概形，$\mathrm{P} \in \mathrm{CH}^1(A \times A^\vee)$ 为 Poincaré 线丛所对应的除子， π_1， π_2 为 $A \times A^\vee$ 到两个因子的投影。定义傅里叶变换

$$\mathcal{F}_A : \mathrm{CH}^*(A) \longrightarrow \mathrm{CH}^*(A^\vee), \quad \alpha \mapsto (\pi_2)_*(\exp(\mathcal{P}) \cdot \pi_1^*\alpha).$$

可以验证这是一个同构，其逆基本上是 $\mathrm{F}_{A^\vee}$。由此得到分解

$$\mathrm{CH}^i(A) = \bigoplus_s \{\alpha \in \mathrm{CH}^i(A), \quad \mathcal{F}_A(\alpha) \in \mathrm{CH}^s(A)\}. \tag{8.2}$$

接着，直接计算可知 n_A^* 在分解 (8.2) 的每个因子上的作用。由此可重新得到陈述中的分解及同一对应 $\mathrm{CH}^i_{(r)}(A) = \{\alpha \in \mathrm{CH}^i(A), \ \mathrm{F}_A(\alpha) \in \mathrm{CH}^{g+i-r}(A)\}$

. □

我们证明如下推广。

定理 8.3。 设 G 为一个相对维数为 d 的 S-交换群概形，且 $n_G : G \to G$ 为乘以 n 的乘法态射。那么有如下分解

$$\mathrm{CH}^*(G) = \bigoplus_{r=0}^{2d} \mathrm{CH}^*_{(r)}(G)$$

其中 $\mathrm{CH}^*_{(r)}(G) = \{\alpha \in \mathrm{CH}^*(G) \ n_G^*\alpha = n^r\alpha, \ \forall n \in \mathbb{Z}\}$。

注 8.4. (1) 我们不知道如何为这样的 G 定义傅里叶变换：映射 π_2 不是适当的，因此 $(\pi_2)_*$ 不存在；此外，这样的 G 的对偶通常是一个 1-动机，而不是一个簇。

(2) 非射影群的第一个非平凡情形由S =Spec(k)和 G 给出，后者有一个正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

其中 A 是一个阿贝尔簇。在这种情形下，定理 8.3 对$\mathbb{G}_m$ 而言很容易，对 A 而言则是已知的，但不能直接推导出关于 G的结论。问题在于，这个陈述适用于直和，却不适用于正合列。接下来的陈述将更适合这种分解。

定义 8.5. 设 Sm/S 为有限型光滑 S-概形的范畴，PSh(S) 为取值于 $\mathbb{Q}$-向量空间的 Sm/S 上的预层范畴。设 $\mathbb{Q}(G) \in \mathrm{PSh}(S)$ 为如下预层：它将每个 $Y \in \mathrm{Sm}/S$ 关联到一个以 $\mathrm{Hom}_S(Y,\ G)$ 的全体为基底的$\mathbb{Q}$-向量空间；设 $\underline{G} \in \mathrm{PSh}(S)$ 为如下预层：它将每个 $Y \in \mathrm{Sm}/S$ 关联到 $\mathbb{Q}$-向量空间 $\mathrm{Hom}_S(Y,\ G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. G 的群律诱导出一个自然变换

$$s_G : \mathbb{Q}(G) \longrightarrow \underline{G}.$$

由 DM(S) 的构造，相对动机范畴 [18], 上述预层诱导出动机，而自然变换给出它们之间的一个态射，记作

$$\alpha_{G/S} :\ M(G/S) \longrightarrow M_1(G/S).$$

动机 $M(G/S)$ 称为 G 的动机，而动机 $M_1(G/S)$ 称为 G 的 1-动机。

定理 8.6。 沿用上述定义中的记号。那么，当 r 足够大时，动机$\mathrm{Sym}^r M_1(G/S)$ 为零，且态射 $\alpha_{G/S}$ 可唯一延拓为一个 ***Hopf*** 代数动机之间的态射

$$\varphi_{G/S} : M(G/S) \longrightarrow \bigoplus_{r=0} \mathrm{Sym}^r M_1(G/S) \tag{8.3}$$

而且它还是一个同构。

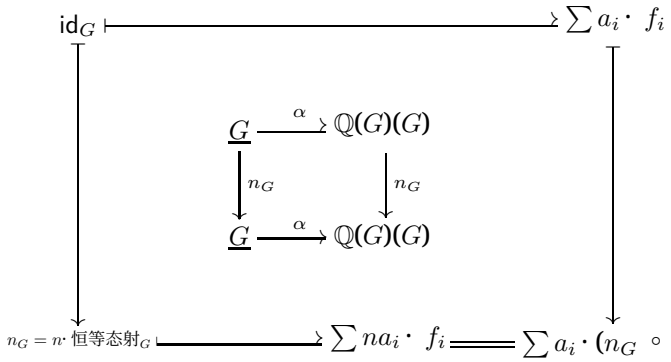
注 8.7。 (1)（动机与层。）这个定理并非关于预层的命题的形式推论。例如请注意，层 $\mathrm{Sym}^r \underline{G}$ 不为零，因为 $\underline{G}$ 是一个向量空间层。

一个更微妙的现象如下：该定理尤其表明，存在从 $M_1(G/S)$ 到 $M(G/S)$ 的非零映射。相反，不存在从层 $\underline{G}$ 到 $\mathbb{Q}(G)$ 的非零映射。

18. 此处我们仅考虑这个范畴的稳定版本，也就是对 Lefschetz 动机进行 $\otimes$-反演后得到的范畴。稳定范畴 DM(S) 有多种描述。事实上，在相当一般的假设下，这些描述彼此等价；我们所考虑的基底 S 尤其满足这些假设。适用于定义 8.5 的版本是 Ayoub 研究的 étale 动机。这个范畴 DM(S) 是从D(PSh(S)) 出发，通过局部化来强制满足 étale 下降和 $\mathbb{A}^1$-同伦不变性，随后再进行稳定化而得到的。

我们略述论证。设 $\alpha : \underline{G} \to \mathbb{Q}(G)$ 是这样一个自然变换，$\mathrm{id}_G \in \underline{G}(G)$ 是恒等映射。 α 的自然性意味着，只需证明 $\alpha(\mathrm{id}_G) = 0$。令 $\alpha(\mathrm{id}_G) = a_i \cdot f_i$，其中 a_i 是有理数，而 f_i 是 G 的自同态。

为证明 $a_i \cdot f_i = 0$，考虑关于乘法态射 n_G （乘以 n ）的自然性:



有人声称，等式 $\sum na_i \cdot f_i = \sum a_i \cdot (n_G \circ f_i)$ 迫使所有 f_i 都为零。首先，反设存在一个 f_i，比如说 f_1，它不是挠元。那么态射 $n_G \circ f_1$ 的列表将是无限的，因此我们可以选取一个 n，使得 $n_G \circ f_1$ 不出现在 f_i 的列表中。这将与等式 $\sum na_i \cdot f_i = \sum a_i \cdot (n_G \circ f_i)$ 矛盾。

于是可以假设所有 f_i 都是挠元，因此可以选取一个 n，使得所有 $n_G \circ f_i$ 都为零。等式 $\sum na_i \cdot f_i = \sum a_i \cdot (n_G \circ f_i) = 0$ 因而推出 $\sum a_i \cdot f_i = 0$。

(2)（Chow–Künneth 分解。）我们继续用 $n_G : G \to G$ 表示乘以 n 的乘法态射。注意，它在 $M_1(G/S)$ 上的作用等于 $n\cdot$ 恒等态射。特别地，同构 (8.3) 给出了 $M(G/S)$ 关于 n_G 的作用的特征子空间分解。此外，由此可知，该分解是相对 Chow–Künneth 分解（绝对情形参见猜想 3.1）。

(3)（肖氏环分解。）第 (2) 点的分解给出了如下分解

$$\mathrm{Hom}_{DM(S)}(M(G/S), \mathbb{I}(p)[q]) \tag{8.4}$$

为关于 n_G 的作用的特征子空间。由于这些 Hom 计算的是高阶肖氏群 [19] CD19，推论 14.2。14] 由此可得定理 8.3。

(4)（动机分解与肖氏环分解。）对于阿贝尔概形 $G = A$，第（3）点中的肖氏环分解可以导出第（2）点中的动机分解，正如 Deninger 和 Murre 所指出的。关键是将 $A \times_S A$ 视为定义在 A 上的阿贝尔概形，并将定理 8.1 应用于该阿贝尔概形：这样，对角线便可分解为特征向量之和。另一方面，

19. 格罗滕迪克和 Voevodsky 的构造采用了不同的协变性约定，特别是肖氏动机通过一个反变函子嵌入 Voevodsky 动机中。这就是为什么对象 $\mathbb{I}(p)[q]$ 出现在公式 (8.4) 右侧的原因。

对角线可解释为动机 $M(A/S)$ 的恒等态射，并且可以验证，恒等态射 $\in \mathrm{End}(M(A/S))$ 的这一分解是正交投影算子之和的分解。

对于一般的 G，公式

$$\mathrm{End}_{DM(S)}(M(G/S)) = \mathrm{Hom}_{DM(S)}(M(G/S) \otimes M(G/S)^\vee, \text{𝟙})$$

无法将此群与 $G \times_S G$ 的肖氏环联系起来。事实上，庞加莱对偶在相差一个扭曲和移位的意义下，将 $M(G/S)^\vee$ 与$M_c(G/S)$ 视为同一对象，而后者一般并非 $M(G/S)$。在这种情形下，定理 8.3 中肖氏环的分解无法恢复动机在点（2）处的分解。

（上述论证表明，一般而言，动机的自同态只有在光滑真情形下才与肖群相关。这一点已在 §1.1 等处指出，也是格罗滕迪克的经典构造受限于光滑真框架的原因。）

(5) （Voevodsky 与肖。）在阿贝尔概形 $G = A$ 的情形下，一个公式

$$M(A/S) \cong \bigoplus_{r=0} \mathrm{Sym}^r M_1(A/S) \tag{8.5}$$

Künnemann 还借助傅里叶变换[Kün94]证明了这一点。一个较弱的版本适用于同调动机，已在命题 4.7 中讨论。

在 [Kün94] 的时代，还没有 Voevodsky 动机，因此相关工作是在肖氏动机中完成的。在这种情形下，公式 (8.5) 中出现的动机 $M_1(A/S)$ 的存在并非显而易见：必须构造 End($M(A/S)$) 中一个合适的投影算子。相比之下，在 Voevodsky 的框架下，这个动机很容易定义（定义 8.5）。Voevodsky 动机相较于肖氏动机的一项优势，尤其在于可以通过层构造轻松得到动机：这正是我们在 §1.3 中提到的原理。

证明。 证明依赖于两次分解，每次分解都对应一篇文章。第一次分解旨在将问题约化到代数闭域 S =Spec(K)， [AHPL16] 的情形。第二次 [AEWH15] 则是约化到阿贝尔簇的情形，这基本上使我们回到了 Künnemann 的结果 [Kün94]。

约化到 $S = \mathrm{Spec}(K)$。对于第一步分解，我们使用 Ayoub 的以下定理 [Ayo14，命题 3.24]。若 $f\colon M \to N$ 是 DM(S) 中的一个动机态射，那么要判断 f 是否为同构，只需判断它在任意几何点上的拉回是否为同构。

设 $i : \mathrm{Spec}(K) \to S$ 是一个几何点。为了完成第一步分解，只需证明

$$i^* \varphi_{G/S} = \varphi_{G \times_S \mathrm{Spec}(K)/\,\mathrm{Spec}(K)}. \tag{8.6}$$

公式 (8.6) 实际上是这项工作的技术要点。对于任意态射$g : T \to S$，函子 g^* 由如下性质刻画：对于任意 S-光滑概形 X，都有基变换

$$g^* M(X/S) = M(X \times_S T/T) \tag{8.7}$$

与紧支撑上同调的情形一样。然而，在态射 $\varphi_{G/S}$ 中涉及的两个动机里，只有 $M(G/S)$ 具有这种形式。关键在于，找到一个复形来分解 $M_1(G)$，使得该复形的所有项在所有次数上都是形如 $M(X/S)$ 的对象之和，并且所有连接箭头都由 S-概形的态射诱导。

我们构造了这样一种分解，其灵感来自 [Bre70] 的构造。我们只使用 X，它们是 G 的幂。采用定义 8.5 中的记号，可以将其开头写成

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Q}(G \times G) \xrightarrow{t_G} \mathbb{Q}(G) \xrightarrow{s_G} \underline{G},$$

其中 $t_G([g_1, g_2]) = [g_1] + [g_2] - [g_1 + g_2]$.

约化到 $G = A$。对于第二次分解，固定一个代数闭域 K，并考虑 $S = \mathrm{Spec}(K)$。下文将简化记号，省去 $/S$。

Chevalley 定理告诉我们，域 K 上的代数群可嵌入正合列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

其中 A 是阿贝尔簇，L 是线性群。因此，我们可以对 L 的维数进行归纳，从而归结为

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_a \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0 \tag{8.8}$$

ou

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0, \tag{8.9}$$

其中在这两种情形下，H 都是一个已知该结论成立的群。(8.8) 的情形很简单：由同伦可知，关于 G 的结论等价于关于 H 的结论。(8.9) 的情形则需要更精细的论证。

首先，正合列 (8.9) 在点函子层面给出一个正合列。对后者应用 Sym^n，得到一个三角

$$\mathrm{Sym}^{r-1} M_1(H) \otimes M_1(\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{Sym}^r M_1(G) \longrightarrow \mathrm{Sym}^r M_1(H),$$

其中用到了 $\mathrm{Sym}^2 M_1(\mathbb{G}_m) = 0$ [Voe00, Corollary 2.1.5]。由这个正合列，通过归纳法可以推出，当 r 足够大时，$\mathrm{Sym}^r M_1(G)$ 消失。

其次，将 $\mathbb{G}_m$-丛 $G \longrightarrow H$ 补全为带有零截面的 $\mathbb{A}^1$-丛 $\bar{G} \longrightarrow H$。关于该截面的局部化三角给出

$$M(G) \longrightarrow M(\bar{G}) \longrightarrow M(H)(1)[2],$$

¯而由同伦 $M(G) = M(H)$ 可知。现在使用归纳假设，便可推出图表

(8.10)

$$\begin{array}{ccccc}
M(G) & \longrightarrow & M(H) & \longrightarrow & M(H)(1)[2] \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_H} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_H(1)[2]} \\
\bigoplus_r \mathrm{Sym}^r M_1(G) & \longrightarrow & \bigoplus_r \mathrm{Sym}^r M_1(H) & \longrightarrow & \bigoplus_r \mathrm{Sym}^r M_1(H)(1)[2].
\end{array}$$

ψ 的存在性由右侧交换图的交换性得出。这种交换性并非显然，而是用到了映射 φ_H 的定义。

根据归纳假设，可得映射 ψ 是一个同构。遗憾的是，归纳法尚未完成，因为我们不知道如何将 ψ 与φ_G联系起来。尽管如此， ψ 的存在仍有一个重要推论：$M(G)$是一个有限维动机，见注释 3.21(2)。

我们证明 φ_G 的实现是一个同构。于是可以对 φ_G 和 ψ^{-1} 应用命题 4.5，从而推出 φ_G 在模去同调等价后是一个同构。接下来可以利用有限维动机的性质，得出 φ_G 即使在模去同调等价之前也是一个同构（见注释 3.21(2)，参见纯情形下的定理 5.2）。□

注 8.8. (1) 动机中的有限维概念一直用于纯动机：它在正合列下表现不佳，而且我们知道一些混合动机并非有限维的例子。据我们所知，这个证明是首次将这些思想应用于混合动机的例子。(2) 定理 8.6 使 Huber 和 Kings 得以为所有交换群概形构造多对数。(3) 定理 8.6 用一个相当简单的动机 $M_1(G)$ 描述了交换代数群 G 的动机。我们可以希望，这有助于更好地理解 G 的肖氏环。

9. 代数类的构造

本节讨论猜想 3.11 中提出的 Lefschetz 型标准猜想。在与 Mattia Cavicchi、Robert Laterveer 和 Giulia Saccà 合作的一项进行中的研究中，我们考察了满足拉格朗日纤维化条件的超凯勒簇上的这一猜想。出发点是 Voisin 的一个新近想法 [Voi22] ，我们从分解定理的视角来考察它。

下文中我们将专注于复簇，此时 Lefschetz 型标准猜想是霍奇猜想的一个特殊情形。颇为令人意外的是，它也是霍奇猜想的主要支柱：André 证明，在 Lefschetz 型标准猜想成立的条件下，代数类的平行输运仍然是代数的 [And96]。由此他推得，该猜想将蕴含阿贝尔簇的霍奇猜想。

阿贝尔簇的 Lefschetz 型标准猜想已得到证明，参见命题 4.7；并且由此可以推出曲面的情形。最近，Charles 和 Markmann 证明了 $KS^{[n]}$,[复乘13] 型超凯勒簇的这一猜想。

簇的维数记为 X， d_X，态射 f 的一般纤维的维数记为 d_f。即使存在 pervers 层，我们仍将对上同调次数采用经典约定。

9.1. **一种朴素的方法**。考虑一个光滑射影簇 X，并假设它存在一个态射 $f\colon X \to B$ 到一个基底 B，该基底也

是光滑射影的。我们想知道，了解 B 的 Lefschetz 型标准猜想以及 f 的光滑纤维上的 Lefschetz 型标准猜想，在多大程度上有助于证明 X 的 Lefschetz 型标准猜想。

分解定理尤其蕴含霍奇结构的分解[20]

$$\mathrm{H}^n(X) = \bigoplus_{a+b=n} \mathrm{H}^a(B, {}^pR^b f_*\mathbb{Q}). \tag{9.1}$$

设 η 是 X 上的一个相对丰沛除子， L_B 是B 上的一个丰沛除子，而 β 是其在 X 上的拉回。分解定理还给出以下同构：

$$\cup\eta^b : \mathrm{H}^a(B, {}^pR^{d_f-b} f_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^a(B, {}^pR^{d_f+b} f_*\mathbb{Q}), \tag{9.2}$$

$$\cup\beta^a : \mathrm{H}^{d_B-a}(B, {}^pR^b f_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{d_B+a}(B, {}^pR^b f_*\mathbb{Q}). \tag{9.3}$$

(9.1)、(9.2)和(9.3)的组合可能使人以为，Lefschetz 型标准猜想可归结为证明这些同构的逆是代数的；乍看之下，人们可能会认为这只需研究 f 的纤维和基底 B。但事实上，有若干微妙之处需要注意。

(1) pervers 层 ${}^pR^b f_*\mathbb{Q}$ 也取决于态射 f的奇异纤维。(2) 逆转 L_B 在 B 的上同调上的作用，并不足以逆转 β。事实上， $f^*\,\mathrm{H}(B) \subset \mathrm{H}(X)$只表示分解(9.1)中的因子 $\mathrm{H}^*(B, {}^pR^0 f_*\mathbb{Q})$。(3) 即使我们能够构造代数对应 Λ_{η^b}和 Λ_{β^a}，使它们分别如(9.2)和(9.3)的逆那样作用，也不清楚能否将它们组合起来，从而推出一个代数对应$\Lambda_n : \mathrm{H}^{d_X+n}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{d_X-n}(X)$。例如，我们需要控制$\Lambda_{\eta^b}$ 如何作用于不同于 b的反常次数。这很微妙，尤其是因为算子 η 和 β 通常不是双分次的。

对于存在拉格朗日纤维化的超凯勒簇情形，我们或许可以绕过这些问题：Ngô支撑定理给出了pervers 层 ${}^pR^b f_*\mathbb{Q}$的显式描述；Voisin论证大致上可以构造出第二个拉格朗日纤维化，从而调换 η 和 β的作用；最后，Shen和Yin证明，算子 η 和 β 实际上相对于拉格朗日纤维化是双分次的。

命题9.1。 设 $f : X \to B$ 是射影、光滑且连通的簇之间的一个映射，设 U 是 B 中映射光滑的开集。

（*1*）假设一般纤维满足 *Lef- schetz* 型标准猜想，并且

$$ {}^pR^b f_*\mathbb{Q} = IC((R^b f_*\mathbb{Q})_{|U}). \tag{9.4}$$

20. 一般而言，这种分解并不唯一，只有与之关联的反常滤过是唯一的。Deligne，随后是 De Cataldo，提出了比其他分解性质更好的分解 [Del94b, dC13]。

那么，在 $X \times_B X$ 中存在一些对应，其在相对上同调上的作用诱导出同构 ${}^pR^{d_f+b}f_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} {}^pR^{d_f-b}f_*\mathbb{Q}$。

(2) 假设在 $X \times_B X$ 中存在一些对应，其在相对上同调上的作用诱导出同构 ${}^pR^{d_f+b}f_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} {}^pR^{d_f-b}f_*\mathbb{Q}$。那么动机存在如下分解：

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_b \mathfrak{h}(B, {}^pR^b f_*\mathbb{Q}) \tag{9.5}$$

其中 $R(\mathfrak{h}(B, {}^pR^b f_*\mathbb{Q})) = \mathrm{H}^*(B, {}^pR^b f_*\mathbb{Q})$。此外，分解中的每个因子在扭曲意义下都是自对偶的。

注 9.2。（关于证明。）(1) 的证明很容易。设 Y 为 f 的一般纤维。(1) 中关于 Y 的假设给出了 $Y \times Y$ 中的对应，其闭包给出 $X \times_B X$ 中的对应。它们在相对上同调 $IC((R^b f_*\mathbb{Q})|^U)$ 上的作用，受其在局部系统 $(R^b f_*\mathbb{Q})|^U$ 上的作用控制，因此也受其在 Y 的上同调上的作用控制。

对于 (2)，我们沿用经典论证，证明 Lefschetz 猜想蕴含 Künneth [Kle68]。与绝对情形相比，需注意分解 (9.5) 并不唯一。相对对应的作用不保持这一分次，而只保持相应的滤过。此外，我们无法证明每个上同调分解 (9.1) 都是某个动机分解 (9.5) 的实现，只能证明至少存在一个源自动机的分解。

推论 9.3。设 $f : X \to \mathbb{P}^1$ 是一个 *Lefschetz* 纤维化，其一般纤维满足 *Lefschetz* 型标准猜想（例如，f 是一个以曲面为纤维的纤维化）。那么存在一个动机分解

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_b \mathfrak{h}(\mathbb{P}^1, {}^pR^b f_*\mathbb{Q}) \tag{9.6}$$

其中 $R(\mathfrak{h}(\mathbb{P}^1, {}^pR^b f_*\mathbb{Q})) = \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^1, {}^pR^b f_*\mathbb{Q})$。此外，分解中的每个因子在相差一个扭曲的意义下都是自对偶的。

注 9.4.（从相对到绝对。）沿曲线 C 爆破后，任意三维代数簇都存在一个 Lefschetz 纤维化。另一方面，爆破公式

$$\mathfrak{h}(Bl_C(X)) = \mathfrak{h}(X) \oplus \mathfrak{h}(C)(-1),$$

Manin [Man68]，给出的结果表明，X 上的 Lefschetz 型标准猜想可归结为关于 $Bl_C(X)$ 的猜想。因此，若要研究三维簇 X 上的 Lefschetz 型标准猜想，就可以假设 X存在这样一个纤维化。要由上述推论推出这一猜想，所缺少的是一个分解的存在性

$$\mathfrak{h}(\mathbb{P}^1, {}^pR^b f_*\mathbb{Q}) = \bigoplus_{a=0}^{2} \mathfrak{h}^a(\mathbb{P}^1, {}^pR^b f_*\mathbb{Q}),$$

其中 $R(\mathfrak{h}^a(\mathbb{P}^1, {}^pR^b f_*\mathbb{Q})) = \mathrm{H}^a(\mathbb{P}^1, {}^pR^b f_*\mathbb{Q})$，使得分解中的每个因子在扭曲意义下都是自对偶的。

为了构造这个分解，可以考虑使用同构 (9.3)，并尝试构造一个诱导其逆映射的代数对应。这是一个与构造 Lefschetz 算子逆映射的原始问题相似的问题。我们不知道这是否是一个更简单的问题，参见注9.8。

定理9.5. 设 X 是一个维数为 $2n$ 的超凯勒流形，且 $f\colon X \to \mathbb{P}^n$是一个拉格朗日纤维化，其所有纤维均不可约。假设群概形$\mathrm{Aut}^0(f)$ 是可极化的（按 *Ngô* 的意义）。那么

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_{b=0}^{2n} \mathfrak{h}(\mathbb{P}^n, {}^pR^b f_*\mathbb{Q}) \tag{9.7}$$

其中 $R(\mathfrak{h}(\mathbb{P}^n, {}^pR^b f_*\mathbb{Q})) = \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^n, {}^pR^b f_*\mathbb{Q})$。此外，分解中的每个因子在相差一个扭曲的意义下都是自对偶的。

证明。 我们使用 Ngô支撑定理， [Ngô10] ： 当所有纤维都不可约时，假设（9.4）确实成立。另一方面，一般纤维是一个阿贝尔簇，因此满足 Lefschetz 型标准猜想。于是可以使用命题9.1得出结论。□

推论9.6. 设 X $2n$ 是一个维数为 $2n$ 、*Pi*-基数为2 且具有拉格朗日纤维化的超凯勒流形。假设对于任意与 X双有理等价的超凯勒簇上的拉格朗日纤维化 g ， g 的纤维均不可约，且群概形$\mathrm{Aut}^0(g)$可极化。那么 X的标准 *Lefschetz* 型猜想成立。

证明. 固定 f： $X \to \mathbb{P}^n$ 一个拉格朗日纤维化，并设 η 和 β 为 §9.1 中引入的除子。Voisin 论证 [Voi22] 大致表明存在一个拉格朗日纤维化 $g\colon X \to \mathbb{P}^n$ ，其中 η 和 β 的作用互换。实际上， g 仅存在于与 X 双有理等价的超凯勒流形上，但它们具有相同的动机 [Rie16]。

于是可以将上述定理应用于 f 和 g ，从而推出动机 $\mathfrak{h}(X)$ 的两种分解，其中所有因子都是自对偶的。目前尚不清楚这两种分解是否相容，另见 §9.1 中的第 (3) 点。不过，Shen和Yin 的一条定理表明，对于拉格朗日纤维化，算子 η 和 β 是双分次的：可以看出，这迫使这两种分解相容。由此得到的双分解比 (9.1) 更精细，且所有因子都是自对偶的，这意味着 Lefschetz 型标准猜想成立。□

上述推论例如适用于 Laza–Saccà–Voisin [LSV17] 构造的超凯勒簇。

注 9.7. （推广。）我们希望去掉上述定理中纤维不可约的假设，这样也能在其推论中去掉这一假设，从而使该推论能够应用于更多的簇。

如果纤维不可约，pervers 层 ${}^pR^b f_*\mathbb{Q}$ 便不再满足 (9.4)。然而，Ngô支撑定理也描述了支撑在基底真子簇上的 pervers 层的性质。它表明存在

一些包含在某些奇异纤维中的阿贝尔簇，其上同调控制着 pervers 层。人们认为，命题9.1的某种分层变体应适用于这一一般情形。我们还将用到阿贝尔簇满足 Lefschetz 型标准猜想这一事实。

注9.8。（从相对情形到绝对情形，续。）沿用注9.4中的记号。我们希望证明存在一个分解

$$\mathfrak{h}(\mathbb{P}^1,{}^pR^bf_*\mathbb{Q}) = \bigoplus_{a=0}^{2} \mathfrak{h}^a(\mathbb{P}^1,{}^pR^bf_*\mathbb{Q}), \tag{9.8}$$

其中 $R(\mathfrak{h}^a(\mathbb{P}^1,\ {}^pR^bf_*\mathbb{Q}))\ =\mathrm{H}^a(\mathbb{P}^1,\ {}^pR^bf_*\mathbb{Q})$，且分解中的每个因子都在相差一个扭曲的意义下自对偶：这将证明三维簇的 Lefschetz 型标准猜想。

为了构造这个分解，我们可以考虑利用由类 β 诱导的同构（9.3），并尝试构造一个诱导其逆的代数对应。受 Voisin 在上述推论证明中勾勒的思路启发，我们可以尝试构造一个新的纤维化 $g : X \to \mathbb{P}^2$，使得 β 相对充足（经过爆破后总是可以进行这些构造）。这样的纤维化诱导一个分解

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_{a=0}^{2} \mathfrak{h}(\mathbb{P}^2,{}^pR^ag_*\mathbb{Q}) \tag{9.9}$$

其中 $\cup\beta : \mathfrak{h}(\mathbb{P}^2,\ {}^pR^0g_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}(\mathbb{P}^2,\ {}^pR^2g_*\mathbb{Q})$ 存在一个代数逆。问题在于，一般而言，分解 (9.9) 并不导出分解 (9.8)。这仍与 η 和 β 的作用一般不是双分次的这一事实有关。

参考文献

[ACLS22] Giuseppe Ancona、Mattia Cavicchi、Robert Laterveer 和 Giulia Saccà。《某些拉格朗日纤维化的标准猜想》。预印本，2022。[AEWH15] Giuseppe Ancona、Stephen Enright-Ward 和 Annette Huber。《交换代数群的动机》。Documenta Math., 20：807–858，2015。[AF22] Giuseppe Ancona 和 Dragos Fratila。混合特征中的代数类与 André 的 p-进周期。预印本，2022。[AHPL16] Giuseppe Ancona、Annette Huber 和 Simon Pepin Lehalleur。《交换群概形的相对动机》。Algebr. Geom., 3(2)：150–178，2016。[AM22] Giuseppe Ancona 和 Adriano Marmora。《霍奇标准猜想中的希尔伯特符号》。预印本，2022。[Anc21] Giuseppe Ancona。《阿贝尔四维簇的标准猜想》。《数学发明》，223(1)：149–212，2021。[Anc22] Giuseppe Ancona。《有限域上阿贝尔型动机的实现函子的保守性》。载于《动机与复乘》会议论文集，Fresán、Jetchev、Jossen 和 Pink 编，2022。[And90] Yves André。《 p-进 Betti 格》。载于《 p-进分析》（特伦托，1989），《数学讲义》第 1454 卷，第 23–63 页。施普林格，柏林，1990。[And95] Yves André。《动机理论与 p-进 G-函数值的几何诠释（导论）》。载于《数论》（巴黎，1992–1993），伦敦数学会讲义丛书第 215 卷，第 37–60 页。剑桥大学出版社，剑桥，1995。[And96] Yves André。《建立一种无条件的动机理论》。高等科学研究所数学出版物，(83)：5–49，1996。[And03] Yves André。《周期映射与微分方程：从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}_p$》。东北—北海道算术几何讲座。附录：A：F. Kato 撰《p-进分析速成课程》；B：F. Kato 撰《 p-进统一化理论概述》；C：N. Tsuzuki 撰《 p-进对称域与 Totaro 定理》，第 12 卷。东京：日本数学会，2003。[And04] Yves André。《动机导论（纯动机、混合动机、周期）》，《全景与综述》第 17 卷。Société Mathématique de France，巴黎，2004。[Ayo07] Joseph Ayoub。《格罗滕迪克的六种运算与动机世界中的消失循环形式体系》。I。《星丛》，(314)：x 页（2008），2007。[Ayo10] Joseph Ayoub。《关于格罗滕迪克运算与 Betti 实现的札记》。J. Inst. Math. Jussieu, 9(2)：225–263，2010。[Ayo14] Joseph Ayoub。《étale 实现与格罗滕迪克运算》。Ann. Sci. École Norm. Sup., 47：1–141，2014。[Ayo15] Joseph Ayoub。《Kontsevich-Zagier 周期猜想的一个相对版本》。Ann. of Math. (2), 181(3)：905–992，2015。[BC16] Jean-Benoît Bost 和 François Charles。《关于格罗滕迪克周期猜想的若干评论》。J. Reine Angew. Math., 714：175–208，2016。[Bea86] Arnaud Beauville。《关于阿贝尔簇的肖氏环》。Math. Ann., 273(4)：647–651，1986。[Ber77] Daniel Bertrand。《群簇的 p-进一参数子群》。《数学发明》，40(2)：171–193，1977。[Bon10] Mikhail V. Bondarko。《权结构与 t-结构；权滤过、谱序列与复形（关于动机及一般情形）》。J. K-Theory, 6 504, 2010 3 387( ) : – .[Bre70] Lawrence Breen。《阿贝尔层的扩张与 Eilenberg-MacLane 代数》。《数学发明》，9：15–44，1969/1970。[Bro12] Francis Brown。《 $\mathbb{Z}$上的混合 Tate 动机》。Ann. of Math. (2), 175(2)：949–976，2012。

[Bro17] Francis Brown。《动机周期讲义》。Commun. Number Theory Phys.，11(3)：557–655，2017。[CD19] Denis-Charles Cisinski 和 Frédéric Déglise。《混合动机的三角范畴》。施普林格数学专著。施普林格出版社，查姆，2019。[CDN22] Mattia Cavicchi、Frédéric Déglise 和 Jan Nagel。《具有塔特纤维的族的动机分解：光滑与奇异情形》。预印本，3(2)，2022。[CF00] Pierre Colmez 和 Jean-Marc Fontaine。《半稳定 p-进表示的构造》。Invent. Math.，140(1)：1–43，2000。[Cha13] François Charles。《有限域上 $K3$ 曲面的塔特猜想》。Invent. Math.，194(1)：119–145，2013。[Chu80] G. V. Chudnovsky。《指数函数和椭圆函数值的代数独立性》。载于《国际数学家大会论文集（赫尔辛基，1978）》，第339–350页。芬兰科学院，赫尔辛基，1980。[Clo99] Laurent Clozel。《有限域上阿贝尔簇的数值等价与上同调等价》。Ann. of Math. (2)，150(1)：151–163，1999。[CM13] François Charles 和 Eyal Markman。《与曲面希尔伯特概形变形等价的全纯辛簇的标准猜想》。Compos. Math.，149(3)：481–494，2013。 $K3$ Col[Robert F. Coleman。《费马曲线的弗罗贝尼乌斯矩阵》。载于《90] -进分析（特伦托，1989）》，《数学讲义》第1454卷，第173–193页。施普林格出版社，柏林，1990。 pdC[Mark Andrea A. de Cataldo。《射影映射的霍奇理论分裂机制》。J. Singul.，7：134–156，2013。附录包含 P. Deligne 的一封信。13] Del[P. Deligne。《去掉三点的射影直线的基本群》。载于《Q上的伽罗瓦群（伯克利，加利福尼亚州，1987）》，《数学科学研究所出版物》第16卷，第79–297页。施普林格出版社，纽约，1989。89] Del94a[Pierre Deligne。《动机有什么用？》载于《动机（西雅图，华盛顿州，1991）》，《纯粹数学研讨会论文集》第55卷，第143–161页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994。] Del94b[Pierre Deligne。《导出范畴中的分解》。载于《动机（西雅图，华盛顿州，1991）》，《纯粹数学研讨会论文集》第55卷，第115–128页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994。] Del[Pierre Deligne。《多重ζ值，依据 Francis Brown》。第352号，第1048号报告，viii，161–185页。2013。布尔巴基研讨班，2011/2012卷，报告1043–1058。13] DM[Christopher Deninger 和 Jacob Murre。《阿贝尔概形的动机分解与傅里叶变换》。J. Reine Angew. Math.，422：201–219，1991。91] Fal[Gerd Faltings。《晶体上同调与89] -进伽罗瓦表示》。载于《代数分析、几何与数论（巴尔的摩，马里兰州，1988）》，第25–80页。约翰斯·霍普金斯大学出版社，巴尔的摩，马里兰州，1989。 pFon[Jean-Marc Fontaine。《94] -进周期域》。《星丛》，(223)：59–111，1994。附录由 Pierre Colmez 撰写，题为《 p-进周期》（伊韦特河畔比尔，1988）。 pFur[Hidekazu Furusho。《07] -进多重ζ值。II. 坦纳卡解释》。美国数学杂志，129(4)：1105–1144，2007。 pJan[Uwe Jannsen。《关于有限维动机与 Murre猜想》。载于《代数循环与动机》第2卷，《伦敦数学会讲义丛书》第344卷，第112–142页。剑桥大学出版社，剑桥，2007。07] Kah[Bruno Kahn。《有限域上某些阿贝尔型簇的有理等价与数值等价》。Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)，36(6)：977–1002（2004），2003。03] Kat[Nicholas M. Katz。《80] -进 p-函数、Serre-Tate局部模空间与微分方程解的比值》。载于《国际数学家大会论文集（赫尔辛基，1978）》，第365–371页。芬兰科学院，赫尔辛基，1980。

[Kim05] Shun-Ichi Kimura。《周群在某种意义下是有限维的》。Math. Ann.，331(1)：173–201，2005。[Kle68] Steven Kleiman。《代数循环与韦伊猜想》。载于《概形上同调的十篇论述》，第359–386页。North-Holland，阿姆斯特丹，1968。[KM74] Nicholas M. Katz 和 William Messing。《黎曼猜想对于有限域上的簇的一些推论》。Invent. Math.，23：73–77，1974。[Kos22] Teruhisa Koshikawa。《素维简单阿贝尔簇的平方的数值霍奇标准猜想》。预印本，3(2)，2022。[Kün94] Klaus Künnemann。《关于阿贝尔概形的周动机》。载于《动机》，《纯粹数学研讨会论文集》第55.1卷，第189–205页。美国数学会，1994。[LSV17] Radu Laza、Giulia Saccà 和 Claire Voisin。《与四维三次超曲面相关的中间雅可比簇纤维化的一个超凯勒紧化》。Acta Math.，218(1)：55–135，2017。[Man68] Ju. I. Manin。《对应、动机与单项变换》。Mat. Sb. (N.S.)，77 (119)：475–507，1968。[Mil07] J. Milne。《有限域上的塔特猜想》。第1–27页。2007。作者网页可获取。[Mum68] D. Mumford。《曲面上零循环的有理等价》。J. Math. Kyoto Univ.，9：195–204，1968。[Ngô10] Bao Châu Ngô。《李代数的基本引理》。Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.，(111)：1–169，2010。[Ogu90] Arthur Ogus。《周拉-塞尔伯格公式的一个 p-进类比》。载于《 p-进分析（特伦托，1989）》，《数学讲义》第1454卷，第319–341页。施普林格出版社，柏林，1990。[O'S05] Peter O'Sullivan。《某些刚性张量范畴的结构》。C. R. Math. Acad. Sci. Paris，340(8)：557–562，2005。[Rie16] Ulrike Rieß。《关于 Beauville猜想的弱分裂性质》。Int. Math. Res. Not. IMRN，(20)：6133–6150，2016。[Sch15] Stefan Schreieder。《霍奇数的构造问题》。Geom. Topol.，19(1)：295–342，2015。[Ser72] Jean-Pierre Serre。《椭圆曲线有限阶点的伽罗瓦性质》。Invent. Math.，15(4)：259–331，1972。[SK79] Tetsuji Shioda 和 Toshiyuki Katsura。《关于费马簇》。Tôhoku Math. J. (2)，31(1)：97–115，1979。[Tat66] John Tate。《有限域上阿贝尔簇的自同态》。Invent. Math.，2：134–144，1966。[Voe00] Vladimir Voevodsky。《域上的动机的三角范畴》。载于《循环、迁移与动机同调理论》，《数学年刊研究丛书》第143卷，第188–238页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2000。[Voi22] Claire Voisin。《关于拉格朗日覆盖的超凯勒簇的 Lefschetz标准猜想》。Adv. Math.，396：论文编号108108，29页，2022。[Wil17] Jörg Wildeshaus。《阿贝尔型周动机的中间延拓》。Adv. Math.，305：515–600，2017。[Wüs89] G. Wüstholz。《代数群的解析子群上的代数点》。Ann. of Math. (2)，129(3)：501–517，1989。

IRMA，斯特拉斯堡大学，勒内·笛卡尔街7号，67000斯特拉斯堡电子邮箱地址：ancona@math.unistra.fr网址： http://irma.math.unistra.fr/~ancona/