arXiv:2301.02439v1 [math.AG] 6 Jan 2023

动机版希格曼猜想

Jesse Vogel

数学研究所，莱顿大学，j.t.vogel@math.leidenuniv.nl

摘要

G-表示簇 $R_G(\Sigma_g)$ 对应于曲面 $\pi_1(\Sigma_g)$ 的基本群到代数群 G 中的表示。令 G 为 $n\times n$ 上三角矩阵群或幺幂矩阵群，我们比较了计算 $R_G(\Sigma_G)$ 的代数不变量的两种方法。采用 Gonz´ alez-Prieto、Logares 和 Mu˜noz 开创的几何方法，该方法基于拓扑量子场论（TQFT），我们计算了 $R_G(\Sigma_g)$ 在簇的 Grothendieck 环中的虚拟类，其中 $n = 1,\dots,5$，从而推广了 [7] 的结果。通过引入代数代表元的概念，我们能够高效地计算 TQFT。采用 Hausel 和 Rodriguez-Villegas 开创的算术方法，我们计算了 $R_G(\Sigma_g)$ 的 E-多项式，其中 $n = 1,\dots,10$。对于这两种方法，我们都说明了如何通过算法执行计算。此外，我们讨论了幺幂矩阵群的表示簇与希格曼猜想之间的关系。本文的计算可视为支持该猜想的推广动机版本的积极证据。

1 引言

设 X 是一个闭连通流形，G 是域 k 上的代数群。X 的 G-表示簇是群同态的集合

$$R_G(X) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X), G).$$

由于 $\pi_1(X)$ 是有限生成的，$R_G(X)$ 可视为某个 G^n 的闭子簇。对于亏格为 g 的闭曲面 $X = \Sigma_g$，G-表示簇具有如下显式形式

$$R_G(\Sigma_g) = \left\{ (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \in G^{2g} \mid \prod_{i=1}^{g} [A_i, B_i] = 1 \right\}. \tag{1.1}$$

与之密切相关的是 Σ_g 的 G 特征簇，它由几何不变量理论商 $\chi_G(\Sigma_g) = R_G(\Sigma_g) /\!\!/ G$ 给出，其中 G 通过共轭作用于 $R_G(\Sigma_g)$。G 特征簇（亦称贝蒂模空间）在非阿贝尔霍奇理论 [22, 23] 中发挥着核心作用。特别地，对于 C 复光滑射影曲线，贝蒂模空间通过黎曼–希尔伯特对应同构于C 上的 G-平坦联络模空间；而对于 $G = \mathrm{GL}_n$，它通过非阿贝尔霍奇对应与秩为 n、次数为 0 的多多稳定 G-霍奇丛模空间微分同胚。

不变量。关于 G-表示簇和 G-特征簇的各种代数不变量已在文献中得到研究，例如 [6, 9, 12] 等众多研究；最近得到解决的$P = W$ 猜想[10, 15]也与此相关。其中一种不变量是 E-多项式，亦称塞尔多项式，对于复代数簇 X ，其定义为

$$e(X) = \sum_{k,p,q} (-1)^k \, h_c^{k;p,q}(X) \, u^p v^q \in \mathbb{Z}[u, v],$$

其中 $h^{k;p,}{}_c{}^q(X)$ 是 X的紧支撑上同调的混合霍奇数。可以证明，E-多项式满足 [9, 12]

$$e(X) = e(Z) + e(X \setminus Z) \quad \text{and} \quad e(X \times_{\mathbb{C}} Y) = e(X)\, e(Y),$$

对于复代数簇 X 和 Y，其中 $Z \subset X$ 是一个闭子簇，其开补集为 $X \setminus Z$。将在第 2节定义的簇的 Grothendieck 环 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$，是具有这些性质的不变量所对应的泛环，因此特别存在一个态射

$$e : \mathrm{K}(\mathbf{Var}_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{Z}[u, v] \tag{1.2}$$

它将复代数簇 X 的类 $[X]$ 映射为其 E-多项式 $e(X)$。从这个意义上说，簇 X 在 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 中的类（也称为 X的虚拟类）是比 E-多项式更精细的不变量。

A另一种这样的不变量是有限域上的点计数，也就是说，存在一个态射

$$\# : \mathrm{K}(\mathbf{Var}_{\mathbb{F}_q}) \to \mathbb{Z}$$

它将 $\mathbb{F}_q$ 上的簇 X 的类 $[X]$ 映射为 $|X(\mathbb{F}_q)|$。Katz 的一个重要定理 [9,˜定理 6.1.2] 指出，若 X 是一个复代数簇，且存在其在一个有限生成的$\mathbb{Z}$-代数 $R \subset \mathbb{C}$上的扩张 X ，使得对所有环态射 $R \to \mathbb{F}_q$， $|(X \times_R \mathbb{F}_q)(\mathbb{F}_q)|$ 都是关于 q 的多项式，那么 X 的 E-多项式恰好就是这个多项式。例如，对于仿射直线$X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$，有 $|\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q)| = q$ 以及 $e(X) = uv$，因此根据上下文，我们通常记作 $q = uv$ 和$q = [\mathbb{A}^1_k]$。

前期工作。近年来，人们开发并运用了多种方法来计算 Σ_g 的 G-表示簇的代数不变量。在 [9], Hausel 和 Rodriguez–Villegas 开创了算术方法，以计算 GL_n-表示簇和扭曲 GL_n-特征簇的 E-多项式。该方法利用 Katz 定理，将问题转化为计算有限域 $\mathbb{F}_q$ 上 $R_G(\Sigma_g)$ 的点数。Frobenius 公式（如 [9, 方程 2.3.8], 所证明）给出了有限群 G 上表示簇的点数表达式，

$$|R_G(\Sigma_g)| = |G| \sum_{\chi \in \widehat{G}} \left(\frac{|G|}{\chi(1)} \right)^{2g-2}$$

^将问题归结为研究有限域上 G 的不可约（复）特征 $\chi \in G\,\mathbb{F}_q$。在[16], 中，这种方法被用于计算扭曲 SL_2 特征簇的 E-多项式；在 [2] 中，它被用于计算 GL_3 和 SL_3 特征簇的 E-多项式，以及不可定向曲面上的 GL_2 和 SL_2 特征簇的 E-多项式。

Logares、Mart´ınez、Mu˜noz 和 Newstead 运用几何论证，计算了 SL_2 特征簇 [12, 14] 和 PGL_2 特征簇 [13]的 E-多项式。Gonz´alez-Prieto、Logares 和 Mu˜noz[6], 对这一方法进行了重新表述和推广，并构造了一个拓扑量子场论（TQFT），用于计算 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}_k)$ 中 $R_G(\Sigma_g)$ 的虚拟类。借助这一拓扑量子场论，他们计算了 AGL_1 表示簇的虚拟类；在 [4] 中，该方法被用于计算 SL_2 表示簇和扭曲 SL_2 特征簇的虚拟类。具体而言，该方法定义了一个宽松幺半函子 $Z\colon \mathrm{Bord}_2 \to \mathrm{K}(\mathrm{Var}_k)\text{-Mod}$，它从（带基点的）二维配边范畴映射到 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}_k)$-模范畴，并满足 $Z(\Sigma_g)(1) = [R_G(\Sigma_g)]$。利用函子性，只需计算

$$Z(\bigcirc) : \mathrm{K}(\mathbf{Var}/G) \to \mathrm{K}(\mathbf{Var}_k), \quad Z(\text{⊖}) : \mathrm{K}(\mathbf{Var}/G) \to \mathrm{K}(\mathbf{Var}/G),$$

$$\text{and} \quad Z(\text{◗}) : \mathrm{K}(\mathbf{Var}_k) \to \mathrm{K}(\mathbf{Var}/G)$$

通过复合得到 $Z(\Sigma_g)$。

概要。本文的目标是计算 E-多项式以及 G-表示簇的虚拟类，其中 Σ_g 为 G 等于群 $\mathbb{T}_n$ 上三角 $n \times n$ 矩阵群或群 $\mathbb{U}_n$ 幂零 $n \times n$ 矩阵群，并同时采用拓扑量子场论方法和算术方法。因此，本文是对 [7], 的扩展；在该文中， $R_{\mathbb{T}_n}(\Sigma_g)$ 的虚拟类已针对 $G = \mathbb{T}_n$ 和 $1 \leq n \leq 4$ 使用拓扑量子场论方法进行了计算。具体而言，在第 3 节中，我们将计算 $R_{\mathbb{T}_n}(\Sigma_g)$ 和 $R_{\mathbb{U}_n}(\Sigma_g)$ 在 $1 \leq n \leq 5$下的虚拟类。

本文旨在构建一个条理清晰且简洁的框架。我们不采用 [4, 5, 6], 中对拓扑量子场论的显式描述，而是按照定义 3.1中的做法使用基本映射，从而避免对拓扑量子场论进行“约化”或“简化”，正如 [4, 7] 中所做的那样。我们在第 2.3小节引入 代数代表元 这一概念，便可以充分利用 $\mathbb{T}_n$ 和 $\mathbb{U}_n$ 的共轭类中不存在单值化这一性质，以简化计算。此外，我们对计算进行了组织，使得关于 $\mathbb{T}_n$ 的大多数计算都可以复用于 $\mathbb{U}_n$。

此外，在第 4 节中，我们将应用算术方法计算 E-多项式$R_{\mathbb{T}_n}(\Sigma_g)$ 和 $R_{\mathbb{U}_n}(\Sigma_g)$，其中 $1 \leq n \leq 10$。特别地，我们计算$\mathbb{T}_n$ 和 $\mathbb{U}_n$ 在有限域 $\mathbb{F}_q$上的表示论，并将其编码在表示 ζ 函数中。这些 ζ 函数可以通过递归算法计算，算法 4.14。

结果。定理 3.12 给出了 $\mathbb{T}_5$-表示簇 $R_{\mathbb{T}_5}(\Sigma_g)$ 的虚拟类；定理 3.14 给出了 $\mathbb{U}_n$-表示簇 $R_{\mathbb{U}_n}(\Sigma_g)$ 的虚拟类，其中 $1 \leq n \leq 5$。

定理 4.17 给出了 $\mathbb{U}_n$ 在 $1 \leq n \leq 10$下的表示 ζ 函数；定理 4.18 给出了 $\mathbb{T}_n$ 在 $1 \leq n \leq 10$下的表示 ζ 函数。这些结果直接确定了 E-多项式 $R_{\mathbb{U}_n}(\Sigma_g)$ 和 $R_{\mathbb{T}_n}(\Sigma_G)$；对于 $1 \leq n \leq 5$ ，这些 E-多项式可以看出与通过映射（1.2）得到的虚拟类一致。

对 $\mathbb{T}_n$ 和 $\mathbb{U}_n$ 的表示 ζ 函数的计算，可以看作是对 [24] 和 [19], 的推广，其中， $\mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q)$的共轭类数，记作 $k(\mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q))$，被计算为 q 关于 $1 \leq n \leq 13$ 和 $1 \leq n \leq 16$的多项式。也就是说，由于共轭类数

等于其共轭类数，因此，计算有限群的不可约表示数，求表示 ζ 函数 $\zeta_G(s)$在 $s=0$ 处的值 $k(G)$。这将 ζ 函数$\zeta_{\mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q)}(s)$与 Higman 于[11]首次提出的猜想联系起来。

猜想 1.1（Higman）。对于每个 $n \geq 1$， $\mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q)$ 的共轭类数是关于 q 的多项式。

如前所述，这一猜想已对 $1 \leq n \leq 16$ 得到验证。然而，正如 [8]，所示，存在 $\mathbb{U}_n$ 的模式子群，其在 $\mathbb{F}_q$ 上的共轭类数不是关于 q 的多项式。在 [19]，中给出了这样一个具体的模式子群 $P \subset \mathbb{U}_{13}$，并且进一步证明， $k(\mathbb{U}_{59})$ 可以表示为其他模式子群 P' 的 $\mathbb{Z}[q]$-线性组合，其中各项为 $k(P)$ 和 $k(P')$。这表明，除非线性组合中的非多项式项相互抵消，否则该猜想可能对 $n=59$ 不成立。

根据定理 4.17 和 4.18的结果，我们提出 Higman 猜想的一个广义版本。

猜想 1.2（广义 Higman）。对于任意 $n \geq 1$，表示 ζ 函数 $\zeta_{\mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q)}(s)$ 是关于 q 和 q^{-s} 的多项式，而 $\zeta_{\mathbb{T}_n(\mathbb{F}_q)}(s)$ 是关于 q、q^{-s} 和 $(q-1)^{-s}$ 的多项式。

类似地，考察 $R_{\mathbb{T}_n}(\Sigma_g)$ 和 $R_{\mathbb{U}_n}(\Sigma_g$的虚拟类，我们提出该猜想的一个动机版本。注意，猜想 1.3 并不蕴含猜想 1.2，因为簇 X 可能在 $\mathbb{Z}[q]$ 中有虚拟类，却不具有多项式计数，例如 $X=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$。

猜想 1.3（动机 Higman 猜想）。对于任意 $g \geq 0$ 和 $n \geq 1$， Σ_g 的 $\mathbb{T}_n$-表示簇和$\mathbb{U}_n$-表示簇的虚拟类都是 $q=[\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}]$中的多项式。

2 簇的 Grothendieck 环

设 k 是一个域。我们将 k 上的簇理解为域 k上的有限型既约分离概形，不一定不可约。假设所有簇都定义在 k上。

定义 2.1。设 S 是一个簇。 S上的簇的 Grothendieck 环记为 K(Var$/S$)，它是由 S上的簇的同构类生成的自由阿贝尔群，模去形如以下形式的关系所得：

$$[X]=[Z]+[U],$$

对于所有具有开补集 $U=X\setminus Z$ 的闭子簇 $Z\subset X$ 。K(Var$/S$) 上的乘法定义为在 S 上的纤维积，

$$[X]\cdot[Y]=[X\times_S Y],$$

很容易看出，这为 K(Var$/S$)赋予了环结构。特别地，单位元是 S 上 $\mathbf{1}_S=[S]$ 的类 $\mathbf{0}_S=[\varnothing]$，而零元是类 $[X]$ 。簇X 在 K(Var$/S$)中的类也称为它的虚拟类。

为了区分不同基底上的类，我们用 $[X]_S$ 表示 K(Var$/S$)中 X 的类；当基底为 $S = \operatorname{Spec} k$时，则简记为 $[X]$。此外，我们用$q = [\mathbb{A}^1_k] \in$K(Var$_k$)表示仿射直线的类。

对于任意簇 S，环 K(Var$/S$) 自然具有 K(Var$_k$)-模的结构，其中数乘定义为

$$[T] \cdot [X]_S = [T \times X]_S$$

对于所有簇 T 以及 S 上的簇 X，并通过线性扩张得到。

对于任意簇之间的态射 $f\colon T \to S$，都有诱导映射

$$f_! : \mathrm{K}(\mathbf{Var}/T) \to \mathrm{K}(\mathbf{Var}/S), \quad [X]_T \mapsto [X]_S,$$
$$f^* : \mathrm{K}(\mathbf{Var}/S) \to \mathrm{K}(\mathbf{Var}/T), \quad [X]_S \mapsto [X \times_S T],$$

这可 以看出是 K(Var$_k$)-模态射。此外，映射 f^* 是环同态。

对于任意簇 S，令 $c\colon S \to \operatorname{Spec} k$ 表示终态射。特别地，对于任意 S 上的簇 X，我们有

$$c_![X]_S = [X].$$

2.1 分层

定义 2.2. 设 X 是一个簇。X 的一个分层是由局部闭子簇 $\{X_i\}_{i\in I}$ 组成的集合，满足 $\bigcup_{i\in I} X_i = X$ 且 $X_i \cap X_j = \varnothing$，其中 $i \neq j$。

引理 2.3. 设 X 是定义在 S 上的一个簇，带有分层 $\{X_i\}_{i\in I}$。那么，X_i 中只有有限多个非空，且 $\sum_{i\in I}[X_i]_S = [X]_S$。

证明. 对 X 的维数使用归纳法。若 $\dim X = 0$，则 X 是一个有限点集，结论显然成立。现在假设 $\dim X > 0$，且结论对所有维数小于 $\dim X$ 的簇都成立。

首先考虑 X 不可约的情形。某个 $U = X_i$ 包含 X 的泛点，因此是开集。补集 $Z = X \setminus U$ 的维数小于 X，并由其余的 X_i 分层。由于 $[X]_S = [Z]_S + [U]_S$，结论由归纳假设得出。

现在考虑 X 可约的情形。取一个不可约分支，并去掉它与其他不可约分支的交集，从而得到一个不可约开子集 $U \subset X$。补集 $Z = X \setminus U$ 是一个闭子簇，其不可约分支数少于 X。由于 $\{Z \cap X_i\}_{i\in I}$ 是 Z 的一个分层，而 $\{U \cap X_i\}_{i\in I}$ 是 U 的一个分层，对 X 的不可约分支数应用归纳法，可知只有有限多个非空，并且我们有

$$[U]_S = \sum_{i\in I} [U \cap X_i]_S \quad \text{and} \quad [Z]_S = \sum_{i\in I} [Z \cap X_i]_S.$$

由于对所有 i 都有 $[X_i]_S = [U \cap X_i]_S + [Z \cap X_i]_S$，因此可得 $[X]_S = [U]_S + [Z]_S = \sum_{i\in I}[X_i]_S$。 □

S 的一个分层 $\{S_i\}_{i\in I}$ 诱导出格洛腾迪克环 K(Var/S) 的一个分解。这是一个作为 K(Var$_k$)-代数的分解。

命题 2.4. 设 S 是一个具有分层 $\{S_i\}_{i\in I}$的簇。那么

$$\mathrm{K}(\mathbf{Var}/S) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{K}(\mathbf{Var}/S_i)$$

作为 K(Var$_k$)-代数。

证明. 记 $f_i : S_i \to S$ 为包含映射，则该同构明确地定义为

$$X \mapsto (f_i^* X)_{i\in I} \quad \text{with inverse} \quad \sum_{i\in I} (f_i)_* X_i \hookleftarrow (X_i)_{i\in I}.$$

注意，由于根据引理 2.3 只有有限多个 S_i 非空，因此该和是良定义的。这些映射显然互为逆映射，并且是 K($\mathbf{Var}_k$)-代数的态射。 □

记号 2.5. 对于任意 $X \in$K(Var/S)，我们将记 $X|_{S_i} \in$K(Var/S_i)为 X 在此同构下的像的各个分量。

2.2 特殊代数群

Serre 首次引入了特殊代数群 [20]。

定义 2.6. 若代数群 G 在 k 上满足：任意 ´étale G-挠子在扎里斯基拓扑下局部平凡，则称其为特殊的。等价地，若对于所有 k-概形 X，自然映射 $H^1_{\mathrm{Zar}}(X,G) \to H^1_{\text{ét}}(X,G)$ 是同构，则称 G 为特殊的。

引理 2.7. 设 G 是一个特殊代数群。那么对于簇 $X \to S$上的每个 G-挠子，我们有 $[X]_S = [G]\cdot \mathbf{1}_S \in$ K(Var/S)。

证明. 由于 G 是特殊的， G-挠子 $X \to S$ 是 Zariski 局部平凡的，因此存在 S 的一个分层$\{S_i\}_{i\in I}$，使得 $X\times_S S_i \cong G\times S_i$。现在， $[X]_S = \sum_{i\in I}[G\times S_i]_S = [G]\cdot\sum_{i\in I}[S_i]_S = [G]\cdot \mathbf{1}_S$。 □

命题 2.8. 设 $1 \to N \to G \to H \to 1$ 是代数群的一个正合列。若 N 和 H 是特殊的，则 G 也是特殊的。

证明。由于 G 是特殊的等价于对于所有 k-概形 X， $H^1_{\text{ét}}(X,G) = H^1_{\mathrm{Zar}}(X,G)$，故由上同调中的长正合列和五引理可得结论。

或者，任意 G-挠子 $X \to S$ 都可以写成 N-挠子 $X \to X/N$ 与 H-挠子 $X/N \to X/G \cong S$的复合。由于 H是特殊的，存在开集 $S_i \subset S$使得 $(X/N)\times_S S_i \cong H\times S_i$。沿着 $S_i \xrightarrow{(1,\mathrm{id})} H\times S_i$拉回 N-挠子 $X\times_S S_i \to H\times S_i$，得到一个 N-挠子$Y_i \to S_i$；由于 N 是特殊的，它也 Zariski 局部平凡。因此，存在开集 $S_{ij} \subset S_i$ 使得 $Y_i \times_{S_i} S_{ij} \cong N\times S_{ij}$。现在有一个自然的 G-挠子之间的态射 $G\times S_{ij} \to X\times_S S_{ij}$，它们定义在$S_{ij}$上，该态射必为同构。因此， $X \to S$ 是 Zariski 局部平凡的。 □

例 2.9。 ■ 根据希尔伯特第90定理，一般线性群 GL_n 是特殊的 [18, 命题 III.4.9，引理 III.4。10]。

■ 由正合列 $0 \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{GL}_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m \to 1$ 根据命题 2.8 可得 SL_n也是特殊的。

■ 群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 不是特殊的。例如，当 $\mathrm{char}(k) \neq 2$时，由 $x \mapsto x^2$ 给出的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-挠子 $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ 在扎里斯基拓扑下并非局部平凡。

引理 2.10. 设 k 是代数闭域。任意定义在 k 上的幺幂群 $U \subset \mathbb{U}_n$ 都是特殊的。

证明。 根据 [17, 定理 17。24]， U 可表示为若干个 $\mathbb{G}_a$的扩张。由 [18,命题III.3。7] 可得 $\mathbb{G}_a$ 是特殊的，因此由命题 2.8可得结论。 □

引理 2.11（动机轨道-稳定子定理）。设 G 是一个代数群，它作用于域 k上的簇X 。若 $\xi \in X$ 是一个满足 Stab(ξ) 为特殊群的点，则

$$[G] = [\mathrm{Stab}(\xi)] \cdot [\mathrm{Orbit}(\xi)].$$

证明。 映射 $G \to$ 1的轨道(ξ)由 $g \mapsto g\xi g^{-1}$ 给出，是一个 -torsor，因此 Zariski 局部平凡，故由引理 2.7可得结论。 □

例2.12. 若不要求 Stab(ξ) 是特殊的，则上述引理不成立。具体而言，对于 $\mathrm{char}(k) \neq 2$，考虑 $G = \mathbb{G}_m$ 通过 $t \cdot x = t^2 x$作用于 $X = \mathbb{A}^1_k$ 。那么，1的轨道 $= \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ ，且 1的稳定子群 $= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，但是 $[G] \neq 2(q-1)$。

2.3 代数代表元

定义2.13. 设 G 是定义在 k上的代数群，且 X 是一个带有传递G-作用的簇。点 $\xi \in X$ 是 X 的代数代表元，如果在 X上扎里斯基局部存在簇之间的态射 $\gamma\colon X \to G$ ，使得对于所有 $x \in X$，均有 $x = \gamma(x) \cdot \xi$ 。等价地，如果以下 Stab(ξ)-torsor

$$P_\xi = \{(x, g) \in X \times G \mid x = g \cdot \xi\} \xrightarrow{\pi_X} X$$

是 Zariski 局部平凡的。

注2.14. 如果存在代数代表元 $\xi \in X$，那么所有 $\xi' \in X$ 都是代数代表元，其中 γ' 等于 γ 与 G 上的某个平移复合。

例 2.15. 代数代表元未必总是存在。设 $\mathrm{char}(k) \neq 2$ ，并考虑$G = \mathbb{G}_m$ 通过 $t \cdot x = t^2 x$作用于 $X = \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ 。那么 X 没有代数代表元。也就是说，不失一般性，我们可以取 $\xi = 1$，但此时 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-挠子

$$P_\xi = \{(x, t) \in X \times G \mid x = t^2\} \xrightarrow{\pi_X} X$$

是非平凡的。

例 2.16。 设 $\mathrm{char}(k) \neq 2$，并考虑 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ PGL_2, 中的元素，其稳定子 $\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \sqcup \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \cong \mathbb{G}_m \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 不是特殊的。具体而言， A的共轭类由所有迹为 0 的元素构成；由于 $[\mathrm{PGL}_2] = q^3 - q$ 不能被 $[\{A \in \mathrm{PGL}_2 \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}] = q^2$整除，根据引理 A，2.11，

定义 2.17. 设 G 是一个定义在 k上的代数群，且 X 是一个带有 G-作用的簇。 X 的一个代数代表元族是一个簇之间的态射 $\rho\colon X \to T$，它带有一个截面$\xi\colon T \to X$，并且在 X上扎里斯基局部地，存在一个簇之间的态射 $\gamma\colon X \to G$，使得对所有 $x \in X$，$x = \gamma(x) \cdot \xi(\rho(x))$。

例 2.18. 考虑 $G = \mathbb{T}_2$ 通过共轭作用于 $X = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \neq 0, 1\right\}$。那么 X有一个代表元族，由 $T = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \neq 0, 1\right\}$给出，其中 ξ 和 ρ 分别是包含映射和投影，并且

$$\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{1-a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

命题 2.19. 设 k 是一个代数闭域。考虑某个 $n \geq 1$的 $G = \mathbb{T}_n$，它通过共轭作用于一个幺幂共轭类 $\mathcal{U} \subset \mathbb{T}_n$。那么 $\mathcal{U}$ 有一个代数代表元。

证明。任取一点 $\xi \in \mathcal{U}$。我们需要证明 Stab(ξ)-主丛

$$P = \{(u, g) \in \mathcal{U} \times G : u = g\xi g^{-1}\} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{U}}} \mathcal{U}$$

在扎里斯基拓扑下局部平凡。特别地，只需证明 Stab(ξ) 是一个特殊群。由于 $\mathbb{T}_n$ 可三角化，子群 Stab(ξ) 也可三角化，因此我们可以写成

$$1 \to U \to \mathrm{Stab}(\xi) \to D \to 1,$$

其中 U 是极大正规幺幂子群，由引理 2.10 可知它是特殊的。此外，存在一个自然的分裂 $D \to \mathrm{Stab}(\xi)$，并且任意 $d \in D$ 都必须满足 $d_{ii} = d_{jj}$，只要 $\xi_{ij} \neq 0$。因此， D 是若干个 $\mathbb{G}_m$ 的直积，而它也具有特殊性。现在由命题 2.8 即得结论。

□

下面的引理说明了拥有代数代表元为何有用。

命题 2.20。设 S 是一个带有 G 作用且具有代数代表元族 $\xi\colon T \to S$ 和 $\rho\colon S \to T$ 的簇。那么对于任意态射 $f\colon Y \to S$ 以及 G-等变态射 $g\colon X \to S$，我们有

$$[X \times_S Y]_S = [(X \times_S T) \times_T Y]_S \in \mathrm{K}(\mathbf{Var}/S),$$

其中，将 $(X \times_S T) \times_T Y$视为通过复合映射 $f \circ \pi_Y$定义在 S 上的簇。

证明。在 X 上扎里斯基局部地，有一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} & (X \times_S T) \times_T Y \\ & {\scriptstyle}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f \circ \pi_Y} & \\ & S & \end{array}$$

其中 $\varphi(x,y) = (\gamma(f(y)) \cdot x, \rho(f(y))\ y)$，且 $\psi(x,t,y) = (\gamma(f(y)) \cdot x, y)$。注意到，$\varphi$ 和 ψ 很容易看出是在 S 上良定义的，并且互为逆映射。 □

在 代数代表元的情形下，即当 T 是一个点时，我们得到以下推论 s.

推论 2.21。设 S 是一个带有 G-作用的簇，并且有一个代数代表元 $\xi \in S$。那么对于任意态射 $f\colon Y \to S$ 以及 G- 等变态射 $g\colon X \to S$，有

$$[X \times_S Y]_S = [X|_\xi] \cdot [Y]_S \in \mathrm{K}(\mathbf{Var}/S).$$ □

推论 2.22。设 S 是一个带有 G-作用的簇，并且有一个代数代表元 $\xi \in S$。那么对于任意 G-等变映射 $f\colon X \to S$，有

$$[X]_S = \frac{[X]}{[S]} \cdot \mathbf{1}_S \in \mathrm{K}(\mathbf{Var}/S).$$

证明。将 $f = \mathrm{id}_S$ 代入前一个推论，得到

$$[X]_S = [X|_\xi] \cdot \mathbf{1}_S.$$

考察 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}_k)$ 中的这个等式，可知 $[X|_\xi] = [X]/[S]$。 □

2.4 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}_k)$ 中的算法计算

设 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是一个有限集，设 F 和 G 是 $k[A]$ 的有限子集。于是我们记

$$X(A, F, G)$$

为 由 $f = 0$（对所有 $f \in F$）及 $g \neq 0$（对所有 $g \in$）定义的 $\mathbb{A}^n_k$ 的约化局部闭代数簇 G.

本小节将介绍计算 $\mathrm{K}(\mathbf{Var}_k)$ 中此类簇的虚拟类的策略。这些策略合并为递归算法，算法 2.24，该算法将在第 3 节中用于计算表示簇 $R_G(\Sigma_g)$ 的虚拟类。我们先说明，该算法并非计算虚拟类的通用方法，因为它可能会失败。事实上，只要算法没有失败，它就会返回 $X(A, F, G)$ 的虚拟类，并将其表示为关于 $q = [\mathbb{A}^1_k]$ 的多项式；显然，并非所有虚拟类都具有这种形式。不过，事实证明，该算法足以满足本文的需要。

附录 [7, A] 中使用了相同的算法来计算 $R_{\mathbb{T}_n}(\Sigma_g)$ 的虚拟类，其中 $1 \leq n \leq 4$。该算法的实现见 [25]。

记号 2.23。对于 $a \in A$、$f \in k[A]$ 和 $u \in k[A \setminus \{a\}]$，我们用 $\mathrm{ev}_a(f, u)$ 表示 f 在 $a = u$ 中的求值。当 u、$v \in k[A \setminus \{a\}]$ 时，我们用 $\mathrm{ev}_a(f, u/v)$ 表示 f 在 $a = u/v$ 中的求值乘以 $v^{\deg_a(f)}$，因此 $\mathrm{ev}_a(f, u/v) \in k[A \setminus \{a\}]$。对于子集 $F \subset k[A]$，我们写作 $\mathrm{ev}_a(F, -) = \{\mathrm{ev}_a(f, -)\colon f \in F\}$。

算法 2.24。输入：如上所述的有限集 A、F 和 G。

输出：$X(A, F, G)$ 作为关于 $q = [\mathbb{A}^1_k]$ 的多项式的虚拟类。

1. 如果 F 含有非零常数，或者如果 $0 \in G$，那么 $X = \varnothing$，因此返回 $[X] = 0$。

2. 如果 $F = G = \varnothing$ 或 $A = \varnothing$，那么 $X = \mathbb{A}_k^{\#A}$，因此返回 $[X] = q^{\#A}$。

3. 如果所有 $f \in F$ 和 $g \in G$ 都与某个 $a \in A$无关，那么 $X \cong \mathbb{A}_k^1 \times X'$ 满足 $X' = X(A \setminus \{a\}, F, G)$，因此返回 $[X] = q[X']$。

4. 如果对于某些 $f \in F$ 和 $u \in k[A]$，$f = u^n$（带有 $n > 1$），那么我们可以用 u替换 f，而不改变 X。也就是说，$X = X(A, (F \setminus \{f\}) \cup \{u\}, G)$。类似地，如果对于某些 $g \in G$ 和 $u \in k[A]$，$g = u^n$（带有 $n > 1$），那么 $X = X(S, F, (G \setminus \{g\}) \cup \{u\})$。

5. 如果某个 $f \in F$是关于 $a \in A$的单变量多项式，并且可因式分解为 $f = (a - \alpha_1) \cdots (a - \alpha_m)$，其中 $\alpha_i \in k$，那么返回 $[X] = \sum_{i=1}^m [X_i]$ 并带有

$$X_i = X(A \setminus \{a\}, \mathrm{ev}_a(F \setminus \{f\}, \alpha_i), \mathrm{ev}_a(G, \alpha_i)).$$

6. 假设 $f = uv$ 对于某个 $f \in F$ 和非恒定的 $u, v \in k[A]$成立。那么 X 可以按$X \cap \{u = 0\}$ 和 $X \cap \{u \neq 0, v = 0\}$进行分层，因此返回 $[X] = [X_1] + [X_2]$，其中

$$\begin{aligned} X_1 &= X(A, (F \setminus \{f\}) \cup \{u\}, G), \\ X_2 &= X(A, (F \setminus \{f\}) \cup \{v\}, G \cup \{u\}). \end{aligned}$$

7. 假设 $f = au + v$对于某个 $f \in F$, $a \in A$和 $u, v \in k[A]$ 成立，其中 u和 v与 a无关，且u 非零。那么 X 可以按 $X \cap \{u = 0, v = 0\}$ 和 $X \cap \{u \neq 0, a = -v/u\}$进行分层，因此返回 $[X] = [X_1] + [X_2]$，其中

$$\begin{aligned} X_1 &= X(A, (F \setminus \{f\}) \cup \{u, v\}, G), \\ X_2 &= X(A, \mathrm{ev}_a(F \setminus \{f\}, -v/u), \mathrm{ev}_a(G, -v/u) \cup \{u\}). \end{aligned}$$

8. 若 $\mathrm{char}(k) \neq 2$，假设 $f = a^2u + av + w$对于某个 $f \in F$, $a \in S$和 $u, v, w \in k[A]$ 成立，其中 u, v与 a无关，且 u 非零。此外，假设判别式 $D = v^2 - 4uw$是一个平方，即 $D = d^2$ 对于某个 $d \in k[A]$成立。那么返回 $[X] = [X_1] + [X_2] + [X_3] + [X_4]$，其中

$$\begin{aligned} X_1 &= X(A, (F \setminus \{f\}) \cup \{u, av + w\}, G), \\ X_2 &= X(A, \mathrm{ev}_a(F \setminus \{f\}, -v/2u) \cup \{D\}, \mathrm{ev}_a(G, -v/2u) \cup \{u\}), \\ X_3 &= X(A, \mathrm{ev}_a(F \setminus \{f\}, (-v - d)/2u), \mathrm{ev}_a(G, (-v - d)/2u) \cup \{u, D\}), \\ X_4 &= X(A, \mathrm{ev}_a(F \setminus \{f\}, (-v + d)/2u), \mathrm{ev}_a(G, (-v + d)/2u) \cup \{u, D\}). \end{aligned}$$

9. 如果 $G \neq \varnothing$，任选一个 $g \in G$，并返回 $[X] = [X_1] - [X_2]$ with

$$\begin{aligned} X_1 &= X(A, F, G \setminus \{g\}), \\ X_2 &= X(A, F \cup \{g\}, G). \end{aligned}$$

10. 失败。

3 拓扑量子场论方法

拓扑量子场论方法的思路是定义一个拓扑量子场论（TQFT），即一个宽松幺半函子 $Z : \mathrm{Bord}_n \to \mathrm{K}(\mathrm{Var}_k)\text{-Mod}$，它从（带基点的） n-配边范畴映射到 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}_k)$ 上模的范畴，并满足：与闭流形 X 关联的不变量 $Z(M)(1) \in \mathrm{K}(\mathrm{Var}_k)$ 恰好是其类 $[R_G(X)]$。于是，函子性使得闭流形X 可以表示为若干较简单配边的复合，因此计算这些较简单配边在 Z 下的像，就能得到 X的不变量。

对于本文的目的，只需取 $n = 2$ 并定义映射 $Z(\,)$ $Z(\,)$ 和 $Z(\,)$ 来模拟拓扑量子场论，而不必对拓扑量子场论作完整描述。尽管这些映射并未定义一个真正的拓扑量子场论，但它们计算出相同的不变量（定理 3.2），且定义和处理起来更为简便。关于拓扑量子场论方法的详细讨论，请参见 [4, 12]。

定义 3.1. 设 G 是定义在 k上的代数群。定义以下 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}_k)$-模态射，

$$
\begin{aligned}
Z(\,) &: \mathrm{K}(\mathbf{Var}_k) \to \mathrm{K}(\mathbf{Var}/G), \qquad 1 \mapsto \begin{bmatrix} \{1\} \\ \downarrow \\ G \end{bmatrix}, \\
Z(\,) &: \mathrm{K}(\mathbf{Var}/G) \to \mathrm{K}(\mathbf{Var}_k), \qquad \begin{bmatrix} X \\ \downarrow f \\ G \end{bmatrix} \mapsto \left[f^{-1}(1)\right], \\
Z(\,) &: \mathrm{K}(\mathbf{Var}/G) \to \mathrm{K}(\mathbf{Var}/G), \qquad \begin{bmatrix} X \\ \downarrow f \\ G \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} X \times G^2 & (x, A, B) \\ \downarrow & \downarrow \\ G & f(x)[A, B] \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

定理 3.2. 对任意代数群 G 和 $g \geq 0$，有

$$
[R_G(\Sigma_g)] = Z(\,) \circ Z(\,)^g \circ Z(\,)(1).
$$

证明。这直接由 G-表示簇 Σ_g (1.1) . □

该定理表明，为了计算 $[R_G(\Sigma_g)]$, ，我们必须理解映射 $Z(\,)$。在下面的小节中，我们将取 $G = \mathbb{T}_n$ ，令 $1 \leq n \leq 5$ ，并说明如何计算当限制在由幺幂共轭类生成的 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}_k)$-子模中的 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}/G)$ 上时，与 $Z(\,)$ 相关联的矩阵。确切地说，我们将取 G 等于

$$
\tilde{\mathbb{T}}_n = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a_{i,i} \neq 0 \right\},
$$

˜，并利用同构 $\mathbb{T}_n \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{T}_n$，可得

$$[R_{\mathbb{T}_n}(\Sigma_g)] = [R_{\mathbb{G}_m}(\Sigma_g)][R_{\tilde{\mathbb{T}}_n}(\Sigma_g)] = (q-1)^{2g}[R_{\tilde{\mathbb{T}}_n}(\Sigma_g)]. \tag{3.1}$$

˜之所以关注 $\mathbb{T}_n$ 而非 $\mathbb{T}_n$，是为了减少变量数量，从而稍微简化方程。

˜在第 3.1 小节中，我们将以 $G = \mathbb{T}_2$ 为例来说明该方法。对于更高的 n，过程也类似。具体而言，我们将使用由 $\mathbf{Var}_k$ 的幺幂共轭类生成的 $\mathbf{K}(\mathbf{Var}/G)$-子模 $\mathbf{K}(\ G$。随后，根据这些生成元计算表示$Z(\ )$ 的矩阵。

为此，我们需要确定 G 的幺幂共轭类、描述它们的方程，以及每个类的一个代数代表元。这些数据可以自动计算，并将在第3.2小节中给出。

在第 3.4 小节中，我们将计算表示 $Z(\ )$ 的矩阵。最终结果将在第3.5小节中给出。

˜3.1 示例 $G = \mathbb{T}_2$

为了说明该方法，我们将手动计算群 ˜3.1 中定义的拓扑量子场论（即定义 $G = \mathbb{T}_2$ 中的映射）。该群也称为直线仿射变换群

$$\mathrm{AGL}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \neq 0 \right\}.$$

特别地，相应的表示簇 $R_{\mathrm{AGL}_1}(\Sigma_g)$ 对应于 Σ_g 上的平坦秩一仿射丛。

正如下文的计算将展示的，映射 $Z(\ )$ 将 $\mathbf{K}(\mathrm{Var}_k)$-子模限制为 $\mathbf{K}(\mathbf{Var}/G)$ 的一个自同态，该子模由以下类生成：

$$\mathcal{I} = \{1\} \to G \quad \text{and} \quad \mathcal{J} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \neq 0 \right\} \to G.$$

因此，我们将相对于这些生成元用矩阵表示这些映射。特别地，显然

$$Z(\ ) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Z(\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

命题 3.3. 映射 $Z(\ )$ 相对于生成元$\mathcal{I}$和 $\mathcal{J}$，由以下矩阵表示

$$Z(\ ) = q^2 \begin{pmatrix} q-1 & (q-2)(q-1) \\ q-2 & q^2-3q+3 \end{pmatrix}.$$

证明。首先，让我们计算 $Z(\ )(\mathcal{I})|_{\mathcal{I}} = \left[\left\{(A,B) \in \tilde{\mathbb{T}}_2^2 \mid [A,B] = 1\right\}\right]$。记 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

以及 $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，方程 $[A, B] = 1$ 可转化为 $ay - bx + b - y = 0$。我们区分以下几种情况：

- 若 $a = 1$，则 $b(x-1) = 0$，因此 $b = 0$ 或 $x = 1$。故此层的虚拟类为

$$\underset{(y)}{q}\,(\underset{(b=0)}{(q-1)} + \underset{(x=1)}{q} - \underset{\substack{(b=0)\\(x=1)}}{1}) = 2q(q-1).$$

- 若 $a \neq 1$，则 $y = b(x-1)/(a-1)$，从而虚拟类为 $q(q-2)(q-1)$。

合起来，$Z($  $)(\mathcal{I})|_{\mathcal{I}} = q^2(q-1)\mathcal{I}$。接下来，注意到

$$c_!Z(\text{})(\mathcal{I})|_{\mathcal{I}} + [\mathcal{J}]c_!Z(\text{})(\mathcal{I})|_{\mathcal{J}} = [\tilde{\mathbb{T}}_2]^2 = q^2(q-1)^2,$$

由此可得 $Z($  $)(\mathcal{I})|_{\mathcal{J}} = q^2(q-2)\mathcal{J}$，利用推论2.22 以及 $\mathcal{J}$ 有代数代表元这一事实。

下一个系数可由前一个系数计算得出：

$$Z(\text{})(\mathcal{J})|_{\mathcal{I}} = ([\mathcal{J}]c_!Z(\text{})(\mathcal{I})|_{\mathcal{J}})\mathcal{I} = q^2(q-2)(q-1)\mathcal{I}.$$

最后，对于最后一个系数，注意到：

$$c_!Z(\text{})(\mathcal{J})|_{\mathcal{I}} + [\mathcal{J}]c_!Z(\text{})(\mathcal{J})|_{\mathcal{J}} = [\mathcal{J}][\tilde{\mathbb{T}}_2]^2 = q^2(q-1)^3,$$

由此可得 $Z($  $)(\mathcal{J})|_{\mathcal{J}} = q^2(q^3-3q+3)\mathcal{J}$。 □

为了 应用定理 3.2，将映射 $Z($  $)$ 对角化为 PDP^{-1}，其中 h

$$P = \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & q^2(q-1)^2 \end{pmatrix}.$$

现在由定理 3.2以及直接的矩阵乘法可得

$$[R_{\tilde{\mathbb{T}}_2}(\Sigma_g)] = q^{2g-1}(q-1)^{2g} + q^{2g-1}(q-1).$$

3.2 描述共轭类

˜本小节旨在描述 $\mathbb{T}_n$ 的共轭类，重点关注幺幂共轭类。具体而言，我们将为幺幂共轭类找到代数代表元，并为非幺幂共轭类找到代数代表元族。此外，我们将找出描述幺幂共轭类的方程，最后计算幺幂共轭类的虚拟类，以及其代表元的稳定子的虚拟类。所有这些数据都是后续小节所必需的，以便计算相对于由幺幂类给出的生成元的 $Z($  $)$ 的矩阵。

˜代表元。为了求出 $\mathbb{T}_n$的幺幂共轭类数目及每个类的代表元，可以使用 [3], 中所述的 Belitskii 算法，该算法适用于 $1 \leq n \leq 5$。

注意，根据命题 2.19，这些代表元自动就是代数代表元。将所得的幺幂共轭类记为 $\mathcal{U}_1$、……、$\mathcal{U}_M$，相应的代数代表元记为ξ_1、……、ξ_M。幺幂共轭类的数目 M随 n变化，见下表。

n	1	2	3	4	5
M	1	2	5	16	61

或者，也可以利用 Belitskii 算法的定性结果：对于 $1 \le n \le 5$ 任意˜幺幂矩阵，都可以在 $\mathbb{T}_n$ 中共轭为一个仅含 0 和 1 的矩阵。这样便得到有限个矩阵（$2^{n(n-1)/2}$），并且可以轻松地根据它们是否共轭进行划分。现在，从每个共轭类中选取一个代表元。

˜接下来，我们将用依赖于对角线的族来描述 $\mathbb{T}_n$ 中的非幺幂共轭类。定义对角模式为集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$的一个划分。那么，对于任意˜矩阵 $A \in \mathbb{T}_n$，其 δ_A 对角线 A 的对角模式是满足以下条件的划分：i 与 j 等价，当且仅当$\sim A_{ii} = A_{jj}$。注意，在 $\mathbb{T}_n$ 中，两个矩阵 A 和 B 共轭的必要条件是它们的对角线相同，但反之未必成立。现在，我们来看以下共轭类族：

$$\mathcal{C}_{\delta,i} = \{A \in \tilde{\mathbb{T}}_n \mid \delta_A = \delta \text{ and } A \sim \operatorname{diag}(A) + \xi_i - 1\},$$

对于任意对角模式 δ 和 $1 \le i \le M$，其中 diag(A) 表示 A 的对角部分。任意这样的$\mathcal{C}_{\delta,\ i}$ 都有一族代表元

$$\xi_{\delta,i} : C_{\delta,i} = \{A \in \tilde{\mathbb{T}}_n \mid \delta_A = \delta \text{ and } A = \operatorname{diag}(A) + \xi_i - 1\} \to \mathcal{C}_{\delta,i}$$

由包含映射给出。当然，对于某些对角矩阵 D，可能出现 $D + \xi_i - 1$ 和$D + \xi_j - 1$ 共轭而 $i \ne j$ 的情况，但很容易筛除这些重复项。筛除后，我们得到共轭类族 $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_N$，其数量 N根据 n由下表给出。

n	1	2	3	4	5
N	2	3	12	61	372

注意，我们可以选择指标，使得 ξ_i 与 $1 \le i \le M$的幺幂代表元一致。

方程。接下来，我们要寻找描述幺幂共轭类的方程 $\mathcal{U}_i$ 对于$1 \le i \le M$。为简单起见，我们将计算闭包 $\overline{\mathcal{U}}_i$ 而非 $\mathcal{U}_i$。第 3.3 小节将说明这样做已足够。闭包 $\overline{\mathcal{U}}_i$ 是映射像的闭包

$$f_i : G \to G, \quad g \mapsto g\xi_i g^{-1}.$$

由于 G 是仿射的，f_i 也可以等价地用一个环态射来描述

$$f_i^{\#} : \mathcal{O}_G(G) \to \mathcal{O}_G(G).$$

特别地，闭包 $\overline{\mathcal{U}}_i$ 对应于理想 $I_i \subset \mathcal{O}_G(G)$，它是 $f_i^{\#}$ 的核。此类理想的生成元可以通过 Gr¨obner 基 [1], 计算得出，从而得到所需的方程。特别地，我们使用 [1, 定理 2.4。2] 来计算 $f_i^{\#}$ 的核。

˜轨道与稳定子。对于任意 $A \in \mathbb{T}_n$，为了计算 A 的轨道的虚拟类，我们可以使用引理 2.11。事实上，正如我们在命题 2.19 中所见，任意 A) 的稳定子 Stab(⌟$A \in \mathbb{T}_n$ 都是特殊的。为了计算 A 的稳定子的虚拟类，我们使用算法 2.24，因为我们有一个明确的描述

$$\mathrm{Stab}(A) = \{B \in \tilde{\mathbb{T}}_n \mid AB - BA = 0\}.$$

R关于共轭类族 $\mathcal{C}_i$，我们将使用以下引理。

引理 3.4. 对每个 $1 \le i \le N$，存在一个同构

$$\mathcal{C}_i \cong C_i \times \mathrm{Orbit}(A)$$

对每个 $A \in C_i$。

证明. 注意，$\mathcal{C}_i \to C_i$ 的纤维为 Orbit(A) $\cong G/$Stab(A)，因此只需证明对于所有 $A \in C_i$，Stab(A) 都是常量。由于需要考虑的情形只有有限种，这一点很容易通过直接验证得出。或者，注意到 $B \in$ Stab(A) 当且仅当对于所有$1 \le i \le j \le n$,

$$B_{ij}(A_{ii} - A_{jj}) + \sum_{k=i+1}^{j} B_{kj}A_{ik} - \sum_{k=i}^{j-1} B_{ik}A_{kj} = 0. \qquad (*)$$

我们断言，对于所有满足 $A_{ii} \neq A_{jj}$ 的 $i \le j$，都有 $B_{ij} = 0$。由此断言即可得出结论，因为对于 $i \neq j$，$A_{ij} \in \{0, 1\}$，所以 (∗) 的解与 A 无关。我们对 $j - i$ 使用归纳法证明该断言，其中 $j - i = 0$ 的情形显然。对于一般情形，取满足$A_{ii} \neq A_{jj}$的 $i \le j$。若存在一个 $k \in \{i+1, \ldots, j\}$ 满足 $A_{ki} \neq 0$，则 $A_{kk} = A_{ii} \neq A_{jj}$，因此 $B_{kj} = 0$。类似地，若存在一个 $k \in \{i, \ldots, j-1\}$ 满足 $A_{kj} \neq 0$，则 $A_{kk} = A_{jj} \neq A_{ii}$，因此 $B_{ki} = 0$。因此，(∗) 可化简为 $B_{ij} = 0$。 □

3.3 转移矩阵

设 X 是具有分层 X_i的簇，并设 Y是定义在 X上的簇。本小节的目标是说明，为了计算类 $[Y \cap X_i]_X$，只需改为计算类$[Y \cap \overline{X}_i]_X$，并利用容斥原理。

例 3.5. 假设 X 由 $X_0 \subset X$ 闭集及其开补集 $X_1 = X \setminus X_0$分层。如果我们想计算 $[Y \cap X_0]$ 和 $[Y \cap X_1]$，那么计算后者很可能会得到计算结果 $[Y \cap X] - [Y \cap X_0]$，这表明计算 $[Y \cap X_0]$ 的结果可以重复使用。因此，不必计算 $[Y \cap X_0]$和 $[Y \cap X_1]$，而可以计算 $[Y \cap \overline{X}_0] = [Y \cap X_0]$和 $[Y \cap \overline{X}_1] = [Y \cap X] = [Y]$，由此形式上可推出 $[Y \cap X_1] = [Y \cap \overline{X}_1] - [Y \cap \overline{X}_0]$。

引理 3.6. 设 X 是带有分层 $\{X_i\}_{i \in I}$的拓扑空间。那么 $\overline{X}_i = \overline{X_j}$ 当且仅当$i = j$。

证明。对于每个 $i \in I$，写作 $X_i = Z_i \cap U_i$，其中 $Z_i \subset X$ 为闭集，$U_i \subset X$ 为开集。不失一般性，我们可以假设 $Z_i = \overline{X}_i$。现在，若对于某个 i，$\overline{X}_i = \overline{X}_j$，$j \in I$，那么 X_i 和 X_j 都是

$\overline{X}_i = \overline{X}_j$ 中的开稠密集，因此它们必定相交。但这与 X_i 和 X_j 不相交的假设矛盾，因为它们是分层的一部分。 □

定义 3.7. 设 X 是 S 上带有分层 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的簇。在 I 上定义偏序：当且仅当 $\overline{X}_i \subset \overline{X}_j$ 时，$i \leq j$。自反性和传递性显然，反对称性则由上述引理得出。因此，等式

$$[X_i]_S = [\overline{X}_i]_S - \sum_{j<i} [X_j]_S$$

定义一个 $\mathbb{Z}$-线性映射 $C\colon \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}^I$，称为该分层的转移矩阵，满足

$$[X_i]_S = \sum_{j\in I} C_{ij} [\overline{X}_j]_S$$

在 $\mathrm{K}(\mathrm{Var}/S)$ 中。

推论 3.8. 设 X 是 S 上具有有限分层 $\{X_i\}_{i\in I}$ 及相应转移矩阵 C 的簇。则对于任意 X 上的簇 Y，有

$$[Y \cap X_i]_S = \sum_{j\in I} C_{ij}\ [Y \cap \overline{X}_j]_S,$$

其中约定 $Y \cap X_i = Y \times_X X_i$。 □

˜例 3.9. 设 $G = \mathbb{T}_n$，并设 $U \subset G$ 为幺幂矩阵的闭子簇。那么U有一个分层，由 $\mathcal{U}_1$、.....、$\mathcal{U}_M$给出。由于可以计算每个 $\overline{\mathcal{U}}_i$对应的方程，因此很容易确定 $\{1, 2, \ldots, M\}$上的偏序，从而可以计算该分层的转移矩阵 C_{ij}。现在，对于 Y 上的任意簇，其中 U，根据上述推论，我们有

$$[Y \cap \mathcal{U}_i]_G = \sum_{j=1}^{M} C_{ij}\ [Y \cap \overline{\mathcal{U}}_j]_G.$$

特别地，只需计算所有的$[Y \cap \overline{\mathcal{U}}_i]_G$，即可计算出 $[Y \cap \mathcal{U}_i]_G$。

3.4 计算 $Z(\quad)$

我们回到这样一个问题：计算相对于由幺幂共轭类给出的生成元，与 $Z(\quad)$相关联的矩阵。

为了计算这个矩阵的第一列，我们可以写成

$$\begin{aligned} c_! Z(\quad)(\mathbf{1}_{\mathrm{id}})|_{\mathcal{U}_i} &= [\{(A,B) \in G^2 \mid [A,B] \in \mathcal{U}_i\}] \\ &= \sum_{j=1}^{N} [\{(A,B) \in G \times \mathcal{C}_j \mid [A,B] \in \mathcal{U}_i\}] \\ &= \sum_{j=1}^{N} [\{(A,t) \in G \times C_j \mid [A, \xi_j(t)] \in \mathcal{U}_i\}] \times [\mathrm{Orbit}(\xi_j(\star))] \\ &= \sum_{j=1}^{N} E_{ij}\ [\mathrm{Orbit}(\xi_j(\star))], \end{aligned}$$

其中 $E_{ij} = [\{(A,\ t) \in G \times C_j \mid [A, \xi_j(t)] \in \mathcal{U}_i\}]$ 并且 $\star$是 C_j中的任意一点。对于第三个等式，我们结合引理 2.20 使用了命题 $Y = S = \mathcal{C}_j$ 和 $X = \{(A,\ B) \in G \times \mathcal{C}_j \mid [A, B] \in \mathcal{U}_i\}$，以及引理 3.4。

由于我们已经计算出描述闭包的方程 $\overline{\mathcal{U}}_i$，因此实际上计算类 $\overline{E}_{ij} = [\{(A, t) \in G \times C_j \colon [A, \xi_j(t)] \in \overline{\mathcal{U}}_i\}]$比计算 E_{ij}更容易。根据推论 3.8，它们由该分层的转移矩阵关联

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^{M} C_{ik} \overline{E}_{kj}.$$

系数 ien数 $\overline{E}_{ij}$ 可使用算法 2.24计算。然后，利用推论2.22，我们得到

$$Z(\text{⊖})(\mathbf{1}_{\mathrm{id}}) = \sum_{i,k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} C_{ik} \overline{E}_{kj} [\mathrm{Orbit}(\xi_j(\star))]/[\mathcal{U}_i] \cdot \mathbf{1}_i.$$

接下来，我们可以使用刚刚计算出的第一列，来计算与 $Z(\,)$ 关联的矩阵的所有其他列。特别地，我们可以写出 ⊖

$$\begin{aligned} c_! Z(\text{⊖})(\mathbf{1}_j)|_{\mathcal{U}_i} &= [\{(g, A, B) \in \mathcal{U}_j \times G^2 \mid g[A, B] \in \mathcal{U}_i\}] \\ &= \sum_{k=1}^{M} [\{(g, A, B) \in \mathcal{U}_j \times G^2 \mid g[A, B] \in \mathcal{U}_i, [A, B] \in \mathcal{U}_k\}] \\ &= \sum_{k=1}^{M} [\{g \in \mathcal{U}_j \mid g\xi_k \in \mathcal{U}_i\}][\{(A, B) \in G^2 \mid [A, B] \in \mathcal{U}_k\}] \\ &= \sum_{k=1}^{M} F_{ijk} \cdot c_! Z(\text{⊖})(\mathbf{1}_{\mathrm{id}})|_{\mathcal{U}_k}, \end{aligned}$$

其中 $F_{ijk} = [\{g \in \mathcal{U}_j \mid g\xi_k \in \mathcal{U}_i\}]$。第三个等式由推论2.21 应用于 $S = \mathcal{U}_k$和 $X = \{(g, h) \in \mathcal{U}_j \times \mathcal{U}_k \mid gh \in \mathcal{U}_i\}$ 以及 $Y = \{(A, B) \in G^2 \mid [A, B] \in \mathcal{U}_k\}$。

与系数 E_{ij} 的情况一样，计算 $\overline{F}_{ijk} = [\{g \in \overline{\mathcal{U}}_j \mid g\xi_k \in \overline{\mathcal{U}}_i\}]$ 比计算 F_{ijk} 更容易，并且它们通过分层的转移矩阵相关联

$$F_{ijk} = \sum_{m,\ell=1}^{M} C_{im} C_{j\ell} \overline{F}_{m\ell k}.$$

系数 $\overline{F}_{ijk}$ 可以使用算法 2.24计算。最后，利用推论 2.22 我们得到

$$Z(\text{⊖})(\mathbf{1}_j) = \sum_{i,k,\ell,m=1}^{M} C_{im} C_{j\ell} \overline{F}_{m\ell k} c_! Z(\text{⊖})(\mathbf{1}_{\mathrm{id}})|_{\mathcal{U}_k} / [\mathcal{U}_i] \cdot \mathbf{1}_i.$$

注 3.10. 如果直接尝试计算表示$Z(\,)$的矩阵的系数，就需要计算 M^2 个簇的虚拟类，而每个簇都是 G的⊖簇，其方程由于交换子 $[A, B]$而大多是二次的。采用这一新设置后，为了得到系数$\overline{E}_{ij}$ 和 $\overline{F}_{ijk}$，需要计算 $MN + M^3$ 个簇的虚拟类。不过，这种方法的主要优势在于，这些簇现在将是

分别是 $G \times C_j$ 和 $\mathcal{U}_j$的子簇，且其方程大多是线性的！在实践中，这些方程组的简化所带来的收益远远超过方程组数量的增加。之所以能够进行这些简化，是因为共轭类 $\mathcal{C}_i$的（族）代数代表元，换言之，是因为 $\mathcal{C}_i \to C_i$缺乏单值化。

备注 3.11。 下面给出几点计算性备注。首先，为了加快系数 $\overline{E}_{ij}$ 和 $\overline{F}_{ijk}$的计算（由算法 2.24完成），注意到由于二者无关，可以并行计算。其次，可以进行几项检查以发现明显错误。特别是，可以断言下列等式成立：

- $\sum_{i=1}^{M} c_i Z(\quad)|\mathcal{U}_i = [G]^2[\mathcal{U}_j]$ 对所有 j,
- $\sum_{i=1}^{M} F_{ijk} = [\mathcal{U}_j]$ 对所有 j, k,
- $\sum_{j=1}^{M} F_{ijk} = [\mathcal{U}_i]$ 对所有 i, k,
- $\sum_{i=1}^{M} E_{ij} = [G][C_j]$ 对所有 j。

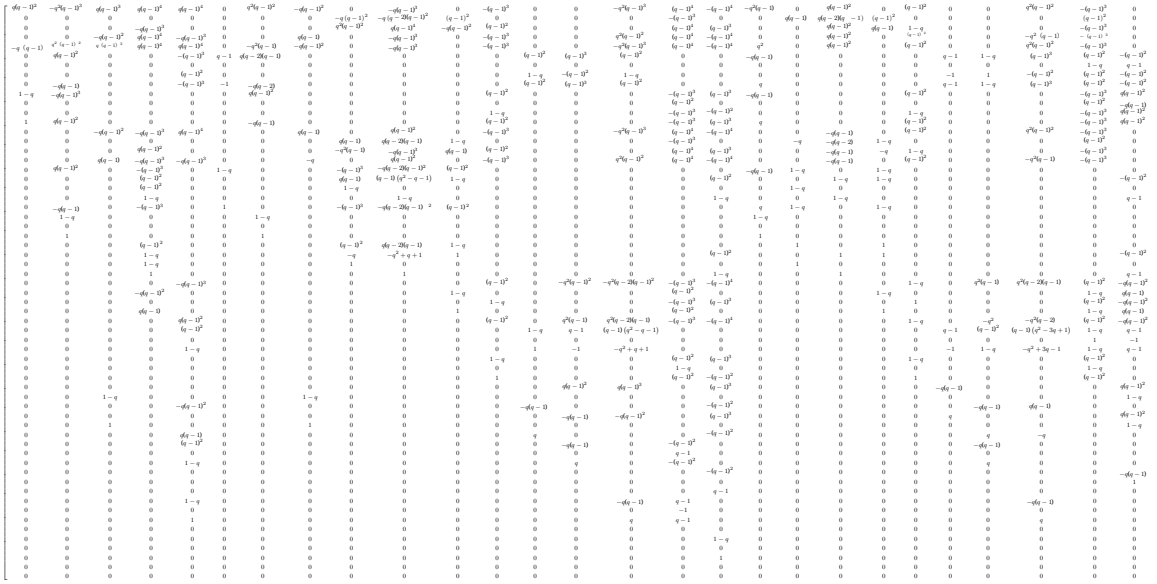
3.5 结果

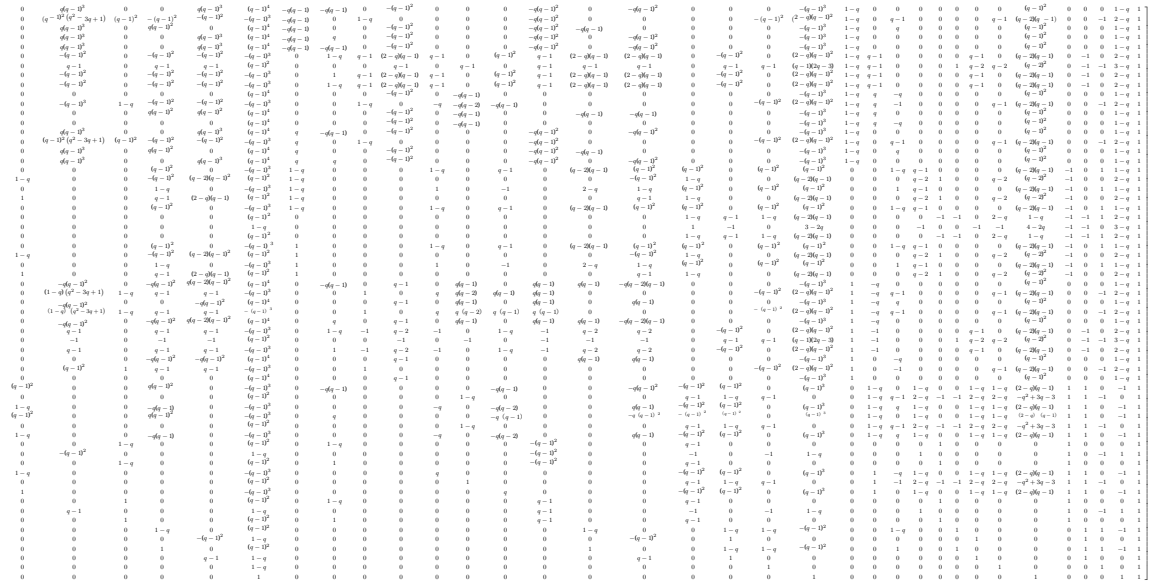
执行本节所述计算的代码可在 [25]找到。关于 $1 \le n \le 4$ 的结果已在 [7]中给出。

与 $Z(\,)$ 相联系的矩阵，按照关于共轭类所给出的生成元表示，可以对角化，以便应用定理3.2。对于 $G = \mathbb{T}_5$，该矩阵的特征值及其重数如下

$q^{12}(q-1)^4$, $q^{14}(q-1)^2$ (重数 2) q^{16} (重数 2),$q^{14}(q-1)^4$ (重数 3) $q^{16}(q-1)^2$ (重数 7) q^{18} (重数 2),$q^{14}(q-1)^6$, $q^{16}(q-1)^4$ (重数 7) $q^{18}(q-1)^2$ (重数 7),q^{20}, $q^{18}(q-1)^4$ (重数 8),$q^{20}(q-1)^2$ (重数 4) $q^{18}(q-1)^6$ (重数 3) $(\text{mult. } 2)$, $q^{20}(q-1)^4$ (重数 6),$q^{20}(q-1)^6$ (重数 4) $q^{20}(q-1)^8$,

分别对应的特征向量





定理 3.2 和（3.1）得出如下定理。

定理 3.12。 $\mathbb{T}_5\ \Sigma_g$ 的表示簇的虚拟类为

$$
\begin{aligned}
[R_{\mathbb{T}_5}(\Sigma_g)] = {} & q^{12g-2}(q-1)^{6g+2} + 2q^{14g-4}(q-1)^{4g+3} + 3q^{14g-4}(q-1)^{6g+2} + q^{14g-4}(q-1)^{8g+1} \\
& + 2q^{16g-6}(q-1)^{2g+4} + 7q^{16g-6}(q-1)^{4g+3} + 7q^{16g-6}(q-1)^{6g+2} + 2q^{16g-6}(q-1)^{8g+1} \\
& + 2q^{18g-8}(q-1)^{2g+4} + 7q^{18g-8}(q-1)^{4g+3} + 8q^{18g-8}(q-1)^{6g+2} + 3q^{18g-8}(q-1)^{8g+1} \\
& + q^{20g-10}(q-1)^{10g} + q^{20g-10}(q-1)^{2g+4} + 4q^{20g-10}(q-1)^{4g+3} + 6q^{20g-10}(q-1)^{6g+2} \\
& + 4q^{20g-10}(q-1)^{8g+1}.
\end{aligned}
$$

□

注记 3.13. 对于较小的 g，我们有

$$[R_{\mathbb{T}_5}(\Sigma_0)]=1,[R_{\mathbb{T}_5}(\Sigma_1)]=q^{10}(q-1)^6\left(q^4+6q^3+q^2-4q+1\right),[R_{\mathbb{T}_5}(\Sigma_2)]=q^{22}(q-1)^8\left(q^{20}-12q^{19}+66q^{18}-216q^{17}+459q^{16}-645q^{15}+567q^{14}-214q^{13}-181q^{12}+403q^{11}-428q^{10}+345q^9-237q^8+143q^7-68q^6+17q^5+18q^4-23q^3+15q^2-6q+1\right).$$

请注意，完全相同的方法也可应用于群 $G=\mathbb{U}_n$，其中 $n=1$、2、3、4、5。事实上，系数 F_{ijk} 可以重复使用。

定理 3.14. 对于 Σ_g 中的 G-表示簇，当 $G=\mathbb{U}_2$、$\mathbb{U}_3$、$\mathbb{U}_4$ 和 $\mathbb{U}_5$ 时，其虚拟类为

$$\begin{aligned}
[R_{\mathbb{U}_2}(\Sigma_g)] &= q^{2g},\\
[R_{\mathbb{U}_3}(\Sigma_g)] &= q^{4g-1}(q-1)+q^{6g-1},\\
[R_{\mathbb{U}_4}(\Sigma_g)] &= q^{8g-1}(q-1)+q^{10g-3}(q-1)(q+1)+q^{12g-3},\\
[R_{\mathbb{U}_5}(\Sigma_g)] &= q^{12g-2}(q-1)^2+q^{14g-3}(q-1)(2q-1)\\
&\quad+q^{16g-5}(q-1)(q+1)(2q-1)+q^{18g-6}(q-1)(2q+1)+q^{20g-6}.
\end{aligned}$$

□

计算时间[1] 列于下表，适用于群 $G=\tilde{\mathbb{T}}_n$ 的拓扑量子场论。对 $Z(\ )$ 的对角化未计入，因为这是手动完成的。

n	2	3	4	5
墙钟时间	1.92秒	5.17秒	1分19秒	1小时38分
CPU 时间	2.11秒	31.50秒	28分12秒	50小时9分

3.6 扭曲表示簇

拓扑量子场论方法的优势之一是其灵活性很强。只需稍微修改设定，就可以计算扭曲表示簇的虚拟类。

定义 3.15. 设 G 是一个代数群。在 Σ_g 上的 G-抛物结构是由一组元组 $(p_i,\mathcal{C}_i)$ Q 构成的集合，其中 $p_i\in\Sigma_g$ 是互不相同的点，$\mathcal{C}_i$ 是 G中的共轭类。给定 Σ_g上的一个 G-抛物结构 $Q=\{(p_1,\mathcal{C}_1),\ldots,(p_r,\mathcal{C}_r)\}$，$(\Sigma_g,Q)$ 的扭曲 G- 表示簇定义为

$$R_G(\Sigma_g,Q)=\left\{(A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g,C_1,\ldots,C_r)\in G^{2g}\times\prod_{i=1}^{r}\mathcal{C}_i\mid\prod_{i=1}^{g}[A_i,B_i]\prod_{i=1}^{r}C_i=1\right\}. \tag{3.2}$$

事实上，扭曲表示簇参数化了所有满足以下条件的群态射 $\pi_1(\Sigma_g\setminus\{p_1,\ldots,p_r\})\to G$：绕穿孔 p_i 的一条小的（正向定向）环路被映射到共轭类$\mathcal{C}_i$。我们引入一个新的 K(Var$_k$)-模映射，用以计算 $R_G(\Sigma_g,Q)$的虚拟类。

[1]如在 Intel®Xeon®CPU E5-4640 0 @ 2.40GHz 上执行。由于计算是并行进行的（64 个核心），两者记录了墙钟时间和 CPU 时间。

定义 3.16. 设 G 是一个代数群。对于 G 的每个共轭类 $\mathcal{C}$，定义 K(Var$_k$)-模态射

$$Z(\underset{\mathcal{C}}{\boxed{\bullet}}) : \mathrm{K}(\mathbf{Var}/G) \to \mathrm{K}(\mathbf{Var}/G), \quad \begin{bmatrix} X \\ \downarrow f \\ G \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} X \times \mathcal{C} & (x,c) \\ \downarrow & \downarrow \\ G & f(x)c \end{bmatrix}.$$

定理 3.17。对于任意代数群 G、整数 $g \geq 0$ 以及 G-抛物结构$Q = \{(p_1, \mathcal{C}_1) \ldots (p_r, \mathcal{C}_r)\}$ 在 Σ_g 上，我们有

$$[R_G(\Sigma_g, Q)] = Z(\bigcirc) \circ Z(\underset{\mathcal{C}_r}{\boxed{\bullet}}) \circ \cdots \circ Z(\underset{\mathcal{C}_1}{\boxed{\bullet}}) \circ Z(\bigcirc\!\!-\!\!\bigcirc)^g \circ Z(\bigcirc)(1).$$

证明。这由扭曲的 G-表示簇 Σ_g (3.2) 的显式形式可得。 □

˜有趣的是，对于 $G = \mathbb{T}_n$ 对应于 $Z(\,)$ 的矩阵，关于$\mathcal{U}_k$由幺幂共轭类给出的生成元，它完全由 F_{ijk} 在小节3.4中计算出的系数决定。也就是说，

$$\begin{aligned} c_! Z(\underset{\mathcal{U}_k}{\boxed{\bullet}})(\mathbf{1}_j)|_{\mathcal{U}_i} &= [\{(g,h) \in \mathcal{U}_j \times \mathcal{U}_k \mid gh \in \mathcal{U}_i\}] \\ &= \sum_{k=1}^{M} [\{g \in \mathcal{U}_j \mid g\xi_k \in \mathcal{U}_i\}]\,[\mathcal{U}_k] \\ &= \sum_{k=1}^{M} F_{ijk}\,[\mathcal{U}_k] \end{aligned}$$

在第二个等式中，我们使用了推论 2.21。利用推论2.22，可得

$$Z(\underset{\mathcal{U}_k}{\boxed{\bullet}})(\mathbf{1}_j) = \sum_{i=1}^{M} F_{ijk}\,[\mathcal{U}_k]/[\mathcal{U}_i] \cdot \mathbf{1}_i.$$

4 算术方法

该算术方法最初是在[9] 中引入的，旨在计算 E-多项式，其中涉及 GL$_n$-表示簇以及（扭曲的）GL$_n$-特征簇 Σ_g。该方法基本上包含两个要素。其中之一是 Katz 定理 [9, 定理 6.1。2], 它将 E-多项式的计算转化为对有限域上点的计数。

˜定理 4.1（Katz 定理）。设 X 是一个复代数簇， X 是 X 在一个˜有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数 $R \subset \mathbb{C}$ 上的扩张。若存在一个多项式 $P \in \mathbb{Z}[q]$，使得对于所有环态射 $R \to \mathbb{F}_q$，均有 $|(X \times_R \mathbb{F}_q)(\mathbb{F}_q)| = P(q)$，则 X的 E-多项式由 $P(uv) \in \mathbb{Z}[u,v]$给出。

注记 4.2。对于我们考虑的所有簇，都可以选择在 $R = \mathbb{Z}$ 上的自然扩张。

第二个要素是 Frobenius 公式 [9, 方程 2.3。8], 它将 Σ_g 在有限域上的表示簇的点数与 G的表示论联系起来。

定理 4.3（Frobenius 公式）。设 G 是一个有限群。闭曲面 Σ_g 的 G-表示簇的点数为

$$|R_G(\Sigma_g)| = |G| \sum_{\chi \in \widehat{G}} \left(\frac{|G|}{\chi(1)} \right)^{2g-2},$$

其中 $\widehat{G}$ 表示 G的不可约复特征标集合。

因此，本节将研究有限域 $\mathbb{F}_q$上上三角矩阵群 $\mathbb{T}_n$ 和幺幂矩阵群 $\mathbb{U}_n$ 的表示理论。具体而言，我们将通过半直分解，介绍一种计算这些群的表示 ζ 函数的算法。

4.1 表示 ζ 函数

定义 4.4。设 G 是一个有限群。 G 的表示 ζ 函数是如下函数:

$$\zeta_G(s) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(1)^{-s}.$$

例 4.5。■ 循环群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 有 n 个次数为 1 的不可约表示，因此我们有 $\zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(s) = n$。

- 对称群 S_3 有两个次数为 1 的不可约表示和一个次数为 2 的不可约表示，因此 $\zeta_{S_3}(s) = 2 + 2^{-s}$。
- 对于有限群 G 和 H，直积 $G \times H$ 的不可约表示具有 $\rho \otimes \tau$的形式，其中 ρ 和 τ 分别是 G 和 H的不可约表示。因此，$\zeta_{G\times H}(s) = \zeta_G(s)\ \zeta_H(s)$。

例 4.6. 在 $s = 0$ 中计算 $\zeta_G(s)$，得到不可约表示的数量，该数量等于 G的共轭类数。

由定理 4.3 我们现在可以立即得到以下推论。

推论 4.7. 设 G 为有限群。闭曲面 Σ_g 的 G-表示簇中的点数为

$$|R_G(\Sigma_g)| = |G|^{2g-1} \zeta_G(\chi(\Sigma_g)),$$

其中 $\chi(\Sigma_g) = 2g - 2$ 表示 Σ_g的欧拉示性数。 □

4.2 半直积

考虑有限群 $G = N \rtimes H$，其中 $N \subset G$ 是一个阿贝尔正规子群。由于 N 是阿贝尔群，其不可约表示均为一维，并由 $X = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{C}^*)$ 给出。群 G 通过以下方式作用于 X

$$(g \cdot \chi)(n) = \chi(g^{-1}ng) \qquad \text{for all } \chi \in X,\ g \in G \text{ and } n \in N.$$

设 $(\chi_i)^{i\in X/H}$ 是 X 在 H 作用下各轨道的一族代表元。对于每个 $i \in X/H$，令 $H_i = \{h \in H \mid h\cdot\chi_i = \chi_i\}$ 表示 χ_i 的稳定子，并令 $G_i = N \rtimes H_i \subset G$ 表示 G 的相应子群。我们可以通过以下设定将 χ_i 扩展到 G_i

$$\chi_i(nh) = \chi_i(n) \qquad \text{for all } n \in N \text{ and } h \in H_i.$$

事实上，这定义了一个特征，因为对于所有的 $n_1, n_2 \in N$和 $h_1, h_2 \in H_i$，$\chi_i(n_1h_1n_2h_2) = \chi_i(n_1(h_1n_2h_1^{-1})h_1h_2) = \chi_i(n_1h_1n_2h_1^{-1}) = \chi_i(n_1)\chi_i(n_2)$。现在，任意一个 H_i的不可约表示 ρ，通过与投影 $G_i \to G_i/N = H_i$复合，会诱导出 G_i 的一个表示 $\tilde{\rho}$，我们定义

$$\theta_{i,\rho} = \mathrm{Ind}_{G_i}^{G}\left(\chi_i \otimes \tilde{\rho}\right).$$

事实证明，这些恰好是 G的所有不可约表示。

命题4.8 ([21, 命题 25])。(i) $\theta_{i,\rho}$ 是不可约的。

(ii) 若 $\theta_{i,\rho}$ 与 $\theta_{i',\rho'}$同构，则 $i = i'$ 和 ρ 与 ρ'同构。

(iii) G 的每个不可约表示都与某个 $\theta_{i,\rho}$同构。

就表示 ζ 函数而言，利用这一事实：$\dim\left(\mathrm{Ind}_H^G(\rho)\right) = \dim(\rho)\cdot[G: H]$，该命题可转化为以下推论。

推论 4.9。 G 的表示 ζ 函数为

$$\zeta_G(s) = \sum_{i\in X/H} \zeta_{H_i}(s)\cdot[G:G_i]^{-s} = \sum_{i\in X/H} \zeta_{H_i}(s)\cdot[H:H_i]^{-s}. \qquad \square$$

4.3 上三角矩阵

考虑群 $\mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \mid A_{ii} = 1$，以及 $A_{ij} = 0$（其中 $i > j\}$ 是定义在有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 $n \times n$ 幺幂矩阵）。将子群 $N \subset \mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q)$ 定义为以下映射的核：

$$\mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{U}_{n-1}(\mathbb{F}_q), \quad A \mapsto (A_{ij})_{i,j=1}^{n-1},$$

从而 商群 $\mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q)/N$ 同构于 $\mathbb{U}_{n-1}(\mathbb{F}_q)$。现在我们有一个分裂正合列 e

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q) \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \mathbb{U}_{n-1}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow 0,$$

由此得到半直积分解 $\mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q) = N \rtimes \mathbb{U}_{n-1}(\mathbb{F}_q)$，其中 N 是阿贝尔的。此外，对于任意幺幂子群 $U \subset \mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q)$，可以将上述正合列与 U 相交，得到

$$0 \longrightarrow U\cap N \longrightarrow U \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} U\cap\mathbb{U}_{n-1}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow 0,$$

从而得到半直积分解 $U = (U\cap N) \rtimes (U\cap\mathbb{U}_{n-1}(\mathbb{F}_q))$。

将 $N \cong \mathbb{G}_a^{n-1}(\mathbb{F}_q)$ 视为 N，其不可约特征 $\chi_\alpha \in X = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{C}^*)$ 可通过元组 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{G}_a^{n-1}(\mathbb{F}_q)$ 表示为

$$\chi_\alpha(x) = \zeta_p^{\langle\alpha,x\rangle} \qquad \text{for all } x \in N,$$

其中 $\langle \alpha, x\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_{ij} \in \mathbb{F}_p$， α_{ij} 和 x_{ij} 分别是 α_i 和 x_i 的系数，并将 $\mathbb{G}_a^{n-1}(\mathbb{F}_q)$ 视为 $\mathbb{F}_p$ 上的向量空间。由于 $\mathbb{U}_{n-1}(\mathbb{F}_q)$ 通过左乘作用于 $N \cong \mathbb{G}_a^{n-1}(\mathbb{F}_q)$，它通过右乘作用于$X \cong \mathbb{G}_a^{n-1}(\mathbb{F}_q)$。

从现在起，我们将省略群中的域 $\mathbb{F}_q$，直接写作 G，而不写作 $G(\mathbb{F}_q)$。

例4.10。考虑 $\mathbb{U}_3 \cong \mathbb{G}_a^2 \rtimes \mathbb{U}_2$，其中 $X = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_a^2, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{G}_a^2$，且 H 通过右乘作用于 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} \in X$，即

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta + a\alpha\end{pmatrix}.$$

因此， X 在 H 作用下的轨道由 $\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\right.$ 给出：对所有 $\alpha \neq 0$，有 $\beta \in \mathbb{F}_q\Big\}$；对所有 $\beta \in \mathbb{F}_q$，有 $\left\{\begin{pmatrix}0 & \beta\end{pmatrix}\right\}$。我们选取以下代表元：

- $\chi_\alpha = \begin{pmatrix}\alpha & 0\end{pmatrix}$，这给出 $H_\alpha = \{1\}$，因此对 ζ函数的贡献为

$$(q-1)\cdot \zeta_{\{1\}}(s)\cdot [H : H_\alpha]^{-s} = (q-1)q^{-s}.$$

- $\chi_\beta = \begin{pmatrix}0 & \beta\end{pmatrix}$，这给出 $H_\beta = \mathbb{U}_2$，因此对 ζ函数的贡献为

$$q\cdot \zeta_{\mathbb{U}_2}(s)\cdot [H : H_\beta]^{-s} = q^2.$$

将各项贡献相加，可得 $\zeta_{\mathbb{U}_3}(s) = q^2 + (q-1)q^{-s}$。

例4.11。考虑 $\mathbb{U}_4 \cong \mathbb{G}_a^3 \rtimes \mathbb{U}_3$，其中 $X = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_a^3, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{G}_a^3$，且 H 通过右乘作用在 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix} \in X$ 上，即

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta + a\alpha & \gamma + b\alpha + c\beta\end{pmatrix}.$$

因此， X 在 H 作用下的轨道为 $\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}:\ \beta, \gamma \in \mathbb{F}_q\right\}$（对所有 $\alpha \neq 0$），$\left\{\begin{pmatrix}0 & \beta & \gamma\end{pmatrix}:\ \gamma \in \mathbb{F}_q\right\}$（对所有 $\beta \neq 0$），以及对所有 $\gamma \in \mathbb{F}_q$的 $\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}\right\}$。我们选取以下代表元：

- $\chi_\alpha = \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\end{pmatrix}$ 给出 $H_\alpha \cong \mathbb{G}_a$，贡献为 $(q-1)\cdot \zeta_{\mathbb{G}_a}(s)\cdot [H : H_\alpha]^{-s} = q^{1-2s}(q-1)$。
- $\chi_\beta = \begin{pmatrix}0 & \beta & 0\end{pmatrix}$ 给出 $H_\beta \cong \mathbb{G}_a^2$，贡献为 $(q-1)\cdot \zeta_{\mathbb{G}_a^2}(s)\cdot [H : H_\beta]^{-s} = q^{2-s}(q-1)$。
- $\chi_\gamma = \begin{pmatrix}0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$ 给出 $H_\gamma = \mathbb{U}_3$，贡献为 $q\cdot \zeta_{\mathbb{U}_3}\cdot [H : H_\gamma]^{-s} = q^3 + (q-1)q^{1-s}$。

总计为 $\zeta_{\mathbb{U}_4}(s) = q^3 + q^{1-s}(q-1)(q+1) + q^{1-2s}(q-1)$。

上述构造对于连通代数子群 $G \subset \mathbb{T}_n$ 更一般地也成立。具体而言，令 G' 为映射 $G \to \mathbb{T}_n$ 的像，该映射由 $A \mapsto A/A_{nn}$ 给出。那么，要么 $G \cong G'$，要么 $G \cong \mathbb{G}_m \times G'$，因为 $\mathbb{G}_m$ 的连通子群只有 $\{1\}$ 和其自身 $\mathbb{G}_m$。由于

$\zeta_{\mathbb{G}_m}(s) = q-1$ 已知，因此我们可以假设 $G \subset \mathbb{T}_n$。现在令 H 和 N 分别为映射的像和核

$$G \to \mathbb{T}_{n-1}, \quad A \mapsto (A_{ij})_{i,j=1}^{n-1},$$

使得 $G = N \rtimes H$ 是阿贝尔的，且 N，并且 $H \subset \mathbb{T}_{n-1}$，我们可以重复上述论证。

例4.12. 考虑 $G = \mathbb{T}_2 \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{T}_2$，其中 $\mathbb{T}_2 \cong \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$，且 $X = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_a, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{G}_a$，$H$ 通过乘法作用于 $\alpha \in X$。因此，X 在 H 作用下的轨道由 $\{0\}$和$\{\alpha$ 给出：$\alpha \neq 0\}$。我们选取以下代表元：

- $\chi_0 = 0$ 给出 $H_0 = \mathbb{G}_m$，贡献 $\zeta_{\mathbb{G}_m}(s) = q-1$；
- $\chi_1 = 1$ 给出 $H_1 = \{1\}$，贡献 $(q-1)^{-s}$。

总计，$\zeta_{\mathbb{T}_2}(s) = \zeta_{\mathbb{G}_m}(s)\,\zeta_{\mathbb{T}_2}(s) = (q-1)((q-1) + (q-1)^{-s}) = (q-1)^2 + (q-1)^{1-s}$。

从这些例子可以看出，利用命题 4.8，可以递归地计算表示 ζ 函数。我们再讨论一个例子，以说明沿代表元族，稳定子 H_i 不一定是常数。这表明，我们需要考虑代数群的参数化族 H。

例 4.13。考虑 $G = \mathbb{G}_a^3 \rtimes H$，其中 $H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \right\}$ 自然地作用于 $\mathbb{G}_a^3$。那么 H 在 $X \cong \mathbb{G}_a^3$ 上的作用为

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma + a\alpha + b\beta \end{pmatrix}.$$

因此，H 在 X 中的轨道为：对所有 $\gamma \in \mathbb{F}_q$ 和 $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix},\ \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \right\}$；对所有 $\alpha \neq 0$，$\gamma \in \mathbb{F}_q \Big\}$或 $\beta \neq 0$。我们选取以下代表元：

- $\chi_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ yields $H_\gamma = H$, contributing $q \cdot \zeta_H(s) = q^3$.
- $\chi_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$ yields $H_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x\beta \\ 0 & 1 & -x\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{F}_q \right\} \cong \mathbb{G}_a$, contributing

$$(q^2-1) \cdot \zeta_{\mathbb{G}_a}(s) \cdot [H : H_{\alpha,\beta}]^{-s} = q^{1-s}(q-1)(q+1).$$

总之，我们得到 $\zeta_G(s) = q^3 + q^{1-s}(q-1)(q+1)$。

4.4 算法计算 $\zeta_G(s)$

在本小节中，我们将描述一种用于计算 $\zeta_G(s)$ 的算法，适用于连通代数群$G \subset \mathbb{T}_n$，其风格类似于示例 4.10、4.11 和 4.13 。该算法的实现可在 [25], 找到，其中还提供了计算 $\zeta_{\mathbb{U}_n}(s)$ 和 $\zeta_{\mathbb{T}_n}(s)$ 的代码，适用于 $1 \leq n \leq 10$。所得 ζ函数见定理 4.18和定理 4.17。

在讨论算法之前，我们先做一些说明。

该算法分为两部分。主要部分，即算法 4.14，求出一个半直积分解 $G \cong N \rtimes H$，并应用推论 4.9 来计算 $\zeta_G(s)$。寻找轨道 X/H 的代表元是一个更复杂的步骤，将作为单独的部分在算法 4.15中描述。

如例 4.13所示，稳定子 H_i 可能沿代表元族 χ_i发生变化。因此，为了使算法能够递归运行，我们允许算法的输入是由簇 $G \subset \mathbb{T}_n$ 参数化的代数群族 Y 在 $\mathbb{F}_q$上。于是，我们将 G 的表示 ζ 函数理解为

$$\zeta_G(s) = \sum_{y \in Y(\mathbb{F}_q)} \zeta_{G_y}(s).$$

由于我们希望计算对一般的基域 $\mathbb{F}_q$成立，因此实际计算时将在$\mathbb{Z}$上进行。于是 $|Y(\mathbb{F}_q)|$ 可以计算为 q 的多项式，只要 $[Y] \in \mathrm{K}(\mathbf{Var}/\mathbb{Z})$ 可以利用算法 $q = [\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}]$ 计算为 2.24 中的多项式。

如果算法中的某项判定取决于函数 f 在 Y 上是否为零，我们就区分不同情形，并继续在闭子簇 $Y' = Y \cap \{f = 0\}$ 及其开补集$Y'' = Y \cap \{f \neq 0\}$上进行计算。

算法 4.14。输入：由簇 Y 参数化的连通代数群 $G \subset \mathbb{T}_n$ 族。

O输出：表示 ζ 函数 $\zeta_G(s)$，其为关于 q、q^{-s} 和 $(q-1)^-$ 的多项式 ^{s}.

1. 若 $n = 0$，则 G 是平凡的，因此 $\zeta_G(s) = |Y(\mathbb{F}_q)|$。所以，可以假设 $n \geq 1$。 2. 由于 G 是连通的，由 $A \mapsto (A_{ii})_i$ 给出的映射 $G \to \mathbb{G}_m^n$ 的像同构于某个 $0 \leq d \leq n$ 的 $\mathbb{G}_m^d$。若 $d = n$，则存在一个 $G \cong \mathbb{G}_m \times G'$ 与 $G' \subset \tilde{\mathbb{T}}_n^{\sim}$ 之间的同构，由 $A \mapsto (A_{nn}, A/A_{nn})$ 给出，从而 $\zeta_G(s) = (q-1)\zeta_{G'}(s)$。若 $d < n$，则通过映射 $A \mapsto A/A_{nn}$，$G \cong G' \subset \mathbb{T}_n$ 经由 $\tilde{}$。无论哪种情况，都可以假设 $G \subset \mathbb{T}_n$。 3. 按照第 4.3 小节中的讨论，将 $G = N \rtimes H$ 写出。群 H 可作为子式群 $H = \{(A_{ij})_i^{n-1}{}_{,j=1} : A \in G\}$；而 N 可作为由 $A_{ij} = 0$ 给出的 G 的闭子群得到，其中 $1 \leq i, j \leq n-1$ 和 $A_{ii} = 1$ 满足 $1 \leq i \leq n-1$。 4. 对某个 $0 \leq r \leq n-1$，确定 $N \cong \mathbb{G}_a^r$，并考虑 H 在特征 $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{G}_a^r$ 上的诱导作用。 5. 使用算法 4.15，寻找由簇 Z_i 参数化的代表元 χ_i 族，用于轨道 X/H，以及它们的稳定子 H_i 和指数 $[H : H_i]$。注意，稳定子 H_i 通常由 $X \times Z_i$ 参数化。 6. 重复该算法，对所有 i 计算 $\zeta_{H_i}(s)$，然后可利用推论 4.9 计算 $\zeta_G(s)$。

算法 4.15。输入：设 $H \subset \mathbb{T}_n$ 是一个代数群，由簇 X 参数化，并在线性作用于形如 $Z = \prod_{i=1}^r Z_i$ 且满足 $Z_i \in \{\{0\}, \{1\}, \mathbb{G}_a\}$ 的子簇 $Z \subset \mathbb{G}_a^r$ 上。记 z_1，…，z_r 为 Z 上的坐标。假设簇 X 是定义在 Z 上的簇。

输出：代表元族 χ_i 及其稳定子 H_i，以及指数 $[H:\text{将 } H_i]$ 表示为关于 q 的多项式。

1. 重复步骤 2 和 3，直到每个 z_i 都在 H 下保持不变。此时，返回一个代表元族 $\chi=(z_1,\dots,z_r)$，其参数取自 Z，稳定子为 H，指数为 $[H:H]=1$。如果步骤 2 和步骤 3 均不适用，则返回失败。

2. 如果 $z_i \overset{H}{\mapsto} az_i$ 对于 H 的某个坐标 a 成立，那么 a 必须是 H 的对角元。区分以下情况：

   (a) 如果 $z_i=0$，则继续考虑将 H 限制在 $Z'=Z\cap\{z_i=0\}$ 上的作用。(b) 如果 $z_i\neq 0$，则通过适当选择 a，选取满足 $z_i=1$ 的代表元。继续考虑将 $H'=H\cap\{a=1\}$ 限制在 $Z'=Z\cap\{z_i=1\}$ 上的作用，同时记住指数 $[H:H']=q-1$。

3. 写作 $z_i \overset{H}{\mapsto} \sum_j a_j f_j$，其中 a_j 是 H 的坐标，f_j 是 X 上不恒为零的函数。若某个 f_ℓ 在 H 的作用下是不变量，则区分以下情况：

   (a) 若 $f_\ell=0$，则继续考虑对闭子簇 $X'=X\cap\{f_\ell=0\}$ 的限制。(b) 若 $f_\ell\neq 0$，则通过适当选取 a_ℓ，选择满足 $z_i=0$ 的代表元。继续考虑限制在 $Z'=Z\cap\{z_i=0\}$ 上的 $H'=H\cap\left\{a_\ell=-f_\ell^{-1}\sum_{j\neq\ell}a_jf_j\right\}$ 作用，并记住指数 $[H:H']=q$。

注 4.16. 请注意，此算法中的某些步骤可能会失败。事实上，如果此算法永不失败，那么这就表明表示 ζ 函数 $\zeta_G(s)$ 总是 q、q^{-s} 和 $(q-1)^{-s}$的多项式。于是，在 $s=0$ 处取值将表明 G 的共轭类数是 q的多项式。特别地，这将推出希格曼猜想 1.1。对我们而言，当此算法应用于 $G=\mathbb{U}_n$ 或 $G=\mathbb{T}_n$（其中 $1\le n\le 10$）时，不会失败。

4.5 结果

群的表示 ζ 函数 $\mathbb{U}_n$ 和 $\mathbb{T}_n$，通过算法 4.14计算得到，见下文的定理 4.17和定理4.18 。

可以在 $s=0$ 处计算这些 ζ 函数，从而得到有限域 $\mathbb{F}_q$上群的共轭类数。所得的关于 q 的多项式可见与 [19,附录 A], 中的结果一致，其中 $t=q-1$。从这个意义上说，这些 ζ 函数可视为多项式 $k(\mathbb{U}_n(\mathbb{F}_q))$ 的推广，如 [19]所示。

此外，E多项式可以通过定理 $R_G(\Sigma_g)$ 和推论4.1 获得4.7。事实上，可以验证，对于 $1\le n\le 5$，这些 E多项式与定理3.14 和定理3.12给出的虚拟类一致，借助映射 (1.2)。

定理 4.17。$1\le n\le 10$ 的表示 ζ 函数 $\zeta_{\mathbb{U}_n}(s)$ 为

$$\zeta_{\mathbb{U}_1}(s)=1$$

$$
\begin{aligned}
\zeta_{\mathbb{U}_2}(s) &= q \\
\zeta_{\mathbb{U}_3}(s) &= q^{-s}(q-1) + q^2 \\
\zeta_{\mathbb{U}_4}(s) &= q^{1-s}(q-1)(q+1) + q^{1-2s}(q-1) + q^3 \\
\zeta_{\mathbb{U}_5}(s) &= q^{1-2s}(q-1)(q+1)(2q-1) + q^{2-s}(q-1)(2q+1) + q^{1-3s}(q-1)(2q-1) \\
&\quad + q^{-4s}(q-1)^2 + q^4 \\
\zeta_{\mathbb{U}_6}(s) &= q^{2-2s}(q-1)(q+2)\left(q^2+q-1\right) + q^{2-3s}(q-1)(q+1)(4q-3) \\
&\quad + q^{-4s}(q-1)\left(2q^2-1\right)\left(q^2+q-1\right) + q^{3-s}(q-1)(3q+1) + q^{1-5s}(q-1)^2(2q+1) \\
&\quad + q^{1-6s}(q-1)^2 + q^5 \\
\zeta_{\mathbb{U}_7}(s) &= q^{3-2s}(q-1)(q+1)\left(2q^2+3q-3\right) \\
&\quad + q^{1-4s}(q-1)(2q-1)\left(q^4+5q^3-3q-1\right) + q^{4-s}(q-1)(4q+1) \\
&\quad + q^{2-3s}(q-1)\left(3q^4+6q^3-2q^2-5q+1\right) \\
&\quad + q^{1-5s}(q-1)\left(q^5+7q^4-2q^3-9q^2+3q+1\right) + q^{1-6s}(q-1)^2\left(4q^3+7q^2-3q-1\right) \\
&\quad + q^{1-8s}(q-1)^2(3q-2) + q^{-7s}(q-1)^2\left(5q^3-3q+1\right) + q^{-9s}(q-1)^3 + q^6 \\
\zeta_{\mathbb{U}_8}(s) &= q^{4-2s}(q-1)(3q+2)\left(q^2+2q-2\right) + q^{5-s}(q-1)(5q+1) \\
&\quad + q^{3-3s}(q-1)\left(q^5+5q^4+10q^3-7q^2-8q+3\right) \\
&\quad + q^{3-6s}(q-1)\left(q^5+7q^4+16q^3-24q^2-14q+15\right) \\
&\quad + q^{2-4s}(q-1)\left(12q^5+9q^4-16q^3-9q^2+6q+1\right) \\
&\quad + q^{1-5s}(q-1)\left(2q^7+8q^6+13q^5-23q^4-9q^3+12q^2-1\right) \\
&\quad + q^{1-7s}(q-1)^2\left(6q^5+18q^4+4q^3-19q^2+q+3\right) \\
&\quad + q^{1-8s}(q-1)^2\left(q^5+13q^4+8q^3-14q^2-4q+3\right) + q^{1-11s}(q-1)^3(3q+1) \\
&\quad + q^{-9s}(q-1)^2\left(4q^5+10q^4-7q^3-8q^2+3q+1\right) + q^{-10s}(q-1)^2\left(5q^4+q^3-6q^2+1\right) \\
&\quad + q^{1-12s}(q-1)^3 + q^7 \\
\zeta_{\mathbb{U}_9}(s) &= q^{5-2s}(q-1)(2q+1)\left(2q^2+5q-5\right) + q^{6-s}(q-1)(6q+1) \\
&\quad + q^{4-3s}(q-1)\left(2q^5+9q^4+14q^3-15q^2-11q+6\right) \\
&\quad + q^{4-4s}(q-1)\left(4q^5+19q^4+11q^3-34q^2-10q+14\right) \\
&\quad + q^{2-5s}(q-1)\left(q^8+5q^7+29q^6+q^5-53q^4-2q^3+27q^2-3q-2\right) \\
&\quad + q^{2-6s}(q-1)\left(10q^7+33q^6-9q^5-68q^4+10q^3+38q^2-11q-1\right) \\
&\quad + q^{1-7s}(q-1)\left(2q^9+8q^8+27q^7+2q^6-87q^5+20q^4+46q^3-15q^2-3q+1\right) \\
&\quad + q^{1-8s}(q-1)^2\left(9q^7+33q^6+40q^5-45q^4-40q^3+21q^2+5q-1\right) \\
&\quad + q^{1-9s}(q-1)^2\left(2q^7+30q^6+42q^5-44q^4-48q^3+25q^2+7q-1\right) \\
&\quad + q^{1-11s}(q-1)^2\left(4q^6+25q^5+5q^4-48q^3+7q^2+9q+1\right) \\
&\quad + q^{1-12s}(q-1)^2\left(10q^5+18q^4-32q^3-10q^2+18q-3\right) + q^{1-15s}(q-1)^3(4q-3) \\
&\quad + q^{-10s}(q-1)^2\left(2q^8+13q^7+38q^6-24q^5-49q^4+20q^3+11q^2-3q-1\right) \\
&\quad + q^{-13s}(q-1)^3\left(12q^4+10q^3-13q^2+q+1\right) + q^{-14s}(q-1)^3\left(9q^3-2q^2-5q+2\right) \\
&\quad + q^{-16s}(q-1)^4 + q^8 \\
\zeta_{\mathbb{U}_{10}}(s) &= q^{6-2s}(q-1)(5q+2)\left(q^2+3q-3\right) + q^{7-s}(q-1)(7q+1) \\
&\quad + q^{5-3s}(q-1)\left(3q^5+15q^4+19q^3-28q^2-13q+10\right) \\
&\quad + q^{4-4s}(q-1)\left(q^7+7q^6+32q^5+12q^4-65q^3-6q^2+27q-3\right) \\
&\quad + q^{3-5s}(q-1)\left(2q^8+21q^7+42q^6-16q^5-103q^4+24q^3+50q^2-13q-3\right) \\
&\quad + q^{2-6s}(q-1)\left(6q^9+27q^8+64q^7-73q^6-118q^5+64q^4+70q^3-39q^2+q+1\right) \\
&\quad + q^{2-7s}(q-1)\left(2q^{10}+5q^9+39q^8+74q^7-130q^6-133q^5+128q^4+74q^3-60q^2+2q+1\right) \\
&\quad + q^{2-8s}(q-1)\left(q^{10}+12q^9+39q^8+67q^7-137q^6-172q^5+200q^4+63q^3-80q^2+2q+6\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ q^{2-9s}(q-1)^2\left(10q^8+65q^7+117q^6-36q^5-221q^4+18q^3+98q^2-11q-6\right)\\
&+ q^{1-11s}(q-1)^2\left(6q^9+31q^8+109q^7+8q^6-240q^5-10q^4+135q^3-17q^2-8q-1\right)\\
&+ q^{1-12s}(q-1)^2\left(2q^9+22q^8+77q^7+46q^6-217q^5-48q^4+156q^3-12q^2-20q+1\right)\\
&+ q^{1-13s}(q-1)^2\left(10q^8+50q^7+60q^6-138q^5-110q^4+146q^3+8q^2-25q+2\right)\\
&+ q^{1-15s}(q-1)^3\left(4q^6+42q^5+46q^4-51q^3-44q^2+23q+5\right)+q^{1-19s}(q-1)^4(4q+1)\\
&+ q^{-10s}(q-1)^2\left(2q^{11}+8q^{10}+50q^9+112q^8-29q^7-227q^6+17q^5+123q^4-24q^3-12q^2+q+1\right)\\
&+ q^{-14s}(q-1)^2\left(2q^9+24q^8+53q^7-52q^6-127q^5+84q^4+49q^3-32q^2-3q+3\right)\\
&+ q^{-16s}(q-1)^3\left(10q^6+37q^5-9q^4-42q^3+6q^2+10q-1\right)\\
&+ q^{-17s}(q-1)^3\left(12q^5+14q^4-21q^3-8q^2+6q+1\right)\\
&+ q^{-18s}(q-1)^3\left(9q^4-q^3-9q^2+q+1\right)+q^{1-20s}(q-1)^4+q^9.
\end{aligned}
$$

□

定理 4.18。 $1\le n\le 10$ 的表示 ζ 函数 $\zeta_{\mathbb{T}_n}(s)$由下式给出:

$$
\begin{aligned}
\zeta_{\mathbb{T}_1}(s) &= q-1\\
\zeta_{\mathbb{T}_2}(s) &= (q-1)^{1-s}+(q-1)^2\\
\zeta_{\mathbb{T}_3}(s) &= q^{-s}(q-1)^{2-s}+2(q-1)^{2-s}+(q-1)^{1-2s}+(q-1)^3\\
\zeta_{\mathbb{T}_4}(s) &= 3q^{-s}(q-1)^{2-2s}+2q^{-s}(q-1)^{3-s}+q^{-2s}(q-1)^{3-s}+q^{-2s}(q-1)^{2-2s}+q^{-s}(q-1)^{1-3s}\\
&\quad+3(q-1)^{3-s}+3(q-1)^{2-2s}+(q-1)^{1-3s}+(q-1)^4\\
\zeta_{\mathbb{T}_5}(s) &= 8q^{-s}(q-1)^{3-2s}+7q^{-2s}(q-1)^{3-2s}+7q^{-2s}(q-1)^{2-3s}+7q^{-s}(q-1)^{2-3s}\\
&\quad+3q^{-3s}(q-1)^{3-2s}+3q^{-s}(q-1)^{4-s}+2q^{-2s}(q-1)^{4-s}+2q^{-2s}(q-1)^{1-4s}\\
&\quad+2q^{-3s}(q-1)^{2-3s}+2q^{-s}(q-1)^{1-4s}+q^{-3s}(q-1)^{4-s}+q^{-4s}(q-1)^{3-2s}+6(q-1)^{3-2s}\\
&\quad+4(q-1)^{4-s}+4(q-1)^{2-3s}+(q-1)^{1-4s}+(q-1)^5\\
\zeta_{\mathbb{T}_6}(s) &= q^{-2s}(q-1)^{1-5s}(q+7)+29q^{-2s}(q-1)^{3-3s}+24q^{-3s}(q-1)^{3-3s}+23q^{-2s}(q-1)^{2-4s}\\
&\quad+21q^{-s}(q-1)^{3-3s}+17q^{-3s}(q-1)^{2-4s}+16q^{-2s}(q-1)^{4-2s}+15q^{-4s}(q-1)^{3-3s}\\
&\quad+15q^{-s}(q-1)^{4-2s}+13q^{-3s}(q-1)^{4-2s}+13q^{-s}(q-1)^{2-4s}+10q^{-4s}(q-1)^{2-4s}\\
&\quad+7q^{-4s}(q-1)^{4-2s}+5q^{-5s}(q-1)^{3-3s}+4q^{-3s}(q-1)^{1-5s}+4q^{-s}(q-1)^{5-s}\\
&\quad+3q^{-2s}(q-1)^{5-s}+3q^{-5s}(q-1)^{4-2s}+3q^{-s}(q-1)^{1-5s}+2q^{-3s}(q-1)^{5-s}\\
&\quad+2q^{-4s}(q-1)^{1-5s}+2q^{-5s}(q-1)^{2-4s}+q^{-4s}(q-1)^{5-s}+q^{-6s}(q-1)^{4-2s}\\
&\quad+q^{-6s}(q-1)^{3-3s}+10(q-1)^{4-2s}+10(q-1)^{3-3s}+5(q-1)^{5-s}+5(q-1)^{2-4s}+(q-1)^{1-5s}\\
&\quad+(q-1)^6\\
\zeta_{\mathbb{T}_7}(s) &= 2q^{-4s}(q-1)^{1-6s}(q+8)+q^{-2s}(q-1)^{2-5s}(2q+53)+q^{-2s}(q-1)^{1-6s}(2q+13)\\
&\quad+q^{-3s}(q-1)^{2-5s}(2q+71)+q^{-3s}(q-1)^{1-6s}(3q+19)+q^{-4s}(q-1)^{2-5s}(3q+67)\\
&\quad+q^{-5s}(q-1)^{1-6s}(q+12)+107q^{-3s}(q-1)^{3-4s}+104q^{-4s}(q-1)^{3-4s}+87q^{-2s}(q-1)^{3-4s}\\
&\quad+79q^{-3s}(q-1)^{4-3s}+73q^{-4s}(q-1)^{4-3s}+73q^{-5s}(q-1)^{3-4s}+71q^{-2s}(q-1)^{4-3s}\\
&\quad+49q^{-5s}(q-1)^{4-3s}+48q^{-5s}(q-1)^{2-5s}+46q^{-s}(q-1)^{4-3s}+44q^{-s}(q-1)^{3-4s}\\
&\quad+42q^{-6s}(q-1)^{3-4s}+30q^{-6s}(q-1)^{4-3s}+28q^{-2s}(q-1)^{5-2s}+27q^{-3s}(q-1)^{5-2s}\\
&\quad+24q^{-s}(q-1)^{5-2s}+23q^{-6s}(q-1)^{2-5s}+22q^{-4s}(q-1)^{5-2s}+21q^{-s}(q-1)^{2-5s}\\
&\quad+15q^{-7s}(q-1)^{3-4s}+13q^{-5s}(q-1)^{5-2s}+12q^{-7s}(q-1)^{4-3s}+7q^{-6s}(q-1)^{5-2s}\\
&\quad+5q^{-7s}(q-1)^{2-5s}+5q^{-s}(q-1)^{6-s}+4q^{-2s}(q-1)^{6-s}+4q^{-6s}(q-1)^{1-6s}\\
&\quad+4q^{-8s}(q-1)^{4-3s}+4q^{-s}(q-1)^{1-6s}+3q^{-3s}(q-1)^{6-s}+3q^{-7s}(q-1)^{5-2s}\\
&\quad+3q^{-8s}(q-1)^{3-4s}+2q^{-4s}(q-1)^{6-s}+q^{-5s}(q-1)^{6-s}+q^{-8s}(q-1)^{5-2s}+q^{-9s}(q-1)^{4-3s}\\
&\quad+20(q-1)^{4-3s}+15(q-1)^{5-2s}+15(q-1)^{3-4s}+6(q-1)^{6-s}+6(q-1)^{2-5s}+(q-1)^{1-6s}\\
&\quad+(q-1)^7\\
\zeta_{\mathbb{T}_8}(s) &= 14q^{-3s}(q-1)^{2-6s}(q+14)+6q^{-7s}(q-1)^{1-7s}(q+7)+4q^{-3s}(q-1)^{3-5s}(q+87)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2q^{-2s}(q-1)^{2-6s}(3q+50)\ +2q^{-7s}(q-1)^{2-6s}(3q+89)\ +q^{-2s}(q-1)^{3-5s}(3q+208)+q^{-2s}(\\
&q-1)^{1-7s}(3q+20)\ +q^{-3s}(q-1)^{1-7s}\left(q^2+11q+47\right)+q^{-4s}(q-1)^{3-5s}(9q+457)\ +q^{-4s}(q-1)^{2-6s}\\
&(20q+261)+q^{-4s}(q-1)^{1-7s}(12q+61)\ +q^{-5s}(q-1)^{3-5s}(6q+485)+q^{-5s}(q-1)^{2-6s}(24q+305)\\
&+q^{-5s}(q-1)^{1-7s}\left(2q^2+20q+79\right)+q^{-6s}(q-1)^{3-5s}(6q+415)\ +q^{-6s}(q-1)^{2-6s}(19q+250)+q^{-6s}\\
&(q-1)^{1-7s}\left(q^2+13q+60\right)+q^{-8s}(q-1)^{2-6s}(3q+85)\ +q^{-8s}(q-1)^{1-7s}(q+15)+410q^{-4s}(q-1)\\
&^{4-4s}+398q^{-5s}(q-1)^{4-4s}+340q^{-6s}(q-1)^{4-4s}+332q^{-3s}(q-1)^{4-4s}+297q^{-7s}(q-1)\\
&^{3-5s}+238q^{-7s}(q-1)^{4-4s}+229q^{-2s}(q-1)^{4-4s}+192q^{-4s}(q-1)^{5-3s}+174q^{-3s}(q-1)\\
&^{5-3s}+171q^{-5s}(q-1)^{5-3s}+168q^{-8s}(q-1)^{3-5s}+147q^{-8s}(q-1)^{4-4s}+139q^{-2s}(q-1)\\
&^{5-3s}+136q^{-6s}(q-1)^{5-3s}+110q^{-s}(q-1)^{4-4s}+90q^{-7s}(q-1)^{5-3s}+85q^{-s}(q-1)^{5-3s}+80q^{-s}(\\
&q-1)^{3-5s}+73q^{-9s}(q-1)^{3-5s}+71q^{-9s}(q-1)^{4-4s}+56q^{-8s}(q-1)^{5-3s}+45q^{-3s}(q-1)\\
&^{6-2s}+43q^{-2s}(q-1)^{6-2s}+42q^{-4s}(q-1)^{6-2s}+35q^{-s}(q-1)^{6-2s}+34q^{-5s}(q-1)^{6-2s}+31q^{-s}(q-1)\\
&^{2-6s}+30q^{-9s}(q-1)^{2-6s}+27q^{-10s}(q-1)^{4-4s}+26q^{-9s}(q-1)^{5-3s}+22q^{-6s}(q-1)^{6-2s}+21q^{-10s}(\\
&q-1)^{3-5s}+13q^{-7s}(q-1)^{6-2s}+11q^{-10s}(q-1)^{5-3s}+7q^{-8s}(q-1)^{6-2s}+7q^{-11s}(q-1)^{4-4s}+6q^{-s}(\\
&q-1)^{7-s}+5q^{-2s}(q-1)^{7-s}+5q^{-10s}(q-1)^{2-6s}+5q^{-s}(q-1)^{1-7s}+4q^{-3s}(q-1)^{7-s}+4q^{-9s}(q-1)\\
&^{1-7s}+4q^{-11s}(q-1)^{5-3s}+3q^{-4s}(q-1)^{7-s}+3q^{-9s}(q-1)^{6-2s}+3q^{-11s}(q-1)^{3-5s}+2q^{-5s}(q-1)\\
&^{7-s}+q^{-6s}(q-1)^{7-s}+q^{-10s}(q-1)^{6-2s}+q^{-12s}(q-1)^{5-3s}+q^{-12s}(q-1)^{4-4s}+35(q-1)^{5-3s}+35(\\
&q-1)^{4-4s}+21(q-1)^{6-2s}+21(q-1)^{3-5s}+7(q-1)^{7-s}+7(q-1)^{2-6s}+(q-1)^{1-7s}+(q-1)^8\zeta_{\mathbb{T}_9}(s)\\
&=10q^{-8s}(q-1)^{4-5s}(q+186)\ +10q^{-8s}(q-1)^{3-6s}(7q+204)+6q^{-3s}(q-1)^{4-5s}(q+182)\ +6q^{-11s}(\\
&q-1)^{3-6s}(q+81)\ +4q^{-2s}(q-1)^{4-5s}(q+149)+4q^{-2s}(q-1)^{1-8s}(q+7)\ +4q^{-6s}(q-1)^{3-6s}(\\
&27q+598)+4q^{-9s}(q-1)^{3-6s}(11q+377)\ +3q^{-7s}(q-1)^{4-5s}(4q+739)+2q^{-3s}(q-1)\\
&^{2-7s}\left(q^2+23q+212\right)+2q^{-4s}(q-1)^{3-6s}(31q+754)+2q^{-7s}(q-1)^{2-7s}\left(4q^2+103q+730\right)+2q^{-8s}(\\
&q-1)^{2-7s}\left(3q^2+72q+586\right)+2q^{-10s}(q-1)^{3-6s}(7q+491)\ +2q^{-11s}(q-1)^{1-8s}(2q+19)+2q^{-12s}(\\
&q-1)^{2-7s}(q+38)\ +q^{-2s}(q-1)^{3-6s}(12q+425)+q^{-2s}(q-1)^{2-7s}(12q+167)\ +q^{-3s}(q-1)^{3-6s}(\\
&31q+912)+q^{-3s}(q-1)^{1-8s}\left(2q^2+21q+85\right)+q^{-4s}(q-1)^{4-5s}(15q+1658)+q^{-4s}(q-1)\\
&^{2-7s}\left(2q^2+89q+758\right)+q^{-4s}(q-1)^{1-8s}\left(4q^2+45q+165\right)+q^{-5s}(q-1)^{4-5s}(16q+2111)\ +q^{-5s}(\\
&q-1)^{3-6s}(92q+2099)+q^{-5s}(q-1)^{2-7s}\left(9q^2+157q+1138\right)+q^{-5s}(q-1)\\
&^{1-8s}\left(q^3+12q^2+83q+262\right)+q^{-6s}(q-1)^{4-5s}(21q+2302)+q^{-6s}(q-1)\\
&^{2-7s}\left(6q^2+180q+1339\right)+q^{-6s}(q-1)^{1-8s}\left(10q^2+97q+316\right)+q^{-7s}(q-1)^{3-6s}(101q+2451)+q^{-7s}\\
&(q-1)^{1-8s}\left(2q^3+22q^2+131q+369\right)+q^{-8s}(q-1)^{1-8s}\left(9q^2+81q+277\right)+q^{-9s}(q-1)\\
&^{2-7s}\left(3q^2+80q+823\right)+q^{-9s}(q-1)^{1-8s}\left(2q^2+39q+181\right)+q^{-10s}(q-1)^{2-7s}(39q+536)\ +q^{-10s}(\\
&q-1)^{1-8s}\left(2q^2+25q+119\right)+q^{-11s}(q-1)^{2-7s}(11q+222)\ +1395q^{-9s}(q-1)^{4-5s}+1254q^{-6s}(q-1)\\
&^{5-4s}+1224q^{-5s}(q-1)^{5-4s}+1123q^{-7s}(q-1)^{5-4s}+1061q^{-4s}(q-1)^{5-4s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+923q^{-8s}(q-1)^{5-4s}+911q^{-10s}(q-1)^{4-5s}+776q^{-3s}(q-1)^{5-4s}+670q^{-9s}(q-1)^{5-4}{}^{s}\\
&+505q^{-11s}(q-1)^{4-5s}+494q^{-2s}(q-1)^{5-4s}+436q^{-10s}(q-1)^{5-4s}+394q^{-5s}(q-1)^{6-}{}^{3s}\\
&+381q^{-4s}(q-1)^{6-3s}+369q^{-6s}(q-1)^{6-3s}+319q^{-3s}(q-1)^{6-3s}+299q^{-7s}(q-1)^{6-3s}\\
&+251q^{-11s}(q-1)^{5-4s}+242q^{-12s}(q-1)^{4-5s}+239q^{-2s}(q-1)^{6-3s}+230q^{-8s}(q-1)^{6-}{}^{3s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+230q^{-s}(q-1)^{5-4s}+225q^{-s}(q-1)^{4-5s}+208q^{-12s}(q-1)^{3-6s}+154q^{-9s}(q-1)^{6-3s}\\
&+141q^{-s}(q-1)^{6-3s}+132q^{-s}(q-1)^{3-6s}+126q^{-12s}(q-1)^{5-4s}+98q^{-10s}(q-1)^{6-3s}+89q^{-13s}(\\
&q-1)^{4-5s}+67q^{-3s}(q-1)^{7-2s}+67q^{-4s}(q-1)^{7-2s}+61q^{-2s}(q-1)^{7-2s}+61q^{-5s}(q-1)\\
&^{7-2s}+58q^{-13s}(q-1)^{3-6s}+53q^{-13s}(q-1)^{5-4s}+51q^{-11s}(q-1)^{6-3s}+50q^{-6s}(q-1)\\
&^{7-2s}+48q^{-s}(q-1)^{7-2s}+43q^{-s}(q-1)^{2-7s}+34q^{-7s}(q-1)^{7-2s}+25q^{-12s}(q-1)^{6-3s}+25q^{-14s}\\
&(q-1)^{4-5s}+22q^{-8s}(q-1)^{7-2s}+18q^{-14s}(q-1)^{5-4s}+13q^{-9s}(q-1)^{7-2s}+12q^{-13s}(q-1)\\
&^{2-7s}+11q^{-13s}(q-1)^{6-3s}+9q^{-14s}(q-1)^{3-6s}+8q^{-12s}(q-1)^{1-8s}+7q^{-10s}(q-1)^{7-2s}+7q^{-s}(\\
&q-1)^{8-s}+6q^{-2s}(q-1)^{8-s}+6q^{-s}(q-1)^{1-8s}+5q^{-3s}(q-1)^{8-s}+5q^{-15s}(q-1)^{5-4s}+4q^{-4s}(\\
&q-1)^{8-s}+4q^{-14s}(q-1)^{6-3s}+4q^{-15s}(q-1)^{4-5s}+3q^{-5s}(q-1)^{8-s}+3q^{-11s}(q-1)^{7-2s}+2q^{-6s}\\
&(q-1)^{8-s}+q^{-7s}(q-1)^{8-s}+q^{-12s}(q-1)^{7-2s}+q^{-15s}(q-1)^{6-3s}+q^{-16s}(q-1)^{5-4s}+70(q-1)\\
&^{5-4s}+56(q-1)^{6-3s}+56(q-1)^{4-5s}+28(q-1)^{7-2s}+28(q-1)^{3-6s}+8(q-1)^{8-s}+8(q-1)\\
&^{2-7s}+(q-1)^{1-8s}+(q-1)^{9}\zeta_{\mathbb{T}_{10}}(s)=q^{-6s}(q-1)^{1-9s}(3q+17)\left(2q^2+13q+63\right)+12q^{-13s}(q-1)\\
&^{3-7s}(14q+349)+10q^{-14s}(q-1)^{3-7s}(7q+219)+7q^{-5s}(q-1)^{4-6s}(30q+1201)+7q^{-12s}(q-1)\\
&^{4-6s}(12q+967)+5q^{-2s}(q-1)^{5-5s}(q+282)+5q^{-10s}(q-1)^{5-5s}(3q+1366)+4q^{-2s}(q-1)^{4-6s}\\
&(5q+333)+4q^{-15s}(q-1)^{1-9s}(q+11)+3q^{-2s}(q-1)^{3-7s}(10q+259)+3q^{-7s}(q-1)^{4-6s}(\\
&118q+4475)+3q^{-8s}(q-1)^{3-7s}\left(9q^2+385q+4636\right)+3q^{-11s}(q-1)\\
&^{3-7s}\left(4q^2+205q+3159\right)+2q^{-3s}(q-1)^{4-6s}(27q+1496)+2q^{-4s}(q-1)\\
&^{2-8s}\left(8q^2+139q+889\right)+2q^{-5s}(q-1)^{5-5s}(13q+3104)+2q^{-5s}(q-1)\\
&^{2-8s}\left(q^3+25q^2+293q+1620\right)+2q^{-8s}(q-1)^{5-5s}(19q+4337)+2q^{-12s}(q-1)\\
&^{3-7s}\left(3q^2+176q+3381\right)+2q^{-13s}(q-1)^{4-6s}(13q+2180)+2q^{-14s}(q-1)^{4-6s}(5q+1223)\\
&+2q^{-15s}(q-1)^{2-8s}(11q+170)+2q^{-16s}(q-1)^{3-7s}(2q+161)+q^{-2s}(q-1)^{2-8s}(20q+257)\\
&+q^{-2s}(q-1)^{1-9s}(5q+37)+q^{-3s}(q-1)^{5-5s}(8q+2717)+q^{-3s}(q-1)\\
&^{3-7s}\left(3q^2+117q+2039\right)+q^{-3s}(q-1)^{2-8s}\left(6q^2+104q+791\right)+q^{-3s}(q-1)\\
&^{1-9s}\left(3q^2+33q+134\right)+q^{-4s}(q-1)^{5-5s}(21q+4418)+q^{-4s}(q-1)^{4-6s}(122q+5413)+q^{-4s}(\\
&q-1)^{3-7s}\left(4q^2+273q+4096\right)+q^{-4s}(q-1)^{1-9s}\left(q^3+15q^2+108q+342\right)+q^{-5s}(q-1)\\
&^{3-7s}\left(19q^2+545q+6943\right)+q^{-5s}(q-1)^{1-9s}\left(2q^3+35q^2+230q+659\right)+q^{-6s}(q-1)^{5-5s}(\\
&41q+7704)+q^{-6s}(q-1)^{4-6s}(299q+11188)+q^{-6s}(q-1)^{3-7s}\left(21q^2+809q+9883\right)+q^{-6s}(q-1)\\
&^{2-8s}\left(2q^3+84q^2+953q+4932\right)+q^{-7s}(q-1)^{5-5s}(36q+8593)+q^{-7s}(q-1)\\
&^{3-7s}\left(37q^2+1103q+12627\right)+q^{-7s}(q-1)^{2-8s}\left(8q^3+144q^2+1413q+6663\right)+q^{-7s}(q-1)\\
&^{1-9s}\left(2q^4+21q^3+143q^2+654q+1524\right)+q^{-8s}(q-1)^{4-6s}(356q+14191)+q^{-8s}(q-1)\\
&^{2-8s}\left(6q^3+135q^2+1587q+7639\right)+q^{-8s}(q-1)^{1-9s}\left(q^4+20q^3+165q^2+790q+1818\right)+q^{-9s}(\\
&q-1)^{5-5s}(20q+8073)
\end{aligned}
$$

$$+q^{-9s}(q-1)^{4-6s}(322q+13751)+q^{-9s}(q-1)^{3-7s}\left(30q^2+1125q+13721\right)+q^{-9s}(q-1)^{2-8s}\left(4q^3+125q^2+1513q+7536\right)+q^{-9s}(q-1)^{1-9s}\left(10q^3+131q^2+723q+1771\right)+q^{-10s}(q-1)^{4-6s}(227q+12026)+q^{-10s}(q-1)^{3-7s}\left(21q^2+934q+12376\right)+q^{-10s}(q-1)^{2-8s}\left(8q^3+142q^2+1407q+6977\right)+q^{-10s}(q-1)^{1-9s}\left(2q^4+22q^3+154q^2+704q+1669\right)+q^{-11s}(q-1)^{4-6s}(136q+9425)+q^{-11s}(q-1)^{2-8s}\left(61q^2+889q+5143\right)+q^{-11s}(q-1)^{1-9s}\left(6q^3+73q^2+433q+1181\right)+q^{-12s}(q-1)^{2-8s}\left(32q^2+526q+3607\right)+q^{-12s}(q-1)^{1-9s}\left(2q^3+36q^2+255q+805\right)+q^{-13s}(q-1)^{2-8s}\left(10q^2+249q+2095\right)+q^{-13s}(q-1)^{1-9s}\left(10q^2+110q+431\right)+q^{-14s}(q-1)^{2-8s}\left(5q^2+101q+983\right)+q^{-14s}(q-1)^{1-9s}\left(2q^2+33q+171\right)+q^{-15s}(q-1)^{3-7s}(20q+929)+q^{-16s}(q-1)^{2-8s}(2q+91)+5331q^{-11s}(q-1)^{5-5s}+3802q^{-12s}(q-1)^{5-5s}+3288q^{-7s}(q-1)^{6-4s}+3213q^{-6s}(q-1)^{6-4s}+3128q^{-8s}(q-1)^{6-4s}+2802q^{-5s}(q-1)^{6-4s}+2724q^{-9s}(q-1)^{6-4s}+2472q^{-13s}(q-1)^{5-5s}+2228q^{-4s}(q-1)^{6-4s}+2216q^{-10s}(q-1)^{6-4s}+1657q^{-11s}(q-1)^{6-4s}+1544q^{-3s}(q-1)^{6-4s}+1442q^{-14s}(q-1)^{5-5s}+1192q^{-15s}(q-1)^{4-6s}+1149q^{-12s}(q-1)^{6-4s}+937q^{-2s}(q-1)^{6-4s}+759q^{-15s}(q-1)^{5-5s}+757q^{-6s}(q-1)^{7-3s}+729q^{-5s}(q-1)^{7-3s}+725q^{-13s}(q-1)^{6-4s}+700q^{-7s}(q-1)^{7-3s}+655q^{-4s}(q-1)^{7-3s}+607q^{-8s}(q-1)^{7-3s}+525q^{-s}(q-1)^{5-5s}+524q^{-3s}(q-1)^{7-3s}+492q^{-16s}(q-1)^{4-6s}+480q^{-9s}(q-1)^{7-3s}+427q^{-s}(q-1)^{6-4s}+426q^{-14s}(q-1)^{6-4s}+413q^{-s}(q-1)^{4-6s}+377q^{-2s}(q-1)^{7-3s}+365q^{-10s}(q-1)^{7-3s}+346q^{-16s}(q-1)^{5-5s}+249q^{-11s}(q-1)^{7-3s}+225q^{-15s}(q-1)^{6-4s}+217q^{-s}(q-1)^{7-3s}+203q^{-s}(q-1)^{3-7s}+163q^{-12s}(q-1)^{7-3s}+155q^{-17s}(q-1)^{4-6s}+133q^{-17s}(q-1)^{5-5s}+105q^{-16s}(q-1)^{6-4s}+97q^{-4s}(q-1)^{8-2s}+94q^{-5s}(q-1)^{8-2s}+93q^{-3s}(q-1)^{8-2s}+92q^{-13s}(q-1)^{7-3s}+85q^{-6s}(q-1)^{8-2s}+82q^{-2s}(q-1)^{8-2s}+74q^{-17s}(q-1)^{3-7s}+70q^{-7s}(q-1)^{8-2s}+63q^{-s}(q-1)^{8-2s}+57q^{-s}(q-1)^{2-8s}+50q^{-8s}(q-1)^{8-2s}+50q^{-14s}(q-1)^{7-3s}+43q^{-17s}(q-1)^{6-4s}+42q^{-18s}(q-1)^{5-5s}+35q^{-18s}(q-1)^{4-6s}+34q^{-9s}(q-1)^{8-2s}+25q^{-15s}(q-1)^{7-3s}+22q^{-10s}(q-1)^{8-2s}+16q^{-18s}(q-1)^{6-4s}+13q^{-11s}(q-1)^{8-2s}+12q^{-17s}(q-1)^{2-8s}+11q^{-16s}(q-1)^{7-3s}+9q^{-18s}(q-1)^{3-7s}+9q^{-19s}(q-1)^{5-5s}+8q^{-16s}(q-1)^{1-9s}+8q^{-s}(q-1)^{9-s}+7q^{-2s}(q-1)^{9-s}+7q^{-12s}(q-1)^{8-2s}+7q^{-s}(q-1)^{1-9s}+6q^{-3s}(q-1)^{9-s}+5q^{-4s}(q-1)^{9-s}+5q^{-19s}(q-1)^{6-4s}+4q^{-5s}(q-1)^{9-s}+4q^{-17s}(q-1)^{7-3s}+4q^{-19s}(q-1)^{4-6s}+3q^{-6s}(q-1)^{9-s}+3q^{-13s}(q-1)^{8-2s}+2q^{-7s}(q-1)^{9-s}+q^{-8s}(q-1)^{9-s}+q^{-14s}(q-1)^{8-2s}+q^{-18s}(q-1)^{7-3s}+q^{-20s}(q-1)^{6-4s}+q^{-20s}(q-1)^{5-5s}+126(q-1)^{6-4s}+126(q-1)^{5-5s}+84(q-1)^{7-3s}+84(q-1)^{4-6s}+36(q-1)^{8-2s}+36(q-1)^{3-7s}+9(q-1)^{9-s}+9(q-1)^{2-8s}+(q-1)^{1-9s}+(q-1)^{10}.$$

□

表示 ζ 函数的计算时间[2] 为 $\zeta_{\mathbb{U}_n}(s)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
time	0.00秒	0.01秒	0.08秒	0.25秒	0.77秒	2.41秒	8.18秒	27.43秒	1分44秒	6分52秒

[2]在 Intel®Xeon®CPU E5-4640 0 @ 2.40GHz 上执行。

而表示 ζ 函数 $\zeta_{\mathbb{T}_n}(s)$ 的计算时间为

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
time	0.00秒	0.03秒	0.15秒	0.51秒	1.81秒	6.32秒	26.16秒	1分53秒	6分39秒	55分46秒

例如，应用定理4.1 和推论4.7 其中 $G = \mathbb{T}_6$，我们得到

$$\begin{aligned}
e(R_{\mathbb{T}_6}(\Sigma_g)) = {} & q^{18g-3}(q-1)^{6g+3} + q^{18g-3}(q-1)^{8g+2} + 2q^{20g-5}(q-1)^{4g+4} + 5q^{20g-5}(q-1)^{6g+3} \\
& + 3q^{20g-5}(q-1)^{8g+2} + 2q^{22g-7}(q-1)^{2g+5} + 10q^{22g-7}(q-1)^{4g+4} + 15q^{22g-7}(q-1)^{6g+3} \\
& + 7q^{22g-7}(q-1)^{8g+2} + q^{22g-7}(q-1)^{10g+1} + 4q^{24g-9}(q-1)^{2g+5} + 17q^{24g-9}(q-1)^{4g+4} \\
& + 24q^{24g-9}(q-1)^{6g+3} + 13q^{24g-9}(q-1)^{8g+2} + 2q^{24g-9}(q-1)^{10g+1} \\
& + q^{26g-11}(q-1)^{2g+5}(q+7) + 23q^{26g-11}(q-1)^{4g+4} + 29q^{26g-11}(q-1)^{6g+3} \\
& + 16q^{26g-11}(q-1)^{8g+2} + 3q^{26g-11}(q-1)^{10g+1} + 3q^{28g-13}(q-1)^{2g+5} \\
& + 13q^{28g-13}(q-1)^{4g+4} + 21q^{28g-13}(q-1)^{6g+3} + 15q^{28g-13}(q-1)^{8g+2} \\
& + 4q^{28g-13}(q-1)^{10g+1} + q^{30g-15}(q-1)^{12g} + q^{30g-15}(q-1)^{2g+5} + 5q^{30g-15}(q-1)^{4g+4} \\
& + 10q^{30g-15}(q-1)^{6g+3} + 10q^{30g-15}(q-1)^{8g+2} + 5q^{30g-15}(q-1)^{10g+1}.
\end{aligned}$$

5 结论

方法比较。我们已经看到两种截然不同的方法，用于计算 G-表示簇 $R_G(\Sigma_g)$ 的非常相似的不变量。

拓扑量子场论方法的一个显而易见的优点是，它能给出更精细的不变量，即 K(簇$_{\mathbb{C}}$) 中的虚拟类。然而，在实践中，虚拟类和 E-多项式似乎包含相同的信息，因为我们结果中的虚拟类都属于子环 $\mathbb{Z}[q] \subset$ K(簇$_{\mathbb{C}}$)，因此完全由相应的 E-多项式确定。对于 $G = \mathrm{SL}_2$ [4], ，情况似乎也如此，因此，若能找到不满足这一情况的线性代数群，将会很有意思。

拓扑量子场论方法一个可能更重要的优点是，它能提供更深刻的几何洞见。通过拓扑量子场论，我们可以直接理解这一纤维化

$$G^{2g} \to G, \quad (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \mapsto \prod_{i=1}^{g} [A_i, B_i],$$

在 K(簇$/G$) 中，而不仅仅是单位元上的纤维，也就是 G-表示簇。这使得该方法更具灵活性。如第3.6 小节所示，拓扑量子场论方法可以稍作修改，以研究扭曲表示簇。秉持类似的思路，拓扑量子场论还可以自然地提升到 G-等变框架中，以研究 G-特征叠 $[R_G(\Sigma_g)/G]$[5]。

另一方面，算术方法的速度快了好几个数量级，而且随着群 $\mathbb{T}_n$ 和 $\mathbb{U}_n$ 的秩增加，计算的复杂度仍然相当可控。一旦

表示 ζ 函数已计算出来， E多项式 $R_G(\Sigma_g)$ 就可以直接通过求值获得；而对于拓扑量子场论方法，则必须对映射 $Z(\,)$ 进行对角化，这是一个代价极高的操作。 

当然，对于一般的代数群 G，算术方法不像拓扑量子场论方法那样系统，因为没有计算 $G(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示的通用步骤。

拓展拓扑量子场论方法。自然会有人问，拓扑量子场论方法能否计算 $R_{\mathbb{T}_n}(\Sigma_g)$ 在 $n \geq 6$中的虚拟类。遗憾的是，若不对该方法作重大修改，出于若干原因，这是不可能的。首先，我们希望将 G 的共轭类作为 $\mathbf{K(Var}/G)$ 中某个子模的生成集，但对于 $n = 6$ ，已有证明 [3] 在 $G = \mathbb{T}_n$中存在无穷多个幺幂共轭类。例如， $\mathbb{T}_6$ 中的一族无穷多个互不共轭的元素可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{for } \alpha \in k,$$

而且，这类元素中的每一个都是 $\mathbb{T}_6$ 中元素的交换子。其次，从实际角度来看，无论是考虑计算耗时，还是考虑对一个大小为 ≥ 250 的多项式值矩阵进行对角化的可能性，我们都不认为这些计算能够切实完成。

动机版希格曼猜想。如前所述，我们的结果中所有虚拟类都包含在子环 $\mathbb{Z}[q] \subset \mathrm{K}(\text{簇}_{\mathbb{C}})$ 中，这是非常引人注目的。因此，为了计算 $R_{\mathbb{T}_n}(\Sigma_g)$ 和 $R_{\mathbb{U}_n}(\Sigma_g)$ 对于 $n \geq 6$ 的虚拟类，相较于使用拓扑量子场论方法，尝试证明动机版希格曼猜想 1.3似乎更为自然。这样只需计算E-多项式，而使用算术方法可以更高效地完成这一计算。

参考文献

[1] W.W. Adams 和 P. Loustaunau。《Gr ¨obner 基底导论》。美国数学会，1994 年。[2] D. Baragliaand P. Hekmati。《奇异特征簇的算术及其 E-多项式》

Proc. Lond. Math. Soc. (3) 114.2 (2017), pp. 293–332.[3] S. Bhunia. “上三角矩阵群中中心化子的共轭类”。Jour- nal of Algebra and its Applications 19.1 (2020).[4] ´A. Gonz´ález-Prieto. “抛物型 $SL_2(\mathbb{C})$ 特征簇的虚拟类”。Adv. Math. 368 (2020), pp. 107–148.[5] ´A. Gonz´ález-Prieto, M. Hablicsek, and J.T. Vogel. “特征叠的虚拟类”(2022). arXiv: 2201.08699 [math.AG].[6] ´A. Gonz´ález-Prieto, M. Logares, and V. Mu˜noz. “表示簇的 Lax 幺半拓扑量子场论”。B. Sci. Math. 161 (2020). 102871.[7] M. Hablicsek and J.T. Vogel. “通过拓扑量子场论求上三角矩阵表示簇的虚拟类”。对称性、可积性与几何：方法与应用 18.095 (2022).[8] Z. Halasi and P.P. P´alfy. “模式群中的共轭类数并非多项式函数”。群论杂志 14.6 (2011), pp. 841–854.[9] T. Hausel and F. Rodriguez-Villegas. “特征簇的混合霍奇多项式”。In- vent. Math. 174.3 (2008), pp. 555–624.[10] T. Hausel et al. “$P = W$ 经由 $\mathcal{H}_2$”(2022). arXiv: 2209.05429 [math.AG].[11] G. Higman. “枚举 p-群 I：不等式”。Proc. London Math. Soc. (3) 10 (1960), pp. 24–30.[12] M. Logares, V. Mu˜noz, and P.E. Newstead. “低亏格曲线的 $SL_2(\mathbb{C})$ 特征簇的霍奇多项式”。Rev. Mat. Complut. 26.2 (2013), pp. 635–703.[13] J. Mart´ınez. “曲面群的 $PGL(2, \mathbb{C})$ 特征簇的 E-多项式”(2017). arXiv: 1705.04649 [math.AG].[14] J. Mart´ınez and V. Mu˜noz. “曲面群的 $SL(2, \mathbb{C})$ 特征簇的 E-多项式”。Int. Math. Res. Not. IMRN 3 (2016), pp. 926–961.[15] D. Maulik and J. Shen. “GL_n 的 $P = W$ 猜想”(2022). arXiv: 2209.02568 [math.AG]

[16] M. Mereb. “关于一族特征簇的 E-多项式”。博士论文。德克萨斯大学奥斯汀分校，2018。[17] J.S. Milne.《代数群》（v2.00）。网址：www.jmilne.org/math/。2015。[18] J.S. Milne.《埃塔尔上同调》（PMS-33）。普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1980。[19] I. Pak 和 A. Soffer。“关于 Higman 的 $k(U_n(q))$ 猜想”（2015）。arXiv：1507.00411 [math.CO]。[20] J.P. Serre. “代数纤维空间”。法文。克劳德·谢瓦莱研讨会 3（1958）。

[21] J.P. Serre.《有限群的线性表示》。第 42 卷。数学研究生教材。施普林格，1977。[22] C.T. Simpson. “光滑射影簇基本群表示的模空间 I”。高等科学研究所数学出版物 79（1994），第 47–129 页。[23] C.T. Simpson. “光滑射影簇基本群表示的模空间 II”。高等科学研究所数学出版物 79（1994），第 5–79 页。[24] A. Vera-L´opezand J.M. Arregi. “幺三角矩阵中的共轭类”。《线性代数及其应用》370（2003），第 85–124 页。[25] J.T. Vogel. Math Code。网址：https://github.com/jessetvogel/math-code。2022。