arXiv:2301.02442v1 [math.PR] 6 Jan 2023

Applied Probability Trust (2023年1月9日)

连续扩散过程及其运行最大值二元组联合分布的偏微分方程

LAURE COUTIN、MONIQUE PONTIER, * *IMT*

摘要

设 X 为一个 d 维扩散过程， M 为其第一分量的运行上确界。本文利用该密度的积分展开，证明对于任意 $t > 0$，二元组 (M_t, X_t) 的密度（相对于 $d+1$ 维勒贝格测度）是闭集 $\{(m, x) \in \mathbb{R}^{d+1}, \ m \geq x^1\}$ 上福克-普朗克偏微分方程的一个弱解。

Keywords: 扩散过程，偏微分方程，运行上确界过程，联合分布。

2020年数学主题分类：主要分类 60J60

次要分类 60G70，60H10

1. 引言

本文旨在研究二元组 (M_t, X_t) 的分布，其中 X 是一个 d 维扩散过程， M 是第一分量的运行最大值。在先前的一项工作中 [9], , 我们运用 Malliavin 微积分，特别是 Nualart 的经典著作 [21],, 证明了对任意 $t > 0$, $V_t := (M_t, X_t)$ 的分布相对于勒贝格测度绝对连续，其密度为 $p_V(.; t)$，且该密度的支集包含于集合 $\{(m, x) \in \mathbb{R}^{d+1}, \ m \geq x^1\}$。

在本研究中，我们证明密度 p_V 是一个偏微分方程（PDE）的弱解。此外，我们给出了集合 $\{(m, x) \in \mathbb{R}^{d+1}, \ m = x^1\}$. 上的一个边界条件。这项工作拓展了 [8] 以及 Ngom 的

*邮寄地址：IMT，保罗·萨巴蒂耶大学，31062 图卢兹 cedex，法国
coutin@math.univ-toulouse.fr，IMT。pontier@math.univ-toulouse.fr，IMT。

论文 [20] 中的结果；该论文研究的是 X 为 Lévy 过程的情形，并证明了密度是一个积分微分方程的弱解。

文献中关于 V_t的分布已有许多研究。当过程 X 是布朗运动时，可参见 [15, 17] ，其中给出了 p_V 的显式表达式。当 X 是一维线性扩散过程时， [11] 利用尺度函数、速度测度以及某些击中时刻的分布密度，给出了p_V 的表达式。奥恩斯坦-乌伦贝克过程的特例也可参见 [1, 4] 。关于生物序列局部得分的一些应用， [19]介绍了反射布朗运动的情形。 [2] 研究了一般高斯过程的最大值 M_t 。文献对莱维过程 X 的情形进行了深入研究，例如参见 [12, 20]。此外，Ngom 的论文第 2.4 节 [20] 证明了莱维过程 X. 的过程 (M_t, X_t) 的联合分布密度存在且具有正则性。对于 X 为鞅的情形（例如参见 [22, 13] 或 [10, 16]），已有研究给出了运行最大值的分布。这类关于运行最大值的研究对涉及击中时刻的金融领域应用很有帮助，例如障碍期权的定价。众所周知，击中时刻的分布与运行最大值的分布密切相关，参见 [6, 7, 23]。作为我们工作的一个应用，可以设想一家公司的业务由一组过程 $(X^1, \cdots, X^d)$ 描述。其中某一个过程，例如 X^1 ，可能与警报相关：也就是说，当存在 $s \leq t$使得 X_s^1 超过阈值 a时，即等价于 $M_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s^1 \geq a$，采取某种行动就十分重要。因此，公司需要知道此类二元组 (M_t, X_t) 的分布；更具体地说，停时 $\tau_a = \inf\{u, X_u^1 \geq a\}$的分布与 M 的分布之间存在如下联系： $\{\tau_a \leq t\} = \{M_t \geq a\}$. 要了解此类警报发生的概率，二元组 (M_t, X_t) 的分布将会很有用。

我们给出了二元组 (M_t, X_t) 的分布密度的无穷展开，可用于数值近似。

设 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个配备有 d 维布朗运动的概率空间。设X 为取值于 $\mathbb{R}^d$ 的扩散过程，其满足

$$dX_t = B(X_t)dt + A(X_t)dW_t, \quad t > 0 \tag{1}$$

其中， X_0 是与布朗运动 W独立的随机变量，其分布为 μ_0； A （分别为 B）是从 $\mathbb{R}^d$ 到$(d \times d)$矩阵集合（分别到 $\mathbb{R}^d$）的映射。令

记 $C_b^i(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n)$为定义在 $\mathbb{R}^d$上的函数集合，这些函数 i 次可微、有界且具有有界导数，取值于 $\mathbb{R}^n$。令 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t,t\geq 0)$为由 $\mathcal{F}_t$ 定义的完备右连续滤过：
$=\sigma\{X_0,\ W_s,s\leq t\}\vee\mathcal{N}$其中，$\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{F}$.的零测集集合

在对 A 和 B 作出经典假设的条件下（参见下文的 (4) 和 (5)），根据[9],，对所有 $t>0,\quad V_t=(\sup_{u\leq t}X_t^1,X_t)$ 的分布相对于 $\mathbb{R}^{d+1}$. 上的勒贝格测度具有密度

主要结果和记号见第2节：在 d 维情形下，若对 Δ 边界附近 p_V 的正则性作出一个相当自然的假设（即下文的假设 2.1），则 p_V 是定义在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 的子集 $\{(m,x)$ $m\geq x^1\}$. 上的福克-普朗克偏微分方程的弱解。当 $A=I_d$ 时，该假设成立，见定理 2.4。第 3 节在假设 2.1 下证明主要结果。第4节专门证明当 $A=I_d$. 时假设 2.1 成立。主要工具是命题 3.2 中给出的 p_V 的无穷展开。在第 5 节的一维情形下，Lamperti 变换 [18] 使得我们能够对任意$A\in C_b^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$得到主要结果。最后，附录提供了一些有助于证明主要结果的技术工具。

2. 主要结果与一些记号

本节给出主要结果，证明将在后文给出，正如引言中所述。

2.1. 记号

令 Δ 为由 Δ 给出的 $\mathbb{R}^{D+1}$ 的开集：$=\{(m,x)\ m\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^d,m>x^1,x=(x^1,\cdots,x^d)\}$. 从现在起，我们采用爱因斯坦求和约定。式 (1) 中定义的扩散过程 X 的无穷小生成元$\mathcal{L}$ 是空间 $C^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 上的偏微分算子，定义如下：

$$\mathcal{L}=B^i\partial_{x_i}+\frac{1}{2}(AA^t)^{ij}\partial^2_{x_i,x_j}. \tag{2}$$

其中，A^t 表示转置矩阵。
其伴随算子为 $\mathcal{L}^*f=\frac{1}{2}\Sigma^{ij}\partial^2_{ij}f-[B^i-\partial_j(\Sigma^{ij})]\partial_if-[\partial_iB^i-\frac{1}{2}\partial^2_{ij}(\Sigma^{ij})]f$其中$\Sigma:=AA^t.$
下文中，算子 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^*$ 扩展到空间 $C^2(\mathbb{R}^{d+1},\mathbb{R})$,

对于 $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$，定义为

$$\mathcal{L}(\Phi)(m,x) = B^i(x)\partial_{x_i}\Phi(m,x) + \frac{1}{2}\Sigma^{ij}(x)\partial^2_{x_i,x_j}\Phi(m,x),$$

以及 $\mathcal{L}^*(\Phi)(m,x) =$

$$\frac{1}{2}\Sigma^{ij}(x)\partial^2_{ij}\Phi(m,x) - [B^i - \partial_j(\Sigma^{ij})](x)\partial_{x_i}\Phi(m,x) + [\frac{1}{2}\partial^2_{x_i,x_j}\Sigma^{ij} - \partial_{x_i}B^i](x)\Phi(m,x).$$

需要强调的是，这些算子是退化的，因为其中没有出现关于变量 m的导数。

设 $A^1(x)$ 为 d维向量 $A^1(x) = (A^1_j(x)\ j = 1, ..., d) \in \mathbb{R}^d$，对应于 $A(x)$ 的第一列；类似地， $A_j(x)$ 表示其第 j 行。

回顾一下， M 表示 X的第一分量的运行最大值，即$M_t = \sup_{0\le s\le t}\{X^1_s\}$，而 V是由 $(V_t = (M_t, X_t)\ \forall t \ge 0)$ 定义的 $\mathbb{R}^{d+1}$ 值过程。最后， $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$ 表示向量 $(x_2, ..., x_d)$。

在以下假设 (4) 和 (5) 下，当初始值为确定值 $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d$ 时， V_t的分布密度存在，记为 $p_V(.;\ t, x_0)$。若 μ_0是 X_0的分布，则 V_t 的分布相对于 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上的勒贝格测度的密度为

$$p_V(.;t,\mu_0) := \int_{\mathbb{R}^d} p_V(.;t,x_0)d\mu_0(x_0) \tag{3}$$

若无歧义，则省略对 μ_0 的依赖。

由于 $M_t \ge X^1_t$， $p_V(.;\ t, \mu_0)$ 的支集包含于 $\bar{\Delta} := \left\{(m,x) \in \mathbb{R}^{d+1} | m \ge x^1\right\}$.

2.2. 主要结果

本文旨在证明，密度 p_V 是一个 Fokker-Planck 偏微分方程的弱解。假设系数 B 和 A 满足

$$B \in C^1_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ and } A \in C^2_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times d}), \tag{4}$$

并且存在一个常数 $c > 0$，使得任意向量 v的欧几里得范数满足

$$c\|v\|^2 \le v^t A(x)A^t(x)v, \quad \forall v, x \in \mathbb{R}^d. \tag{5}$$

我们的第一个结果将在以下假设下得到证明。这是关于 p_V 在 Δ 边界邻域内正则性的一个相当自然的假设，因为过程 M 增加的时间集合包含于集合$\{t,\ M_t = X_t\}$:

假设 2.1。 $V_t = (M_t, X_t)$的分布密度（记为 $p_V(3)$）满足：(i) 映射$(t, m, \tilde{x}) \mapsto \sup_{u>0} p_V(m, m-u, \tilde{x};\ t)$属于 $L^1([0,T] \times \mathbb{R}^d, dtdmd\tilde{x})$。(ii) 对所有 $t > 0$，几乎必然地，对$(m, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^d$，$\lim_{u\to 0^+} p_V(m, m-u, \tilde{x};\ t)$存在，并记为 $p_V(m, m, \tilde{x};\ t)$。

定理 2.2。假设 A 和 B 满足(4)和(5)，且(M, X)满足假设 2.1。那么，对所有初始分布 μ_0 和 $F \in C_b^2(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$:

$$\mathbb{E}\left[F(M_t, X_t)\right] = \mathbb{E}\left[F(X_0^1, X_0)\right] + \int_0^t \mathbb{E}\left[\mathcal{L}\left(F\right)(M_s, X_s)\right] ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}\left[\partial_m F(X_s^1, X_s)\|A^1(X_s)\|^2 \frac{p_V(X_s^1, X_s; s)}{p_X(X_s; s)}\right] ds. \tag{6}$$

实际上，p_X 是偏微分方程 $\partial_t p = \mathcal{L}^* p$，$p(.;0) = \mu_0$ 的解，其中 $\mathcal{L}^* f = \frac{1}{2}\Sigma^{ij}\partial_{ij}^2 f - [B^i - \partial_j(\Sigma^{ij})]\partial_i f - [\partial_i B^i - \frac{1}{2}\partial_{ij}^2(\Sigma^{ij})]f$。令 $a_{ij} := \Sigma^{ij}$,$a_i := [B^i - \partial_j(\Sigma^{ij})]\partial_i$，以及 $a_0 := \partial_i B^i - \frac{1}{2}\partial_{ij}^2(\Sigma^{ij})$。在假设（4）和（5）下，算子 $\mathcal{L}^*$ 满足定理 3.5 [14] 的所有假设（见第 177 页的（3.2）、（3.3）和（3.4））。根据定理 3.5 第 $14\ p_X$ 行，可得 $x;\ s > 0$。

注 2.1. (i) 当 A 是 $\mathbb{R}^d$ 的单位矩阵（记作 I_d），且 $B \in C_b^1$（$\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d$）时，假设 2.1 得以满足，见下文的定理 2.4。当 $d = 1$ 时，利用 Lamperti 变换 [18], 可以证明假设 2.1 始终得以满足，见第 5 节。

(ii) 该结果类似于 [8] 中的定理 2.1，其中过程 X 是一个 L´evy 过程。[8] 中的命题 4 给出了式 (6) 中最后一项的关键因子1 2。首先，粗略地说，在给定 $\mathcal{F}_s$ 的条件下，$X_t^1 - X_s^1$ 的局部行为与$\|A^1(X_s)\|(W_t^1 - X_s^1)$相同。因此，与布朗情形一样，$X^1$ 的运行最大值 M 一旦等于 X^1 就会增大，并且 M 和 X^1 都在增大；众所周知，布朗过程 W^1 以概率1 2增大；更具体地说，我们有 $\mathbb{P}\{\lim_{t\to s+} \frac{W_t^1 - W_s^1}{t-s} = -\infty\} = \mathbb{P}\{\lim_{t\to s+} \frac{W_t^1 - W_s^1}{t-s} = +\infty\} = \frac{1}{2}$。

定理 2.2 的证明从 Itô 公式开始：设 F 属于

$C_b^2(\mathbb{R}^{d+1},\mathbb{R})$。过程 M 递增，因此 $V=(M,X)$ 是一个半鞅。对 $F(V)$ 应用 Itô 公式，并对等式两边取期望，

$$\mathbb{E}\left[F(V_t)\right]=\mathbb{E}\left[F(V_0)\right]+\int_0^t\mathbb{E}\left[\mathcal{L}(F)(V_s)\right]ds+\mathbb{E}\left[\int_0^t\partial_m F(V_s)dM_s\right].$$

新意在于前一个等式右侧的第三项
。以下定理将在第 3 节中证明，从而完成定理 2.2 的证明。

定理 2.3。假设 A 和 B 满足 (4) 和 (5)，且 (M,X) 满足假设 2.1。对于所有 $\Psi\in C_b^1(\mathbb{R}^{d+1},\mathbb{R})$，令 F_ψ 为映射$F_\psi\colon\ t\mapsto\mathbb{E}\left[\int_0^t\Psi(M_s,X_s)dM_s\right]$. 则 F_Ψ 相对于勒贝格测度绝对连续，且其导数为

$$\dot{F_\Psi}(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Psi(m,m,\tilde{x})\|A^1(m,\tilde{x})\|^2p_V(m,m,\tilde{x};t)dmd\tilde{x}.$$

注意，正如定理 2.2 中所述，这个导数可以写成

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\Psi(X_t^1,X_t)\|A^1(X_t)\|^2\frac{p_V(X_t^1,X_t;t)}{p_X(X_t;t)}\right].$$

注 2.2。上述命题给出了函数 F_Ψ. 的导数的显式表达式。注意， F_ψ 的绝对连续性可直接由首次到达时$\tau_a=\inf\{s\colon\ X_s^1\geq a\}$ 的分布密度的存在性推出（若该密度存在），利用恒等式 $\{\tau_a\leq t\}=\{M_t\geq a\}$.

反过来，可以证明 F_Ψ 的绝对连续性蕴含首次到达时 τ_a的分布密度存在。为此，可使用一列 $C_b^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 函数 (F_n) 来逼近示性函数 $\mathbf{1}_{[a,\infty)}$，即该密度满足 $f_{\tau_a}(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}p_V(a,a,\tilde{x};\,t)d\tilde{x}$.

定理 2.4. 假设 $A=I_d$ 和 B 满足假设 (4)，那么对于所有 $t>0$，二元组 (M_t,X_t) 的分布均满足假设 2.1。因此，对于所有$F\in C_b^2(\mathbb{R}^{d+1},\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[F(M_t,X_t)\right]&=\mathbb{E}\left[F(X_0^1,X_0)\right]+\int_0^t\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\left(F\right)(M_s,X_s)\right]ds\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\mathbb{E}\left[\partial_mF(X_s^1,X_s)\frac{p_V(X_s^1,X_s;s)}{p_X(X_s;s)}\right]ds.\end{aligned}$$

证明。该定理是定理 2.2 和命题 4.1 的推论。 □

当 $d=1$ Lamperti 变换导出以下推论时：

推论1. 假设 $d=1$、A 和 B 满足 (4) 和 (5)，密度 p_V 满足假设 2.1，因此

$$\mathbb{E}\left[F(M_t,X_t)\right]=\mathbb{E}\left[F(X_0,X_0)\right]+\int_0^t\mathbb{E}\left[\mathcal{L}\left(F\right)(M_s,X_s)\right]ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\mathbb{E}\left[A^2(X_s)\partial_m F(X_s,X_s)\frac{p_V(X_s,X_s;s)}{p_X(X_s;s)}\right]ds.$$

备注2.3. 如果 p_V 足够正则，且 X_0 的初始分布满足 $\mu_0(dx)=f_0(x)dx$，那么定理 2.2 意味着，p_V 是集合 Δ 中关于 $\partial_t p=\mathcal{L}^*p$ 的弱解，其中 $\mathcal{L}^*f=\frac{1}{2}\Sigma^{ij}\partial^2_{ij}f-[B^i-\partial_j(\Sigma^{ij})]\partial_i f-\partial_i B^i-\frac{1}{2}\partial^2_{ij}(\Sigma^{ij})f$ 满足边界条件

$$B^1(m,\tilde{x})p_V(m,m,\tilde{x};\,s)=\partial_{x_k}(\Sigma^{1,k}p_V)(m,m,\tilde{x};\,s)+\frac{1}{2}\partial_m(\|A^1\|^2p_V)(m,m,\tilde{x};\,s).\quad(7)$$

这一结果在附录A.3中得以证明

这一边界条件也出现在 [4]（Ornstein-Uhlenbeck过程）的命题 4 方程（11）中。最后，[14] 第1.2章研究了一个类似的偏微分方程，作者在那里证明了该偏微分方程存在唯一强解，但条件是算子为非退化椭圆算子。

3. 定理 2.3 的证明

我们先概述定理 2.3 的证明思路。首先，我们计算映射 $F_\Psi:\,t\mapsto\mathbb{E}[\int_0^t\Psi(M_s,X_s)\,dM_s]$ 的右导数，即 $\lim_{h\to0^+}T_{h,\,t}$ 其中 $T_{h,\,t}=\frac{1}{h}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\int_t^{t+h}\psi(V_s)dM_s]$. 第一步是进行如下分解

$$T_{h,t}=\frac{1}{h}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\int_t^{t+h}(\psi(V_s)-\psi(V_t))dM_s]+\frac{1}{h}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\psi(V_t)(M_{t+h}-M_t)].\quad(8)$$

由于 $\psi\in C_b^1(\mathbb{R}^{d+1},\mathbb{R})$ 且过程 M 单调递增，（8）中的第一项有如下上界：

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h}(\psi(V_s)-\psi(V_t))dM_s\right]\le\|\nabla\psi\|_\infty\mathbb{E}\left[\sup_{t\le s\le t+h}\|V_s-V_t\|(M_{t+h}-M_t)\right].$$

引理 3.1 表明 $\sup_{t\le s\le t+h}\|X_s-X_t\|_p=O(\sqrt{h})$，而引理 3.2 得出 $\|M_{t+h}-M_t\|_p=o(\sqrt{h})$，因此这一首项是一个 $o(h)$。

关于 (8) 中的第二项， $M_{t+h} - M_t$ 可以写成 $\sup_{0\le u\le h}(X^1_{t+h} - X^1_t - M_t + X^1_t)_+$。为了利用布朗运动增量的独立性，我们引入一个新过程，它与 $\mathcal{F}_t$ 独立，并且是 $X^1_{t+u} - X^1_t$ 的一个近似：

$$X^1_{t,u} := A^1_k(X_t)\hat{W}^k_u \text{ where } \hat{W}^k_u := W^k_{t+u} - W^k_t \ ; \ M_{t,h} := \sup_{0\le u\le h} X^1_{t,u}. \tag{9}$$

引理 3.4 (ii) 将设定 $\mathbb{E}\left[|M_{t+h} - M_t - (M_{t,\ h} - M_t + X^1_t)_+|\right] = o(h)$，其中 $(x)_+ = \max(x, 0)$。因此

$$\frac{1}{h}\mathbb{E}[\psi(V_t)(M_{t+h} - M_t)] = \mathbb{E}[\psi(V_t)(M_{t,h} - M_t + X^1_t)_+] + o(h) \tag{10}$$

注意，给定 $\mathcal{F}_t$ 时，$M_{t,\ h}$ 的分布是 $\|A^1(X_t)\|\sup_{0\le u\le h}\hat{W}^1_u$ 的分布；然后使用函数 $\mathcal{H}$ (13)，进行 $\mathcal{F}_t$ 条件化，得到：

$$\frac{1}{h}\mathbb{E}[\psi(V_t)(M_{t+h} - M_t)] = \frac{2}{\sqrt{h}}\,\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}(\frac{M_t - X^1_t}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|})\right] + o(h). \tag{11}$$

于是，$T_{h,\ t} = \frac{2}{\sqrt{h}}\,\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}(\underline{\frac{M_t - X^1_t}{\sqrt{h}\|A^1\ X_t}()\|})\right] + o(h)$，正如命题 3.1 (ii) 中所示。

在命题 3.2 中，在假设 2.1 下，我们计算 $\lim_{h\to 0} T_{h;t}$.

最后，在第 3.4 节中，我们证明 $F_\psi : t \mapsto E[\int_0^t \psi(V_s)dM_s]$ 是关于勒贝格测度绝对连续的函数，其积分为该函数右导数的积分。事实上，我们证明 F_ψ 是一个连续函数，属于索оболев空间 $W^{1,\ 1}(I)\ \ I = (0, T)$。由此完成定理 2.3 的证明。

需要证明的主要命题如下：

命题 3.1. 设 B 和 A 满足 (4) 和 (5)，且 $\Psi \in C^1_b(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$。回顾一下，$A^1$ 是向量 $(A^1_j, j = 1, ..., d)$，且 $\|A^1(x)\|^2 = \sum_{j=1}^d (A^1_j(x))^2$。

(i) 对所有 $T > 0$，存在一个常数 $C > 0$（依赖于 $\|A\|_\infty, \|B\|_\infty, \|\nabla A\|_\infty, \|\Psi\|_\infty$, $\|\nabla\Psi\|_\infty$ 和 T），使得 $\forall t \in [0, T], h \in [0, 1]$,

$$\left|\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} \Psi(V_s)dM_s - 2\sqrt{h}\left(\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}(\frac{M_t - X^1_t}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|})\right)\right]\right| \le Ch\|\nabla\Psi\|_\infty, \tag{12}$$

(ii) 对所有 $t > 0,\ h \in [0, 1]$,

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left|\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h}\Psi(V_s)dM_s\right] - 2\sqrt{h}\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}(\frac{M_t - X^1_t}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|})\right]\right| = 0,$$

其中，记 Φ_G 为标准高斯累积分布函数，

$$\mathcal{H}(\theta) := \int_\theta^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(y - \theta)e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \frac{e^{-\frac{\theta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} - \theta\Phi_G(-\theta). \tag{13}$$

下面的注将会很有用:

注 3.1. (13) 中 $\mathcal{H}$ 的定义意味着 $\int_0^\infty \mathcal{H}(u)du = 1/4$ 。此外，$\mathcal{H}'(\theta) = -\Phi_G(-\theta) \le 0$, 特别是 $\mathcal{H}$ 非递增。

命题 3.2. 假设 A 和 B 满足 (4) 和 (5)，且 (M, X) 满足假设 2.1，则对所有 $\Psi \in C_b^1(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$、所有 $0 < T$ 以及所有 $t \ge 0$:

$$(i) t \mapsto \sup_{h>0} \frac{2\sqrt{h}}{h} \mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}(\frac{M_t - X_t^1}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|})\right] \in L^1([0,T], \mathbb{R}),$$

$$(ii) \lim_{h\to 0^+} \frac{2\sqrt{h}}{h} \mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}(\frac{M_t - X_t^1}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|})\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \Psi(m, m, \tilde{x})\|A^1(m, \tilde{x})\|^2 p_V(m, m, \tilde{x}; t)dmd\tilde{x}$$

作为推论，函数 $t \to \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \Psi(m, m, \tilde{x})\|A^1(m, \tilde{x})\|^2 p_V(m, m, \tilde{x}; t)dmd\tilde{x}$ 属于 $L^1([0, T], \mathbb{R})$。

命题 3.1 的证明将借助下一节中的引理完成 .

3.1. 证明命题 3.1 的工具

这里我们给出过程 X 和 M 的增量期望的一些估计。假设（4）和（5）使我们能够引入常数 K，它表示 $\max(\|A\|_\infty, \|B\|_\infty)$ 或 $\max(\|A\|_\infty, \|B\|_\infty, \|\nabla A\|_\infty)$。令 C_p 为 Burkholder-Davis-Gundy 不等式中的常数（参见 [3] 中的定理 B.36）。

引理 3.1. 设 A 和 B 有界。则对所有 $0 < h \le 1$，以及所有 $p \ge 1$ ，存在常数 $C_{p,K}$ （仅依赖于 p 和 K），使得:

$$\sup_{t>0} \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le h} \|X_{t+s} - X_t\|^p\right] \le C_{p,K} h^{p/2}.$$

证明. 利用 $(a+b)^p \le 2^{p-1}\left[a^p + b^p\right]$，$a, b \ge 0$ 这一事实，可得:

$$0 \le \sup_{s\le h} \|X_{t+s} - X_t\|^p \le 2^{p-1}\left[\sup_{u\le h}\left(\|\int_t^{t+u} B(X_s)ds\|\right)^p + \sup_{u\le h}\left(\|\int_t^{t+u} A_j(X_s)dW_s^j\|\right)^p\right].$$

对两边取期望，由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式可得

$$\mathbb{E}[\sup_{s\le h} \|X_{t+s} - X_t\|^p] \le 2^{p-1}(1 + C_p)\mathbb{E}\left[\left(\int_t^{t+h} \|B(X_s)\|ds\right)^p + \left(\int_t^{t+h} \|A(X_s)\|^2 ds\right)^{p/2}\right].$$

关于 B 和 A 的假设 (4) 得出 $\mathbb{E}[\sup_{s\le h}\|X_{t+s}-X_t\|^p]\le 2^{p-1}(1+C_p)(h^pK^p+h^{p/2}K^p)$. □

引理 3.2. 设 B 和 A 满足假设（4）和（5）。那么，对所有 $0<h\le 1$，对所有 $p\ge 1$，有:

$$\sup_{t>0}\mathbb{E}[|M_{t+h}-M_t|^p]\le C_{p,K}h^{p/2}\ ;\ \mathbb{E}[|M_{t+h}-M_t|^p]=o(h^{p/2}). \tag{14}$$

证明. 回忆 $M_{t+h}-M_t=\left(\sup_{0\le u\le h}(X^1_{t+u}-X^1_t)+X^1_t-M_t\right)_+$，再回忆 $(x)_+=\max(x,0)$。对于任意 $a\ge 0$，有 $(x-a)_+\le |x|\mathbf{1}_{\{x>a\}}$，因此

$$0\le M_{t+h}-M_t\le |\sup_{0\le u\le h}(X^1_{t+u}-X^1_t)|\mathbf{1}_{\{\sup_{0\le u\le h}(X^1_{t+u}-X^1_t)>M_t-X^1_t\}}.$$

由柯西-施瓦茨不等式可得:

$$0\le \mathbb{E}\left[(M_{t+h}-M_t)^p\right]\le \sqrt{\mathbb{E}\left[|\sup_{0\le u\le h}(X^1_{t+u}-X^1_t)|^{2p}\right]\mathbb{P}(\{\sup_{0\le u\le h}(X^1_{t+u}-X^1_t)>M_t-X^1_t\})}.$$

在引理 3.1 中用 $2p$ 替换 p，可得（14）中的不等式，且等式 $\lim_{h\to 0}\sup_{0\le u\le h}(X^1_{t+u}-X^1_t)=0$ 几乎必然成立。根据定理 1.1，将其推广到分布为 μ_0 、取值于 $\mathbb{R}^d$ 的 X_0 ，二元组 (M_t,X_t) 存在密度，因此 $\mathbb{P}\{M_t-X^1_t=0\}=0$ 几乎必然成立。因此，$E([M_{t+h}-M_t]^p)$ 有界于 $h^{p/2}$ 与一个因子的乘积；当 h 趋于 0 时，该因子趋于 0，而此量为一个 $o(h^{p/2})$。□

对任意固定的 t，我们回顾过程 $(X_{t,u},\ u\in[0,h])$ 及其第一分量的运行最大值如下:

$$X_{t,u}:=\sum_j A_j(X_t)\hat{W}^j_u,\ M_{t,h}:=\sup_{0\le u\le h}X^1_{t,u}. \tag{15}$$

引理 3.3. 在假设（4）和（5）下，对所有 $p\ge 1$，存在一个常数$C_{p,K}$，使得对所有 $t\le T$、所有 $h\in[0,1]$，均有:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\le h}|X^1_{s+t}-X^1_t-X^1_{t,s}|^p\right]\le C_{p,K}h^p.$$

˄ 证明。根据定义，回顾 $W_u:=W_{t+u}-W_t,\ u\ge 0$，我们得到

$$X^1_{s+t}-X^1_t-X^1_{t,s}=\int_0^s B^1(X_{u+t})du+\int_0^s\left[A^1(X_{u+t})-A^1(X_t)\right]d\hat{W}_u.$$

再次使用 $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p+b^p)\quad a,b\ge 0$，我们得到

$$\sup_{0\le s\le h}|X^1_{s+t}-X^1_t-X^1_{t,s}|^p \le$$
$$2^{p-1}\left[\left(\int_0^h \|B^1(X_{u+t})\|du\right)^p+\sup_{0\le s\le h}\left\|\int_0^s\left[A^1(X_{u+t})-A^1(X_t)\right]d\hat{W}_u\right\|^p\right].$$

对两边取期望并应用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，得到 $D_p=2^{p-1}(1+C_p)$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le h}|X^1_{s+t}-X^1_t-X^1_{t,s}|^p\right]\le D_p\left(\mathbb{E}\left[\int_0^h\|B^1(X_{u+t})\|du\right]^p+\mathbb{E}\left|\int_0^h\|A^1(X_{u+t})-A^1(X_t)\|^2du\right|^{p/2}\right).$$

上面的第一项由 K^ph^p 有界这一事实可知是有界的。假设 A 属于 $C^1_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d\times d})$, 结合 Jensen不等式可知，第二项由 $K^ph^{p/2-1}\int_0^h E\|X_{u+t}-X_t\|^p du$ 有界，因此

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le h}|X^1_{s+t}-X^1_t-X^1_{t,s}|^p\right]\le D_pK^ph^{p/2-1}\left(h^{p/2+1}+\int_0^h\mathbb{E}\|X_{u+t}-X_t\|^p du\right).$$

由引理 3.1 可得一致上界：$\mathbb{E}[\|X_{u+t}-X_t\|^p]\le C_{p,K}u^{p/2}$，因此

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\le h}|X^1_{s+t}-X^1_t-X^1_{t,s}|^p\right]\le\frac{D_pK^pC_{p,K}}{\frac{p}{2}+1}h^p.$$

□

引理 3.4。在假设（4）和（5）下，有

$$(i)\ \exists C>0\quad\sup_{0\le t\le T;\quad 0\le h\le 1}h^{-1}\mathbb{E}\left[\left|M_{t+h}-M_t-\left(M_{t,h}-M_t+X^1_t\right)_+\right|\right]\le C<\infty,$$
$$(ii)\quad\lim_{h\to 0^+}h^{-1}\mathbb{E}\left[\left|M_{t+h}-M_t-\left(M_{t,h}-M_t+X^1_t\right)_+\right|\right]=0.$$

证明。首先注意

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad\left|(x-a)_+-(y-a)_+\right|\le|x-y|\left[\mathbf{1}_{\{x>a\}}+\mathbf{1}_{\{y>a\}}\right],\tag{16}$$

并且若 f 和 g 是定义在 $[0,T]$ 上的函数，则

$$\forall s\in[0,T],\quad f(s)-\sup_{0\le u\le T}g(u)\le f(s)-g(s)\le|f(s)-g(s)|\le\sup_{v\le T}|f(v)-g(v)|,$$

因此 $\sup_{s\le T}f(s)-\sup^{u\le T}g(u)\le\sup_{v\le T}|f(v)-g(v)|$.这里，$f$和 g的作用是对称的，因此 $\sup^{s\le T}g(s)-\sup_{u\le T}f(u)\le\sup_{v\le T}|f(v)-g(v)|$，并且

$$\left|\sup_{s\le T}g(s)-\sup_{u\le T}f(u)\right|\le\sup_{v\le T}|f(v)-g(v)|.\tag{17}$$

现在我们考虑 $M_{t+h} - M_t = \left(\sup_{0\le u\le h}(X^1_{u+t} - X^1_t) - M_t + X^1_t\right)_+$，利用 (16)

$$\left|M_{t+h} - M_t - \left(M_{t,h} - M_t + X^1_t\right)_+\right| \le$$
$$\left|\sup_{0\le u\le h}(X^1_{u+t} - X^1_t) - M_{t,h}\right| \left[\mathbf{1}_{\{\sup_{0\le u\le h}(X^1_{u+t}-X^1_t) > M_t - X^1_t\}} + \mathbf{1}_{\{M_{t,h} > M_t - X^1_t\}}\right].$$

然后，对于任意固定的 t，我们将不等式 (17) 应用于映射 $g\colon\ u \mapsto X^1_{u+t} - X_t{}^1$ 和 $f\colon\ u \mapsto X^1_{t,\ u}$。于是 $\left|M_{t+h} - M_t - \left(M_{t,\ h} - M_t + X^1_t\right)_+\right| \le$

$$\sup_{0\le u\le h}\left|X^1_{u+t} - X^1_t - X^1_{t,u}\right| \left[\mathbf{1}_{\{\sup_{0\le u\le h}(X^1_{u+t}-X^1_t) > M_t - X^1_t\}} + \mathbf{1}_{\{M_{t,h} > M_t - X^1_t\}}\right].$$

由柯西-施瓦茨不等式以及 $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ 这一事实，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\left|M_{t+h} - M_t - \left(M_{t,h} - M_t + X^1_t\right)_+\right|\right] \le$$
$$\sqrt{2\mathbb{E}\left[\sup_{u\le h}\left|X^1_{u+t} - X^1_t - X^1_{t,u}\right|^2\right]} \left(\mathbb{P}\{\sup_{0\le u\le h}(X^1_{u+t} - X^1_t) > M_t - X^1_t\} + \mathbb{P}\{M_{t,h} > M_t - X^1_t\}\right).$$

引理 3.3 表明，$p = 2$ 使得映射 $h \mapsto h^{-1}\sqrt{2\mathbb{E}\left[\sup_{u\le h}\left|X^1_{u+t} - X^1_t - X^1_{t,\ u}\right|^2\right]}$ 在 t

中一致有界。关于第二个因子，

- 首先，关于 h 的几乎必然连续性保证了这些量

$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le u\le h}(X^1_{u+t} - X^1_t)$ 和 $\lim_{h\to 0} M_{t,h}$ 均等于 0；
- 其次，根据定理 1.1 [9]，二元组 (M_t, X_t) 的分布相对于 $\bar{\Delta}$ 上的勒贝格测度存在密度，因此 $\mathbb{P}(\{0 = M_t - X^1_t\}) = 0$，且第二个因子的极限等于 0。

引理的证明至此完成。 □

回顾定义（15）：$X_{t,h} = A_j(X_t)[W^j_{t+h} - W^j_t]$，$M_{t,h} = \sup_{0\le \mathbf{u}\le \mathbf{h}} X^1_{t,u}$，$h \in [0,1]$.

引理 3.5。在假设（4）和（5）下，其中 $\mathcal{H}$ 由（13）定义：

$$\mathbb{E}\left[(M_{t,h} - M_t + X^1_t)_+ | \mathcal{F}_t\right] = 2\|A^1(X_t)\|\sqrt{h}\,\mathcal{H}\left(\frac{M_t - X^1_t}{\|A^1(X_t)\|\sqrt{h}}\right).$$

证明。对任意固定的 t，在给定 $\mathcal{F}_t$ 的条件下，过程 $(X^1_{t,u},\ u \in [0,h])$ (9) 与 $(\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|\ \hat{}W_u,\ u \in [0,1])$ 同分布，其中 $\hat{}W$ 是一个与 $\mathcal{F}_t$ 独立的布朗运动；并且对任意 h，随机变量 $M_{t,h}$ 与 $\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|\sup_{u\le 1}\ \hat{}W_u$ 同分布。

根据 [17] 第 3.1.3 节，随机变量 $\sup_{u\le 1}\ \hat{}W_u$ 具有相同的分布

如 $|G|$ 所示，其中 G 是一个标准高斯变量（与 $\mathcal{F}_t$独立），其密度为 $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(z)$。然后使用式 (13) 中引入的函数 $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(M_{t,h}-(M_t-X_t^1))_+|\mathcal{F}_t\right] &= \int_0^\infty \Big(\|A^1(X_t)\|\sqrt{h}z-(M_t-X_t^1)\Big)_+ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\ &= 2\|A^1(X_t)\|\sqrt{h}\mathcal{H}(\frac{M_t-X_t^1}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|}).\end{aligned}$$

□

3.2. 命题 3.1 的证明

设 $t>0$。证明的关键在于将该量

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h}\Psi(V_s)dM_s\right]-2\sqrt{h}\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}(\frac{M_t-X_t^1}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|})\right]$$

写成三项之和，

$$\mathbb{E}\Big[\int_t^{t+h}(\Psi(V_s)-\Psi(V_t))dM_s\Big]+\mathbb{E}\Big[\Psi(V_t)\Big((M_{t+h}-M_t)-\mathbb{E}\left[M_{t,h}-M_t+X_t^1)_+|\mathcal{F}_t\right]\Big)\Big] \tag{18}$$

$$+\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\mathbb{E}\left[(M_{t,h}-M_t+X_t^1)_+\mid\mathcal{F}_t\right]-2\sqrt{h}\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}(\frac{M_t-X_t^1}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|})\right].$$

现在证明，和（18）中的每一项在时间上均一致地为 $o(h)$ 和 $O(h)$.

（a）利用引理 3.5，第三项为零。

（b）对于第二项，利用 Ψ 有界这一事实以及引理 3.4（i），对所有 $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)[(M_{t+h}-M_t)-\mathbb{E}[(M_{t,h}-M_t+X_t^1)_+\mid\mathcal{F}_t]\right]\right|\le\\ &\|\Psi\|_\infty\left|\mathbb{E}\left[M_{t+h}-M_t-\mathbb{E}[(M_{t,h}-M_t+X_t^1)_+|\mathcal{F}_t]\right]\right|\le Ch\|\Psi\|_\infty,\end{aligned}$$

正如式 (12) 所要求的。此外，利用引理 3.4 (ii)

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left|\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)[(M_{t+h}-M_t)-\mathbb{E}[(M_{t,h}-M_t+X_t^1)_+\mid\mathcal{F}_t]\right]\right|=0.$$

(c) 由于 $\nabla\Psi$ 有界且过程 M 是递增的，因此第一项有界：

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h}[\Psi(V_s)-\Psi(V_t)]dM_s\right]\le\|\nabla\Psi\|_\infty\mathbb{E}[\sup_{t\le s\le t+h}\|V_s-V_t\|(M_{t+h}-M_t)].$$

利用柯西-施瓦茨不等式

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le s\le t+h}\|V_s-V_t\|(M_{t+h}-M_t)\right]\le\sqrt{\mathbb{E}[\sup_{t\le s\le t+h}\|V_s-V_t\|^2]\mathbb{E}[(M_{t+h}-M_t)^2]}.$$

由于 $\|V_s-V_t\|^2=(M_s-M_t)^2+\|X_s-X_t\|^2$，我们得到 $\sup_{t\le s\le t+h}\|V_s-V_t\|^2\le(M_{t+h}-M_t)^2+\sup_{t\le s\le t+h}\|X_s-X_t\|^2$，因此 $\mathbb{E}[\sup_{t\le s\le t+h}\|V_s-V_t\|(M_{t+h}-M_t)]\le\sqrt{\mathbb{E}[(M_{t+h}-M_t)^2]+\mathbb{E}[\sup_{t\le s\le t+h}\|X_s-X_t\|^2]}\sqrt{\mathbb{E}[(M_{t+h}-M_t)^2]}$

引理 3.1 和引理 3.2（$p=2$）表明，第一个因子是一个 $o(\sqrt{h})$，第二个是一个 $O(\sqrt{h})$，且关于 $t\ge0$ 一致。于是 $\mathbb{E}[\sup_{t\le s\le t+h}\|V_s-V_t\|(M_{t+h}-M_t)]$ 是一个 $o(h)$，也是一个 $O(h)$，且关于 $t\ge0$ 一致。□

3.3. 命题 3.2 的证明

(i) 回想一下，A 和 B 满足 (4)、(5)，且 (M,X) 满足假设 2.1。于是，利用二元组 (M_t,X_t) 的分布密度 p_V，可得

$$\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}\left(\frac{M_t-X_t^1}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|}\right)\right]\le$$
$$\|\Psi\|_\infty\|A\|_\infty\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\mathcal{H}\left(\frac{m-x^1}{\sqrt{h}\|A^1(x^1,\tilde{x})\|}\right)p_V(m,x^1,\tilde{x};t)dm\ dx^1\ d\tilde{x}.$$

经变量替换 $x^1=m-u\sqrt{h}$，得到

$$\frac{\sqrt{h}}{h}\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}\left(\frac{M_t-X_t^1}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|}\right)\right]\le \tag{19}$$
$$\|\Psi\|_\infty\|A^1\|_\infty\int_{\mathbb{R}^d\times[0,+\infty[}\mathcal{H}\left(\frac{u}{\|A^1(m-\sqrt{h}u,\tilde{x})\|}\right)p_V(m,m-\sqrt{h}u,\tilde{x};t)dm\ d\tilde{x}\ du.$$

由于 $\mathcal{H}$ 是递减的（注 3.1），且 $0\le h\le1$, $\mathcal{H}\left(\frac{u}{\|A^1\|\ (m-\sqrt{h}u,\ \tilde{x})\ \|}\right)\le\mathcal{H}(\frac{u}{\|A^1\|_\infty})$:

$$\left|\frac{\sqrt{h}}{h}\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}\left(\frac{M_t-X_t^1}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|}\right)\right]\right|\le$$
$$\|\Psi\|_\infty\|A^1\|_\infty\int_{\mathbb{R}^d\times[0,+\infty[}\mathcal{H}\left(\frac{u}{\|A^1\|_\infty}\right)\sup_{r>0}p_V(m,m-r,\tilde{x};t)dm\ d\tilde{x}\ du.$$

应用托内利定理，计算右侧关于 du 的积分，其中 $\int_0^\infty\mathcal{H}(v)dv=1/4$（注 3.1），得:

$$\sup_{h>0}\left|\frac{\sqrt{h}}{h}\mathbb{E}\left[\Psi(V_t)\|A^1(X_t)\|\mathcal{H}\left(\frac{M_t-X_t^1}{\sqrt{h}\|A^1(X_t)\|}\right)\right]\right|\le\frac{1}{4}\|\Psi\|_\infty\|A^1\|_\infty^2\int_{\mathbb{R}^d}\sup_{r>0}p_V(m,m-r,\tilde{x};t)dm\ d\tilde{x}.$$

根据假设 2.1（i），我们得到映射：

$$t \mapsto \sup_{h>0} \left| \frac{\sqrt{h}}{h} \mathbb{E}\left[\Psi(V_t) \| A^1(X_t) \| \mathcal{H}\left(\frac{M_t - X_t^1}{\sqrt{h}\| A^1(X_t)\|} \right) \right] \right|$$

属于 $L^1([0,T],\mathbb{R})$。命题 3.2 的第 (i) 点得证。

(ii) 关于第 (ii) 点的证明，首先注意到

$$\mathbb{E}\left[\Psi(V_t) \| A^1(X_t) \| \mathcal{H}\left(\frac{M_t - X_t^1}{\sqrt{h}\| A^1(X_t)\|} \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Psi(m,x) \| A^1(x) \| \mathcal{H}\left(\frac{m - x^1}{\sqrt{h}\| A^1(x)\|} \right) p_V(m,x;t) dm\, dx.$$

经过变量替换 $x^1 = m - u\sqrt{h}$ 后，我们得到

$$\frac{\sqrt{h}}{h} \mathbb{E}\left[\Psi(V_t) \| A^1(X_t) \| \mathcal{H}\left(\frac{M_t - X_t^1}{\sqrt{h}\| A^1\ X_t\|} \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \Psi(m,\ m - u\sqrt{h},\ \tilde{x}) \| A^1(m - u\sqrt{h},\ \tilde{x}) \| \mathcal{H}\left(\frac{u}{\| A^1} (m - \sqrt{h}u,\ \tilde{x}) \| \right) p_V(m, \tag{20}$$

$m - \sqrt{h}u,\ \tilde{x};\ t) dm\, d\tilde{x}\, du.$利用勒贝格控制收敛定理，对 $t > 0$，令 h 在 (20) 中趋于 0，并利用 Ψ、A 和 $\mathcal{H}$ 的连续性以及假设 2.1 (ii)，我们得到

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} \mathbb{E}\left[\Psi(V_t) \| A^1(X_t) \| \mathcal{H}\left(\frac{M_t - X_t}{\sqrt{h}\| A^1(X_t)\|} \right) \right] =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times [0,+\infty[} \Psi(m,m,\tilde{x}) \| A^1(m,\tilde{x}) \| \mathcal{H}\left(\frac{u}{\| A^1(m,\tilde{x})\|} \right) p_V(m,m,\tilde{x};t) dm\, d\tilde{x}\, du.$$

利用变量替换 $z = \frac{u}{\| A^1\ m(,\ \tilde{x})\|}$，以及注 3.1 $\int_0^\infty \mathcal{H}(z)dz = 1/4$，可得 $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} \mathbb{E}\left[\Psi(V_t) \| A^1(X_t) \| \mathcal{H}\left(\frac{M_t - X_t^1}{\sqrt{h}\| A^1\ X_t\|} \right) \right] = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(m,m,\tilde{x}) \| A^1(m,\tilde{x}) \|^2 p_V(m,m,\tilde{x};\ t) dm\, d\tilde{x}.$

□

3.4. 定理 2.3 证明的结束

我们回顾 Brezis [5] 中第 204 页的定理 8.2：设 $f \in W^{1,\ 1}(0,T)$，则 f 几乎处处等于一个绝对连续函数。作为特例，任意 $f \in W^{1,\ 1}(0,T) \cap C(0,T)$ 都是绝对连续的。回顾 F_ψ：$t \mapsto \mathbb{E}\left[\int_0^t \Psi(V_s) dM_s \right]$.

引理 3.6. 假设 A 和 B 满足 (4) 和 (5)，且 Ψ 是一个连续有界函数。那么 F_Ψ 是 $\mathbb{R}^+$.上的连续函数

证明. 令 $0 \le s \le t$. 由于 Ψ 有界且 M 单调不减

$$|F_\Psi(t) - F_\Psi(s)| = \left| \mathbb{E}\left[\int_s^t \Psi(V_u) dM_u \right] \right| \le \|\Psi\|_\infty \mathbb{E}[M_t - M_s].$$

由于映射 $t \mapsto \mathbb{E}[M_t]$ 连续，F_Ψ 是 $\mathbb{R}^+$. 上的连续函数 □

引理 3.7. 假设 A 和 B 满足 (4) 和 (5)，(M, X) 满足假设 2.1，且 $\Psi \in C_b^1$.。那么对于所有 $T > 0$，映射 F_ψ 属于索оболев空间 $W^{1,\ 1}(]0, T[)$，其弱导数为

$$\dot{F}_\Psi(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(m, \tilde{x}) \|A^1(m, \tilde{x})\|^2 p_V(m, m, \tilde{x}; t) dm d\tilde{x}$$

证明。设 $g\colon\ [0,T] \to \mathbb{R}$ 是 C^1，其紧支撑为 $[\alpha, \beta] \subset (0, T)$。这意味着两个函数 g 和 $\dot{g}$ 都是连续的，因此有界；此外，$g(\alpha) = g(\beta) = 0$.注意，$\dot{g}(t) = \lim_{h\to 0} {}^{g(t)-g}(t-h)\,{}_h$，$\forall t \in (0, T)$。此外，$\sup^{t\in[0,T]} \sup_{h\in[0,1]} |{}^{g(t)-g(t-h)}\,{}_h \quad | \le \|\dot{g}\|_\infty$.注意，由于 M是非递减的，且系数 A 和 B 有界，$|F_\psi(t)| \le \|\Psi\|_\infty \mathbb{E}[M_T] < \infty$.

于是，利用勒贝格控制收敛定理

$$\int_0^T \dot{g}(s) F_\psi(s) ds = \int_0^T \lim_{h\to 0} \frac{g(s) - g(s-h)}{h} F_\psi(s) ds = \lim_{h\to 0} \int_0^T \frac{g(s) - g(s-h)}{h} F_\psi(s) ds.$$

在最后一个积分中作变量替换 $u = s - h$

$$\int_0^T \frac{g(s) - g(s-h)}{h} F_\Psi(s) ds = h^{-1} \int_0^T g(s) F_\Psi(s) ds - h^{-1} \int_{-h}^{T-h} g(u) F_\Psi(u+h) du$$

$$= \int_0^T g(s) \frac{F_\Psi(s) - F_\Psi(s+h)}{h} ds - h^{-1} \int_{-h}^0 g(s) F_\Psi(s+h) ds + h^{-1} \int_{T-h}^T g(s) F_\Psi(s+h) ds.$$

回顾一下，$supp(g) = [\alpha, \beta] \subset (0, T)$，$gF_\Psi$ 在 $[0, T]$ 上有界，并在 $[\alpha, \beta]^c$上延拓为 0，因此 $\lim_{s\to 0} g(s) = \lim_{s\to T} g(s) = 0$ 于是 $h^{-1} \int_{-h}^0 g(s) F_\Psi(s+h) ds = h^{-1} \int_{T-h}^T g(s) F_\psi(s+h) ds = 0$ 一旦 $0 < h \le T - \beta$，便有 $\lim_{h\to 0} \left[h^{-1} \int_{-h}^0 g(s) F_\Psi(s+h) ds\right] = \lim_{h\to 0} \left[h^{-1} \int_{T-h}^T g(s) F_\psi(s+h) ds\right] = 0$ 应用勒贝格控制收敛定理可得，F 存在弱导数:

$$\int_0^T \dot{g}(s) F_\psi(s) ds = -\int_0^T g(s) \dot{F}_\Psi(s) ds.$$

根据命题 3.1 (ii)

$$\lim_{h\to 0^+} \left(-\frac{F_\Psi(t) - F_\Psi(t+h)}{h} - \frac{2}{\sqrt{h}} \mathbb{E}\left[\Psi(V_t) \|A^1(X_t)\| \mathcal{H}\left(\frac{M_t - X_t^1}{\sqrt{h} \|A^1(X_t)\|} \right) \right] \right) = 0.$$

根据命题 3.2 (ii):

$$-\dot{F}_\Psi(t+) := \lim_{h\to 0, h>0} \frac{F_\Psi(t) - F_\Psi(t+h)}{h} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(m, m, \tilde{x}) \|A^1(m, \tilde{x})\|^2 p_V(m, m, \tilde{x}; t) dm d\tilde{x},$$

以及命题 3.1 和 3.2 中的点 (i):

$$\sup_{h>0} \left| \frac{F_\Psi(t) - F_\Psi(t+h)}{h} \right| \in L^1([0, T], dt),$$

因此 $\dot{F}_\Psi \in L^1([0,T],\mathbb{R})$。

根据 [5] 第 8 章第 2 节第 202 页， F_Ψ 几乎处处属于 $W^{1,\ 1}(]0,T[,\mathbb{R})$。 □

现在我们结束定理 2.3 的证明：根据 [5],第 204 页的定理 8.2， F_ψ 几乎处处等于一个绝对连续函数。由于 F_Ψ 是连续的（引理 3.6），该等式处处成立。因此， F_Ψ 是一个绝对连续函数，其导数就是它的右导数。□

4. 情形 $\boldsymbol{A = I_d}$

在这一相当技术性的章节中，我们首先证明二元组 (M_t, X_t) 的密度满足假设 2.1：p_V (3)在 Δ 的边界上连续，并且被一个可积函数控制：

命题 4.1。假设 B 满足假设 (4)，且 $A = I_d$，则 (M, X)满足假设 2.1，这意味着对于 $\mathbb{R}^d$上的任意概率测度 μ_0

(i) $\forall T > 0$， $\sup p_V(b, b-hu, \tilde{a};\ t, \mu_0) \in L^1([0,T]\times\mathbb{R}^d, dtdbd\tilde{a})$.$_{(h,u)\in[0,1]\times\mathbb{R}_+}$$(ii)$ 几乎必然地，在 $(m, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0, \lim_{u\to 0, u>0} p_V(m, m-u, \tilde{x};\ t, \mu_0) = p_V(m, m, \tilde{x};\ t, \mu_0)$.

作为推论，利用定理 2.2 和 2.3，本命题完成了定理 2.4 的证明。本命题证明的主要工具是密度的积分表示：

命题 4.2. 对于 $\mathbb{R}^d$ 上的任意概率测度 μ_0，对所有 $t > 0$,

$$p_V = p^0 - \sum_{k=m,1,\cdots,d} (p^{k,\alpha} + p^{k,\beta}) \tag{21}$$

其中，各个 p 由以下公式定义（∂_k 是关于 $k = m$、x^1、.....、x^d 和 $B^m = B^1$ 的导数）：

$$p^0(m,x;t) := \int_{\mathbb{R}^d} p_{W^{*1},W}(m - x_0^1, x - x_0; t)\mu_0(dx_0),$$

$$p^{k,\alpha}(m,x;t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbf{1}_{b<m} B^k(a)\partial_k p_{W^{*1},W}\left(m - a^1, x - a; t - s\right) p_V(b,a;s)dbdads,$$

$$p^{k,\beta}(m,x;t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{(d+1)}} \mathbf{1}_{b<m} B^k(a)\partial_k p_{W^{*1},W}(b - a^1, x - a; t - s) p_V(m,a;s)dbdads,$$

其中，$p_{W^{*1},W}(.,.;\,t)$ 是 $t \geq 0$ 的分布 $(\{\sup_{s\leq t} W_s^1, W_t)$ 的密度，参见附录 A.2

4.1. 密度的积分表示：命题 4.2 的证明

固定 $t > 0$。首先，假设在 $\mathbb{R}^d$. 中固定 $\mu_0 = \delta_{x_0}$、 x_0。根据下文的引理 4.2，并利用 B 有界这一事实， $\forall t \in [0,T]$，函数 $p^{k,\ \gamma} \in^{\infty} L\left([0,T]\right.$、$\left.L^1(\mathbb{R}^{d+1})\right)$ 对于 $\gamma = \alpha$、β。

令 $F \in C_b^1(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$ 具有紧支撑。我们将证明

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[F(M_t, X_t)] = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} F(m,x) \left(p^0 - \sum_{k=m,x^1,\ldots,x^d} (p^{k,\alpha} + p^{k,\beta})(m,x,t) \right) dmdx. \quad (22)$$

利用 Malliavin 微积分，我们得到以下分解：

引理 4.1。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(M_t, X_t)\right] = & \int_{\mathbb{R}^{d+1}} F(x_0^1 + b, x_0 + a) p_{W^{*1},W}(b,a;t) dbda \\
& + \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_m F\left(X_s^1 + b, X_s + a\right) \mathbf{1}_{\{M_s < X_s^1 + b\}} B^1(X_s) p_{W^{*1},W}(b,a;t-s) dbda \right] ds \\
& + \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_k F\left(\max\left(M_s, X_s^1 + b\right), X_s + a\right) B^k(X_s) p_{W^{*1},W}(b,a;t-s) dbda \right] ds.
\end{aligned}$$

证明。设 Z 是以下方程的指数鞅解

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s B^k(x_0 + W_s) dW_s^k. \quad (23)$$

如前所述，采用爱因斯坦求和约定。根据 Girsanov 定理，利用 (23)，令 $\mathbb{Q} = Z\mathbb{P}$， $W_B := \left(W_t^k - \int_0^t B^k(x_0 + W_s) ds;\ k = 1, ..., d\right)_{t\geq 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}$ 连续鞅，使得 $\langle W_B \rangle_t = t$， $\forall t \geq 0$. 。这意味着在 $\mathbb{Q}$ 下， W_B 是一个 d 维布朗运动。因此， X 在 $\mathbb{P}$ 下的分布（分别为 (M,X) 的分布）与 $W + x_0$ 在 $\mathbb{Q}$ 下的分布（分别为 $(W^{1*} + x_0, W + x_0)$ 的分布）相同，并且

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(M_t, X_t)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[F(x_0^1 + W_t^{1*}, x_0 + W_t)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(x_0^1 + W_t^{1*}, x_0 + W_t) Z_t\right]. \quad (24)$$

令 $G := F(x_0^1 + W_t^{1*}, x_0 + W_t)$ 和 $u := ZB(x_0 + W)$，利用 (23)：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[F(M_t, X_t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(x_0^1 + W_t^{1*}, x_0 + W_t)\right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[G\delta(u)\right] \quad (25)$$

首先，我们将把（50）（附录）应用于（25）中的第二项。因此，我们需要验证二元组 $(G,u) \in \mathbb{D}^{1,\ 2} \times \mathbb{L}^{1,\ 2}$: F 有界且光滑，

$G \in \mathbb{D}^{1,\ 2}$；根据引理 A.1，过程 u 属于 $\mathbb{L}^{1,\ 2}$。
利用 (53) ($\tau := \inf\{s, W_s^{1*} = W_t^{1*}\}$)，二元组 (W_t^{1*}, W_t) 属于 $\mathbb{D}^{1,2}$，其 Malliavin 梯度为：

$$D_s W_t^{1*} = \left(\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s), 0, ..., 0\right),\ D_s W_t^k = (\delta_{j=k},\quad j = 1, ..., d)\mathbf{1}_{[0,t]}(s),\quad k = 1, ..., d.$$

利用链式法则：

$$\begin{aligned}\langle DG, u\rangle_{\mathbb{H}} = &\int_0^t \partial_m F(x_0^1 + W_t^{*1}, x_0 + W_t)\mathbf{1}_{\{W_s^{1*} < W_t^{1*}\}} B^1(x_0 + W_s) Z_s ds \\ &+ \int_0^t \partial_k F(x_0^1 + W_t^{*1}, x_0 + W_t) B^k(x_0 + W_s) Z_s ds.\end{aligned}$$

现在我们可以应用 (50) $E_{\mathbb{P}}[G\delta(u)] = E_{\mathbb{P}}[\langle DG, u\rangle_{\mathbb{H}}]$：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[G\delta(u)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^t \partial_m F(x_0^1 + W_t^{1*}, x_0 + W_t)\mathbf{1}_{\{W_s^{1*} < W_t^{1*}\}} B^1(x_0 + W_s) Z_s ds\right] \\ +\quad &\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^t \partial_k F(x_0^1 + W_t^{1*}, x_0 + W_t) B^k(x_0 + W_s) Z_s ds\right]. \qquad (26)\end{aligned}$$

将恒等式 (26) 代入 (25) 右端，并利用 Fubini 定理交换 ds 和 $d\mathbb{P}$ 中的积分，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(M_t, X_t)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(x_0^1 + W_t^{1*}, x_0 + W_t)\right] \qquad (27)\\ +\quad &\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\partial_m F(x_0^1 + W_t^{1*}, x_0 + W_t)\mathbf{1}_{\{W_s^{1*} < W_t^{1*}\}} Z_s B^1(x_0 + W_s)\right] ds \\ +\quad &\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\partial_k F(x_0^1 + W_t^{1*}, x_0 + W_t) Z_s B^k(x_0 + W_s)\right] ds.\end{aligned}$$

第二步，我们利用布朗运动增量的独立性，以得到 (W_{t-s}^{1*}, W_{t-s}) 的密度。回忆 (9)：$\hat{}\ W_{t-s} := W_t - W_s$ 和 $(\hat{}W^1)_{t-s}^* = \max_{s\le u\le t}\left(W_u^1 - W_s^1\right)$. 于是 $W_t^{1*} = \max\ \left(W_s^{1*}, W_s^1 + \max_{s\le u\le t}\left(W_u^1 - W_s^1\right)\right) = \max\ \left(W_s^{1*}, W_s^1 + (\hat{}W^1)_{t-s}^*\right)$，因此表达式 (27) 变为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(M_t, X_t)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(x_0^1 + W_t^{1*} x_0 +, W_t)\right] + \\ &\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\partial_m F\left(x_0^1 + W_s^1 + (\hat{W}^1)_{t-s}^*, x_0 + W_s + \hat{W}_{t-s}\right)\mathbf{1}_{\{W_s^{1*} < W_s^1 + (\hat{W}^1)_{t-s}^*\}} Z_s B^1(x_0 + W_s)\right] ds \\ &+ \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\partial_k F\left(\max\left(x_0^1 + W_s^{1*}, x_0^1 + W_s^1 + (\hat{W}^1)_{t-s}^*\right), x_0 + W_s + \hat{W}_{t-s}\right) Z_s B^k(x_0 + W_s)\right] ds.\end{aligned}$$

随机向量 $\left((\hat{}W^1)_{t-s}^*, \hat{}W_{t-s}\right)$ 与 $\sigma-$域 $\mathcal{F}_s$ 独立，且与二元组 (W_{t-s}^{1*}, W_{t-s}) 具有相同的分布。令 $p_{W^{*1}, W}(.,.;\ t-s)$ 为其

分布的密度，并用该密度表示期望：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(M_t,X_t)\right] &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} F(x_0^1+b,x_0+a)p_{W^{*1},W}(b,a;t)dbda \\ &+ \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_m F\left(x_0^1+W_s^1+b,x_0+W_s+a\right)\mathbf{1}_{\{W_s^{1*}<W_s^1+b\}} Z_s B^1(x_0+W_s)p_{W^{*1},W}(b,a;t-s)dbda\right]ds \\ &+ \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_k F\left(x_0^1+\max\left(W_s^{1*},W_s^1+b\right),x_0+W_s+a\right) Z_s B^k(x_0+W_s)p_{W^{*1},W}(b,a;t-s)dbda\right]ds.\end{aligned}$$

根据 Girsanov 定理，对 $Z.\mathbb{P}=\mathbb{Q}$ 而言，由于在 $\mathbb{P}$ 下 (M,X) 的分布与在 $\mathbb{Q}$ 下 $(x_0^1+W^{1*},x_0+W)$ 的分布相同，利用等式 (24)：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(M_t,X_t)\right] &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} F(x_0^1+b,x_0+a)p_{W^{*1},W}(b,a;t)dbda \\ &+ \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_m F\left(X_s^1+b,X_s+a\right)\mathbf{1}_{\{M_s<X_s^1+b\}} B^1(X_s)p_{W^{*1},W}(b,a;t-s)dbda\right]ds \\ &+ \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_k F\left(\max\left(M_s,X_s^1+b\right),X_s+a\right) B^k(X_s)p_{W^{*1},W}(b,a;t-s)dbda\right]ds.\end{aligned}$$

□

现在我们可以证明命题 4.2。对变量 (a,b) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(M_t,X_t)\right]=\sum_{k=0}^d I_k+I_m$. 作适当的平移，其中

$$\begin{aligned}I_0 &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} F(b,a)p_{W^{*1},W}(b-x_0^1,a-x_0;t)dbda, \\ I_m &= \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_m F(b,a)\mathbf{1}_{\{M_s<b\}} B^1(X_s)p_{W^{*1},W}\left(b-X_s^1,a-X_s;t-s\right)dbda\right]ds\end{aligned} \tag{28}$$

且对于 $k=1,...,d$,

$$I_k = \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_k F\left(\max\left(M_s,b\right),a\right) B^k(X_s)p_{W^{*1},W}(b-X_s^1,a-X_s;t-s)dbda\right]ds.$$

由于 B,F 及其导数均有界，所有这些积分都是有限的。利用附录中的 (54)，函数 $p_{W^{*1},W}(.,.;t)$ 在 $\bar{\Delta}=\{(b,a)\quad b\geq a_+^1,(a,b)\in\mathbb{R}^{d+1}\}$ 上是 C^∞。现在的目标是确定命题 4.2 中定义的项 p^0, $p^{k,\alpha}$, $p^{k,\beta}$, $\mathrm{k}=m,1,\cdots,d$。

1. 首先，我们将 $p^0(b,a;t)$ 识别为 I_0 的被积函数中 $F(b,a)$ 的因子：

$$p^0(b,a;t)=p_{W^{*1},W}(b-x_0^1,a-x_0;t).$$

2. 现在我们处理 $I_k,k=2,\cdots,d.$ 对 a^k 在两者之间进行分部积分

$-\infty$和 ∞在 I_k中，对 $k=2,...,d$进行计算，得到

$$
\begin{aligned}
I_k &= -\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} F\left(\max\left(M_s,b\right),a\right) B^k(X_s)\partial_k p_{W^{*1},W}(b-X_s^1,a-X_s;t-s)dbda\right]ds \\
&= -\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbf{1}_{\{b>M_s\}} F\left(b,a\right) B^k(X_s)\partial_k p_{W^{*1},W}(b-X_s^1,a-X_s;t-s)dbda\right]ds \\
&\quad -\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbf{1}_{\{b<M_s\}} F\left(M_s,a\right) B^k(X_s)\partial_k p_{W^{*1},W}(b-X_s^1,a-X_s;t-s)dbda\right]ds
\end{aligned}
$$

我们将集合（$b > M_s$）上的积分中的 $-p^{k,\ \alpha}(b,a,t)$ 识别出来。对于集合（$b < M_s$）上的积分，我们引入（M_s, X_s）的密度，并将 $-p^{k,\ \beta}(m,a;\ t)$ 识别为 $F(m, a)$ 的因子。

3. 最后，我们识别出 $p^{m,\ \gamma}$ 和 $p^{1,\ \gamma}, \gamma=\alpha,\beta$，它们来自 I_m 与 I_1 的和。注意，在集合 $\{b<a^1\}$. 上，关于 b 在 $\max\left(a^1,M_s\right)$ 与 ∞ 之间对 I_m 分部积分，得到 $p_{W^{*1},\ W}\left(b-X_s^1,a-X_s;\ t-s\right)=0$

$$
\begin{aligned}
I_m &= -\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^d} F\left(\max\left(a^1,M_s\right),a\right) B^1(X_s) p_{W^{*1},W}\left(\max\left(a^1,M_s\right)-X_s^1,a-X_s;t-s\right)da\right]ds \\
&\quad -\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbf{1}_{M_s<b} F\left(b,a\right) B^1(X_s)\partial_m p_{W^{*1},W}\left(b-X_s^1,a-X_s;t-s\right)dbda\right]ds
\end{aligned}
\tag{29}
$$

关于 a^1 在 $-\infty$ 和 b 之间对 I_1 分部积分，得到

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^d} F\left(\max\left(M_s,b\right),b,\tilde{a}\right) B^1(X_s) p_{W^{*1},W}(b-X_s^1,b-X_s^1,\tilde{a}-\tilde{X}_s;t-s)dbd\tilde{a}\right]ds \\
&\quad -\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} F\left(\max\left(M_s,b\right),a\right) B^1(X_s)\partial_1 p_{W^{*1},W}(b-X_s^1,a-X_s;t-s)dbda\right]ds.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

(i) 项 $p^{m,\ \beta}(b,a,t)$ 来自 I_m (29) 中的第二项，它是 $F(b,a)$ 的因子：

$$
-\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbf{1}_{M_s<b} F\left(b,a\right) B^1(X_s)\partial_m p_{W^{*1},W}\left(b-X_s^1,a-X_s;t-s\right)dbda\right]ds
$$

(ii) 项 $-p^{1,\alpha}(b,a,t)$ 和 $-p^{1,\beta}(b,a;\ t)$ 来自 I_1 (30) 中的第二项：

$$
-\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} F\left(\max\left(b,M_s\right),a\right) B^1(X_s)\partial_1 p_{W^{*1},W}(b-X_s^1,a-X_s;t-s)dbda\right]ds.
$$

在集合 $(M_s<b)$ 上的积分中，我们分别将 $-p^{1,\alpha}(b,a,t)$ 和在集合 $(M_s>b)$ 上的积分中将 $-p^{1,\beta}(b,a;\ t)$ 识别为 $F(b,a)$ 的因子，即

$F(M_s, a)$ 的因子。

(iii) 项 $-p^{m,\ \alpha}(b,\ \ a,\ \ t)$ 来自 I_1 (30) 和 I_m (29) 中第一项的和。现在，我们将 I_m 和 I_1 第一项中的变量 b 替换为 a_1，将 $dbd\tilde{a}$ 替换为 da : $I_m^1 = -\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^d} F\left(\max\ \left(a^1,\ \ M_s\right),\ \ a\right) B^1(X_s)\right.$ $p_{W^{*1},\ W}\left(\max\ \left(a^1,\ \ M_s\right) - X_s^1,\ \ a - X_s;\ \ t-s\right) da\Big] dsI_1^1 = \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^d} F\left(\max\ \left(M_s,\ \ a^1\right),\ \ a\right) B^1\right.$ $(X_s) p_{W^{*1},\ W}(a^1 - X_s^1,\ \ a - X_s;\ \ t-s) da\Big] ds.$

注意到

$$
\begin{aligned}
&- p_{W^{*1},W}\left(\max\left(a^1, M_s\right) - X_s^1, a - X_s; t-s\right) + p_{W^{*1},W}(a^1 - X_s^1, a - X_s; t-s) \\
&= \left[-p_{W^{*1},W}\left(M_s - X_s^1, a - X_s; t-s\right) + p_{W^{*1},W}\left(a^1 - X_s^1, a - X_s; t-s\right)\right] \mathbf{1}_{M_s > a^1} \\
&= -\int_{a^1}^{M_s} \partial_m p_{W^{*1},W}\left(b - X_s^1, a - X_s, t-s\right) db \mathbf{1}_{M_s > a^1}.
\end{aligned}
$$

那么， I_m^1 和 I_1^1 的和为:

$$
-\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{\mathbb{R}^{d+1}} F(M_s, a) B^1(X_s) \partial_m p_{W^{*1},W}\left(b - X_s^1, a - X_s; t-s\right) \mathbf{1}_{M_s > b > a^1} da db\right] ds.
$$

我们引入二元组（M_s， X_s）的分布密度，并将 $-p^{m,\ \alpha}$（m， a； t）识别为 F（m，a）的因子。

这三个步骤完成了 $\mu_0 = \delta_{x_0}$.时命题 4.2 的证明

最后，当 μ_0 是 X_0的分布时，我们有 p_V（m， w； t， μ_0） $= \int_{\mathbb{R}^d} p_V$（$m$， x； t，δ_{x_0}）μ_0（dx_0）。然后，对 μ_0 积分（21）中得到的 p_V（m， x； t， δ_{x_0}）表达式，即可完成任意初始分布 μ_0下命题 4.2 的证明。

□

4.2. 命题4.1的证明

借鉴 Garroni 第 V.3.2 节中的一些思路，我们在 $L^\infty([0,T], dt(\mathbb{R}^{d+1}, dmdx))$ $k = m$ 上引入线性映射 $1, \cdots, d$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^{k,\ \alpha}[p](m, x;\ t) &:= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbf{1}_{b<m} B^k(a) \partial_k p_{W^{*1},\ W}\left(m - a^1, x - a;\ \ t-s\right) p(b, a;\ \ s) db da ds, \\
\mathcal{I}^{k,\beta}[p](m, x;\ t) &:= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbf{1}_{b<m} B^k(a) \partial_k p_{W^{*1},W}(b - a^1, x - a;\ t-s) p(m, a;\ s) db da ds.
\end{aligned} \tag{31}
$$

我们引入以下通过归纳法定义的函数:

$$
p_0(m, x; t, \mu_0) = \int_{\mathbb{R}^d} p_{W^{1*},W}(m - x_0^1, x - x_0; t) \mu_0(dx_0), \quad p_n = -\sum_{k=m,1,\cdots,d} \left(p_n^{k,\alpha} + p_n^{k,\beta}\right) \tag{32}
$$

以及对于 $k = m, 1, \cdots, d$、$j = \alpha, \beta$ 和 $n \geq 1$、$p^{k,\ j}_{n+1}(m, x;\ t) := \mathcal{I}^{k,\ j}[p_n](m, x;\ t)$。我们将算子记为

$$\mathcal{I} := -\sum_{j=\alpha,\beta;k=m,1,\ldots,d} \mathcal{I}^{k,j}. \tag{33}$$

此外，可以注意到这意味着 $p_{n+1} = \mathcal{I}(p_n)$，而命题 4.2 得出 $p_V = p_0 + \mathcal{I}(p_V)$。令

$$P_n := \sum_{k=0}^{n} p_k, \quad n \geq 0 \tag{34}$$

命题 4.3. 假设向量 B 有界，则对所有 T，序列 $(P_n)_n$ 在 $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^{d+1}, dxdm))$ 中收敛到 p_V。此外 $p_V = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$.

证明可由以下两个引理得出。

引理 4.2. 令 $j = \alpha, \beta$, $k = m, 1, \cdots, d$ 和 $T > 0$ 为线性算子 $\mathcal{I}^{k,j}$，它们在 $L^\infty([0,T], dt, L^1(\mathbb{R}^{d+1}, dmdx))$ 上连续：存在常数 C，使得对所有 $p \in L^\infty([0,T], dt, L^1(\mathbb{R}^{d+1}, dmdx))$：

$$\sup_{s\in[0,t]} \|\mathcal{I}^{k,j}[p](.,.;s)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)} \leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \sup_{u\in[0,s]} \|p(.,.;u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)} ds \tag{35}$$

因此,

$$\sup_{s\in[0,t]} \|\mathcal{I}[p](.,.;s)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)} \leq 2(d+1)C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \sup_{u\in[0,s]} \|p(.,.;u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)} ds. \tag{36}$$

证明。设 $T > 0$, $p \in L^\infty([0,T] \times L^1(\mathbb{R}^{d+1}, dmdx))$ 和 $t \in [0,T]$，并令 ϕ_{d+1} 为限制在子集 $\{b > a^1_+\}$ 上的高斯分布密度（相差一个常数）

$$\phi_{d+1}(b, b-a^1, \tilde{a}; 2t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^{d+1}} \mathbf{1}_{b>a^1_+} e^{-\frac{b^2+(b-a^1)^2+\|\tilde{a}\|^2}{4t}}. \tag{37}$$

(i) 根据 $\mathcal{I}^{k,\alpha}$ 的定义以及 B 的有界性，令 $j = \alpha$ 和 $k = m, 1, \cdots, d$,

$$\left|\mathcal{I}^{k,\alpha}[p](m,x;t)\right| \leq \|B\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbf{1}_{b<m} |\partial_k p_{W^{*1},W}\left(m-a^1, x-a; t-s\right) p(b,a;s)| dbdads.$$

根据引理 A.2，存在一个常数 D，使得对于 $k = m, 1, \cdots, d$:

$$|\partial_k p_{W^{*1},W}(b, a; t)| \leq \frac{D}{\sqrt{t}} \phi_{d+1}(b, b - a^1, \tilde{a}; 2t). \tag{38}$$

So

$$\left|\mathcal{I}^{k,\alpha}[p](m, x; t)\right| \leq \|B\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{D}{\sqrt{t-s}} \phi_{d+1}(m - a^1, m - x^1, \tilde{x} - \tilde{a}; t - s)|p(b, a; s)|dbdads.$$

我们先对 (m, x) 积分，应用托内利定理并省略示性函数。由于 ϕ_{d+1} 是高斯分布的密度，我们得到以下界:

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{I}^{k,\alpha}[p](., .; t)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1}, dmdx)} \leq & D\|B\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} |p(b, a; s)|dbdads \\ \leq & 2^{(d+1)/2} D\|B\|_\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \sup_{u \leq s} \|p(., .; u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1}, dbda)} ds,\end{aligned}$$

当 $j = \alpha.$ 时，即不等式 (35)

(ii) 令 $j = \beta$ 和 $k = m, 1, \cdots, d.$。根据 $\mathcal{I}^k$ 的定义, $^\beta$ 以及 B 的有界性,

$$\left|\mathcal{I}^{k,\beta}[p](m, x; t)\right| \leq \|B\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbf{1}_{b<m} |\partial_k p_{W^{*1},W}\left(b - a^1, x - a; t - s\right) p(m, a; s)|dbdads.$$

利用 (38) 得:

$$\left|\mathcal{I}^{k,\beta}[p](m, x; t)\right| \leq \|B\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{D}{\sqrt{t-s}} \phi_{d+1}(b - a^1, b - x^1, \tilde{x} - \tilde{a}; 2(t - s))|p(m, a; s)|dbdads.$$

我们先对 x 积分，再对 b 积分，应用托内利定理并省略示性函数，同时利用 ϕ 是高斯分布的密度。因此，除一个乘法常数外，有以下界:

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{I}^{k,\beta}[p](., .; t)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1}, dmdx)} \leq & D\|B\|_\infty 2^{(d+1)/2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} |p(m, a; s)|dmdads \\ \leq & D\|B\|_\infty 2^{(d+1)/2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \sup_{u \leq s} \|p(., .; u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1}, dmda)} ds,\end{aligned}$$

表示 $j = \beta.$ 的不等式 (35)

最后，将 $j = \alpha$、β 、$k = m$、1、.....、$d.$ 对应的估计式 (35) 相加，即可得到估计式 (36)。 •

以下引理是引理 4.2 中公式 (36) 的推论:

引理 4.3。对于所有 n

$$\sup_{u\le t}\|p_n(.,.;u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)}\le (2(d+1)C)^n t^{n/2}\frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(1+n/2)}, \tag{39}$$

$$\sup_{u\le t}\|(p_V-P_n)(.,.;u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)}\le (2(d+1)C)^{n+1} t^{(n+1)/2}\frac{\Gamma(1/2)^{n+1}}{\Gamma((n+3)/2)}. \tag{40}$$

证明。（i）对于所有 $t>0$， $p_0(.;t)$ 都是概率密度，因此 (39) 对 $n=0$. 成立。现在假设 (39) 对 n. 成立。利用 $p_{n+1}=\mathcal{I}[p_n]$、(36) 和归纳法假设：

$$\sup_{u\le t}\|p_{n+1}(.,.;u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)}\le (2(d+1)C)^{n+1}\frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(1+n/2)}\int_0^t\frac{\sqrt{s^n}}{\sqrt{t-s}}ds.$$

我们进行变量替换 $s=tu$，并使用 $\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$：

$$\sup_{u\le t}\|p_{n+1}(.,.;u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)}\le (2(d+1)C)^{n+1}t^{(n+1)/2}\frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(1+n/2)}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1+n/2)}{\Gamma((n+3)/2)}$$

这就证明了 (39) 对所有 $n.$ 成立

（ii）注意到 $P_0=p_0$ 和 $p_V-p_0=\mathcal{I}[p_V]$，并将 (36) 应用于 p_V，得到

$$\sup_{u\le t}\|(p_V-P_0)(.,.;u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)}\le 2(d+1)Ct^{1/2}.$$

但是 $\Gamma(1/2)/\Gamma(3/2)=2$ 因此（40）对 $n=0.$ 成立

现在假设（40）对 n. 成立。利用 $p_V-P_{n+1}=p_0+\mathcal{I}(p_V)-(p_0+\mathcal{I}(P_n))=\mathcal{I}(p_V-P_n)$、界（36）以及归纳假设：

$$\sup_{u\le t}\|[p_V-P_{n+1}](.,.;u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)}\le 2(d+1)C\int_0^t(2(d+1)C)^{n+1}\frac{\Gamma(1/2)^{n+1}}{\Gamma((3+n)/2)}\frac{\sqrt{s^{n+1}}}{\sqrt{t-s}}ds.$$

现在进行变量替换 $s=tu$，并令 $\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$，其中 $a=(n+3)/2, b=\frac{1}{2}$：

$$\sup_{u\le t}\|[p_V-P_{n+1}](.,.;u)\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx)}\le (2(d+1)C)^{n+2}t^{(n+2)/2}\frac{\Gamma(1/2)^{n+2}}{\Gamma((4+n)/2)}$$

这证明了（40）对 $n+1$ 成立，因而对所有 $n.$ 都成立 □

对于任意 x, 级数 $\sum_n \frac{x^n}{\Gamma(n/2+1)}$ 均收敛，因此命题 4.3 是引理 4.2 和引理 4.3 的推论。

4.2.1. p_V 的上界，即假设 2.1（i）。

对于所有 $T>0$, $x_0\in\mathbb{R}^d$, $p\in L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^{d+1},dmdx))$，其支集包含于 $\{(m,x)$ $m>x_0^1, m>x^1\}$ 记

$$N(p;t,x_0):=\sup_{(m,x)\in\mathbb{R}^{d+1},\quad m>x^1,m>x_0^1}\frac{|p(m,x;t)|}{\phi_{d+1}(m-x_0^1,m-x^1,\tilde{x}-\tilde{x}_0;2t)}. \tag{41}$$

命题 4.4. 对于所有 $T>0$，存在一个常数 C_T；对于所有 n，存在常数 $C_n=\frac{[\|B\|_\infty D}{(2(\underline{d+1\ \ 2^{d/2}\Gamma\ 1/2\ ]^n\ ))()(1+n/2)}}{\Gamma}$，使得：对于所有 $x_0\in\mathbb{R}^d$, $0<t\le T$,

$$(i)\qquad |p_n(m,x;t,x_0)|\le C_n t^{n/2}\phi_{d+1}(m-x_0^1,m-x^1,\tilde{x}-\tilde{x}_0,2t)\mathbf{1}_{m>\max(x^1,x_0^1)}$$

$$(ii)\quad |p_V(m,x;t,x_0)|\le C_T\phi_{d+1}(m-x_0^1,m-x^1,\tilde{x}-\tilde{x}_0,2t)\mathbf{1}_{m>\max(x^1,x_0^1)}$$

(iii) 对于 $\mathbb{R}^d$ 上的所有 μ_0 初始概率测度，

$\sup_{u>0}p_V(m,m-u,\tilde{x},t;\ \mu_0)\in L^1([0,T]\times\mathbb{R}^d,dtdmd\tilde{x})$.

需要注意的是，实际上，(iii) 点就是假设 2.1（i）。

证明。点 (ii) 是点 (i) 的推论，因为 $p_V=\sum_{n=0}^\infty p_n$，且级数$\sum_{n\ \Gamma}{}^{1}{}_{(1+n/2)x^n}$ 的收敛半径为无穷大（命题 4.3）。我们利用引理 A.2 中的点 (ii)，对 n 作归纳法来证明点 (i)：$p_0(m,x;\ t,x_0)\le$

$$\frac{e^{-\frac{(m-x^1)^2}{4t}-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}-\frac{(m-x_0^1)^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi)^{d+1}t^{d+1}}}\mathbf{1}_{m>\max(x^1,x_0^1)}=\phi_{d+1}(m-x^1,m-x_0^1,\tilde{x}-\tilde{x}_0;2t)\mathbf{1}_{m>\max(x^1,x_0^1)},$$

因此 $N(p_0;\ t,x_0)\le 1$，这就是 $n=0$, $C_0=1$ 时的 (i)。

我们假设点 (i) 对 p_n 成立，即 $N(p_n;\ t,x_0)\le C_n t^{n/2}$. 根据定义$p_{n+1}=\mathcal{I}[p_n]$, 下面证明的引理 4.4 得出：

$$N(p_{n+1};t,x_0)=N(\mathcal{I}[p_n];t,x_0)\le 2(d+1)2^{d/2}\|B\|_\infty DC_n\int_0^t\frac{s^{n/2}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}ds.$$

我们进行变量替换 $s=tu$

$$N(p_{n+1};t,x_0)\le\frac{2(d+1)2^{d/2}\|B\|_\infty D}{\sqrt{2\pi}}C_n(\sqrt{t})^{n+1}\int_0^1\frac{u^{n/2}}{\sqrt{1-u}}ds$$

利用 $\int_0^1\frac{u^{n/2}}{\sqrt{1-u}}du=\frac{\Gamma}{((n+2)/2)\Gamma(1/2)\,\Gamma((n+3)/2)}$ 和 C_n 定义：

$$N(p_{n+1};t,x_0)\le C_{n+1}(\sqrt{t})^{n+1},$$

由此证明了命题 4.4 中的 (i) 点。

(iii) 那么对于所有 $x_0 \in \mathbb{R}^d$，并利用 $x^1 = m - u$,

$$\sup_{u>0} p_V(m, m-u, \tilde{x}; t) \leq C_T \phi_{d+1}(m - x_0^1, 0, \tilde{x} - \tilde{x}_0; 2t) \in L^1([0,T] \times \mathbb{R}^d, dtdmd\tilde{x}).$$

由于 $p_V(m,x;\, t, \mu_0) = \int_{\mathbb{R}^d} p_V(m,x;\, t, x_0)\mu_0(dx_0)$ 点，因此 (iii) 成立。

□

引理 4.4. 设 $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in L^\infty([0,T], dt, L^1(\mathbb{R}^{d+1}, dmdx))$，使得 $p(.,.;\, t)$ 的支集包含于 $\{(m,x) \quad m > x_0^1, m > x^1\}$，且对所有 $s \in]0,T] N(p;\, s, x_0) < \infty$. 那么对于 $j = \alpha$, $k = m, 1, \ldots, d$，函数 $\mathcal{I}^{j,\, k}[p](.;\, t)$ 的支集包含于 $\{(m,x) \quad m > x_0^1, m > x^1\}$. 此外，对所有 $t \in [0,T]$，我们有：

$$N(\mathcal{I}[p]; t, x_0) \leq 2(d+1)2^{d/2}\|B\|_\infty D \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} N(p; s, x_0) ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

证明。令 $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in L^\infty([0,T], dt, L^1(\mathbb{R}^{d+1}, dmdx))$，使得对所有 $t > 0$， $p(.;\, t)$ 的支集包含于 $\{(m,x) \quad m > x_0^1, m > x^1\}$.

(i) 对于 $j = \alpha$, $k = m, 1, \cdots, d$，利用 $\mathcal{I}^{\alpha,k}$ 的定义可得：

$$\mathcal{I}^{k,\alpha}[p](m,x;t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} B^k(a) \partial_k p_{W^{*1},W} \left(m - a^1, x - a; t - s\right) \mathbf{1}_{x_0^1 < b < m, m > x^1} p(b, a; s) dbdads$$

因此， $\mathcal{I}^{\alpha,k}[p](.;\, t)$ 的支集包含于 $\{(m,x) \in \mathbb{R}^{d+1}, \ m > \max(x_0^1, x^1)\}$.。此后，我们只考虑满足 $m > \max(x^1, x_0^1)$ 的 (m,x)。

令 p 为一个函数，使得 $\forall s \in]0,T]$ $N(p;\, x_0, s) < \infty$.。 $\mathcal{I}^{k,\alpha}$ 的定义、 B 的有界性、$\partial_k p_{W^*,W}$ 满足 (38) 这一事实，以及 $N(p;\, t, x_0)$ 的定义 (41) 表明

$$\left|\mathcal{I}^{k,\alpha}[p](m,x;t)\right| \leq \|B\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} N(p; s, x_0) \frac{D}{\sqrt{(t-s)}} \mathbf{1}_{m>x_1} \mathbf{1}_{m>b>\max(a^1, x_0^1)}$$
$$\phi_{d+1}(m - a^1, m - x^1, \tilde{x} - \tilde{a}; t - s) \phi_{d+1}(b - x_0^1, b - a^1, \tilde{a} - \tilde{x_0}; s) dbdads.$$

我们利用引理 A.3 (ii) 关于 $u = \tilde{x}$、 $v = \tilde{a}$、 $w = \tilde{x}_0$ 的结论，并注意到 ϕ_{d+1} 是一个高斯概率密度，对 $\tilde{a}$ 进行积分：

$$\left|\mathcal{I}^{\alpha,k}[p](m,x;t)\right| \leq 2^{(d-1)/2}\|B\|_\infty D \tag{42}$$
$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} N(p; s, x_0) \mathbf{1}_{m>b>\max(a^1, x_0^1)} \frac{e^{-\frac{\|\tilde{x} - \tilde{x_0}\|^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi t)^{d-1}}} \frac{e^{-\frac{(m-a^1)^2}{4(t-s)} - \frac{(m-x^1)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{(2\pi)^2(t-s)^3}} \frac{e^{-\frac{(b-x_0^1)^2}{4s} - \frac{(b-a^1)^2}{4s}}}{\sqrt{(2\pi)^2 s^2}} dbda^1 ds.$$

利用引理 A.2 的点 (i')，关于 $v=a^1$、$w=b$、$k=1$ 的结论，我们对 da^1 积分至 b:

$$\int_{-\infty}^{b}\frac{e^{-\frac{(m-a^1)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\frac{e^{-\frac{(b-a^1)^2}{4s}}}{\sqrt{(2\pi s)}}da^1=\frac{e^{\frac{-(m-b)^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}}\Phi_G\left(\sqrt{\frac{s}{2t(t-s)}}(b-m)\right)$$

其中 $\Phi_G(u)=\int_{-\infty}^{u}e^{-z^2/2}dz\le\frac{1}{2}e^{-u^2/2}$ 对于 $u=b-m<0$，根据引理 A.3 (iii)。由此得到以下界：$\frac{e^{\frac{(m-b)^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}}\;e^{-\frac{s(b-m)^2)()}{4t\,t-s}}$ 以及

$$2\int_{-\infty}^{b}\frac{e^{-\frac{(m-a^1)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\frac{e^{-\frac{(b-a^1)^2}{4s}}}{\sqrt{(2\pi s)}}da^1\le\frac{e^{-\frac{(m-b)^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{s(m-b)^2}{4t(t-s)}}=\frac{e^{-\frac{(m-b)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{2\pi t}}.$$

将此不等式代入 (42)，得到 $C_{d,B}=2^{(d+1)/2}\|B\|_\infty D$

$$\frac{\left|\mathcal{I}^{\alpha,k}[p](m,x;t)\right|}{C_{d,B}}\le\int_0^t\int_{\mathbb{R}}N(p;s,x_0)\mathbf{1}_{m>b>x_0^1}\frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x_0}\|^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi t)^d}}\frac{e^{-\frac{(m-b)^2}{4(t-s)}-\frac{(m-x^1)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)^2s}}e^{-\frac{(b-x_0^1)^2}{4s}}dbds.$$

忽略示性函数，由引理 A.3 (ii) 可知，对于 $u=m,\ v=b,\ w=x_0^1,\ k=1$

$$\int_{b<m}\frac{e^{-\frac{(m-b)^2}{4(t-s)}}e^{-\frac{(b-x_0^1)^2}{4s}}}{\sqrt{2\pi(t-s)2\pi s}}db\le\sqrt{\frac{2}{2\pi t}}e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4t}}.$$

代入此结果，得到

$$\left|\mathcal{I}^{\alpha,k}[p](m,x;t)\right|\le\sqrt{2}C_{d,B}\int_0^t N(p;s,x_0)\frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x_0}\|^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi t)^{d+1}}}\frac{e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4t}-\frac{(m-x^1)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}ds.$$

对于 $0<s<t$, $e^{-\frac{(m-x^1)^2}{4\,t-s}()}\le e^{-\frac{(m-x^1)^2}{4t}}$，因此

$$\left|\mathcal{I}^{\alpha,k}[p](m,x;t)\right|\le\sqrt{2}C_{d,B}\int_0^t N(p;s,x_0)\frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x_0}\|^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi t)^{d+1}}}\frac{e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4t}-\frac{(m-x^1)^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}ds.$$

根据 ϕ_{d+1} 的定义，我们可以识别出

$$\left|\mathcal{I}^{\alpha,k}[p](m,x;t)\right|\le\sqrt{2}C_{d,B}\int_0^t N(p;s,x_0)\frac{\phi_{d+1}(m-x_0^1,m-x^1,\tilde{x}-\tilde{x_0};2t)}{\sqrt{2\pi(t-s)}}ds$$

并根据 N的定义，忽略一个乘法常数:

$$N(\mathcal{I}^{\alpha,k}[p],x_0,t)\le\sqrt{2}C_{d,B}\int_0^t N(p;s,x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}ds.$$

(ii) 对于 $j=\beta,k=m,1,\cdots,d$，根据 $\mathcal{I}^{\beta}$ 的定义，^{k} 以及 p 的支集包含于 $\{(m,x)\ m>\max(x_0^1,x^1)\}$ 这一事实，可得 $\mathcal{I}^{\beta,\ k}[p](m,x;\ t)=$

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\mathbf{1}_{m>b>x^1,m>x_0^1,b>a^1}B^k(a)\partial_k p_{W^{1*},W}(b-a^1,x-a,t-s)p(m,a,s)dadbds.$$

因此， $\mathcal{I}^{\beta,\ k}[p](.;\ t)$ 的支集包含于 $\{(m,x)\quad m>\max(x^1,x^0)\}$.。此后我们只考虑满足 $m>\max(x^1,x_0^1)$ 的 (m,x)。 $\mathcal{I}^{\beta}$ 的定义， ^{k}， B 的有界性，以及 $\partial_k p_{W^*}$ 所满足的 W 不等式 (38)：

$$|\partial_k p_{W^{1*},W}(b-a^1,x-a,t-s)|\leq\frac{D}{\sqrt{t-s}}\phi_{d+1}(b-a^1,b-x^1,\tilde{x}-\tilde{a},2(t-s))$$

以及 $N(p;\ t,x_0)$ 的定义可得：

$$\left|\mathcal{I}^{\beta,k}[p](m,x;t)\right|\leq\|B\|_\infty D\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\mathbf{1}_{m>b>x^1,b>a^1}N(p;s,x_0)$$
$$\frac{e^{-\frac{(b-a^1)^2}{4(t-s)}-\frac{(b-x^1)^2}{4(t-s)}-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{a}\|^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{(2\pi)^{d+1}(t-s)^{d+2}}}\frac{e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}-\frac{(m-a^1)^2}{4s}-\frac{\|\tilde{x}_0-\tilde{a}\|^2}{4s}}}{\sqrt{(2\pi)^{d+1}s^{d+1}}}dadbds.$$

我们对 $\tilde{a}$ 积分，并使用引理 A.3 (ii)，其中 $u=\tilde{x}$、 $v=\tilde{a}$ 和 $w=\tilde{x}_0$：

$$\left|\mathcal{I}^{\beta,\ k}[p](m,x;\ t)\right|\leq C_{d,B}. \tag{43}$$

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_{m>b>x^1,b>a^1}\frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi t)^{d-1}}}N(p;s,x_0).\frac{e^{-\frac{(b-a^1)^2}{4(t-s)}-\frac{(b-x^1)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{(2\pi)^2(t-s)^3}}\frac{e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}-\frac{(m-a^1)^2}{4s}}}{\sqrt{(2\pi)^2s^2}}da^1dbds.$$

对 $u=b$, $v=a^1$, $w=m$ $k=1$ 使用引理 A.3 (i')

$$\int_{-\infty}^b\frac{e^{-\frac{(b-a^1)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\frac{e^{-\frac{(m-a^1)^2}{4s}}}{\sqrt{2\pi s}}da^1=\sqrt{2}\frac{e^{-\frac{(b-m)^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}}\Phi_G\left(\sqrt{\frac{t}{4s(t-s)}}[b-(\frac{s}{t}b+\frac{t-s}{t}m)]\right)$$
$$=\frac{e^{-\frac{(b-m)^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}}\Phi_G\left(\sqrt{\frac{t-s}{4st}}[b-m]\right)\leq\frac{e^{-\frac{(b-m)^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{t-s}{4st}[b-m]^2}=\frac{e^{-\frac{(b-m)^2}{4s}}}{\sqrt{2\pi t}}$$

最后一个界由引理 A.3 (iii) 得出，因为 $b-m<0$.

将此估计代入式 (43)

$$\left|\mathcal{I}^{\beta,k}[p](m,x;t)\right|\leq$$
$$C_{d,B}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{m>b>x^1}\frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi t)^d}}N(p;s,x_0)\frac{e^{-\frac{(b-x^1)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)^2}}\frac{e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}-\frac{(b-m)^2}{4s}}}{\sqrt{2\pi s}}dbds.$$

我们对 b 在 $\mathbb{R}$ 上积分，并使用引理 A.3 (ii)，其中 $u=x^1$、 $v=b$、$w=m$、$k=1$：

$$\left|\mathcal{I}^{\beta,k}[p](m,x;t)\right|\leq\sqrt{2}C_{d,B}\int_0^t\frac{e^{-\frac{(m-x^1)^2}{4t}-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi t)^{d+1}}}N(p;s,x_0)\frac{e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}ds.$$

当 $0<s<t$, $e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}}\leq e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4t}}$时：

$$\left|\mathcal{I}^{\beta,k}[p](m,x;t)\right|\leq\sqrt{2}C_{d,B}\int_0^t\frac{e^{-\frac{(m-x^1)^2}{4t}-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}-\frac{(m-x_0^1)^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi t)^{d+1}}}N(p;s,x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}ds.$$

在积分号下，我们将因子 $\phi_{d+1}(m-x_0^1, m-x^1, \tilde{x}-\tilde{x_0}; 2t)$ 识别为

$$\left|\mathcal{I}^{\beta,k}[p](m,x;t)\right| \leq \sqrt{2}C_{d,B}\phi_{d+1}(m-x_0^1, m-x^1, \tilde{x}-\tilde{x_0}; 2t)\int_0^t N(p;s,x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}dbds.$$

最后，利用 N (41) 的定义，我们已经证明

$$N(\mathcal{I}^{\beta,k}[p], x_0, t) \leq \sqrt{2}C_{d,B}\int_0^t N(p;s,x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}ds$$

由此完成引理 4.4 的证明。 □

4.2.2. 假设 2.1 (ii) 的证明，情形 $A = I_d$

命题 4.5. 对于任意 μ_0 概率测度，在 $\mathbb{R}^d$ 上，对所有 $(m,\tilde{x},t) \in \mathbb{R}^d \times]0,\ T]$,$u \mapsto p_V(m, m-u, \tilde{x}, t)$ 在 u 趋于 0 时存在极限，$u > 0$.

证明。证明可由以下三个引理推出。
引理 4.5. 回忆一下，$p^0(m,x;\ t) = \int_{\mathbb{R}^d} p_{W^{*1},\ W}(m-x_0^1, x-x_0;\ t)\mu_0(dx_0)$.

$$\lim_{u\to 0, u>0} p^0(b, b-u, \tilde{a}; t) = p^0(b,b,\tilde{a};t), \quad \forall u > 0, \quad (b,\tilde{a}) \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0.$$

证明. 我们有 $p^0(b, b-u, \tilde{x};\ t) = \int_{\mathbb{R}^d} 2\frac{b+u-x_0^1}{\sqrt{(2\pi)^d}}\mathbf{t_{d+1}} e^{-\frac{(b+u-x_0^1)^2}{2t} - \frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{2t}}\mathbf{1}_{b\geq x_0^1}, \quad u\geq 0\mu_0($ $dx_0)$. 因此，由于被积函数被 $\frac{D}{\sqrt{(2\pi)^d t^{d+1}}}$ 控制，且 μ_0 是一个概率测度，应用勒贝格控制收敛定理可得:

$$\lim_{u\to 0, u>0} p^0(b, b-u, \tilde{x}; t) = p^0(b,b,\tilde{x};t), \quad \forall \quad (b,\tilde{x}) \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0.$$

□

引理 4.6. 对于 $k = m, 1, ..., d$，回忆一下

$$p^{k,\alpha}(m,x;t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbf{1}_{b<m} B^k(a)\partial_k p_{W^{*1},W}(m-a^1, x-a, t-s)p_V(b,a;s)dbdads.$$

当 u 趋近于 0^+. 时，映射 $u \mapsto p^{k,\ \alpha}(m, m-u, \tilde{x};\ t)$ 收敛到 $p^{k,\ \alpha}(m,m,\tilde{x};\ t)$

证明。由勒贝格控制收敛定理可得证明。首先，当 u 趋于 0^+.时，映射 $u \mapsto \mathbf{1}_{b<m}\partial_k p_{W^{*1},W}(m-a^1, m-u-a^1, \tilde{x}-\tilde{a};\ t-s)p_V(b,a;\ s)$ 收敛到 $\mathbf{1}_{b<m}\partial_k p_{W^{*1},W}(m-a^1, ma^1, \tilde{x}-\tilde{a};\ t-s)p_V(b,a;\ s)$

其次，它被 $q^{k,\ \alpha}(m,\tilde{x},a,b;\ s,x_0) :=$ 所支配

$$|B^k(a)|\mathbf{1}_{b<m}\sup_{u>0}\left|\partial_k p_{W^{*1},W}(m-a^1, m-u-a^1, \tilde{x}-\tilde{a}; t-s)p_V(b,a;s,x_0)\right|$$

我们旨在证明

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2d+1}} q^{k,\alpha}(m,\tilde{x},a,b;s,x_0)dsdbda\mu_0(dx_0) < +\infty. \tag{44}$$

根据 $\partial_k p_{W^{*1},\ W}$ 以及命题 4.4 的估计 (ii)，我们得到

$$q^{k,\alpha}(m,\tilde{x},a,b;s,x_0) \le \|B\|_\infty \mathbf{1}_{m>b>a^1} \frac{D}{\sqrt{t-s}\sqrt{2\pi(t-s)}^{d+1}} \exp[-\frac{(m-a^1)^2}{4(t-s)} - \frac{\|\tilde{x}-\tilde{a}\|^2}{4(t-s)}]$$
$$\frac{C_T}{\sqrt{2\pi s}^{d+1}} \exp[-\frac{(b-x_0^1)^2}{4s} - \frac{(b-a^1)}{4s} - \frac{\|\tilde{x}_0-\tilde{a}\|^2}{4s}].$$

我们应用引理 A.3 (ii) 对 $k=d+1$、$u=\tilde{x}$、$v=\tilde{a}$ 和 $w=x_0$ 关于 $\tilde{a}$ 进行积分:

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} q^{k,\alpha}(m,\tilde{x},a^1,b;s,x_0^1)d\tilde{a} \le \mathbf{1}_{m>b>a^1} \frac{\|B\|_\infty C_T D 2^{(d-1)/2}}{\sqrt{t-s}\sqrt{2\pi(t-s)}^2\sqrt{2\pi s}^2} \frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}^{d-1}}$$
$$\exp[-\frac{(m-a^1)^2}{4(t-s)} - \frac{(b-x_0^1)^2}{4s} - \frac{(b-a^1)^2}{4s}].$$

我们应用引理 A.3 (i') 对 $u=m$、$v=a^1$ 和 $w=b$ 在 $-\infty$ 与 b 之间关于 a_1 进行积分

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{a^1<b} q^{k,\alpha}(m,\tilde{x},b,a;s;x_0)da \le \mathbf{1}_{b<m} \frac{\|B\|_\infty C_T D 2^{d/2}}{\sqrt{t-s}\sqrt{2\pi(t-s)}\sqrt{2\pi s}} \frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}} - \frac{(b-m)^2}{4t}}{\sqrt{2\pi t}^d}$$
$$\exp[-\frac{(b-x_0^1)^2}{4s}]\Phi_G\left(\sqrt{\frac{t}{2s(t-s)}}(b-[\frac{s}{t}m+\frac{(t-s)}{t}b])\right).$$

注意到 $\sqrt{2s\frac{t}{(t-s)}}(b-[\frac{s}{t}m+\frac{(t-s)}{t}b]) = \sqrt{2t\frac{s}{(t-s)}}(b-m)$，并使用引理 A.3 (iii)

$$\int_{\mathbb{R}^d} q^{k,\alpha}(m,\tilde{x},b,a;s,x_0)da \le \mathbf{1}_{b<m} \frac{\|B\|_\infty C_T D 2^{d/2}}{\sqrt{t-s}\sqrt{2\pi(t-s)}\sqrt{2\pi s}} \frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t} - \frac{(b-m)^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}^d}$$
$$\exp[-\frac{(b-x_0^1)^2}{4s}]\exp[-\frac{s}{t(t-s)}\frac{(b-m)^2}{4}].$$

我们注意到 $\frac{1}{t}+\frac{s}{t(t-s)} = \frac{1}{t-s}$ 因此 $\exp[-\frac{(b-m)^2}{4t}]\exp[-\frac{s}{(t-s)t}\frac{(b-m)^2}{4}] = \exp[-\frac{(b-m)^2}{4}\frac{1}{t-s}]$。我们对 b 进行积分（忽略指示函数），并对 $u=m$、$v=b$ 和 $w=x_0^1$ 使用引理 A.3 (ii) 以及 $\exp[-\frac{(m-x_0^1)^2}{4t}] \le 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} q^{k,\alpha}(m,\tilde{x},b,a;s,x_0)dadb \le \mathbf{1}_{m>x_0^1} \frac{\|B\|_\infty C_T D 2^{(d+1)/2}}{\sqrt{t-s}} \frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{t}^{d+1}}.$$

由于 μ_0 是一个概率测度，因此 $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2d+1}} q^{k,\ \alpha}(m,\tilde{x},b,a;\ \ s,x_0)dadb\mu_0(dx_0)ds<+\infty.$

这就是（44），并完成了引理 4.6 的证明 □

引理 4.7。对于 $k=m$、1、...、d，回顾

$$p^{k,\beta}(m,x;t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\mathbf{1}_{b<m}B^k(a)\partial_k p_{W^{*1},W}(b-a^1,x-a,t-s)p_V(m,a;s)dbdads.$$

当 u 趋于 0^+ 时，映射 $u\mapsto p^{k,\beta}(m,m-u,\tilde{x};\ t)$ 收敛于 0

证明。利用 $\partial_k p_{W^{*1},W}$ 的估计（38）以及命题 4.4 中关于 p_V 的估计（ii），我们可以将定义 $p^{k,\beta}(m,m-u,\tilde{x};\ t)$ 的被积函数控制为：$q^{k,\beta}(m,u,\tilde{x},a,b,x_0,s):=$

$$\mathbf{1}_{m-u<b<m,a^1<b}\frac{e^{-\frac{(b-a^1)^2}{4(t-s)}-\frac{(b-m+u)^2}{4(t-s)}-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{a}\|^2}{4(t-s)}-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}-\frac{(m-a^1)}{4s}-\frac{\|\tilde{x}_0-\tilde{a}\|^2}{4s}}}{\sqrt{t-s}\sqrt{2\pi(t-s)}^{d+1}\sqrt{2\pi s}^{d+1}}$$

相差一个乘法常数。也就是说

$$\left|p^{k,\beta}(m,m-u,\tilde{x};t)\right|\le\|B\|_\infty\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{2d+1}}q^{k,\beta}(m,u,\tilde{x},a,b,x_0,s)dbdads\mu_0(dx_0).\quad(45)$$

我们使用引理 A.3 (ii)，关于 $u=\tilde{x}$、$v=\tilde{a}$ 和 $w=\tilde{x}_0$，对 $\tilde{a}$ 进行积分

$$\int_{R^{d-1}}q^{k,\beta}(m,u,\tilde{x},a,b,x_0,s)d\tilde{a}\le\sqrt{2}^{d-1}\frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}^{d-1}}\frac{e^{-\frac{(b-a^1)^2}{4(t-s)}-\frac{(b-m+u)^2}{4(t-s)}-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}-\frac{(m-a^1)}{4s}}}{\sqrt{t-s}\sqrt{2\pi(t-s)}^2\sqrt{2\pi s}^2}$$

对于 $u=b$、$v=a^1$ 和 $w=m$，我们使用引理 A.3 (i')，在 $-\infty$ 和 b 之间对 a^1 进行积分：

$$\begin{aligned}&\int_{R^d}\mathbf{1}_{b>a^1}q^{k,\beta}(m,u,\tilde{x},a,b,x_0,s)da\le\\&\frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}^d}\frac{e^{-\frac{(b-m)^2}{4t}-\frac{(b-m+u)^2}{4(t-s)}-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}}}{\sqrt{t-s}\sqrt{2\pi(t-s)}\sqrt{2\pi s}}\Phi_G\left(\sqrt{\frac{t}{s(t-s)2}}(b-\frac{s}{t}b-\frac{t-s}{t}m)\right)\\&=\frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}^d}\frac{e^{-\frac{(b-m)^2}{4t}-\frac{(b-m+u)^2}{4(t-s)}-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}}}{\sqrt{t-s}\sqrt{2\pi(t-s)}\sqrt{2\pi s}}\Phi_G\left(\sqrt{\frac{t-s}{2st}}(b-m)\right).\end{aligned}$$

由于 $b-m<0$，利用引理 A.3 (iii)

$$\int_{R^d}\mathbf{1}_{b>a^1}q^{k,\beta}(m,u,\tilde{x},a,b,x_0,s)da\le\frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}^d}\frac{e^{-\frac{(b-m)^2}{4t}-\frac{(b-m+u)^2}{4(t-s)}-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}}}{\sqrt{t-s}\sqrt{2\pi(t-s)}\sqrt{2\pi s}}e^{-\frac{t-s}{4st}(b-m)^2}.$$

注意， $e^{-\frac{(b-m)^2}{4t}}e^{-\frac{t-s}{4st}(b-m)^2)} = e^{-\frac{(b-m)^2)}{4s}}$. 我们对 b 在 $m-u$ 与 m 之间，利用引理 A.3 (i') 作用于三元组 $(m-u,\ b,\ m)$ 以及这一事实 $\frac{s}{t}(m-u) + \frac{t-s}{t}m = {}^{s}_{(m-u)+m(}$ ${}_{t-s)\ t}$

$$\int_{R^{d+1}} \mathbf{1}_{m-u<b<m,b<a^1} q^{k,\beta}(m,u,\tilde{x},a,b,x_0,s)dadb \leq \frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}^{d+1}} \frac{e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}}}{\sqrt{t-s}}.$$
$$\left[\Phi_G\left(\sqrt{\frac{t}{2s(t-s)}}(m-\frac{s(m-u)+m(t-s)}{t})\right) - \Phi_G\left(\sqrt{\frac{t}{2s(t-s)}}(m-u-\frac{s(m-u)+m(t-s)}{t})\right)\right].$$

于是,

$$\int_{R^{d+1}} q^{k,\beta}(m,u,\tilde{x},a,b,x_0,s)dadb \leq$$
$$\frac{e^{-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}^{d+1}} \frac{e^{-\frac{(m-x_0^1)^2}{4s}}}{\sqrt{t-s}} \left[\Phi_G\left(\sqrt{\frac{s}{2t(t-s)}}u\right) - \Phi_G\left(-\sqrt{\frac{t-s}{2t(t-s)}}u\right)\right].$$

注意到 $\lim_{u\to 0} \Phi_G\left(\sqrt{{}_{2t}}\ {}^{s}_{(t-s)}\ u\right) - \Phi_G\left(-\sqrt{{}^{t-s}_{2t\ t-s()}}\ u\right) = 0$ 且

$\left|\Phi_G\left(\sqrt{{}_{2t}}\ {}^{s}_{(t-s)}\ u\right) - \Phi_G\left(-\sqrt{}_{2t}\ {}^{t-s}_{t-s()}\ u\right)\right| \leq 1.$ 由于 μ 是一个概率测度，利用勒贝格控制收敛定理

$$\lim_{u\to 0^+} \int_0^t \int_{R^{2d+1}} \mathbf{1}_{m-u<b<m,b<a^1} q^{k,\beta}(m,u,\tilde{x},a,b,x_0,s)dadb\mu_0(dx_0)ds = 0.$$

最后，由估计式 (45) 得到 $\lim_{u\to 0^+} p^{k,\beta}(m, m-u, \tilde{x};\ t) = 0.$ □

5. 情形 $d = 1$

命题 5.1. 设由 $dX_t = B(X_t)dt + A(X_t)dW_t$ 给出的实值扩散过程 X，其中A, B 满足 (4) 和 (5)。则其概率密度 p_V 满足假设 2.1，因此对于任意初始分布 μ_0 和 $F \in C_b^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}\left[F(M_t, X_t)\right] = \mathbb{E}\left[F(X_0, X_0)\right] + \int_0^t \mathbb{E}\left[\mathcal{L}\left(F\right)(M_s, X_s)\right] ds$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}\left[\partial_m F(X_s, X_s)\|A(X_s)\|^2 \frac{p_V(X_s, X_s; s)}{p_X(X_s; s)}\right] ds. \tag{46}$$

证明。我们进行 Lamperti 变换 [18]。不失一般性，可令 A为正。若假设 (5): “对于任意$x \in \mathbb{R}$，存在$\exists c > 0$，使得 $A^2(x) \geq c$”，则可表示为:

$$\exists c > 0 \text{ such that for any } x \in \mathbb{R}, A(x) \geq c. \tag{47}$$

令 φ 满足 $\varphi' = \frac{1}{A}$ 且 $\varphi(0) = 0$，这样 φ' 一致有界，且 $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$，函数 A也如此。此外，由于 φ' 严格为正， φ 严格递增，因而可逆；我们将其反函数记为 φ^{-1} 。在初始条件$\varphi(0) = 0$下，利用伊藤公式， $Y = \varphi(X)$满足

$$dY_t = \left[\frac{B}{A} \circ \varphi^{-1}(Y_t) - \frac{1}{2}A' \circ \varphi^{-1}(Y_t)\right] dt + dW_t,\ Y_0 = \varphi(X_0). \tag{48}$$

令 $A_\varphi = 1$和 $B_\varphi := \frac{B}{A} \circ \varphi^{-1} - \frac{1}{2}A' \circ \varphi^{-1}$，根据 $B \in C_b^1$, $A \in C_b^2$.，它属于 C_b^1 $(\mathbb{R})$。显然， $\varphi' > 0$ 意味着 φ 是递增的， $Y_t^* = \varphi(X_t^*) = \varphi(M_t)$。

[9] 中的定理 1.1 很容易推广到 X 具有初始分布μ_0的情形，因此二元组 (Y_t^*, Y_t) 的分布关于勒贝格测度有密度。此外， [9] 中的引理 2.2 给出了 $p_V(b, a;\ t) = {}^{p_{Y^*,Y}(}_{\varphi(b)\ \varphi(a);t)\ A(b)A(a)} \cdot$ 现在将定理 2.4 应用于二元组 $(B_\varphi, 1)$，密度 $p_{Y^*,Y}$满足假设 2.1。由于函数 A 和 φ 是连续的

$$\lim_{u \to 0^+} p_V(b, b-u; t) = \frac{p_{Y^*,Y}(\varphi(b), \varphi(b); t)}{A^2(b)}$$

这意味着 p_V 满足假设 2.1（ii）。

现在使用 (47)

$$\sup_{u>0} p_V(b, b-u; t) \le \frac{1}{c^2} \sup_{u>0} p_{Y^*,Y}(\varphi(b), \varphi(b-u); t)$$

并且由于 φ 是递增的，如果 $u > 0$, $\varphi(b-u) < \varphi(b)$，并记 $v = \varphi(b) - \varphi(b-u)$，则得到 $v > 0$，且

$$\sup_{u>0} p_V(b, b-u; t) \le \frac{1}{c^2} \sup_{v>0} p_{Y^*,Y}(\varphi(b), \varphi(b)-v; t).$$

经过变量替换 $m = \varphi(b)$，于是 $db = A(b)dm$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \sup_{u>0} p_{Y^*,Y}(\varphi(b), \varphi(b)-u; t)dbdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} A(\varphi^{-1}(m)) \sup_{u>0} p_{Y^*,Y}(m, m-u; t)dmdt.$$

由于 A 有界且 $p_{Y^*,\ Y}$ 满足假设 2.1（i），
$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} A(\varphi^{-1}(m))\ \sup_{u>0} p_{Y^*,\ Y}(m, m-u;\ t)dmdt < \infty$ 并且 p_V满足假设 2.1（i）和（ii）。

□

6. 结论

本文建立了一个偏微分方程，使得二元组 $[M_t, X_t]$ 运行最大值扩散过程的密度是其弱解；这一结果基于一个相当自然的假设，即 p_V 在 Δ. 边界附近具有正则性。满足该假设的情形包括：扩散过程 A 的矩阵系数为单位矩阵，或维数 $d = 1$。该偏微分方程是退化的，因此无法在此应用关于唯一性的经典结果。非恒定矩阵 A 的情形仍是一个开放问题。这种推广在实际应用中可能很有用，例如在包含随机波动率的模型中管理障碍期权。

附录 A. 工具

A.1. Malliavin 微积分工具

本小节内容摘自 [21] 的第 1.2 节。令 $\mathbb{H} = L^2([0,T], \mathbb{R}^d)$ 配备通常的内积 $\langle ., . \rangle_{\mathbb{H}}$ 以及相应的范数 $\|.\|_{\mathbb{H}}$. 。对于所有 $h \in \mathbb{H}$, $W(h) := \int_0^T h(t) dW_t$ 是一个中心高斯变量，其方差等于 $\|h\|^2_{\mathbb{H}}$. 。如果 $(h_1, h_2) \in \mathbb{H}^2$，且 $\langle h_1, h_2 \rangle_{\mathbb{H}} = 0$，那么随机变量 $W(h_i)$ $i = 1$，2，相互独立。

令 $\mathcal{S}$ 表示由以下方式定义的光滑随机变量 F 类:

$$F = f(W(h_1), ..., W(h_n)), \ n \in \mathbb{N}, \quad h_1, ..., h_n \in \mathbb{H}, \ f \in C_b(\mathbb{R}^n). \tag{49}$$

定义 1. 在 (49) 中定义的光滑变量 F 的导数是一个取值于 $\mathbb{H}$ 的随机变量，定义为 $DF := \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1) ..., W(h_n)) h_i$.

我们将算子 D 在 $L^2(\Omega)$ 中的定义域记为 $\mathbb{D}^{1,\ 2}$，这意味着 $\mathbb{D}^{1,\ 2}$ 是光滑随机变量类 $\mathcal{S}$ 关于以下范数的闭包

$$\|F\|_{1,2} = \left\{ \mathbb{E}[|F|^2] + \mathbb{E}[\|DF\|^2_{\mathbb{H}}] \right\}^{1/2}.$$

定义2。 $\mathbb{L}^{1,2}$ 是满足以下条件的过程集合（$u_s, \ s \in [0,T]$）：$u \in L^2$ $(\Omega \times [0,T], \ \mathbb{R}^d)$ 且对所有 $s \in [0,T], \ u_s$ 属于 $\mathbb{D}^{1,2}$ 且 $\|u\|^2_{\mathbb{L}^{1,\ 2}} = \|u\|^2_{L^2}$ $_{([0,T] \times \Omega)} + \|Du\|^2_{L^2([0,T]^2 \times \Omega)} < \infty$.

定义3。设 $u \in \mathbb{L}^{1,2}$，则散度 $\delta(u)$ 是 $L^2(\Omega)$ 中唯一满足 $\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}[\langle DF, u\rangle_{\mathbb{H}}]$，$\forall F \in \mathcal{S}$ 的光滑随机变量。

我们应用定义1.3.1，在 [21] 中取 $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ 和 $G \in \mathbb{D}^{1,2}$：

$$\mathbb{E}[G\delta(u)] = \mathbb{E}[\langle DG, u\rangle_{\mathbb{H}}]. \tag{50}$$

设 $x_0 \in \mathbb{R}^d$. 。我们引入指数鞅

$$Z_t^{x_0} := \exp\left[\sum_{k=1}^{d}\left(\int_0^t B^k(x_0+W_s)dW_s^k - \frac{1}{2}\int_0^t (B^k(x_0+W_s))^2 ds\right)\right]. \tag{51}$$

若无歧义，我们将省略指数 x_0.

引理 A.1. 设 $B \in C_b^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$，则对所有 $x_0 \in \mathbb{R}^d$，过程 $(B(x_0 + W_s)$ $Z_s^{x_0}$，$s \in [0,T])$ 属于 $\mathbb{L}^{1,2}$。

证明。固定 x_0。在本证明中，我们省略指数 x_0. 。注意 $Z_t^2 =$

$$\exp\left(2\sum_{k=1}^{d}\int_0^t B^k(x_0+W_s)dW_s^k - \frac{4}{2}\int_0^t \|B(x_0+W_s)\|^2 ds + \frac{4-2}{2}\int_0^t \|B(x_0+W_s)\|^2 ds\right)$$
$$\le e^{T\|B\|_\infty^2}\exp\left(2\sum_{k=1}^{d}\int_0^t B^k(x_0+W_s)dW_s^k - \frac{4}{2}\int_0^t \|B(x_0+W_s)\|^2 ds\right).$$

于是，对于所有 $t \in [0,T]$，Z_t 都属于 $L^2(\Omega)$，因为

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}(Z_t^2) \le e^{T\|B\|_\infty^2}. \tag{52}$$

注意，$Z_t = 1 + \sum_{k=1}^{d}\int_0^t B^k(x_0 + W_s)Z_s dW_s^k$，$t \in [0,T]$. 。利用引理2.2.1、 [21]，的定理2.2.1以及 $\mathbb{L}^1$ 的定义，将其应用于漂移系数为零的 $\mathbb{R}^{d+1}$ 值过程$Y = (W, Z)$，可得矩阵 $\Sigma, (d+1, d)$，其定义如下：

$[\sigma^{j,k}(y)\ 1 \le j,k \le d] = I_d$, $\sigma^{d+1,k}(y) = B^k(x_0^1 + y^1, ..., x_0^d + y^d)^k z$，$k = 1, ..., d$，由此可得 Z 属于 $\mathbb{L}^{1,2}$。由于 B 连续可微且具有有界导数，过程 $(B(W_s + x_0)Z_s$，$s \in [0,T])$ 属于 $\mathbb{L}^{1,2}$。

□

下面的注将经常用到：参见 [9] 第135页第-15行，或 [21]第36页的习题1.2.11

$$D_s^1 W_t^{1*} = \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) \quad \text{where} \quad \tau := \inf\{s, W_s^{1*} = W_t^{1*}\}. \tag{53}$$

A.2. 布朗运动情形下的估计

我们来回顾二元组 $(W^{*,\ t}{}^{1}, W_t^1)$ 的分布密度，其中 W^1 是一维布朗运动， $W^{*,}{}_1$ 是其运行最大值（例如，参见[17] 第3.2节或 [15]）：

$$p_{W^{1*},W^1}(b,a;t) = 2\frac{2b-a}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp -\frac{(2b-a)^2}{2t}\mathbf{1}_{b>\sup(a,0)}.$$

因此，利用过程 W 各分量的独立性，(W_t^{1*}, W_t) 的分布相对于 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上的勒贝格测度具有密度，记为$p_{W^{1*},W}(.;\ t)$：

$$p_{W^{1*},W}(b,a;t) = 2\frac{(2b-a^1)}{\sqrt{(2\pi)^d t^{d+2}}}e^{-\frac{(2b-a^1)^2}{2t}-\frac{\sum_{k=2}^d |a^k|^2}{2t}}\mathbf{1}_{b\geq 0, b\geq a^1},\ b\in\mathbb{R},\ a=(a^1,...,a^d)\in\mathbb{R}^d. \tag{54}$$

引理 A.2. (i) 对所有 $t>0$, $p_{W^{*1},W}(.;\ t)$ 都是 $\bar{\Delta}$ 上某个 $C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ 函数的限制，并且存在一个普适常数 D，使得对于 $x=b, a^1, a^2, ...a^d$,

$$\left|\partial_x p_{W^{*1},W}(b,a;t)\right| \leq \frac{D}{\sqrt{(4\pi)^d t^{d+2}}}e^{-\frac{b^2+(b-a^1)^2}{4t}-\sum_{k=2}^d\frac{(a^k)^2}{4t}}\mathbf{1}_{b>\max(a^1,0)}. \tag{55}$$

由此可得 $\sum_{x=b,a^1,...,a^d}\left|\partial_x p_{W^{*1},W}(b,a;\ t-s)\right| \in L^1([0,t]\times\mathbb{R}^{d+1}, dbdads)$.

$$(ii)\quad p_0(m,x;t,x_0) \leq \frac{e^{-\frac{(m-x^1)^2}{4t}-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}-\frac{(m-x_0^1)^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi)^{d+1}t^{d+1}}}\mathbf{1}_{m>\max(x^1,x_0^1)}$$
$$= 2^{(d+1)/2}\phi_{d+1}(m-x^1, m-x_0^1, \tilde{x}-\tilde{x}_0; 2t)\mathbf{1}_{m>\max(x^1,x_0^1)},$$

证明. (i) 设 p_W 为 d 维布朗运动的密度，而 W_t $\forall t>0$ 的分布密度为： $p_W(.;\ t)\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$p_W(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2^d\pi^d t^d}}e^{-\sum_{k=1}^d\frac{(x^k)^2}{2t}},\quad t>0,\quad x=(x^1,...,x^d)\in\mathbb{R}^d.$$

其关于 x^1 的导数为

$$\partial_{x^1}p_W(x;t) = -\frac{x^1}{\sqrt{2^d\pi^d t^{d+2}}}e^{-\sum_{k=1}^d\frac{(x^k)^2}{2t}},\quad t>0,\quad x=(x^1,...,x^d)\in\mathbb{R}^d.$$

其二阶导数为

$$\partial^2_{x^1x^k}p_W(x;t) = \frac{x^1x^k}{\sqrt{2^d\pi^d t^{d+4}}}e^{-\sum_{k=1}^d\frac{(x^k)^2}{2t}},\quad t>0,\quad x=(x^1,...,x^d)\in\mathbb{R}^d,\quad k=2,...,d.$$
$$\partial^2_{x^1x^1}p_W(x;t) = \frac{(x^1)^2-t}{\sqrt{2^d\pi^d t^{d+4}}}e^{-\sum_{k=1}^d\frac{(x^k)^2}{2t}},\quad t>0,\quad x=(x^1,...,x^d)\in\mathbb{R}^d.$$

利用 [14] 第 106 页的 (2.1)，我们得到与 [14] 第 107 页的 (2.2) 类似的结果：存在一个常数 C，使得

$$|\partial^2_{x^1x^1}p_W(x;t)|+|\partial^2_{x^1x_k}p_W(x;t)|\le\frac{C}{t}p_W(x;2t),\quad k=1,...,d,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}^d.\quad(56)$$

回顾（54）

$$p_{W^{*1},W}(b,a;t)=2\frac{2b-a^1}{\sqrt{(2\pi)^dt^{d+2}}}e^{-\frac{(2b-a^1)^2}{2t}-\sum_{k=2}^d\frac{(a^k)^2}{2t}}\mathbf{1}_{b\ge a^1_+},\quad\forall(b,a)\in\mathbb{R}^{d+1},\quad t>0.$$

我们观察到

$$p_{W^{*1},W}(b,a;t)=-2\partial_{x^1}p_W(2b-a^1,a^2,...,a^d;t)\mathbf{1}_{b\ge a^1_+}.\qquad(57)$$

那么，$p_{W^{*1},W}(.,.;\,t)$ 是 $\overline{\Delta}$ 上某个 C^∞ 函数的限制。

此外，利用链式法则，x 为（b，a^1，$\cdots$，a^d）：

$$|\partial_xp_{W^{*1},W}(b,a;t)|\le\frac{4C}{t}p_W(2b-a^1,a^2,...,a^d;2t)\mathbf{1}_{b\ge a^1_+}.\qquad(58)$$

在集合 $\{(b,a)\quad b>\max(0,a^1)\}$ 上，我们有

$$(2b-a^1)^2=(b+b-a^1)^2\ge(b)^2+(b-a^1)^2.\qquad(59)$$

将估计式 (59) 代入 (58)，得到 (55)，其中 $D=2^3C$.

(ii) 回顾定义

$$p_0(m,x;t,x_0)=p_{W^{1*},W}(m-x^1_0,x-x_0;t)=2\frac{m-x^1+m-x^1_0}{\sqrt{(2\pi)^dt^{d+2}}}e^{-\frac{(m-x^1+m-x^1_0)^2}{2t}-\frac{|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{2t}}\mathbf{1}_{m\ge x^1\vee x^1_0}$$

我们推导出使用 $xe^{-x^2}\le e^{-x^2/2}$ 和 $(m-x^1+m-x^1_0)^2$ 的标准界 $\ge$ $(m-x^1)^2+(m-x^1_0)^2$:

$$\begin{aligned}p_0(m,x;t,x_0)&\le\frac{e^{-\frac{(m-x^1)^2}{4t}-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{x}_0\|^2}{4t}-\frac{(m-x^1_0)^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi)^{d+1}t^{d+1}}}\mathbf{1}_{m>x^1\vee x^1_0}\\&=2^{(d+1)/2}\phi_{d+1}(m-x^1,m-x^1_0,\tilde{x}-\tilde{x}_0;2t)\mathbf{1}_{m>x^1\vee x^1_0},\end{aligned}$$

□

引理 A.3. 对所有 $0 < s < t$、 $k \geq 1$ 以及所有 u、 v、 $w \in \mathbb{R}^k$

$$(i) \quad \frac{\|u-v\|^2}{t-s} + \frac{\|v-w\|^2}{s} = \frac{t}{s(t-s)} \left\| v - \left(\frac{s}{t}u + \frac{t-s}{t}w \right) \right\|^2 + \frac{\|u-w\|^2}{t};$$

$$(i') \quad k=1, \quad \int_{-\infty}^{b} \frac{e^{-\frac{(u-v)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \frac{e^{-\frac{(w-v)^2}{4s}}}{\sqrt{2\pi s}} dv = \sqrt{2} \frac{e^{-\frac{(u-w)^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t)}} \Phi_G \left(\sqrt{\frac{t}{s(t-s)}} [b - (\frac{s}{t}u + \frac{t-s}{t}w)] \right)$$

$$(ii) \quad \int_{\mathbb{R}^k} \frac{e^{-\frac{\|u-v\|^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{(2\pi(t-s))^k}} \frac{e^{-\frac{\|w-v\|^2}{4s}}}{\sqrt{(2\pi s)^k}} dv = 2^{k/2} \frac{e^{-\frac{\|u-w\|^2}{4t}}}{\sqrt{(2\pi t)^k}}$$

$$(iii) \quad For \;\; u > 0, \; 1 - \Phi_G(u) := \int_u^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz = \Phi_G(-u) \leq \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2}.$$

证明。通过展开等式两边，然后对平方范数和标量积的系数进行比较，即可证明结论 (i)： $\|u\|^2, \|v\|^2, \|w\|^2, u.v, u.w, v.w$.由此可得 (i')，它等于以下函数的积分

$$\frac{e^{-\frac{t}{4s(t-s)}\left(v-(\frac{s}{t}u+\frac{t-s}{t}w)\right)^2 - \frac{(u-w)^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}\sqrt{2\pi s}}$$

关于 v ，积分上限为 b。

(ii) 可由结论 (i) 推出，然后对关于 dv 的高斯密度在 $\mathbb{R}^k$ 上积分即可。

(iii) 函数 $u \mapsto \Phi_G(u) - \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2}$在 0 处为零，当 u趋于 $-\infty$时其极限为零，且其导数为 $u \mapsto -\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + u\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2}$. 它的导数在 $\sqrt{2/\pi}$处为零，在 $u \leq \sqrt{2/\pi}$ 时为负，此后为正。因此， $u \mapsto \Phi_G(u) - \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2}$在$u \leq 0$.时为负

□

A.3. 备注2.3的证明：偏微分方程的边界条件

这里假设 p_V 足够光滑。令 $\mu_0(dx) = f_0(x)dx$. 根据定理 2.2，(6) 表示：对所有 $F \in C_b^2(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\bar{\Delta}} F(m,x) p_V(m,x;t) dmdx = \int_{\mathbb{R}^d} F(m,m,\tilde{x}) f_0(m,\tilde{x}) dmd\tilde{x} + \tag{60}$$
$$\int_0^t \int_{\bar{\Delta}} \mathcal{L}F(m,x) p_V(m,x;s) dmdxds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \|A^1(m,\tilde{x})\|^2 \partial_m F(m,m,\tilde{x}) p_V(m,m,\tilde{x};s) dmd\tilde{x}ds$$

回忆 $\mathcal{L} = B^i \partial_{x_i} + \frac{1}{2}\Sigma^{ij}\partial^2_{x_i,\ x_j}$ 其中 $\Sigma = AA^t$。

(i) 对 in 中一个合适的 dx_k 进行分部积分
$\int_0^t \int_{\bar{\Delta}} \mathcal{L}F(m,x) p_V(m,x;\ s) dmdxds$ 并注意到 $p_V(.,.;\ s)$ 的支集为 $\bar{\Delta}$，则

边界项仅涉及分量 x^1:

$$\int_0^t \int_{\bar{\Delta}} \mathcal{L}F(m,x)p_V(m,x;s)dmdxds = -\int_0^t \int_{\bar{\Delta}} F(m,x)\partial_{x^k}(B^k p_V)(m,x;s)dmdxds$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \int_{\bar{\Delta}} \partial_{x^l}F(m,x)\partial_{x^k}[\Sigma^{k,l}(m,x)p_V(m,x;s)]dmdxds$$
$$+\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(F(m,m,\tilde{x})B^1(m,\tilde{x}) + \frac{1}{2}\partial_{x^k}F(m,m,\tilde{x})\Sigma^{1,k}(m,\tilde{x})\right) p_V(m,m,\tilde{x};s)dmd\tilde{x}ds.$$

我们再次对右侧上方第二项进行分部积分:

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \int_{\bar{\Delta}} \partial_{x^l}F(m,x)\partial_{x^k}\Sigma^{k,l}(m,x)p_V(m,x;s)]dmdxds =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{\bar{\Delta}} F(m,x)\partial^2_{x^k,x^l}[\Sigma^{k,l}p_V](m,x;s)dmdxds - \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} F(m,m,\tilde{x})\partial_{x^k}\left[\Sigma^{1,k}p_V\right](m,m,\tilde{x};s)dmd\tilde{x}ds.$$

综合这些等式可得

$$\int_0^t \int_{\bar{\Delta}} \mathcal{L}F(m,x)p_V(m,x;s)dmdxds = \int_0^t \int_{\bar{\Delta}} F(m,x)\mathcal{L}^* p_V(m,x;s)dmdxds$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} F(m,m,\tilde{x})\partial_{x^k}\left[\Sigma^{1,k}p_V\right](m,m,\tilde{x};s)dmd\tilde{x}ds \tag{61}$$
$$+\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(F(m,m,\tilde{x})B^1(m,\tilde{x})p_V(m,m,\tilde{x};s) + \frac{1}{2}[\partial_{x^k}F\Sigma^{1,k}p_V](m,m,\tilde{x};s)\right) dmd\tilde{x}ds.$$

(ii) 利用在 Δ 中具有紧支撑的 $F \in C_b^2(\mathbb{R}^{d+1},\mathbb{R})$（因此 $F(m,m,\tilde{x}) = 0$），我们可推出 Δ 中的等式:

$$\partial_t p_V(m,x;s) = \mathcal{L}^* p_V(m,x;s), \quad \forall s>0, \quad (m,x)\in\Delta. \tag{62}$$

我们将 (60)、(61) 和 (62) 应用于在 $\bar{\Delta}$ 中具有紧支撑的 $F \in C_b^2(\mathbb{R}^{d+1},\mathbb{R})$:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} F(m,m,\tilde{x})f_0(m,\tilde{x})dmd\tilde{x} - \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} F(m,m,\tilde{x})\partial_{x^k}\left[\Sigma^{1,k}p_V\right](m,m,\tilde{x};s)dmd\tilde{x}ds$$
$$+\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(F(m,m,\tilde{x})B^1(m,\tilde{x})p_V(m,m,\tilde{x};s) + \frac{1}{2}[\partial_{x^k}F\Sigma^{1,k}p_V](m,m,\tilde{x};s)\right) dmd\tilde{x}ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \|A^1(m,\tilde{x})\|^2\partial_m F(m,m,\tilde{x})p(m,m,\tilde{x};s)dmd\tilde{x}ds. \tag{63}$$

现在，我们对最后两项进行分部积分:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left([\partial_{x^k}F.\Sigma^{1,k}.p_V](m,m,\tilde{x};s) + \|A^1(m,\tilde{x})\|^2\partial_m F(m,m,\tilde{x})p_V(m,m,\tilde{x};s)\right) dmd\tilde{x}ds =$$
$$-\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left([F.\partial_{x^k}(\Sigma^{1,k}p_V)](m,m,\tilde{x};s) + \partial_m(\|A^1\|^2 p_V)(m,m,\tilde{x};s)\right) dmd\tilde{x}ds \tag{64}$$

将 (64) 代入 (63)，得到边界条件，即一个偏微分方程，p_V 是其弱解:

$$B^1(m,\tilde{x})p_V(m,m,\tilde{x};s) = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k\geq 1}\partial_{x^k}(\Sigma^{1,k}p_V)(m,m,\tilde{x};s) +$$
$$\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k\geq 1}\partial_{x^k}(\Sigma^{1,k}p_V)(m,m,\tilde{x};s) + \tfrac{1}{2}\partial_m(\|A^1\|^2 p_V)(m,m,\tilde{x};s)$$

简化为

$$B^1(m,\tilde{x})p_V(m,m,\tilde{x};s) = \sum_{k\geq 1}\partial_{x^k}(\Sigma^{1,k}p_V)(m,m,\tilde{x};s) + \frac{1}{2}\partial_m(\|A^1\|^2 p_V)(m,m,\tilde{x};s)$$

满足初始条件 $p_V(m,m,\tilde{x};0) = f_0(m,\tilde{x})$。 □

致谢

作者谨向 Monique JEANBLANC 致以诚挚谢意，感谢她在撰写本文时给予的宝贵帮助。作者还要感谢匿名审稿人提出的建设性意见，这些意见提升了本文的质量。

参考文献

[1] L. Alili, P. Patie, J.L. Pedersen (2005), 奥恩斯坦-乌伦贝克过程首次到达时密度的表示, 随机模型 21-4, 967-980.

[2] J. M. Azaïs, M. Wschebor(2001), 关于单参数高斯过程最大值分布的正则性, P.T.R.F. 119, no. 1, 70-98.

[3] A. Bain ans D. Crisan (2007), 《随机滤波基础》，施普林格出版社。

[4] C. Blanchet-Scalliet, D. Dorobantu, L. Gay (2020), 奥恩斯坦-乌伦贝克过程及其上确界的联合分布，《应用概率杂志》57，第2期，541-558。

[5] H. Brezis(2011), 《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》，施普林格出版社。

[6] H. Brown, D. Hobson, L.C.G. Rogers (2001), 障碍期权的稳健对冲，《数学金融》11，285-314

[7] L. Coutin and D.Dorobantu(2011), 具有复合泊松成分的若干列维过程的首次通过时间分布：密度的存在性，《伯努利》17-4，1127-1135。

[8] L. Coutin, W. Ngom, M. Pontier (2018), L ´evy 过程及其运行上确界的联合分布，《应用概率学杂志》55（2），488-512。

[9] L. Coutin, M. Pontier (2019) , *Exist*ence an *d regularity of law density of* 扩散过程及第一分量的运行最大值，《统计与概率快报》153，130-138
[10] A.M.G. Cox, J. Obloj (2011)，双触碰障碍期权的稳健定价与对冲，《SIAM 金融学期刊》2，141-182。[11] E. Csàki, A. Földes, P. Salminen(1987)，关于线性扩散过程最大值及其位置的联合分布，《IHP 概率与统计年刊》23，第2期，179-194。[12] R.A. Doney, A.E. Kyprianou (2006)，L ´evy 过程的越界与未达，《应用概率年刊》16，第1期，91-106。[13] M. Duembgen, L. C. G. Rogers, (2015) 极值、终值与停止随机游走签名的联合分布，载于《纪念 Marc Yor》，《概率研讨会》XLVII，数学讲义 2137，321-338。[14] Garroni, M. G. and Menaldi, J.-L. (1992)，二阶抛物型积分微分问题的格林函数，Pitman 数学研究札记丛书，Inc.，纽约，275。[15] H. He, W.P. Keirstead, J. Rebholz(1998)，双重回望期权，《数学金融》8，201-228。
[16] P. Henry-Labordère, J. Obloj, P. Spoida, N. Touzi(2016)，具有给定 n-边缘分布的鞅的最大最大值，《应用概率年刊》26(1)，1-44。[17] M. Jeanblanc, M. Yor, M. Chesney (2009)，《金融市场数学方法》，施普林格。
[18] Lamperti J. (1964)，某些扩散过程的一种简单构造，《京都大学数学期刊》4，161-170[19] A. Lagnoux, S. Mercier, P. Vallois(2015)，反射布朗运动在有限区间 $[0, t]$ 上的最大值由其 t之前的最后一个零点取得的概率，《电子概率通讯》20，第62期。

[20] W. Ngom (2016)，论文：对完全观测和不完全观测下 L ´evy 过程失效时刻研究的贡献，IMT。[21] D. Nualart (2006)，《Malliavin 微积分及相关主题》第二版，Springer-Verlag 纽约。[22] L. C. G. Rogers(1993)，鞅的最大值与终值的联合分布，《P.T.R.F.》95(4)，451-466，1993年12月。[23] B. Roynette, P. Vallois, A. Volpi(2008)，某些 L ´evy 过程的穿越时间、超越量与欠越量的渐近行为，ESAIM PS 12，58–93。