后悔理论、阿莱悖论与萨维奇煎蛋卷

V.G. Bardakhchyan[1, 2)] 和 A.E. Allahverdyan[1, 2)]

[1)]阿利汗扬国家实验室（埃里温物理研究所），

阿利汗扬兄弟街2号，亚美尼亚埃里温0036,

[2)]埃里温国立大学，A. Manoogian街1号，亚美尼亚埃里温0025（日期：2023年1月9日）

arXiv:2301.02447v1 [econ.TH] 6 Jan 2023

摘要

我们研究了一种足够一般的后悔准则，用于在两个概率彩票之间进行选择。对于独立彩票，该准则与随机占优相一致，并且通过唯一选择后悔函数，可以使其具有传递性。结合一项额外且直观上有意义的超可加性性质，后悔准则能够解决阿莱悖论，包括悖论消失的情形；所得选择也与期望效用一致。这一超可加性性质还用于确立相关彩票中的后悔与随机占优之间的一致性。此外，我们展示了如何将后悔准则应用于萨维奇煎蛋卷问题，这是一个经典决策问题，其中彩票结果尚未完全确定。在这种情况下，期望效用无法使用，因为它忽略了彩票的重要方面。

关键词：后悔理论、阿莱悖论、随机占优、传递性后悔。

JEL分类：D81。

一、引言

期望效用理论（EUT）的历史始于伯努利解决圣彼得堡悖论的工作 [1]。目前已知有多种期望效用理论的公理化体系 [2, 3]。如今，期望效用理论的应用范围广泛，涵盖经济学 [4], 心理学 [5],进化博弈论 [6],以及通用人工智能 [7]。

期望效用理论展示了如何在两个彩票之间作出选择 [2–4]:

$$(x,p)=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \qquad (y,q)=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} p_k = \sum\nolimits_{k=1}^{n} q_k = 1, \tag{2}$$

其中，$(p_1, ..., p_n)$ 和 $(q_1, ..., q_n)$ 分别是每种彩票中货币结果 $(x_1, ..., x_n)$ 和 $(y_1, ..., y_n)$ 的概率。期望效用理论为每种彩票提出了如下泛函 [2–4]:

$$V(x,p)=\sum\nolimits_{i=1}^{n} u(x_i)p_i, \tag{3}$$

其中，$u(x_i)$ 是货币数值 x_i 的效用。期望效用理论建议在（1）中选择第一个彩票，当 $V(x,p) > V(y,q)$ 时。

实验揭示了期望效用理论及其公理基础存在的问题。特别是，对于（3）中的任何效用函数的选择$u(.)$，若干经典实验都无法用期望效用解释 [8, 9]。人们通常会作出与期望效用理论相矛盾的选择，违反独立性公理；该公理是期望效用理论冯·诺依曼-摩根斯坦表述的四条公理之一 [2]。其中最著名的例子是阿莱悖论 [8], ，在该悖论中，每位受试者都要在两个彩票之间作出选择。前景理论 [10, 11], 和秩依赖效用理论[12, 13] 放弃了独立性公理，并提出了与（3）中的 $V(x,p)$ 类似的泛函；不同之处在于，它们使用权重 π_i 而非概率 p_i ，而这些权重通常同时取决于 $(p_1, ..., p_n)$ 和 $(x_1, ..., x_n)$。参考文献 [4, 5, 9] 讨论了这些以及其他替代期望效用理论的方案。

此外，还有其他一些情形不适用期望效用理论。彩票选定后，结果仍存在不确定性时，期望效用理论无法直接应用。名为“萨维奇煎蛋卷” [3]的决策问题就是这类情形的一个典型例子。据我们所知，尚无人从期望效用理论不适用这一角度研究过这个问题。

正如下文所示，阿莱悖论和萨维奇煎蛋卷问题都可以用后悔理论（RT）来解决，而后悔理论是期望效用理论的一种替代理论。后悔理论与期望效用理论的主要区别

在于，后悔理论不针对单种彩票使用价值泛函，而是以反事实方式比较两种彩票。后悔理论在情感上具有直观吸引力，也与决策的认知方面有关 [14]。萨维奇最初以极小极大形式提出了后悔理论 [3] [参见 [15] 了解该方法的最新进展], ，之后该理论在 [16, 17]中发展为如今的形式；综述请参见 [9, 18] 。文献 [16] 将后悔理论扩展到独立彩票，并指出了它在解释阿莱悖论方面的潜力。文献 [16] 还分析了传递性、共同比率效应和偏好逆转。文献 [19]为涉及两种彩票的函数形式提供了公理化基础。文献 [20]尝试对后悔进行公理化表述。

本研究有三个目的。第一，我们希望展示如何通过一种具有传递性和超可加性的后悔理论（RT）解决阿莱悖论。人们曾在阿莱悖论的背景下提及后悔[例如见 [5, 14, 16]], ，但迄今尚未有人为这一悖论提供系统而完整的解决方案。我们的解决方案相当完整，因为它还预测了悖论不成立的条件。对于一般的后悔理论而言，传递性和超可加性都有明确的含义。我们确实阐明了它们的适用范围。传递性尤其重要，因为后悔理论通常不会导出传递性的预测[21]。

第二，我们证明，具有传递性和超可加性的后悔理论符合随机占优准则 [2]。随机占优是一种有用的工具，但并不适用于比较任意一对彩票。以往在这一方向上的研究大多得出了否定结论，表明基于后悔的分析方法违反了一阶随机占优 [22,23] [1]。第三，我们以萨维奇煎蛋问题为例，证明后悔理论可以建议在结果尚未确定的彩票之间进行选择，而这项任务无法通过期望效用理论（EUT）得到一致的处理。

本文结构如下。第二节讨论独立彩票的后悔泛函及其与期望效用相关的一些性质。在决策理论中，泛函形式通常由公理化基础推导而来。与此不同，本文先引入所考察的泛函，再推导其性质。第三节讨论阿莱悖论及其与其他概念的关系。随机占优

[1] 文献 [22] 分析了特定情形下后悔理论与随机占优之间的关系。这项分析基于一阶随机占优的一种更一般的表述，该表述比较累积分布函数。本文聚焦于随机占优最简单的版本。

问题将在第四节讨论。第五节分析萨维奇煎蛋问题，指出其中一个使期望效用理论无法适用的方面，并通过后悔来解决这一问题。最后一节将作总结。

II. 后悔及其特征

A. 期望效用理论（EUT）的公理

我们先回顾期望效用理论（EUT）的四条公理（3）——完备性、传递性、连续性和独立性，因为它们将为我们进一步的讨论提供依据。首先，在彩票（1）之间引入偏好关系 $\succeq$ 和无差异关系 $\sim$，其中 $\sim$ 表示 $\succeq$ 和 $\preceq$ 均成立。比较（1）中的两个彩票时，我们有时假设（不失一般性）它们具有相同的结果：$\{x_k = y_k\}_{k=1}^{n}$。如果它们起初不同，我们可以引入适当的零概率事件，使其相同。

1. 完备性公理指出，（1）中的任意一对彩票都可以进行比较：

$$(x,p) \succeq (x,q) \quad \text{or} \quad (x,q) \succeq (x,p) \quad \text{or} \quad (x,q) \sim (x,p), \tag{4}$$

其中，$(x,p) \succeq (x,q)$ 表示彩票 (x,q) 不优于 (x,p)。

2. 传递性公理指出：

$$(x,p) \succeq (x,q) \succeq (x,r) \quad \text{means} \quad (x,p) \succeq (x,r), \tag{5}$$

3. 连续性公理指出，对于任意三个彩票

$$(x,p) \succeq (x,q) \succeq (x,r) \quad \text{implies} \quad (x,q) \sim (x, \alpha p + (1-\alpha) r), \tag{6}$$

在某个 $\alpha \in [0,1]$ 下。根据四条公理可以推导出，该公理蕴含价值函数的连续性。

4. 独立性公理——也称为无关选项独立性或确定性原则——声称，将两个彩票分别与任意一个固定彩票组合，不会改变偏好 [5, 24]:

$$(x,p) \succeq (x,q) \quad \text{means} \quad (x, \alpha p + (1-\alpha) r) \succeq (x, \alpha q + (1-\alpha) r), \tag{7}$$

其中无关选项为 (x,r)。式（7）是决策理论中最具争议的公理之一，并引发了许多争论 [5, 24]；关于这一点，也请参见附录

B，我们将在其中解释为什么（7）的含义可能存在歧义。文献 [25] 简要回顾了该公理目前的状况，并列举了反例。实验研究发现（7）遭到违反，但有人质疑这些违反是否具有系统性 [5]。

B. 后悔的定义

后悔定义了彩票 (1) 之间的一种反事实结果逐项比较，并采用了期望效用理论的一些概念。因此，在某些特定情况下，它会与期望效用理论的决策准则一致。假定效用函数 $u(x)$ 事先已存在，且决策者 [5] 知晓该函数。

假定选择了 (y, q)，并发现其结果为 y_j。决策者将这一结果与选择 (x, p) 时可能出现的结果进行比较，并定义：

$$R(x, p; y_j) \equiv \sum\nolimits_{i=1}^{n} f(u(x_i) - u(y_j))p_i, \tag{8}$$

其中，$u(x)$ 是效用函数，而 $f(x)$ 是满足以下条件的函数

$$f(x \geq 0) \geq 0, \qquad f(x \leq 0) \leq 0, \qquad f(0) = 0. \tag{9}$$

特别地，如果 $x_i > y_j$，则 $R(x, p; y_j) > 0$（正后悔）。一般而言，$f(x)$ 同时体现后悔与欣赏。如果 $f(x \leq 0) = 0$ ($f(x \geq 0) = 0$)，则得到纯粹的后悔（欣赏）。

由于 (x, p) 实际上并未被选择，因此其结果未知；这也就是式 (8) 中取平均的原因。此外，一旦决策者持续选择 (y, q)，并根据其概率考察所有结果，式 (8) 的平均值可写为：

$$R(x, p; y, q) \equiv \sum\nolimits_{j=1}^{n} q_j R(x, p; y_j) = \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} f(u(x_i) - u(y_j))p_i q_j, \tag{10}$$

其中（10）已假设事件（y_j，x_i）相互独立，即其联合概率为 $q_j p_i$。提供这一额外信息，是为了明确界定（1）中的彩票。

请注意，相对于彩票 (1)，(8, 10) 是不对称的，因为实际选择的是 (y, q)，而 (x, p) 则是在这一选择的基础上进行反事实推理得出的。后悔偏好 $\succeq_{\text{reg}}$ 定义为 [9, 16–18]

$$(x, p) \succeq_{\text{reg}} (y, q) \quad \text{iff} \quad R(y, q; x, p) - R(x, p; y, q) = \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} g(u(y_j) - u(x_i))p_i q_j \leq 0, \tag{11}$$

其中

$$g(x) \equiv f(x) - f(-x), \tag{12}$$

具有反对称性且单调:

$$g(x) = -g(-x), \tag{13}$$

$$g(x) \geq g(y) \quad \text{for} \quad x \geq y. \tag{14}$$

$R(y,q;\ x,p)\ -\ R(x,p;\ y,q)\ \leq 0$的含义是，如果（$x,p$）能带来更小的平均后悔，那么它就是更优的选择。对于某个特定情形

$$g(x) = ax, \qquad a > 0, \tag{15}$$

当 a为常数时，我们便从（11）回到期望效用。请注意，对于各种函数 $f(x)$，都可以得到（15）；例如， $f(x)\ = ax/2$或 $f(x)\ = a\max[x,0]$。

上述定义可推广至（x_i, y_j）的非平凡联合概率 $P(x_i, y_j)$，其中

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} P(x_i, y_j) = q_j, \qquad \sum\nolimits_{j=1}^{n} P(x_i, y_j) = p_i. \tag{16}$$

现在，（8）中的 p_i 应替换为条件概率 $P(x_i|y_j)$，这对于反事实推理是合理的；并且，用下式替代（8–11）：

$$R(x,p;y_j) \equiv \sum\nolimits_{i=1}^{n} f(u(x_i) - u(y_j))P(x_i|y_j), \tag{17}$$

$$R(x,p;y,q) \equiv \sum\nolimits_{j=1}^{n} q_j R(x,p;y_j) = \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} f(u(x_i) - u(y_j))P(x_i,y_j), \tag{18}$$

$$(x,p) \succeq_{\text{reg}} (y,q) \quad \text{iff} \quad \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} g(u(y_j) - u(x_i))P(x_i,y_j) \leq 0. \tag{19}$$

特别是，（16）中的结果可以指向相同的自然状态 [2, 20, 24]。这意味着

$$P(x_i, y_j) = p_i \delta_{ij}, \quad i,j = 1, ..., n, \tag{20}$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克 δ， $\{p_i\ =\ q_i\}_{i=1}^{n}$ 是这些未知自然状态的概率；详情请参见第五节。

C. 关于后悔的两个命题

注意，对于后悔偏好关系（11），我们可以采用与之前（4）相同的论证，令彩票（1）具有相同的结果 $x_k\ =\ y_k$。此时，完备性公理（4）显然对 $\succeq_{\text{reg}}$ 成立。连续性公理也成立。

命题1。对于后悔偏好关系（11）

$$(x,p) \succeq_{\text{reg}} (x,q) \succeq_{\text{reg}} (x,r) \quad \text{implies} \quad (x,q) \sim_{\text{reg}} (x, \alpha p + (1-\alpha) r), \tag{21}$$

对于某些 $\alpha \in [0,1]$。推导（21）中的最后一个关系式，可得

$$\alpha = B/(A+B) \in [0,1], \tag{22}$$

$$A = \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} p_i q_j g(u(x_i) - u(x_j)) \geq 0, \qquad B = \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} r_i q_j g(u(x_j) - u(x_i)) \geq 0, \tag{23}$$

其中，（23）由（21）中的第一和第二个关系式推出。

众所周知，对于一般的 $f(x)$ [21] 选择， $\succeq_{\text{reg}}$ 会违反传递性。特别是，在（20） [26] 条件下，传递性会被违反；例如，对于相同的自然状态也是如此。违反传递性未必是缺点，因为即使在规范性选择中，也有理由采用非传递性选择 [27]。参考文献 [28] 表明，对于最一般形式的后悔，存在不违反传递性的模型。

现在，我们来为 $\succeq_{\text{reg}}$ 的传递性提供一个足够完整的解答。首先，我们证明，在（11）中对 $f(x)$ 作特定选择时， $\succeq_{\text{reg}}$ 将具有传递性。定义

$$f(x) = b(a^x - 1), \tag{24}$$

其中 $a > 0$ 和 $b > 0$。式（9）成立。现在，$(x,p) \succeq_{\text{reg}} (x,q)$ 相当于

$$v(p)w(q) \geq v(q)w(p), \tag{25}$$

$$v(p) \equiv \sum\nolimits_{i=1}^{n} a^{u(x_i)} p_i > 0, \qquad w(q) \equiv \sum\nolimits_{i=1}^{n} a^{-u(x_i)} q_i > 0. \tag{26}$$

式（25、26）表明，采用选择（24）时， $\succeq_{\text{reg}}$ 具有传递性。Fisburn关于传递性的定理 [29] 表明，（24）对于传递性也是必要的。

命题2。由（11）给出的后悔偏好关系 $\succeq_{\text{reg}}$ 保持传递性，当且仅当（24）成立。

回到（4–7），我们可以看到，只有独立性公理可能被 $\succeq_{\text{reg}}$违反；更多详情见下文。

III. 用后悔解释阿莱悖论

阿莱悖论作为违反期望效用理论的一种主要系统性现象，受到了广泛关注 [5, 8–11, 30]。在讨论

阿莱悖论时提到了后悔理论 [5, 14, 16], ，但迄今尚未通过后悔理论系统地解决这一悖论。下文将展示，只要遵循传递性，就能实现这一解决方案；而且，这确实对式（11、12）中的 $g(x)$ 形式构成了一项重要约束。

考虑阿莱悖论的标准表述 [5, 8]。决策者要在以下两种彩票之间做出选择 [参见（1）]:

$$\mathrm{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{II} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0.01 & 0.89 & 0.1 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

然后在.....之间

$$\mathrm{III} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.89 & 0.11 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{IV} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

wh其中，（27，28）中的货币结果通常以百万美元为单位 .

这里有 4 种可能的结果：(I, III)、(I, IV)、(II, III)、(II, IV)，其中 (I, III) 表示在 (27) 中选择 I，在 (28) 中选择 III。选择 (I, III) 或 (II, IV) 符合期望效用理论；例如，若 u(1) $< u$(5) 且 u(1) $\approx u$(5)，就会选择 (I, III)。相反，大多数人选择 (I, IV)，从而违背期望效用理论（EUT） [5]。

将偏好关系 (11) 应用于选择 (I, IV)，我们会发现关于函数 $g(x)$ 的一个重要且直观的条件。现在，从 (11) 可得 I $\succeq_{\mathrm{reg}}$ II:

$$0.01 \cdot g(u(0) - u(1)) + 0.1 \cdot g(u(5) - u(1)) < 0. \tag{29}$$

由于 $g(x)$ 是增函数 [参见（14）], （29）意味着

$$u(5) - u(1) < u(1) - u(0). \tag{30}$$

因此，（30）——它可以由凹函数 $u(x)$ 实现，因而与风险厌恶有关——是（11）能够解释阿莱悖论的必要条件。同样，在（28）中要求 IV $\succeq_{\mathrm{reg}}$ III，我们得到

$$0.089 \cdot g(u(5) - u(0)) - 0.099 \cdot g(u(1) - u(0)) + 0.011 \cdot g(u(5) - u(1)) > 0 \tag{31}$$

将（31）与（29）相减，我们得到

$$-0.089 \cdot g(u(5) - u(0)) + 0.089 \cdot g(u(1) - u(0)) + 0.089 \cdot g(u(5) - u(1)) < 0,$$

导致

$$g(u(5) - u(0)) > g(u(1) - u(0)) + g(u(5) - u(1)). \tag{32}$$

现在，(32) 是解决阿莱悖论的第二个必要条件。(32) 和 (29) 合起来，是解决该悖论的充要条件。(32) 的含义直观上很清楚。相比于将差异 $u(5)-u(0)$ 分成两部分： $u(1)-u(0)$ 和 $u(5)-u(1)$，决策者对差异 $u(5)-u(0)=u(1)-u(0)+u(5)-u(1)$ 一次出现的印象更深（也就是说，感受到更多后悔）。我们将 (32) 改写为一个更一般的条件：

$$g(x+y)\geq g(x)+g(y),\quad x\geq 0,\quad y\geq 0, \tag{33}$$

这就是 $g(x)$ 在正域内的超可加性。由 (13) 可知 $g(0)=0$，我们回想一下，任何满足 $g(0)=0$ 的凸函数 $g(x)$ 都是超可加的 [2]。一个容易证明具有超可加性、但并非凸函数的简单例子是 $g(x)=x\,e^{-x^{-2}}$[31]。事实上，$\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2\, g(x)=2\,e^{-x^{-2}}\,x^{-5}(2-x^2)$，即 $g(x)$ 在 $x>\sqrt{2}(\sqrt{2}>x>0)$ [3] 时是凹（凸）的。我们的结果表述如下。

命题 3. 当且仅当 (11) 中的函数 $g(x)$ 在正域内的某些取值上具有强超可加性时，才能用后悔来解释阿莱悖论。

例。我们采用传递性后悔和对数效用 [cf. (13, 24)]

$$g(x)=\sinh\left(\frac{x}{\beta}\right),\qquad u(x)=\ln\left(\frac{x}{\gamma}+1\right), \tag{34}$$

其中，$\beta>0$ 和 $\gamma>0$ 是刻画决策者的正参数。这里，$\gamma>0$ 定义了凹（风险厌恶）效用 $u(x)$（$u(0)=0$）的阈值，因为只有当 $\frac{x}{\gamma}\ll 1$ 时，我们才有 $u(x)\simeq 0$。从某种意义上说，γ 定义了初始金钱，因为只有当 $\frac{x}{\gamma}\gtrsim 1$ 时，决策者才会在意金钱。同样，β 也有类似的阈值含义，不过针对的是后悔函数：如果 $\frac{x}{\beta}\ll 1$，那么 $g(x)=\sinh(\frac{x}{\beta})\simeq\frac{x}{\beta}$实际上处于期望效用理论（EUT）的范围内。

现在，(34) 中的 $g(x)$ 满足超加性条件 (33)，因为 $\sinh(0)=0$ 并且$\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2\sinh(x)=\sinh(x)\geq 0$ 对于 $x\geq 0$；因此 (32) 成立。要解决阿莱悖论，我们需要考察条件 (29)，根据 (34)，它相当于

$$\gamma<\zeta(\beta), \tag{35}$$

$$\zeta(\beta\to\infty)=5^{-10},\quad \zeta(1)=0.021,\quad \zeta(\beta\to 0)=1/3. \tag{36}$$

[2] 这一事实应当是众所周知的，但我们还是给出简短证明。首先注意到，对于 $0<t<1$，由于 $g(tx)+(1-t)\cdot 0)\leq tg(x)+(1-t)g(0)=tg(x)$，有 $g(tx)\leq tg(x)$。接下来，$g(x)+g(y)=g\left((x+y)\frac{x}{x+y}\right)+g\left((x+y)\frac{y}{x+y}\right)\leq\frac{x}{x+y}g(x+y)+\frac{y}{x+y}g(x+y)=g(x+y)$。文献 [3] 在后悔的语境下提到了超加性条件。文献 [16] 运用了后悔泛函的凸性（凹性）特征，但没有给出明确理由。

因此，当 β 从 ∞ 变为 0 时， $\zeta(\beta)$ 会从 5^{-10} 变为 $1/3$。我们来关注 (36) 中的 $\gamma < 0.021$。我们知道，(27, 28) 中的数值以百万美元为单位。因此，我们将 $u(x) = \ln(\frac{x}{\gamma} + 1)$ 中的 x 和 γ 都乘以 $10^6,$，得出以下结论：从初始金额 ≥ 21000\$ 出发，决策者将按照期望效用行事，并在 (27, 28) 中选择彩票 (II, IV)。(36) 中 $\zeta(\beta)$ 的另外两个取值也有类似的解释。在此语境下请注意， 5^{-10} 等于 $5^{-10} \times 10^8 \simeq 10$ 美分。

据报道，当结果较小（而非（27，28）中的数百万美元）时，阿莱悖论未必成立 [32–34]。其他作者指出，如果将（27，28）中的所有结果都增加相同的大额正数，阿莱悖论便不会成立（对“0”结果的厌恶）[35]。（34）所给出的方案兼顾了这两种实验结果。

注 1. $g(x)$ 的超可加性（33）（及其与凸性的后续关系）与通过效用 $u(x)$ 定义的风险厌恶和风险寻求无关。为理解这一点，请比较以下两个彩票：

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} x-\epsilon & x+\epsilon \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon > 0. \tag{37}$$

现在，如果 $g(u(x) - u(x-\epsilon)) > -g(u(x) - u(x+\epsilon))$，那么与第二个（不确定）彩票相比，第一个（确定）彩票具有后悔偏好；这是由于 $g(x)$ 单调递增且 $u(x)$ 具有凹性所致；也就是说，这是效用层面的风险厌恶。同样， $u(x)$ 的凸性（风险寻求效用）会导致人们偏好不确定的彩票。

备注 2。请注意，对于 $u(x) \to u(x) + a$，后悔保持不变，其中 a 任意；但对于 $u(x) \to bu(x)$，后悔并非保持不变，其中 $b > 0$；例如，参见例 (34)。经过变换 $u(x) \to bu(x)$ 后，可以重新定义 $g_b(x) = g(bx)$，使后悔保持不变。这种重新定义符合 $g(x)$ 的传递性和超可加性。

注释 3. 请回想，独立性公理（7）（或无关选项公理）是后悔理论所违反的期望效用理论的主要公理。阿莱悖论可以用一种显而易见地凸显该公理存在的方式重新表述。为此，

将（27，28）写作

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.01 & 0.1 & 0.89 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{III} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.01 & 0.1 & 0.89 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0.01 & 0.1 & 0.89 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{IV} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0.01 & 0.1 & 0.89 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

我们强调 在 (38, 39) 中，I 和 II（以及 III 和 IV）指的是独立事件。

可以看出，I 和 II 的最后一列相同（$_{1\ 0.89}$），而 III 和 IV 的最后一列相同（$_{0\ 0.89}$）。这些最后一列（即相应的结果及其概率）起着独立替代方案的作用。如果认为它们无关紧要，例如，在 I 和 II 之间做决策时，若（$_{1\ 0.89}$）无关紧要，那么 I 就等同于 III，II 就等同于 IV。因此，人们会选择 (I, III) 或 (II, IV)。请注意，这种推理比直接诉诸公理 (7) 更为一般，因为这个数学公理并未规定如何解释混合模型 $\alpha p + (1-\alpha) r$；详情请参见附录 B。

如果向实验受试者展示阿莱斯彩票的形式为 (38, 39)，那么相较于呈现 (27, 28) [5]，多数人的行为会更符合期望效用理论。自然，对于后悔 (11) 而言，(38, 39) 与 (27, 28) 之间并无差异。因此，这些受试者在决策时并未采用后悔理论。

IV. 后悔与随机占优

对于具有独立概率的彩票（1），随机占优 $\succeq_{\text{sto}}$ [2]提供了一种明确的优劣判定。回顾其定义：我们假设 [4] that$x_k = y_k$ 在（1）中成立，且

$$x_i < x_j \quad \text{for} \quad i < j. \tag{40}$$

现在定义 [2]

$$(x, p) \succeq_{\text{sto}} (x, q) \quad \text{iff} \quad \sum\nolimits_{i=1}^{k} p_i \leq \sum\nolimits_{i=1}^{k} q_i \quad \text{for} \quad k = 1, .., n. \tag{41}$$

[4] 这一关于结果相同的假设并非必要，因为随机占优可以用更一般的方式表述。我们不关注这一一般定义，因为它等同于这样一种情形：通过添加零概率事件来增加结果的数量，使结果变得相同；参见（4）之前的讨论。

回想一下，式 (11) 中的效用 $u(x)$ 是关于 x的增函数。只要效用 $u(x)$ 是关于 x 的增函数（正如我们所假设的），随机占优就不依赖于式 (11) 中效用的具体形式。这是随机占优的一个优点。它的缺点是显然并不适用于所有彩票，也就是说，完备性公理 (4) 不成立。事实上，只需对 k 的某一个取值违反 (41)，就会使 $\succeq_{\text{sto}}$ 不适用。另一个相关的缺点是，其适用性对于结果的微小变化并不稳定。为此，假设 (40, 41) 成立，并对 $y_1 = x_1 \to y_1' < x_1$ 作微小扰动。即使是这种微小变化，也会使 $k = 1$ 违反条件 (41)。

后悔与随机占优并不矛盾，正如下述命题所示。

命题 4. $(x, p) \succeq_{\text{sto}} (x, q)$ 蕴含由式 (11) 定义的 $(x, p) \succeq_{\text{reg}} (x, q)$。证明见附录 A。

请注意，命题 4 并不要求 $g(x)$ 具有任何特定特征，除了满足 (13, 14) 之外。不过，它确实要求彩票的概率相互独立，这由式 (11) 所隐含。具有独立概率的彩票适用范围广泛，但仍然有限。即使在初始时彩票相互独立的框架内，也可以设想新的相关彩票，其后悔由式 (19) 给出。对于相关彩票，后悔与随机占优之间的关系可由下述命题部分说明。

命题 5. 对于由式 (16) 给出的联合概率 $P(x_i, x_j)$，定义边缘概率 $\{p_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{q_j\}_{j=1}^n$，以及 $P(x_i, x_j)$ 相对于 $p_i q_j$ 的偏差：

$$p_i := \sum_{j=1}^n P(x_i, x_j), \quad q_j := \sum_{i=1}^n P(x_i, x_j), \tag{42}$$

$$\theta_{i,j} := P(x_i, x_j) - p_i q_j, \tag{43}$$

$$\sum_{i=1}^n \theta_{i,j} = \sum_{j=1}^n \theta_{i,j} = 0, \qquad |\theta_{i,j}| \le p_i q_j. \tag{44}$$

那么，如果 $g(x)$ 在正域 [（见（33））] 上是超可加的，并且

$$\theta_{i,j} \ge \theta_{j,i}, \quad \text{for} \quad i > j, \tag{45}$$

如果有 $(x, p) \succeq_{\text{sto}} (x, q)$（由（40，41）定义），则按照（19）的意义，有 $(x, p) \succeq_{\text{reg}} (x, q)$。

因此，$g(x)$ 的超可加性加上条件 (45)，使后悔与随机占优保持一致。命题 5 的证明见附录 C。

V. 萨维奇煎蛋卷问题通过后悔理论得到解决

含有 $\{p_k = q_k\}_{k=1}^n$ 的公式 (1) 可指代这样一种决策模型：该模型假设，在采取行动时，将从 $\{\mathcal{S}_k\}_{k=1}^n$ 中以已知于决策者[2, 24]的概率 $\{p_k\}_{k=1}^n$ 实现一个不确定的自然状态（环境） $\mathcal{S}_k$ 。 $\mathcal{S}_k$ 称为自然状态，因为它们未来的实现独立于所采取的行动；但在状态 $\mathcal{S}_k$ 下，行动 A (B) 会导致后果，其货币结果为 x_k (y_k)，效用为 $u(x_k)$（$u(y_k)$） [2, 24]; 参见 (1, 20)。

以下经典决策问题见于 [3]: 一位决策者必须完成妻子开始制作的煎蛋卷；妻子已经把五个完好的鸡蛋打进碗里。桌上还放着第六个未打破的鸡蛋，必须决定是用它来制作煎蛋卷，还是把它丢弃。自然有两种状态：完好（第六个鸡蛋完好）和腐坏（第六个鸡蛋腐坏）；这两种状态不取决于决策者的行动 A_1, A_2 和 A_3 。

A_1: 把第六个鸡蛋打进碗里。

A_2: 丢弃第六个鸡蛋。

A_3: 把第六个鸡蛋打进一个碟子里；如果鸡蛋完好，就把它加入那五个鸡蛋中；如果腐坏，就把它丢弃。

这些行动的后果可以写成彩票:

$$A_1 = \begin{pmatrix} u_{-5} & u_6 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} u_5 & u_5 + z \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} u_5 + w & u_6 + w \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \tag{46}$$

其中， p （$1-p$）是第六个鸡蛋腐坏（完好）的客观概率， u_6 （u_5）是六个鸡蛋（五个鸡蛋）煎蛋卷的效用， $u_{-5} < 0$ 是五个变质鸡蛋且完全没有煎蛋卷时的效用， $w < 0$ 是清洗碟子的效用， $z < 0$ 是完好的鸡蛋丢失时的效用。 [5]

现在来看 A_2的后果，我们会发现，与 A_1 和 A_3不同，采取 A_2并不能消除不确定的自然状态：鸡蛋一旦被扔掉，决策者就无法知道（除非采取额外行动）它是腐坏了还是好的。换句话说，采取 A_2后并不会获得效用 z ，而且不采取额外行动也无法获得这种效用。

[5]清洗碟子的具体效用可能因第六个鸡蛋的状态而异。不过，我们忽略了这种差异。此外，为简化起见， w 被直接加到了 u_5 和 u_6上。

按照通常的方法，将 A_2 的期望效用计算为 $pu_5 + (1-p)(u_5 + z)$并不适用，因为这种计算忽略了 A_2这一方面。自然的做法是将期望效用视为$pu_5 + (1-p)u_5 = u_5$ （即一旦没有获得 z，就不将其计入），但这样一来，与 A_1 和 A_3的期望效用进行比较时，我们会发现参数 z 无处出现。因此，我们认为，期望效用并不适用于将 A_2 与另外两种行动进行比较。

在（46）中运用后悔推理 [参见（8、18、20）]，确实考虑到了 A_2 与另外两个行动之间的差异。举例来说，让我们计算一旦采取了 A_2，没有采取 A_1 所产生的后悔：

$$R(A_1, A_2) = pf(u_{-5} - u_5) + (1-p)f(u_6 - u_5). \tag{47}$$

这个表达式不含 z，因为采取行动 A_2后，不确定的自然状态并未揭晓；也就是说，采取 A_2 后，得到的效用是 u_5。

另一方面，采取 A_1 会消除关于自然状态的不确定性。因此，采取了 A_1 后，没有采取 A_2所产生的后悔为：

$$R(A_2, A_1) = pf(u_5 - u_{-5}) + (1-p)f(u_5 + z - u_6), \tag{48}$$

也就是说，一旦采取了 A_1，并且鸡蛋是腐坏的（完好的），那么决策者就知道，如果采取 A_2，鸡蛋最终会是腐坏的（完好的）。可见，（48）包含 z （丢弃完好鸡蛋的效用），而（47）则不包含。现在

$$A_1 \succeq_{\text{reg}} A_2 \quad \text{iff} \quad R(A_2, A_1) \leq R(A_1, A_2), \tag{49}$$

其中 R（A_2，A_1）$-R$（A_1，A_2）确实取决于参数 z。以（49）为例，考虑 f（x）$= x$ [参见（15）之后的讨论]：

$$p(u_5 - u_{-5}) < (1-p)(u_6 - u_5 - \frac{z}{2}). \tag{50}$$

这里我们回顾一下 $u_6 > u_5 > u_{-5}$ 和 $z < 0$。我们可以自然地假设 $u_5 - u_{-5} > u_6 - u_5 > 0$，在这种情况下，即使对于 $p = 1/2$，式（50）也并非平凡。请注意，若形式上应用期望效用理论，就会得出结论：对于 p（$u_5 - u_{-5}$）$<$（$1-p$）（$u_6 - u_5 - z$），A_1优于 A_2，这显然不同于式（50）。这不仅仅是结果不同；更确切地说，期望效用理论并不适用。

VI. 总结

本文研究了两种彩票的效用差上的后悔泛函；见第二节。彩票有多种类型，从独立到完全依赖，它们指向相同的自然状态。后悔泛函在反事实地比较彩票时，会考虑其概率。在特定情况下，后悔会退化为期望效用。更一般地说，它不满足期望效用的独立性（相对于无关选项）公理，也称为确定性原则。这种不满足本身并非平凡现象，附录 B 对此进行了探讨。与期望效用不同，后悔通常也不会在效用乘以正数后保持不变。正是由于相较于期望效用存在这两点差异，后悔理论才适用于解释和解决阿莱悖论；见第三节。解决这一悖论需要后悔泛函具备一项非平凡特征，即其超可加性，而这确实符合直觉。我们证明，可以选择一种后悔泛函，使后悔排序具有传递性。具体而言，阿莱悖论可以通过传递性后悔得到解决，而这一解决方案能够一致地解释货币结果的变化。

我们特别关注了（一级）随机占优与后悔偏好之间的关系；参见第四节。前一种排序在规范上颇具吸引力，但并不完备，因为并非任意两个彩票都可以相互比较。我们证明，对于独立彩票，随机占优意味着后悔偏好。对于相关彩票，两者之间的关系则更为复杂。我们在此提出了随机占优 $\rightarrow$后悔偏好这一蕴含关系的一个充分条件。有趣的是，该条件同样基于后悔的超可加性；参见命题 5。

最后，我们在第五节展示了所讨论的后悔理论如何应用于这样的情形：决策者的行动无法消除不确定情境。就这种情形而言，期望效用理论并不适用，因为它会直接舍弃有关彩票的一项重要信息。在后悔理论中，这项信息得以利用，因为后悔将尚未消除的不确定性与已消除的不确定性进行比较。

我们的结果表明，尽管后悔这一概念最初是从决策者的某些情感特征中推导出来的，但它确实具备人们凭直觉所期望的许多理性特征

所应具备的特征。因此，我们设想其可进一步应用于例如强化学习 ng.

致谢

本研究得到了亚美尼亚国家科学委员会项目（编号：21AG- 1C038）的资助。我们感谢 Andranik Khachatryan 提供有益的意见，并参与本研究的初期工作。

---

[1] S. C. Stearns, 《丹尼尔·伯努利（1738）：风险下的演化与经济学》, 《生物科学杂志》, 第25卷，第3期，第221–228页，2000年。[2] R. D. Luce 和 H. Raiffa, 《博弈与决策：导论与批判性综述》。Courier Corporation，1989年。[3] L. J. Savage, 《统计学基础》。Courier Corporation，1972年。[4] J. D. Hey, 《风险与不确定性下个体决策的实验与经济学》，1997年。[5] J. Baron, 《思考与决策》。剑桥大学出版社，2000年。[6] J. Hofbauer、K. Sigmund 等, 《演化博弈与种群动力学》。剑桥大学出版社，1998年。[7] T. Everitt、J. Leike 和 M. Hutter, 《因果决策理论与证据决策理论的序贯扩展》，载于《国际算法决策理论会议》，第205–221页，施普林格，2015年。[8] M. Allais 和 G. Hagen, 《期望效用假说与阿莱悖论：关于不确定性下决策的当代讨论及阿莱的回应》，第21卷。Springer Science & Business Media，2013年。[9] M. J. Machina, 《不确定性下的选择：已解决与未解决的问题》，载于《保险经济学基础》，第49–82页，施普林格，1992年。[10] D. Kahneman 和 A. Tversky, 《前景理论：风险下决策的分析》，载于《金融决策基础手册：第一部分》，第99–127页，World Scientific，2013年。

[11] A. Tversky 和 D. Kahneman，《前景理论进展：不确定性的累积表征》，《风险与不确定性杂志》，第5卷，第4期，第297–323页，1992年。[12] J. Quiggin，《广义期望效用理论：秩依赖模型》。Springer Science & Business Media，2012年。[13] E. Diecidue 和 P. P. Wakker，《论秩依赖效用的直觉》，《风险与不确定性杂志》，第23卷，第3期，第281–298页，2001年。[14] S. Bourgeois-Gironde，《后悔与选择的理性》，《皇家学会哲学汇刊B辑：生物科学》，第365卷，第1538期，第249–257页，2010年。[15] M. H. Acker，《完全无知下的温和后悔》，《理论与决策》，第42卷，第3期，第207–213页，1997年。[16] G. Loomes 和 R. Sugden，《后悔理论：不确定性下理性选择的另一种理论》，《经济学期刊》，第92卷，第368期，第805–824页，1982年。[17] D. E. Bell，《不确定性下决策中的后悔》，《运筹学》，第30卷，第5期，第961–981页，1982年。[18] H. Bleichrodt 和 P. P. Wakker，《后悔理论：对其他替代理论的大胆替代》，《经济学期刊》，第125卷，第583期，第493–532页，2015年。[19] P. C. Fishburn，《斜对称双线性泛函的公理化刻画及其在效用理论中的应用》，《经济学快报》，第8卷，第4期，第311–313页，1981年。[20] R. Sugden，《后悔理论的公理化基础》，《经济理论杂志》，第60卷，第1期，第159–180页，1993年。[21] C. Starmer，《非期望效用理论的发展：寻找风险下选择的描述理论》，《经济学文献杂志》，第38卷，第2期，第332–382页，2000年。[22] J. Quiggin，《后悔理论中的随机占优》，《经济研究评论》，第57卷，第3期，第503–511页，1990年。[23] H. Levy，《后悔理论：状态占优与期望效用》，《数学心理学杂志》，第79卷，第1–12页，2017年。[24] R. C. Jeffrey，《决策逻辑》。芝加哥大学出版社，1990年。[25] J. Pearl，《确定性原则》，《因果推断杂志》，第4卷，第1期，第81–86页，2016年。[26] S. Bikhchandani 和 U. Segal，《传递性后悔》，《理论经济学》，第6卷，第1期，第95–108页，2011年。

[27] P. C. Fishburn, 《决策理论中的非传递偏好》, 《风险与不确定性杂志》, 第 4 卷第 2 期, 第 113–134 页, 1991 年。[28] S. Bikhchandani 和 U. Segal, 《统计独立彩票中的传递性后悔》, 《经济理论杂志》, 第 152 卷, 第 237–248 页, 2014 年。[29] P. C. Fishburn, 《传递可测效用》, 《经济理论杂志》, 第 31 卷第 2 期, 第 293–317 页, 1983 年。[30] P. J. Schoemaker, 《期望效用模型: 其变体、目的、证据与局限》, 《经济学文献杂志》, 第 529–563 页, 1982 年。[31] Y. Tanaka 和 M. Hattori, 《无固定成本时成本函数的凸性、凹性、超可加性与次可加性》, 2017 年。[32] B. J. Weber 等人, 《支付金额和概率大小对阿莱悖论的影响》, 《记忆与认知》, 第 36 卷第 5 期, 第 1013–1023 页, 2008 年。[33] C. F. Camerer, 《对若干广义效用理论的实验检验》, 《风险与不确定性杂志》, 第 2 卷第 1 期, 第 61–104 页, 1989 年。[34] P. R. Blavatskyy、A. Ortmann 和 V. Panchenko, 《眼见未必为实: 如何让阿莱悖论出现、消失或反转》, 新南威尔士大学商学院研究论文, 第 2015-14 号, 2015 年。[35] E. Incekara-Hafalir、E. Kim 和 J. D. Stecher, 《阿莱悖论源于对确定性的偏好, 还是对零的厌恶? 》, 《实验经济学》, 第 24 卷第 3 期, 第 751–771 页, 2021 年。

附录 A: 命题 4 的证明

.

我们要证明

$$\sum_{i=1,j=1}^{n} p_i q_j g(u(x_j) - u(x_i)) \leq 0. \tag{A1}$$

它可以写成以下形式

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (p_i q_j - p_j q_i) g(u(x_j) - u(x_i)). \tag{A2}$$

现在, g 在 (A2) 中的取值严格为负（回忆一下 (40), 以及 $g(x)$ 和 $u(x)$ 的单调性）。

我们证明以下结论成立

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_i q_j g(u(x_j)-u(x_i)) &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_i p_j g(u(x_j)-u(x_i)) \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_j q_i g(u(x_j)-u(x_i)),\end{aligned} \tag{A3}$$

由此即可推出 (A2)。

为此，我们使用下面的引理。

引理。给定上述序列 p_i、 q_i ，那么对于任意负数递增序列 g_i，以下结论成立：

$$\sum_{i=1}^{k} p_i g_i \ge \sum_{i=1}^{k} q_i g_i, \quad \text{for} \quad k=1,...,n. \tag{A4}$$

简单的归纳法即可证明。显然 $p_1 g_1 \ge q_1 g_1$。假设对某个 k 成立，则有：

$$\sum_{i=1}^{k} p_i g_i \ge \sum_{i=1}^{k} q_i g_i \tag{A5}$$

现在，让我们从 g_i 的每个分量中减去 g_{k+1}。（由于我们讨论的是任意递增序列，因此尚未指定任何具体的 g-s。所以，在所有分量都小于 g_{k+1} 的情况下，进行减法时不改变不等式的方向。）

我们将得到如下结果：

$$\sum_{i=1}^{k} p_i (g_i - g_{k+1}) \ge \sum_{i=1}^{k} q_i (g_i - g_{k+1}) \tag{A6}$$

现在根据（41）

$$\sum_{i=1}^{k+1} p_i \le \sum_{i=1}^{k+1} q_i \tag{A7}$$

两边乘以 g_{k+1}，得到

$$\sum_{i=1}^{k+1} p_i g_{k+1} \ge \sum_{i=1}^{k+1} q_i g_{k+1}. \tag{A8}$$

将 (A6) 和 (A8) 相加，即可得到所需结果：

$$\sum_{i=1}^{k+1} p_i g_i \ge \sum_{i=1}^{k+1} q_i g_i. \tag{A9}$$

利用引理，我们回过头来先考察 (A3) 的第一部分

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_i q_j g(u(x_j)-u(x_i)) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_i p_j g(u(x_j)-u(x_i)). \tag{A10}$$

显然

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_i q_j g(u(x_j)-u(x_i)) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{i} q_j g(u(x_j)-u(x_i)) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{i} p_j g(u(x_j)-u(x_i)),\end{aligned} \tag{A11}$$

最后一部分可由引理推出。

回到 (A3) 的第二部分:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_j q_i g(u(x_j)-u(x_i)) \ge \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_i p_j g(u(x_j)-u(x_i)). \tag{A12}$$

并改变求和顺序，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_j q_i g(u(x_j)-u(x_i)) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} p_j q_i g(u(x_j)-u(x_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=j}^{n} q_i g(u(x_j)-u(x_i)) \ge \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=j}^{n} p_i g(u(x_j)-u(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_i p_j g(u(x_j)-u(x_i)),\end{aligned} \tag{A13}$$

其中　　不等式是引理中所用不等式的逆命题。证明完毕　　.

附录 B：后悔与独立性公理（7）

我们已在（38、39）附近强调，为解决阿莱悖论，式（11）中定义的后悔偏好 $\succeq_{\text{reg}}$ 必须违反独立性公理。现在，我们对该公理的形式（7）作进一步说明。我们注意到，（6、7）并未明确规定如何以权重 α 混合这两个概率。下面我们讨论实现（7）设定的三种有趣可能性。因此，我们有三个彩票

[参见（1）
]

$$(x,p)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\\ p_1 & p_2 & \dots & p_n\end{pmatrix},\qquad (y,q)=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \dots & y_n\\ q_1 & q_2 & \dots & q_n\end{pmatrix},\qquad (z,r)=\begin{pmatrix}z_1 & z_2 & \dots & z_n\\ r_1 & r_2 & \dots & r_n\end{pmatrix}, \tag{B1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{k=1}^{n}q_k=\sum_{k=1}^{n}r_k=1, \tag{B2}$$

其中，$(p_1,\dots,p_n)$、$(q_1,\dots,q_n)$ 和 $(r_1,\dots,r_n)$ 分别是每个彩票中货币结果 $(x_1,\dots,x_n)$、$(y_1,\dots,y_n)$ 和 $(z_1,\dots,z_n)$ 的概率。

1. 这里需要在两个复合彩票 $A=\{(1-\alpha)(x,p)+\alpha(z,r)\}$ 和$B=\{(1-\alpha)(y,q)+\alpha(z,r)\}$之间作出选择。若选择 A，则会实现一个二元随机变量 S_A，其取值为 $S_A=0$ 和 $S_A=1$ 的概率分别为 $1-\alpha$ 和 α。若取值为$S_A=0$ 或 $S_A=1$，则分别面对彩票 (x,p) 或 (z,r)。若选择 B，则会实现一个二元随机变量 S_B（与 S_A 独立），其取值为 $S_B=0$ 和 $S_B=1$ 的概率分别为 $1-\alpha$ 和 α。若取值为 $S_B=0$ 或 $S_B=1$，则分别面对彩票 (y,q) 或 (z,r)。现在假设 (x,p) 与 (y,q) 独立，但两个选项中的彩票 (z,r) 相同。运用后悔定义 (11)，我们得到以下偏好关系：

$$\begin{aligned}&A\succeq_{\mathrm{reg},1}B\quad\text{iff}\quad(1-\alpha)^2\sum_{i,j=1}^{n}g(u(y_j)-u(x_i))p_iq_j+(1-\alpha)\alpha\sum_{i,j=1}^{n}g(u(z_j)-u(x_i))p_ir_j\\&+(1-\alpha)\alpha\sum_{i,j=1}^{n}g(u(y_j)-u(z_i))q_jr_i\le 0.\end{aligned} \tag{B3}$$

注意，(B3) 不包含带有 $g(u(z_j)-u(z_i))$ 的项，因为决策者并不认为在选项 A 和 B 中会出现不同的结果 z_j 和 z_i。

2. 现在我们处于情形 1，但 $S=S_A=S_B$；例如，可以假设 S 已预先实现，但在决策时，决策者并不知道结果。此时后悔有所不同 [参见 (B3)]:

$$A\succeq_{\mathrm{reg},2}B\quad\text{iff}\quad(1-\alpha)^2\sum_{i,j=1}^{n}g(u(y_j)-u(x_i))p_iq_j\le 0, \tag{B4}$$

其中（z,r）不参与后悔比较（B4），这在形式上与公理（7）一致。

3. 我们面临情形 1，但选项 A 中的（z, r）和选项 B 中的（z, r）是两个概率相互独立的彩票：

$$A \succeq_{\text{reg},3} B \quad \text{iff} \quad (1-\alpha)^2 \sum_{i,j=1}^{n} g(u(y_j) - u(x_i)) p_i q_j + (1-\alpha)\alpha \sum_{i,j=1}^{n} g(u(z_j) - u(x_i)) p_i r_j$$
$$+(1-\alpha)\alpha \sum_{i,j=1}^{n} g(u(y_j) - u(z_i)) q_j r_i + \alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} g(u(z_j) - u(z_i)) r_j r_i \leq 0. \tag{B5}$$

期望效用理论中对独立性公理的标准解释暗示了 3。然而，我们特别强调过，这种情形并非唯一。注意，所有可能性（B3、B4、B5）都与期望效用理论一致，其中 g（x）$= x$。

附录 C：命题 5 的证明

已知，由（43）得到的 $n \times n$ 矩阵 $\theta_{i,\ j}$ 构成一个（$n-1$）$\times$（$n-1$）维向量空间。因此，例如，任意这样的 3×3 矩阵都可以改写为

$$\begin{pmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} & \theta_{1,3} \\ \theta_{2,1} & \theta_{2,2} & \theta_{2,3} \\ \theta_{3,1} & \theta_{3,2} & \theta_{3,3} \end{pmatrix} = \theta_{1,1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \theta_{2,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta_{2,2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{C1}$$

将基矩阵记为 $M_{i,\ j}$ 则任意由 theta 构成的矩阵 Θ 都可以改写为

$$\Theta = \sum_{i,j=1}^{n-1} \theta_{i,j} M_{i,j}, \tag{C2}$$

其中 $M_{i,\ j}$ 是这样一个矩阵：其（i，j）项和（n，n）项元素为 1，而（i，n）项和（n，j）项元素为 -1。

让我们计算这种情况下的后悔值

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P(x_i, x_j) g(u(x_j) - u(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j g(u(x_j) - u(x_i)) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \theta_{i,j} g(u(x_j) - u(x_i)) \tag{C3}$$

我们已经知道第一项为负（（A1）和命题 4）。因此，还需证明第二部分也为负。将元素为$G(i, j) = g(u(x_j) - u(x_i))$ 的矩阵记作 G，我们可以改写为

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \theta_{i,j} g(u(x_j) - u(x_i)) = ||\Theta \odot G||, \tag{C4}$$

其中， $||.||$表示所有元素的总和， $\odot$ 表示 Hadamard（逐元素）乘积。

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{i,j}g(u(x_j)-u(x_i)) = ||\Theta\odot G|| = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\theta_{i,j}||M_{i,j}\odot G||. \tag{C5}$$

我们有

$$||M_{i,j}\odot G|| = g(u(x_i)-u(x_j)) - g(u(x_n)-u(x_j)) - g(u(x_i)-u(x_n)). \tag{C6}$$

现在考虑

$$\begin{aligned}
&\theta_{i,j}||M_{i,j}\odot G|| + \theta_{j,i}||M_{i,j}\odot G|| \\
&= \theta_{i,j}(g(u(x_i)-u(x_j)) - g(u(x_n)-u(x_j)) - g(u(x_i)-u(x_n))) \\
&+ \theta_{j,i}(g(u(x_j)-u(x_i)) - g(u(x_n)-u(x_i)) - g(u(x_j)-u(x_n))) \\
&= (\theta_{i,j}-\theta_{j,i})(g(u(x_i)-u(x_j)) + g(u(x_n)-u(x_i)) - g(u(x_n)-u(x_j))
\end{aligned} \tag{C7}$$

注意，尽管 $i>j$，根据超可加性，第二个括号中的项为负。因此，结合 $\theta_{i,\ j}\geq\theta_{j,\ i}$，我们得出

$$\theta_{i,j}||M_{i,j}\odot G|| + \theta_{j,i}||M_{i,j}\odot G|| \leq 0 \tag{C8}$$

改写为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{i,j}g(u(x_j)-u(x_i)) = ||\Theta\odot G|| = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1;j\neq i}^{n-1}\theta_{i,j}||M_{i,j}\odot G|| + \sum_{i=1}^{n-1}\theta_{i,i}||M_{i,i}\odot G||. \tag{C9}$$

(C9) 中的第二个求和显然为 0，因为 $g(x)$ 是反对称的，而 $M_{i,\ i}$ 是对称矩阵。

So

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{i,j}g(u(x_j)-u(x_i)) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1;j\neq i}^{n-1}\theta_{i,j}||M_{i,j}\odot G|| \leq 0. \tag{C10}$$