arXiv:2301.02467v1 [stat.AP] 6 Jan 2023

CT肺动脉造影中的不确定性量化

Adwaye M Rambojun*、Hend Komber°、Jennifer Rossdale°、Jay Suntharalingam°•、Jonathan C L Rodrigues°、Matthias J Ehrhardt*和Audrey Repetti†‡*

* 巴斯大学数学科学系，英国
° 皇家联合医院，巴斯，英国
• 巴斯大学生命科学系，英国
† 赫瑞-瓦特大学传感器、信号与系统研究所，爱丁堡，英国
‡ 麦克斯韦数学科学研究所，爱丁堡，英国 电子邮箱：
a.repetti@hw.ac.uk，me549@bath.ac.uk

摘要

胸腔计算机断层扫描（CT）成像广泛用于检测和监测肺栓塞（PE）。然而，CT图像可能包含由采集过程或图像重建过程导致的伪影。放射科医师通常必须区分这类伪影与真实的PE。我们的主要贡献是一种可扩展的CT假设检验方法，可用于量化可能存在PE时的不确定性。具体而言，我们提出一种贝叶斯框架，用于量化观测到的紧凑结构可被识别为PE时的不确定性。我们评估了该方法在高噪声环境和数据不足情况下的运行能力。

关键词： 医学影像 | 假设检验 |优化 | 贝叶斯 | 肺栓塞

意义声明

计算机断层扫描（CT）成像广泛应用于医学领域，用于显示内部器官以辅助诊断。在急性胸痛情境下进行肺栓塞（PE）检测时，肺栓塞在CT扫描中可能表现为振幅较弱的小型结构。因此，临床医生在实际诊疗中进行肺栓塞检测可能面临挑战，他们必须判断这些结构是否为PE。这种模糊性可能是由数据采集不完善造成的（例如，数据不足或噪声较大的环境）。在本研究中，我们提出了一种计算工具，帮助临床医生判断观察到的结构是PE，还是由数据采集不完善造成的伪影。我们的方法利用优化和贝叶斯理论对该结构的不确定性进行量化。

*M.J.E.和A.R.为共同资深作者。

1 引言

1.1 通过计算机断层扫描血管造影进行肺栓塞检测

大多数医学成像模态，如计算机断层扫描（CT）、超声和磁共振成像，都是通过复杂的图像重建过程获得的，该过程使用含噪且不完整的采集数据。尤其是CT，它是一种常用的成像模态，可用于诊断多种病理类型，如急性炎症性疾病、中风和恶性肿瘤。X射线从多个角度穿过患者身体，并根据其穿过的不同组织的密度计算衰减系数。随后利用重建算法生成最终的三维图像。该算法可能产生伪影，即采集的真实图像中并不存在的结构 [23]。这些伪影可能影响放射科医师得出的结论，放射科医师必须判断CT图像中出现的结构究竟是病理结构，还是由数据采集不准确导致的伪影。

在评估CT扫描中是否存在急性肺栓塞时，这种情况相当常见。急性肺栓塞是导致死亡的主要原因之一，在英国每年约造成30,000人死亡 [2]。肺栓塞及其心血管并发症的评估和检测通常通过CT肺动脉造影（CTPA） [12]进行。慢性血栓栓塞性肺动脉高压也是急性肺栓塞可能引起的长期致残性并发症，而CTPA既是重要的诊断工具，也有助于评估患者是否适合手术治疗 [10]。然而，各种与患者和扫描方案相关的因素都可能造成图像伪影，进而影响对图像的临床放射学判读信心。若作出假阳性诊断，可能导致患者接受不恰当的抗凝治疗，从而造成出血率不必要地升高 [9]。

在此背景下，对重建的胸部CT图像中观察到的类PE结构进行不确定性量化，有助于提高诊断准确性。本文提出了一种不确定性量化（UQ）框架，用于对类PE结构进行假设检验，并确定患者胸腔内是否存在这些结构，或它们是否为数据采集不准确所产生的伪影。

1.2 成像的贝叶斯推断

根据 CT 数据重建图像可表述为一个逆问题。其目标是根据 CT 扫描仪 [19, 7]获取的测量值 $\boldsymbol{y}$，估计未知图像 $\boldsymbol{x}$ （即患者胸部），得到估计值 $\boldsymbol{x}^{\dagger}$ 。在贝叶斯框架 [8], 下，图像与数据通过统计模型相关联。随后，根据其后验分布，从 $\boldsymbol{y}$ 推断估计值 $\boldsymbol{x}^{\dagger}$ 。后验分布结合了与观测值$\boldsymbol{y}$相关的似然，以及用于引入目标图像先验信息的先验 。先验用于对模型进行正则化，以帮助克服逆问题的不适定性和/或病态性。常见做法包括施加可行性约束，以及促进 $\boldsymbol{x}$的平滑性或稀疏性，也可以在小波、傅里叶或全变差（TV）等变换域中进行。

采样方法（例如马尔可夫链蒙特卡洛方法（MCMC））根据后验分布抽取随机样本。这些方法使我们能够构造估计量（例如最小均方误差（MMSE）估计量、后验均值或最大后验（MAP）估计量），并通过置信区间和假设检验进行不确定性量化（UQ） [17, 18]。这些方法的主要缺点是计算成本高，因此在成像中常见的高维问题上效率低下。事实上，对于 CT 成像，$\boldsymbol{x}$ 的维数通常可达 10^8 高分辨率肺部扫描 [1]的量级。近年来，虽然出现了多种旨在提升采样方法可扩展性的工作，例如 [13, 22, 21], 但在如此高的维度下，这些方法通常仍然难以实际应用。

处理高维问题的首选方法是近端分裂优化算法 [5, 11, 4]。这类算法以高效求得最大后验估计而闻名。然而，这些方法只能提供点估计，无法量化所得解的不确定性。为解决这一问题，近期有人在 [14, 15, 16], 中提出了一种基于优化的贝叶斯不确定性量化（BUQO）方法，用于对最大后验估计中出现的特定结构进行假设检验。该方法可确定感兴趣的结构是真实存在的，还是由采集误差导致的重建伪影。BUQO 的优势在于可扩展至高维问题，因为它将不确定性量化问题重构为优化框架，从而利用近端分裂优化算法。

1.3 肺栓塞的不确定性量化

不确定性量化是帮助医生准确开展决策过程的主要工具。病态且条件不良的逆问题会导致估计结果存在很大的不确定性。本文重点量化CT胸部图像中类PE结构的不确定性。具体而言，我们设计了一种基于BUQO的方法，用于确定这些结构是肺栓塞，还是重建伪影。

2 方法

本节介绍所提出的肺栓塞不确定性量化技术的步骤。首先，我们使用优化算法构建CT图像（第22.1节）。其次，我们在图像估计结果中识别类PE结构，并提出零假设：这些结构并不存在于真实图像中，也就是说，它们并不位于患者胸部，而是由问题的不适定性引起的重建伪影。第三，我们使用本方法判断是否可以拒绝零假设（第22.3节）。

2.1 CT成像的贝叶斯推断与优化

通常，CT扫描仪的机架（包括多个X射线源和多个探测器）会绕患者胸部旋转。这会生成一个 M 维数据数组，记作$\boldsymbol{y}$，其中包含衰减后的X射线强度 [19, 7]。衰减模式由射束所穿过区域的几何形状决定。CT重建旨在根据观测到的含噪数据 $\boldsymbol{y}$，恢复一个维度为 N[1]、记作 $\boldsymbol{x}$的体素数组，以表示胸腔内器官的几何形状。对此，可以合理地近似为如下形式的线性逆问题：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} \tag{2.1}$$

其中， $\boldsymbol{\phi}$ 表示上文所述的CT测量算子，而 $\boldsymbol{w}$ 是加性独立同分布（i.i.d.）随机噪声的一次实现。

采用贝叶斯表述，结合似然和先验信息的问题后验分布可表示为

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \propto \exp(-f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})), \tag{2.2}$$

其中， f 假定为与（2.1）统计模型相关的对数凹似然函数，而 g 是 $\boldsymbol{x}$的对数凹先验分布。估计 $\boldsymbol{x}$ 的常用方法是采用最大后验概率方法，即将 $\boldsymbol{x}^\dagger$ 定义为（2.2）的负对数的极小化解，即

$$\boldsymbol{x}^\dagger \in \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmin}} \; f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}). \tag{2.3}$$

在本研究中，我们假设确切的噪声分布未知，但其能量有界，即 $\|\boldsymbol{w}\|_2 \leqslant \varepsilon$，其中 $\|\cdot\|_2$是通常所说的欧几里得范数，而 $\varepsilon > 0$。因此，一种典型的选择是令 $f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{x})$ 为 ℓ_2球的示性函数 $\mathcal{B}_2(\boldsymbol{y},\ \varepsilon)$，其中心位于 $\boldsymbol{y}$，半径为 $\varepsilon > 0$。此外，先验项 $g(\boldsymbol{x})$ 的一种常见选择，是在某个基（例如小波或全变差）中促进感兴趣图像的稀疏性。于是，（2.3）可改写为

$$\text{find } \boldsymbol{x}^\dagger = \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmin}} \; \|\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{x}\|_1 \text{ s.t. } \|\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \leqslant \varepsilon, \tag{2.4}$$

其中算子 $\boldsymbol{\psi}$ 表示一个线性变换，选择该变换使得 $\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{x}$ 仅有少数非零系数。（2.4）可以使用近端分裂算法 [5, 11, 4]高效求解。

2.2 高维假设检验

上一节所述的方法提供了一个 $\boldsymbol{x}^\dagger$ of $\boldsymbol{x}$的点估计，但没有提供有关其不确定性的其他信息。在这项工作中，我们建议对最大后验估计中可识别为肺栓塞的结构进行假设检验。

[1]这里 N 是三维体素数组各维度的乘积。

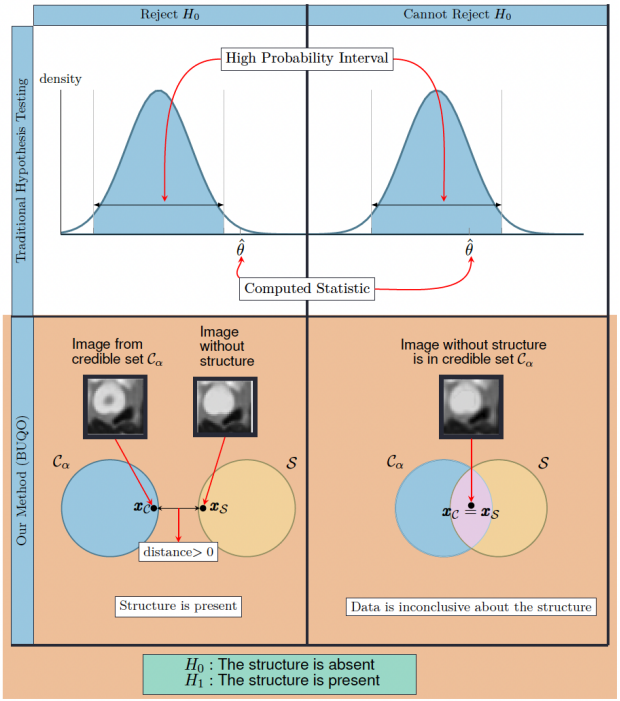

图1：该图展示了传统假设检验与我们的方法之间的对应关系。ˆ 在传统假设检验中，根据数据计算可信区间 $\mathcal{I}_\alpha$ 和检验统计量 θˆ。如果 θ 不在可信区域内，则拒绝零假设 H_0 。对于我们提出的方法，做法类似：我们计算最高后验密度（HPD）区域 $\mathcal{C}_\alpha$ ，以及一幅移除了结构的图像 $\boldsymbol{x}_\mathcal{S}$（类似于检验统计量）。如果 $\boldsymbol{x}_\mathcal{S}$ 不在可信区域内，则拒绝零假设（即结构不存在这一假设）。这由 $\boldsymbol{x}_\mathcal{S}$ 与 $\boldsymbol{x}_\mathcal{C}$之间的距离确定；它们分别是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{C}_\alpha$ 中彼此距离最近的两个元素。如果该距离为零，我们便得出结论： $\boldsymbol{x}_\mathcal{C} \in \mathcal{S}$ ；否则， $\boldsymbol{x}_\mathcal{C} \notin \mathcal{S}$。

为说明我们的方法，我们先回顾假设检验的基础知识。通常，我们会提出一个零假设，即对观测数据的分布作出判断。我们使用观测ˆ
ˆ 数据来计算统计量 θ。我们根据 θ 是否落在高概率区间内，决定是否拒绝零假设（见图 1 ）。

这可以扩展到计算成像中 [15, 16], ， 以量化最大后验估计中出现的结构的不确定性 $\boldsymbol{x}^\dagger$， 该估计通过求解（2.4）得到。在此背景下，我们提出零假设 H_0 和备择假设 H_1 如下：

H_0： 该结构在真实图像中不存在H_1： 该结构在真实图像中存在

形式上，运用贝叶斯决策理论 [17], 我们可以得出结论：若$_0$ ，则拒绝 H_1而支持 H，条件是 $\mathbb{P}(\mathrm{H}_0|\boldsymbol{y})$ $\leqslant \alpha$，其中 $\alpha \in (0,1)$ 表示该检验的显著性水平。此类概率可以通过马尔可夫链蒙特卡罗方法近似计算 [18], ， 但对于 CT 成像等高维问题，计算会变得难以处理

。为克服这一困难，我们引入 $\mathcal{S}$ 的一个子集 $\mathbb{R}^N$，该子集与 H_0, 相关，包含所有不具有感兴趣结构的可能图像。根据定义，我们有 $\mathbb{P}(\mathrm{H}_0|\boldsymbol{y}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}|\boldsymbol{y})$。为进行假设检验，我们将 $\mathcal{S}$ 与后验可信集 $\mathcal{C}_\alpha^*$进行比较；该可信集对应于可能解的集合，其中包含了 $\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}$ 的大部分后验概率质量 [14]。形式上， $\mathcal{C}_\alpha^*$ 满足 $\mathbb{P}(\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_\alpha^*|\boldsymbol{y}) = 1-\alpha$。同样，在高维空间中计算此类概率难以实现。因此，[14] 引入了保守可信区域 $\mathcal{C}_\alpha$，使得 $\mathbb{P}(\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_\alpha|\boldsymbol{y}) \geqslant 1-\alpha$，且除构建最大后验估计 $\boldsymbol{x}^\dagger$（即求解 (2.4)）之外，无需任何额外计算成本。请注意，根据构造，我们有 $\boldsymbol{x}^\dagger \in \mathcal{C}_\alpha$，而 $\mathcal{C}_\alpha$ 则包括围绕 $\boldsymbol{x}^\dagger$ 定义一个可行集。

本文采用的 BUQO方法在于确定 $\mathcal{S}$与 $\mathcal{C}_\alpha$ 的交集是否为空。如果交集为空，则意味着 $\mathbb{P}(\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}|\boldsymbol{y}) = \mathbb{P}(\mathrm{H}_0|\boldsymbol{y}) \leqslant 1-(1-\alpha) = \alpha$，因此拒绝 H_0。为确定 $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_\alpha = \varnothing$，我们旨在寻找一幅属于 $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_\alpha$的图像。如果存在这样的图像，则意味着 $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_\alpha \neq \varnothing$，并且可以找到至少一幅受数据支持、但不包含感兴趣结构的图像 $\boldsymbol{y}$，因此不能拒绝 H_0。否则， $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_\alpha = \varnothing$，并拒绝 H_0（见图1第二行）。

2.3 肺栓塞检测的假设检验

本节将说明所提出的方法，以确定 $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_\alpha$ 是否为空。此外，我们还将针对 PE不确定性量化问题给出集合 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{C}_\alpha$的数学定义。

为了找到属于 $\mathcal{S}$ 且最接近最大后验估计 $\boldsymbol{x}^\dagger$的图像，可以将 $\boldsymbol{x}^\dagger$ 投影到 $\mathcal{S}$中。我们将该图像记为 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{S}}^\dagger = \mathrm{Proj}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{x}^\dagger)$。第一步是验证 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{S}}^\dagger \in \mathcal{C}_\alpha$。如果确实如此，那么我们就找到了交集 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{S}}^\dagger \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}_\alpha$中的一幅图像，并且无法拒绝 H_0，也就是说，我们无法确定是否存在肺栓塞。如果 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{S}}^\dagger \notin \mathcal{C}_\alpha$，这并不意味着 $\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{S}$ 为空，其中仍可能存在一幅同时属于这两个集合的图像。为了确定交集是否为空，我们提出等价地计算 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{C}_\alpha$之间的距离，记为 $\mathrm{dist}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_\alpha)$，并验证该距离是零还是正数。如果 $\mathrm{dist}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_\alpha) > 0$，那么可以得出结论： $\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{S} = \varnothing$，因此拒绝 H_0，转而支持 H_1。否则，如果 $\mathrm{dist}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_\alpha) = 0$，则交集中至少存在一幅图像，因此无法拒绝 H_0。

为了评估 $\mathrm{dist}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_\alpha)$，我们需要最小化元素 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{C}}$ $\mathcal{C}_\alpha$ 中的一个元素与元素 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{S}}$ $\mathcal{S}$中的一个元素之间的距离，即我们希望

$$\text{find } (\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{S}}, \hat{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{C}}) = \underset{\boldsymbol{x}_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}, \boldsymbol{x}_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}_\alpha}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_{\mathcal{C}} - \boldsymbol{x}_{\mathcal{S}}\|_2^2. \tag{2.5}$$

对于我们的问题，与（2.4）相关的保守可信集定义为 $\mathcal{C}_\alpha := \{\boldsymbol{x} \geqslant 0 \,|\, \|\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \leqslant \varepsilon$ 且 $\|\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \eta_\alpha\}$，其中 $\eta_\alpha = \|\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{x}^\dagger\|_1 + N + \sqrt{16N\log(3/\alpha)}$。本研究的一项主要贡献是将 $\mathcal{S}$ 定义为一个集合，其中描述了所有可能的、不含 PE 结构且可在最大后验估计中识别的图像。具体而言，我们希望结构区域内的像素强度分布与该结构邻域的像素强度分布相似。为此，我们提出将 $\mathcal{S}$定义为三个集合的交集，即 $\mathcal{S} := I \cap E \cap S$,

由.....给出

强度: $$I := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \geqslant 0\}, \tag{2.6}$$

能量: $$E := \{\boldsymbol{x} \mid \|\mathbf{M}\boldsymbol{x} - \mu_{\text{pix}}\|_2 < r_{\text{pix}}\}, \tag{2.7}$$

平滑性: $$S := \{\boldsymbol{x} \mid \|\mathbf{M}\nabla\boldsymbol{x} - \mu_{\nabla}\|_2 < r_{\nabla}\}, \tag{2.8}$$

其中 $\mathbf{M}$：$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N_S}$ 是一个线性算子，用于选取图像中对应于肺栓塞区域的像素。第一组 I 是正象限，以确保 $\mathcal{S}$ 中的图像为强度图像。第二组 E 控制结构中的能量，确保结构区域内的像素值接近预定义均值μ_{pix}，该均值根据其邻域选取。第三组S 是平滑性约束，用于控制结构区域内的像素强度变化，使其接近与其邻域变化相对应的均值 μ_{∇} 。对于 E 和 S，r_{pix} 和 r_{∇} 都是预定义的正数，用于控制结构区域与其邻域之间的相似度。

3 实验

本节介绍合成CT数据上的实验结果。我们将BUQO方法应用于包含肺栓塞的真实CT切片，并评估该算法在不同噪声水平和探测器配置下检测肺栓塞的能力。我们还应用BUQO方法，检测模拟正问题时产生的重建伪影是否存在。

3.1 实验设置

3.1.1 数据集描述

CTPA 使用多排探测器扫描仪（SOMATOM® Drive 和 Definition Edge，Siemens Healthineers，德国埃朗根）进行。参数如下：层厚为 128 × 0.6 mm，螺距为 1.2，旋转时间为 0.5 s，管电压为 145 kVp，并采用 120 mAs 和自动剂量调制。通过 18 G号套管针以 6 ml/s 的速度注射 60 ml 非离子型静脉造影剂（碘海醇，350 mg 碘/ml；Omnipaque 350，Amersham Health，英格兰）。通过追踪肺动脉主干中的团注触发采集，阈值为 100 亨氏单位（HU），触发后延迟 4 秒。本研究获研究伦理委员会和卫生研究局批准（IRAS编号284089）。无需取得书面知情同意。

3.1.2 测量值

根据这些数据，我们选取了两张包含肺栓塞的临床图像重建切片。利用这些切片，我们模拟数据，以研究 CT采集质量对肺栓塞检测的影响。为此

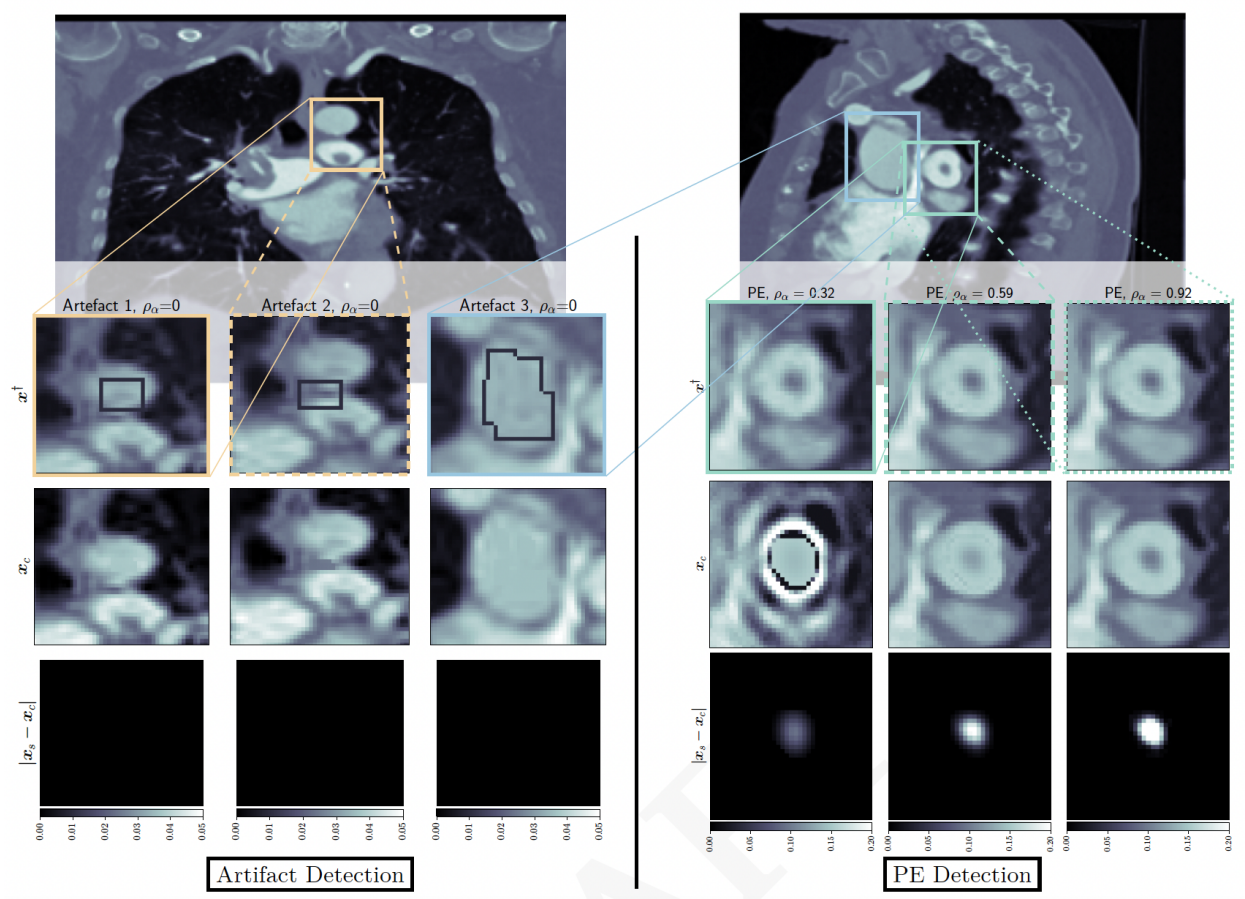

图2：**左：**BUQO用于量化重建伪影不确定性时的输出。所有伪影的正问题参数均设为 $(M_a,\ \sigma) = (50,\ 0.175)$。**右：**随着 ρ_α 的值增加，BUQO用于量化PE不确定性时的输出。正问题参数从左列到右列依次设为：$(M_a,\ \sigma) = (50,\ 0.007)$、$(M_a,\ \sigma) = (200,\ 0.035)$和$(M_a,\ \sigma) = (450,\ 0.007)$。**第一行：**聚焦于感兴趣结构的最大后验估计。**第二行：**BUQO生成的输出图像 $\boldsymbol{x}_C$。**第三行：**差异图像$|\boldsymbol{x}_S - \boldsymbol{x}_C|$。

我们考虑（2.1）中描述的模型，其前向算子为 $\boldsymbol{\phi}$，该算子采用平行束几何，并具有固定数量的探测器 $D = 450$ 和可变数量的采集角度$M_a \in \{50, 100, 200, 300, 450\}$。我们将 $\boldsymbol{w}$（2.1）中的噪声生成为大小为 $M_a \times D$、方差为 σ^2的独立同分布高斯噪声向量的一次实现。随后，我们通过求解方程（2.4）重建 CT图像，以获得最大后验估计。

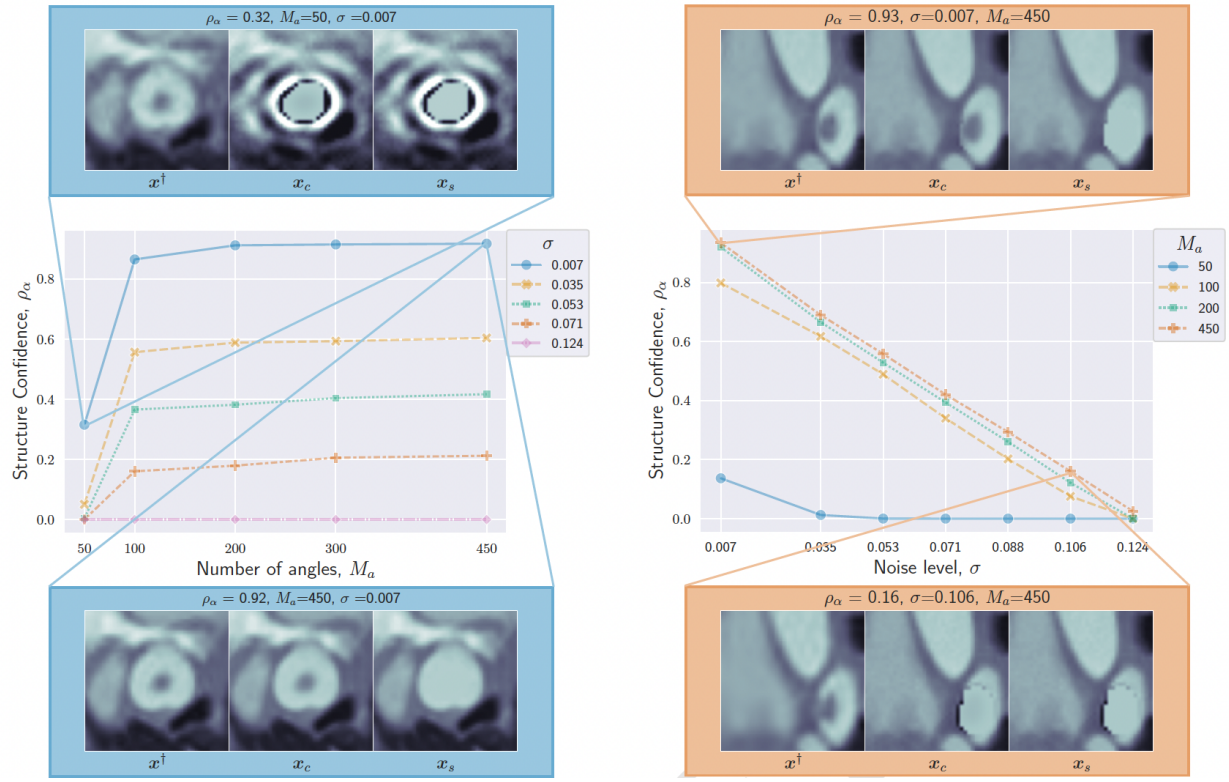

图3：结构置信度 ρ_α 随角度数量 M_a （左）和噪声水平σ （右）的变化。通过 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{C}}$、$\boldsymbol{x}_{\mathcal{S}}$和 $\boldsymbol{x}^\dagger$的定性示例展示了高、低结构置信度。两幅图均显示，随着数据质量（即角度数量和信噪比）提高，结构置信度也随之提高，我们对结构是否存在更有把握。

3.1.3 PE定义

为创建与算子**M** 在（2.7）和（2.8）中相关的掩膜，我们使用了MITK [24]。经验丰富的临床放射科医师创建了两类掩膜：用于标记CTPA扫描中真实肺栓塞位置的掩膜；以及用于标记因采集数据质量低而在CTPA扫描中出现的类肺栓塞伪影位置的掩膜。在图2 中，我们展示了两个切片中的肺栓塞，以及重建过程中产生的相关伪影。

集合 $\mathcal{S}$（如第 22.3 节所定义）描述了不存在肺栓塞的动脉的像素轮廓。在 $\mathcal{S}$ 的定义中，必须选择一些与能量和平滑度约束相关的参数（分别参见（2.7）和（2.8））。我们提出根据掩膜邻域内像素强度和梯度的直方图自动选择这些参数。具体而言，我们对感兴趣区域周围的像素进行采样，并计算这些采样像素强度的直方图。然后，在（2.7）中，将 μ_{pix} 设为该直方图的中位数，并将 r_{pix} 设为上侧 60th 百分位数与中位数之差和

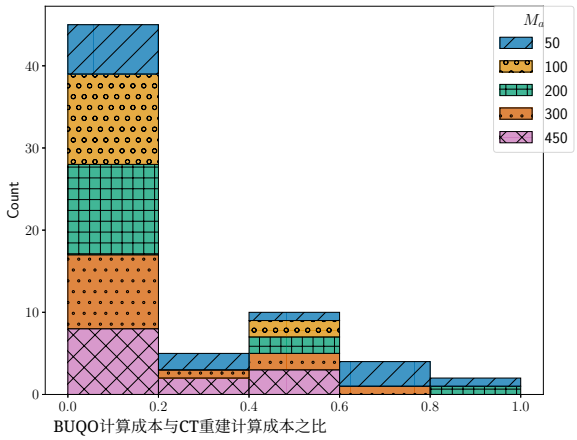

图4：直方图显示了BUQO收敛所需的前向算子评估次数与CT重建算法收敛所需的前向算子评估次数之比。数据按每次模拟所用的角度数量进行划分。

中位数与下侧 60th 百分位数之差中的较大值。计算 μ_{∇} 和 μ_{pix}（2.8）中的参数时也采用相同方法，但使用采样梯度的直方图。

3.1.4 结果解释

为了评估采集质量（即噪声水平 σ 和角度数量 M_a）对我们的方法检测真实结构能力的影响，我们引入一个结构置信度量

$$\rho_\alpha = \frac{\|\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{C}} - \hat{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{S}}\|_2}{\|\boldsymbol{x}^\dagger - \boldsymbol{x}^\dagger_{\mathcal{S}}\|_2} \in [0,1]. \tag{3.1}$$

如果 $\rho_\alpha = 0$，那么 $\text{dist}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_\alpha) = 0$，我们可以得出结论：存在一幅不包含所观察结构的图像，且该图像位于可信集 $\mathcal{C}_\alpha$中。如果 $\rho_\alpha > 0$，那么 $\text{dist}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_\alpha) > 0$，并且零假设被拒绝。 ρ_α 的值越接近1，我们就越确信应当拒绝零假设，因此感兴趣的结构存在于真实图像中。实际应用中必须考虑数值误差，因此上述两个条件应分别放宽为$\rho_\alpha \leqslant \delta$ 和 $\rho_\alpha > \delta$，其中容差 δ 由用户确定。

请注意， ρ_α 提供的信息不仅限于接受/拒绝假设检验。它可以解释为数据所确认的结构能量的百分比。因此，当对选定的类PE结构进行不确定性量化探测时， ρ_α 提供了该结构中值得信赖的能量百分比。

在图 1中，我们将所提出的方法与统计学中的传统假设检验进行比较。因此，自然会将 ρ_α 解释为假设检验中的 p值。然而，是否接受

或拒绝零假设，并不取决于对 ρ_α设置某个硬性阈值。这有两个原因。首先，传统假设检验属于频率学派方法，通常会直接采用模型的输出结果。我们的方法则是贝叶斯方法，更关注先验分布和后验分布。因此， ρ_α 告诉我们数据能够解释该结构的百分比。何时接受或拒绝零假设的阈值应视具体应用而定。其次，我们提出的方法不仅生成 ρ_α，还会生成 $\boldsymbol{x}_\mathcal{C}$ 和 $\boldsymbol{x}_\mathcal{S}$；在决定是否接受或拒绝零假设时，它们在定性方面的作用与 ρ_α的定量作用同样重要。图 2 展示了图像 $\boldsymbol{x}_\mathcal{C}$ 和差异图像 $|\boldsymbol{x}_\mathcal{C} - \boldsymbol{x}_\mathcal{S}|$，对应不同的检测器设置，因此 ρ_α的取值也不同。可以看出，非负的 ρ_α 并不一定对应放射科医师认为正常的图像。不过， ρ_α 的值非常高（接近 1）时，通常对应保真度很高的图像，能够很好地模拟真实 CT扫描。

3.2 结果

3.2.1 关于测量的置信度

我们在图3中展示了 ρ_α 对于两个评估过的PE结构，随噪声水平 σ 变化的情况（角度数量固定为 M_a，左图），以及角度数量在噪声水平固定时的变化情况（右图）。可以观察到，随着噪声水平降低、角度数量增加，算法确认存在PE的能力有所提升。

对于图3（左图）中的PE结构，我们在图2（右图）中提供了更多结果。这些图像展示了BUQO在考虑（σ， M_a） =(50, 0.007)、（σ， M_a） =(200, 0.035)和（σ， M_a） =(450, 0.007)时的结果。特别是，最后一行展示了 $\boldsymbol{x}_\mathcal{S}$ 与 $\boldsymbol{x}_\mathcal{C}$之间的差异（绝对值）。这对应于BUQO探测的残余PE结构。它可以视为量 ρ_α的二维图版本，给出经数据验证的每个像素的强度值。我们可以看到，当采集质量提高时（即 σ 降低和/或 M_a增加），经数据验证的每个像素的强度值会增加。

在图2（左）中，我们展示了 BUQO 对三个属于重建伪影的类PE结构的结果。对于这些结构，最后一行显示，数据验证的每像素强度值为 0（即 $\rho_\alpha = 0$）。因此，我们的方法无法拒绝 H_0, ，而数据也无法支持该结构的存在。

3.3 复杂度

在我们的实验中（见图4），与提供最大后验估计的重建算法相比，所提出的不确定性量化的数值复杂度通常可以忽略不计。计算瓶颈通常在于前向算子及其伴随算子的计算。复杂度以达到收敛所需的总迭代次数（即

前向算子及其伴随算子的计算次数）来评估，用于评估最大后验和 BUQO 的算法均为原始-对偶算法。所有约束均得到满足且估计结果在给定容差范围内保持稳定时，即认为已收敛。

4 讨论

我们提出了一种用于CT成像的不确定性量化方法，可用于评估CT扫描中观察到的类PE结构。我们通过改变正问题中的测量值数量和噪声水平，模拟了不同的采集环境，并利用由此得到的最大后验估计，研究所提出方法在量化类PE结构不确定性方面的表现。结果表明，随着数据质量下降，该方法的置信度也随之降低，同时能够正确识别使用低质量数据进行模拟时产生的重建伪影。在本节结尾，我们将讨论所提出方法的优缺点。

人工标注。所提出的方法需要3项输入，即最大后验估计、用于隔离调查区域的掩膜，以及表示我们先验知识的集合 $\mathcal{S}$。

目前，该掩膜需要通过耗时的人工分割获得，这项工作由经验丰富的临床放射科医师完成；这种方式可以由基于深度学习方法的自动分割算法取代 [20]。

集合 $\mathcal{S}$ 是利用图像梯度域中定义的约束构建的（不适用于出现在边界附近的伪影）；该集合通过人工采样获得（这一过程耗时）。相较之下，集合 $\mathcal{S}$ 可以通过数据驱动方法获得，例如生成式外观模型 [6]

临床应用。 急性肺栓塞会导致显著的发病率和死亡率，因此，在临床实践中提高放射科医师对急性肺栓塞阳性检出的确信度至关重要。同时，提高放射科医师将伪影识别为伪影、而非假阳性肺栓塞的确信度也很重要，以避免不恰当地进行抗凝治疗并带来不必要的出血风险。还需进一步研究，以验证所述方法在临床实践中的有效性。

参考文献

[1]Siemens Somatom 手册。
https://www.manualslib.com/manual/524455/Siemens-Somatom.html。访问日期：2022年8月30日。[2] 住院患者静脉血栓栓塞的预防，2005年。[3] Kristian Bredies 和 Dirk A Lorenz。数学图像处理。Birkh¨auser Basel，第1版，2018年。

[4] Antonin Chambolle 和 Thomas Pock。图像连续优化导论。*Acta Numerica*，25：161–319，2016年。[5] P. L. Combettes 和 J.-C. Pesquet。信号处理中的近端分裂方法。载于 H. H. Bauschke、R. Burachik、P. L. Combettes、V. Elser、D. R. Luke 和 H. Wolkowicz 编，科学与工程逆问题的固定点算法，第185–212页。施普林格，纽约，2010年。[6] Timothy F. Cootes、Gareth J. Edwards 和 Christopher J. Taylor。主动外观模型。*IEEE*模式分析与机器智能汇刊，23(6)：681–685，2001年。[7] Per Christian Hansen、Jakob Jørgensen 和 William R B Lionheart。计算机断层扫描：算法、见解与适度理论。工业与应用数学学会，2021年。[8] Jari P Kaipio 和 Erkki Somersalo。统计与计算逆问题，第160卷。施普林格，2006年。[9] Aleksander Kempny、Colm McCabe、Konstantinos Dimopoulos、Laura C Price、Michael Wilde、Rachel Limbrey、Michael A Gatzoulis 和 Stephen J Wort。1997年至2015年英格兰肺栓塞相关发病率、死亡率和出血率。《国际心脏病学杂志》，277：229–234，2019年。[10] Nick H. Kim、Marion Delcroix、Xavier Jais、Michael M. Madani、Hiro mi Matsubara、Eck- hard Mayer、Takeshi Ogo、Victor F. Tapson、Hossein-Ardeschir Ghofrani 和 David P. Jenk- ins。慢性血栓栓塞性肺动脉高压。《欧洲呼吸杂志》，53(1)，2019年。[11] N. Komodakis 和 J.-C. Pesquet。运用对偶性：求解大规模优化问题的近期原始-对偶方法概述。《*IEEE*信号处理杂志》，32(6)：31–54，2015年。[12] Felix G Meinel、John W Nance Jr、U Joseph Schoepf、Verena S Hoffmann、Kolja M Thierfelder、Philip Costello、Samuel Z Goldhaber 和 Fabian Bamberg。计算机断层扫描对急性肺栓塞的预测价值：系统综述与荟萃分析。《美国医学杂志》，128(7)：747–759，2015年。[13] M. Pereyra。近端马尔可夫链蒙特卡罗算法。《统计与计算》，26(4)：745–760，2016年。[14] M. Pereyra。基于贝叶斯置信区域的最大后验估计。《*SIAM*成像科学杂志》，10(1)：285–302，2017年。[15] A. Repetti、M. Pereyra 和 Y. Wiaux。成像中的不确定性量化：凸优化与贝叶斯分析的结合。载于*2018*年第*26*届欧洲信号处理会议（*EUSIPCO*），第2668–2672页，2018年。

[16] A. Repetti、M. Pereyra 和 Y. Wiaux。通过凸优化实现成像逆问题中可扩展的贝叶斯不确定性量化。*SIAM* 成像科学杂志，12(1):87–118，2019。[17] C. Robert。《贝叶斯选择：从决策理论基础到计算实现》。施普林格科学与商业媒体，2007。[18] C. P. Robert 和 G. Casella。施普林格蒙特卡罗统计方法。纽约，2004。[19] E. Seeram。计算机断层扫描电子书：物理原理、临床应用与质量控制。爱思唯尔健康科学，2015。[20] Shelly Soffer、Eyal Klang、Orit Shimon、Yiftach Barash、Noa Cahan、Hayit Greenspana 和 Eli Konen。深度学习在计算机断层扫描肺动脉造影肺栓塞检测中的应用：系统综述与荟萃分析。《科学报告》，11(1):1–8，2021。[21]P.-A. Thouvenin、A. Repetti 和 P. Chainais。一种用于高维逆问题的分布式吉布斯采样器及其超图结构。技术报告，2022年10月。arXiv:2210.02341。[22] Maxime Vono、Nicolas Dobigeon 和 Pierre Chainais。渐近精确的数据增广：模型、性质与算法。《计算与图形统计》，30(2):335–348，2021。[23] Philip J Withers、Charles Bouman、Simone Carmignato、Veerle Cnudde、David Grimaldi、Charlotte K Hagen、Eric Maire、Marena Manley、Anton Du Plessis 和 Stuart R Stock。X射线计算机断层扫描。《自然综述：方法入门》，1(1):1–21，2021。[24] Ivo Wolf、Marcus Vetter、Ingmar Wegner、Marco Nolden、Thomas Bottger、Mark Hastenteufel、Max Schobinger、Tobias Kunert 和 Hans-Peter Meinzer。医学影像交互工具包（MITK）：通过扩展 VTK 和 ITK，促进交互式软件创建的工具包。载于*2004*年医学影像会议：可视化、图像引导操作与显示，第5367卷，第16–27页。国际光学工程学会，2004。

作者贡献

A.M.R.：概念构思、方法学、软件、数据整理、原始稿撰写、调查研究、可视化。**H.K.**数据整理、资源、验证。**J.R.** 数据整理、资源。**J.S.** 经费获取。**J.C.L.R.**：项目管理、经费获取、资源、验证。**M.J.E.**：概念构思、方法学、撰写、审阅与编辑、监督、项目管理、经费获取。**A.R.**：概念构思、方法学、软件、撰写、审阅与编辑、监督、项目管理、经费获取。

作者声明

J.C.L.R.披露如下：演讲费——赛诺菲；咨询费——NHSX；医师服务——HeartFlow；联合创始人及股东——Heart & Lung Imaging LTD；兼职员工及股东——RadNet。J.S.曾接受阿斯利康、凯西、默沙东和杨森制药支付的演讲费、咨询费及差旅补助。

致谢

MJE 感谢英国工程与自然科学研究委员会（EP/S026045/1、EP/T026693/1、EP/V026259/1）和Leverhulme信托基金（ECF-2019-478）提供的支持。AR 感谢爱丁堡皇家学会提供的支持。所有作者均获得皇家联合医院研究能力基金的支持。