arXiv:2301.02473v1 [math-ph] 6 Jan 2023

E^2 平面E2中自治动力系统的三次第一积分：一种算法方法

Antonios Mitsopoulos[1,a)] 和 Michael Tsamparlis[2,3,b)]

[1]物理学院，天文学－天体物理学－力学系，雅典大学，Panepistemiopolis，雅典 157 83，希腊[2]NITheCS，国家理论与计算科学研究所，夸祖鲁-纳塔尔，南非[3]TCCMMP，理论与计算凝聚态物质与材料物理组，夸祖鲁-纳塔尔大学化学与物理学院，彼得马里茨堡，南非

a)通信作者：antmits@phys.uoa.grb)电子邮箱：mtsampa@phys.uoa.gr

摘要

在近期的一篇论文中（A. Mitsopoulos 和 M. Tsamparlis，《几何与物理学杂志》170，104383，2021 年），作者给出了一条一般定理，该定理提供了一种算法方法，可根据系统动力学方程所定义的动能度量的对称性，计算自治动力系统的第一积分（FI）。在本文中，我们应用这一定理，计算具有两个自由度的自治保守牛顿动力系统的三次第一积分。我们表明，关于这一主题的已有结果（这些结果通过多种不同方法获得），以及本文推导出的其他结果，都可以通过该定理提供的单一算法方法得到。研究结果汇总于四张表中，可作为此类可积与超可积势的最新参考。我们得到的结果对应于自由参数的特殊取值；因此，其他研究者可采用本文所发展的方法，通过对参数作出其他恰当选择，发现新的可积与超可积势。

1 引言

具有 n 个自由度的哈密顿动力系统若存在 n 个（函数意义上）独立且彼此对合的第一积分（FI），则称其为刘维尔可积[1] 。若独立 FI 的数量为 $2n-1$，则该系统称为超可积系统。彼此对合的独立 FI 最多有 n 个。只有当所考虑的第一积分为自治时，独立第一积分的最大数量才是 $2n-1$ 。若使用含时第一积分，则可以超过这一最大限值。然而，要实现超可积性，我们始终需要 $2n-1$ 个独立的（自治或含时）第一积分。

原则上，刘维尔可积动力系统的方程组的解可以通过求积给出：既可以根据 n 个第一积分构造作用角坐标，也可以直接利用第一积分，通过直接积分求出通解。

大多数研究仅考察欧几里得平面 E^2 上具有两个自由度的自治保守动力系统的可积性。这些系统已经具有哈密顿二次第一积分（QFI）；因此，要确立其可积性，还需要一个与之对合的独立第一积分。这个第一积分必须是任意阶的自治第一积分。它不能是含时第一积分，因为 H 与含时第一积分 J 的泊松括号（PB）不为零；事实上，我们有 $\{H,J\}=\frac{\partial J}{\partial t}\neq 0$。然而，如果除自治第一积分外，还存在另一个独立的含时第一积分，那么该系统便是

超可积。我们注意到，只要含时第一积分彼此对合，就可以用它们来实现动力系统的可积性。一般而言，任意阶的含时第一积分主要用于确立超可积性；在这种情况下，与哈密顿量的泊松括号不为零并不是问题。

由此可见，我们需要一种统一、系统化（即算法化）的方法，以求得任意阶、适用于任意空间（平坦或弯曲）的时变或自治第一积分。

迄今采用的方法 prop基于以下 g 共同策略 gy:
将第一积分的确定问题转化为数学另一领域中的一个等价问题，在该领域中已有可用于解决此问题的方法。

这一策略在实践中通过两种主要方法得以实现：（a）李对称性方法（点对称性和广义李对称性）；（b）直接方法。

微分方程的李对称是方程解空间中的一种点变换，它保持方程解的集合不变。虽然李对称有时可能导出第一积分[2,3], ，但通常并非如此，因此必须使用一类称为诺特对称的特殊李对称；诺特对称的定义还要求其满足诺特条件。每个诺特对称都会导出一个诺特第一积分。一般而言，诺特对称方法是确定第一积分的主要工具。

在李对称方法中，通常研究自治保守动力系统的可积性，采用哈密顿方法，并考虑线性第一积分（LFIs）、二次第一积分、三次第一积分以及较少涉及的四次第一积分（QUFIs）[4,5,6,7,8,9]。参考文献5和6提出的一般方法尤其值得关注，其中讨论了二次第一积分和三次第一积分（以及其他内容）。参考文献5建立了自治保守动力系统的哈密顿方程的自治第一积分与哈密顿-雅可比方程的可容许李-巴克伦德对称性之间的同构。这种同构表达了任意第一积分 I 的导数 $\frac{dI}{dt}$ 如何用哈密顿-雅可比形式中使用的正则坐标表示。该结果具有普遍性，适用于所有有限自由度的系统，并可用于导出任意阶的（时变及自治）第一积分。

在直接方法中，不使用李/诺特对称性，而是直接采用条件 $\frac{dI}{dt}=0$，其中假设 I 是一个关于速度的多项式形式的第一积分。随后，按照参考文献 5 中的方法处理量 $S,_a$，将哈密顿主函数 S 替换为 $\dot{q}^a$ ，并在量 $\ddot{q}^a$ 出现时，利用动力学方程将其替换。再次得到一个方程组，其中包含定义 I 为 $\dot{q}^a$ 的多项式形式的未知系数，以及刻画该动力系统的元素，即势 V 和非保守广义力 F^a。该方程组的解给出由 I 定义的第一积分类。直接方法似乎最早由 J. Bertrand[10] 在可积曲面的研究中提出，之后 Whittaker[11] 将其用于确定具有两个自由度的可积自治保守牛顿系统。随着时间推移，各种作者[3,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24] 都使用过这种方法。

关于求解由条件 $\frac{dI}{dt}=0$ 得到的方程组，人们采用了两种方法：代数方法和几何方法。

在代数方法中，使用标准方法求解方程组，即直接积分和／或变量替换[25,26,27,28]。正如预期的那样，即使在欧几里得空间中，只要自由度较少，或者第一积分的阶数高于二次第一积分，代数方法就会变得不可行。

另一方面，几何方法利用了黎曼几何中关于度量共形变换的结果。由于这些结果具有协变性，因此可以系统地计算弯曲空间中任意阶的自治或时变第一积分。几何方法根据所考虑的黎曼度量，采用了两种不同的途径。

雅可比度量

众所周知，由动力学方程[29,30,31]定义的雅可比度量的测地线与动力系统的轨迹／解相重合。由于黎曼空间的测地线方程的任意阶第一积分均可通过该度量的 Killing 张量（KTs）计算得到（例如参见参考文献 13），因此，要计算动力系统的任意阶第一积分，只需计算雅可比度量的 Killing 张量。

通过这种方法，已发现许多新的经典第一积分和准唯一第一积分[31,32,33]。然而，雅可比度量存在一些缺点：a. 它不是常曲率度量（我们知道如何计算其 Killing 张量），且 b. 它假设系统的“物理时间”重新参数化为所谓的“雅可比

时间”。这两点都使得计算雅可比度量的 Killing 张量，进而计算高阶第一积分，变得困难。

动能度量

动能度量由动力学方程的动能定义，并且通过要求$\frac{dI}{dt}=0$，根据该度量的对称性（共形变换）“求解”所得的方程组。Katzin[3,4,13,34] 的著作以及近期其他学者的研究[19,22,23,24]中广泛采用了这种方法。

这种方法的困难同样在于高阶Killing张量的计算。然而，与雅可比度量的情形相比，情况要容易得多。例如，对于所有动力学方程可写成 $\ddot{q}^a = F^a(t,q)$形式的完整牛顿系统，动能度量是平坦欧几里得度量，其Killing张量是已知的（它们可直接由该度量的Killing向量（KVs）得到）。这种方法也可以直接用于狭义相对论问题，无需任何改变，只需改变度量的度规号差。例如，在标量场宇宙学中，人们使用动能度量来确定由平坦的弗里德曼–勒梅特–罗伯逊–沃克（FRW）度量定义的微型超空间度量的第一积分（诺特对称性）[35]。

应当强调的是，只要某些量能够计算，上述所有方法原则上都能在任意空间中产生任意阶的自治第一积分和含时第一积分。

在回顾了确定动力系统第一积分所采用的一般方法和实践之后，我们继续介绍已有结果。已知的具有两个自由度的可积自治保守动力系统，其主要来源是参考文献 26 的综述文章以及近期的补充结果[32,33,36]。在参考文献 26 的综述文章中，通常是通过自治守恒第一积分来确立所研究动力系统的可积性/超可积性。文中没有涉及含时第一积分，而偶尔会提及经典第一积分，准唯一第一积分则较少。如上所述，含时第一积分同样适用于确立可积性[37,38]；高阶第一积分也一样。这些事实凸显了采用系统方法计算任意阶自治第一积分和含时第一积分的必要性。

在一篇近期论文中（见参考文献24），作者采用直接方法和动能度量方法，给出了一般定理（见参考文献24中的定理1），用于确定任意阶的自治和含时第一积分。本文应用该定理，确定二维（2d）牛顿自治保守系统的三阶第一积分。我们得到以下结果：

a. 我们重新得到（据我们所知）迄今已知的、允许存在CFI的可积与超可积势 $V(x,y)$。

b. 我们发现，某些已知的CFI实际上是我们所确定的其他更一般CFI的特殊情形，对应于参数的某些取值。c. 我们证明，一些原被认为是可积的势实际上是超可积的。d. 我们发现了已知超可积势的新含时CFI。

本文结构如下。第2节陈述定理1，该定理确定一般形式(1)的自治完整动力系统在任意n维黎曼空间中的自治和含时CFI，其中度量为系统的动能度量。第3节简要回顾常曲率空间的Killing张量的一些基本结果。第4节应用这些结果，计算 E^2的几何量；这些量是计算定理1中的CFI $J_\ell^{(3,1)}$,$J_\ell^{(3,2)}$ 和 $I_e^{(3)}$所必需的。第5节给出一般性指导，说明如何应用定理1来确定在 E^2 中允许存在CFI的可积与超可积势 $V(x,y)$（QFI的情形已在文献中得到广泛研究）。第6节讨论具有 $\ell=0$的CFI $J_0^{(3,2)}$。本节结果汇总于表1和表2，其中列出了允许存在 $J_0^{(3,2)}$ 类型CFI的可积与超可积势。随后，第7节以相同方式讨论具有$\ell=1$的CFI $J_1^{(3,1)}$。允许存在 $J_1^{(3,1)}$ 类型含时CFI的超可积势 $V(x,y)$汇总于表3。第8节讨论CFI $I_e^{(3)}$，并发现一个新的超可积势 $V(x,y)$，列于表4。需要指出的是，这些表中标明了哪些可积/超可积势是新的，哪些是对已有势的推广。最后，第9节给出结论。

记号：本文采用爱因斯坦求和约定，圆括号（方括号）表示对括号内的指标进行对称化

（反对称化），竖线之间的指标不参与反对称化或对称化；逗号表示偏导数，分号表示黎曼协变导数。

2 经典第一积分的算法确定

参考文献24中的一般定理1给出了关于 $m=3$ （经典第一积分）的以下定理。

定理1 自治的 n维完整动力系统[39] （不一定是保守系统）

$$\ddot{q}^a = -\Gamma^a_{bc}(q)\dot{q}^b\dot{q}^c - Q^a(q) \tag{1}$$

其中， q^a 是构形空间的坐标，$\dot{q}^a = \frac{dq^a}{dt}$ 、 t 是时间变量， Γ^a_{bc}（q）是由系统动能定义的动能度量 γ_{ab}（q）的黎曼联络系数，而 $-Q^a$（q）是广义力。该系统具有以下三个相互独立的经典第一积分：

经典第一积分1。

$$\begin{aligned} J^{(3,1)}_{\ell} &= \left(-\frac{t^{2\ell-1}}{2\ell-1}L_{(2\ell-2)(i_1i_2;i_3)} - ... - \frac{t^3}{3}L_{(2)(i_1i_2;i_3)} - tL_{(0)(i_1i_2;i_3)}\right)\dot{q}^{i_1}\dot{q}^{i_2}\dot{q}^{i_3} + \left(t^{2\ell}L_{(2\ell)i_1i_2} + \right. \\ &+ ... + t^2L_{(2)i_1i_2} + L_{(0)i_1i_2}\left.\right)\dot{q}^{i_1}\dot{q}^{i_2} + \left(t^{2\ell-1}L_{(2\ell-1)i_1} + ... + t^3L_{(3)i_1} + tL_{(1)i_1}\right)\dot{q}^{i_1} + \\ &+ \frac{t^{2\ell}}{2\ell}L_{(2\ell-1)c}Q^c + ... + \frac{t^2}{2}L_{(1)c}Q^c + G(q) \end{aligned} \tag{2}$$

其中， $\ell = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ L_{(N)(i_1i_2;i_3)}$（$q$）对于 $N=0,\ 2,\ ...,\ 2\ell-2$ 是三阶 Killing 张量， $L_{(2\ell)i_1i_2}$（q）是二阶 KT，而对称张量 $L_{(N)i_1i_2}$（q）、向量 $L_{(A)i_1}$（q）、 $A=1$、 3、 $...2\ell-1$ 以及函数 G（q）满足以下条件：

$$L_{(k-1)(i_1;i_2)} = -\frac{3}{k-1}L_{(k-2)(i_1i_2;i_3)}Q^{i_3} - kL_{(k)i_1i_2},\ \ k=2,4,...,2\ell \tag{3}$$

$$\left(L_{(2\ell-1)c}Q^c\right)_{,i_1} = 4\ell L_{(2\ell)i_1i_2}Q^{i_2} \tag{4}$$

$$\left(L_{(k-2)c}Q^c\right)_{,i_1} = 2(k-1)L_{(k-1)i_1i_2}Q^{i_2} - k(k-1)L_{(k)i_1},\ \ k=3,5,...,2\ell-1 \tag{5}$$

$$G_{,i_1} = 2L_{(0)i_1i_2}Q^{i_2} - L_{(1)i_1}. \tag{6}$$

CFI 2。

$$\begin{aligned} J^{(3,2)}_{\ell} &= \left(-\frac{t^{2\ell}}{2\ell}L_{(2\ell-1)(i_1i_2;i_3)} - ... - \frac{t^2}{2}L_{(1)(i_1i_2;i_3)} + L_{(0)i_1i_2i_3}\right)\dot{q}^{i_1}\dot{q}^{i_2}\dot{q}^{i_3} + \left(t^{2\ell+1}L_{(2\ell+1)i_1i_2} + \right. \\ &+ ... + t^3L_{(3)i_1i_2} + tL_{(1)i_1i_2}\left.\right)\dot{q}^{i_1}\dot{q}^{i_2} + \left(t^{2\ell}L_{(2\ell)i_1} + ... + t^2L_{(2)i_1} + L_{(0)i_1}\right)\dot{q}^{i_1} + \\ &+ \frac{t^{2\ell+1}}{2\ell+1}L_{(2\ell)c}Q^c + ... + \frac{t^3}{3}L_{(2)c}Q^c + tL_{(0)c}Q^c \end{aligned} \tag{7}$$

其中， $\ell = 0$、1、2、...、 $L_{(0)i_1i_2i_3}(q)$ 和 $L_{(N)(i_1i_2;\ i_3)}(q)$（其中 $N=1$、3...、 $2\ell-1$）是三阶 Killing 张量，$L_{(2\ell+1)i_1i_2}(q)$ 是二阶 KT，而对称张量 $L_{(N)i_1i_2}(q)$ 和向量 $L_{(A)i_1}(q)$、 $A=0$、2、...、 2ℓ 满足以下条件：

$$L_{(0)(i_1;i_2)} = 3L_{(0)i_1i_2i_3}Q^{i_3} - L_{(1)i_1i_2} \tag{8}$$

$$L_{(k-1)(i_1;i_2)} = -\frac{3}{k-1}L_{(k-2)(i_1i_2;i_3)}Q^{i_3} - kL_{(k)i_1i_2},\ \ k=3,5,...,2\ell+1 \tag{9}$$

$$\left(L_{(2\ell)c}Q^c\right)_{,i_1} = 2(2\ell+1)L_{(2\ell+1)i_1i_2}Q^{i_2} \tag{10}$$

$$\left(L_{(k-2)c}Q^c\right)_{,i_1} = 2(k-1)L_{(k-1)i_1i_2}Q^{i_2} - k(k-1)L_{(k)i_1},\ \ k=2,4,...,2\ell. \tag{11}$$

CFI 3。

$$I_e^{(3)} = e^{\lambda t}\left(-L_{(i_1 i_2;i_3)}\dot{q}^{i_1}\dot{q}^{i_2}\dot{q}^{i_3} + \lambda L_{i_1 i_2}\dot{q}^{i_1}\dot{q}^{i_2} + \lambda L_{i_1}\dot{q}^{i_1} + L_{i_1}Q^{i_1}\right) \tag{12}$$

其中 $\lambda \neq 0$, $L_{(i_1 i_2;\ i_3)}(q)$ 是三阶 Killing 张量，而对称张量 $L_{i_1 i_2}(q)$ 和向量 $L_{i_1}(q)$ 满足以下条件：

$$L_{(i_1;i_2)} = -\frac{3}{\lambda}L_{(i_1 i_2;i_3)}Q^{i_3} - \lambda L_{i_1 i_2} \tag{13}$$

$$(L_c Q^c)_{,i_1} = 2\lambda L_{i_1 i_2}Q^{i_2} - \lambda^2 L_{i_1}. \tag{14}$$

参考文献23中关于二次第一积分的定理3，可视为定理1的一个子情形：当三阶 Killing 张量$L_{(0)i_1 i_2 i_3}$ 消失，且假设所有对称张量 $L_{(N)i_1 i_2}$ 均为二阶 KT 时，即可得到该定理。

应用定理1需要了解动能度量的二阶和三阶 Killing 张量。平直空间中任意阶 Killing 张量的协变形式可见参考文献19的表1。然而，在本研究中，除 Killing 张量外，我们还需要定理1中提到的对称张量；因此，协变形式并无用处。下一节（第3节）中，我们回顾一些关于 Killing 张量的一般结果；随后在第4节中，给出与欧几里得空间 E^2 相关的所需几何张量的坐标形式。

3 常曲率空间的 Killing 张量（KTs）

一个 m 阶的 n 维黎曼空间（V^n, g_{ab}）中的 Killing 张量是一个类型为 $(0, m)$ 的全对称张量[40]，其定义条件为

$$C_{(i_1 i_2 \ldots i_m;k)} = 0. \tag{15}$$

我们有如下结果[15,41,42,43,44,45]。

命题2 在一般的 n 维（伪黎曼）流形 V^n 上， m 阶 Killing 张量的（向量）空间 $\mathcal{K}^{(m,n)}$ 的维数为

$$\dim\left(\mathcal{K}^{(m,n)}\right) \leq \frac{(n+m-1)!(n+m)!}{(n-1)!n!m!(m+1)!}$$

当且仅当 V^n 具有常曲率时，等号成立。此外，在常曲率空间的情形下，由于不存在真仿射共线变换（AC）和射影共线变换（PC），所有 Killing 张量均可表示为 Killing 向量的对称张量积之和。

我们注意到，在维数为 n 的空间中， $m = 2$ 阶 Killing 张量的数量 N_m ，3，4 为

$$N_2 \leq \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12},\ N_3 \leq \frac{n(n+1)^2(n+2)^2(n+3)}{3!4!},\ N_4 \leq \frac{n(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2(n+4)}{4!5!}.$$

对于 E^2，我们有 $N_2 = 6$, $N_3 = 10$, $N_4 = 15$；而对于 E^3 ，我们得到 $N_2 = 20$, $N_3 = 50$, $N_4 = 105$。

如果一个黎曼流形存在 n_0 Killing向量（梯度型和非梯度型） X_{Ia}，其中 $I = 1, 2, ..., n_0$，那么可以按如下方式构造 m 阶的一般 Killing 张量：

$$K_{i_1 \ldots i_m} = \alpha^{I_1 \ldots I_m} X_{I_1(i_1} X_{|I_2|i_2} \ldots X_{|I_m|i_m)} \tag{16}$$

这里采用爱因斯坦求和约定，且 $1 \leq I_1 \leq I_2 \leq \ldots \leq I_m \leq n_0$。根据命题2，在常曲率空间中，所有 m 阶的 Killing张量都具有形式 (16)。我们注意到，一般而言，并非所有对称化乘积都线性无关。这意味着参数 $\alpha^{I_1 \ldots I_m}$ 并非全部相互独立。此外，这些参数的数量总是大于或等于（$n = 2$）命题2中计算得到的相应 Killing 张量空间的维数（另见参考文献42中式 (2.12) 下方的一条有用注释）。

在接下来的章节中，我们将这些结果应用于 E^2 的情形，并在其中计算经典第一积分。

4 E^2的几何量

E^2 具有两个梯度型 Killing 向量 ∂_x、∂_y，其生成函数分别为 x、y，以及一个非梯度型 Killing 向量（旋转）$y\partial_x - x\partial_y$。这些向量统记为

$$L_a = \begin{pmatrix} b_1 + b_3 y \\ b_2 - b_3 x \end{pmatrix} \tag{17}$$

其中 b_1、b_2 和 b_3 为任意常数，也可以为零。

Killing向量的对称张量积可生成 E^2 中各种阶数的 Killing 张量。

4.1 E^2中的二阶 Killing张量

- E^2 中的二阶一般 Killing 张量为[46,47]

$$C_{ab} = \begin{pmatrix} \gamma y^2 + 2\alpha y + A & -\gamma xy - \alpha x - \beta y + C \\ -\gamma xy - \alpha x - \beta y + C & \gamma x^2 + 2\beta x + B \end{pmatrix} \tag{18}$$

其中 α、β、γ、A、B 和 C 为任意常数。

- 生成形式为 $C_{ab} = L_{(a;b)}$ 的 E^2 的 Killing 张量的向量 L_a 为[48]

$$L_a = \begin{pmatrix} -2\beta y^2 + 2\alpha xy + Ax + (2C - a_1)y + a_2 \\ -2\alpha x^2 + 2\beta xy + a_1 x + By + a_3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

其中，a_1、a_2 和 a_3 也都是任意常数。

- 由向量 (19) 在 E^2 中生成的 Killing 张量 $C_{ab} = L_{(a;b)}$ 为

$$C_{ab} = L_{(a;b)} = \begin{pmatrix} L_{x,x} & \frac{1}{2}(L_{x,y} + L_{y,x}) \\ \frac{1}{2}(L_{x,y} + L_{y,x}) & L_{y,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha y + A & -\alpha x - \beta y + C \\ -\alpha x - \beta y + C & 2\beta x + B \end{pmatrix}. \tag{20}$$

这些 Killing 张量是 $\gamma = 0$ 时一般 Killing 张量 (18) 的特殊情形。

注意，向量 L_a（由 (19) 给出）依赖于八个参数，而生成的 Killing 张量 $L_{(a;b)}$ 仅依赖于其中五个参数，即 α、β、A、B 和 C。还要注意，向量 L_a 的其余 $8-5=3$ 个参数 a_1、a_2、a_3 生成了 E^2 中的 Killing 向量，而这些向量生成零 Killing 张量。

4.2 E^2 中三阶 Killing 张量

- E^2 中的三阶一般 Killing 张量 C_{abc} 具有独立分量[49,50]

$$\begin{aligned} C_{111} &= a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 \\ C_{112} &= -a_1 xy^2 - 2a_2 xy + a_5 y^2 - a_3 x + a_8 y + a_9 \\ C_{221} &= a_1 x^2 y + a_2 x^2 - 2a_5 xy - a_8 x - a_6 y + a_{10} \\ C_{222} &= -a_1 x^3 + 3a_5 x^2 + 3a_6 x + a_7 \end{aligned} \tag{21}$$

其中 a_K，$K = 1$、2、.....、10 均为任意常数[51]。

- E^2 中的可约 Killing 张量 $C_{abc} = L_{(ab;c)}$ 由以下对称张量生成

$$\begin{aligned} L_{11} &= 3b_2 xy^2 + 3b_5 y^3 + 3b_3 xy + 3(b_{10} + b_8)y^2 + b_4 x + 3b_{15} y + b_{12} \\ L_{12} &= -3b_2 x^2 y - 3b_5 xy^2 - \frac{3}{2}b_3 x^2 - \frac{3}{2}(2b_{10} + b_8)xy - \frac{3}{2}b_6 y^2 + \frac{3}{2}(b_9 - b_{15})x - \frac{3}{2}b_{11} y + b_{13} \\ L_{22} &= 3b_2 x^3 + 3b_5 x^2 y + 3b_{10} x^2 + 3b_6 xy + 3(b_1 + b_{11})x + b_7 y + b_{14} \end{aligned} \tag{22}$$

其中 b_1，b_2,.....，b_{15} 为任意常数。所生成的 Killing 张量的独立分量为

$$\begin{aligned} L_{(11;1)} &= 3b_2 y^2 + 3b_3 y + b_4 \\ L_{(11;2)} &= -2b_2 xy + b_5 y^2 - b_3 x + b_8 y + b_9 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_{(22;1)} &= b_2x^2 - 2b_5xy - b_8x - b_6y + b_1 \\
L_{(22;2)} &= 3b_5x^2 + 3b_6x + b_7.
\end{aligned} \tag{23}
$$

我们注意到，对于 $a_1 = 0$，Killing 张量 (23) 只是一般 Killing 张量 (21) 的一个子情形。

此外，我们看到，由式（22）给出的对称张量 L_{ab} 的十五个参数中，前九个参数 $b_1, b_2, ..., b_9$ 生成可约 Killing 张量 $L_{(ab;c)}$，而剩余六个参数 $b_{10}, b_{11}, ..., b_{15}$ 则生成一般形式（18）的所有二阶Killing张量，其中 $\alpha = \frac{3}{2}b_{15}$、$\beta = \frac{3}{2}b_{11}$、$\gamma = 3b_{10}$、$A = b_{12}$、$B = b_{14}$ 和 $C = b_{13}$。

5 允许存在 CFI 的 $V(x, y)$ 势

参考文献 26 中给出了自治守恒第一积分、经典第一积分和准唯一第一积分意义下已知的 $V(x, y)$ 势可积与超可积势 E^2。此后，该领域通过不同技术取得了许多新成果。因此，有必要通过一种统一的系统方法，更新并充实现有的、聚焦于经典第一积分的综述（关于二次第一积分的情形已得到广泛探讨）。以下各节将通过定理1来完成这一工作。

5.1 工作方法

我们将定理1应用于形如(1)的二维牛顿自治保守系统。在这种情形下，有 $q^a = (x, y)$、$\Gamma^a_{bc} = 0$ 和 $Q^a = V,^a$，其中 $V(x, y)$ 表示势。动能度量 $\gamma_{ab} = \delta_{ab} = diag(1, 1)$。对于此类系统，一个 QFI 是哈密顿量；因此，为证明该系统是（刘维尔）可积的，还需要另一个相互对合的独立自治第一积分。如果系统是可积的，则还需要另一个独立的自治第一积分或含时第一积分，以确立其超可积性。

我们所采用的算法包括以下步骤：1）代入定理1中的量 $q^a = (x, y)$、$Q^a = V,^a$ 和 $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$。2）对于定理1的三种情形，即 CFI 1、CFI 2 和 CFI 3，分别计算 CFI 的一般表达式及其相应的偏微分方程组（PDEs）。3）利用 E^2 的几何量（如第4节所确定），以确定所得偏微分方程组中的相关张量量。具体而言，相关对称张量 $L_{(N)i_1i_2}$ 由(18)或(22)给出，而三阶 Killing 张量 $L_{(0)i_1i_2i_3}$ 由(21)给出。随后，偏微分方程组中的未知量为势 V、向量 $L_{(N)i_1}$、函数 G 以及定义几何量的自由参数。4）由于无法求得条件方程组的通解，因此固定 CFI 的时间依赖性次数 ℓ，并针对自由参数的特殊取值求解所得偏微分方程组。5）与已有结果进行比较，并得出相应的结论。

在以下各节中，我们将展示该算法的工作方式。

6 CFI $J_0^{(3,2)}$ ($\ell = 0$)

We 令 $L_{(0)abc} = L_{abc}$、$L_{(1)ab} = C_{ab}$ 和 $L_{(0)a} = B_a$。然后，$\ell = 0$ 的 CFI (7) 变为 s

$$
J_0^{(3,2)} = L_{abc}\dot{q}^a\dot{q}^b\dot{q}^c + tC_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b + B_a\dot{q}^a + tB_aV^{,a} \tag{24}
$$

其中，L_{abc} 是由 (21) 给出的三阶 Killing 张量，C_{ab} 是由 (18) 给出的二阶 KT，且向量 B_a 满足以下条件：

$$
\begin{aligned}
B_{(a;b)} &= 3L_{abc}V^{,c} - C_{ab} &(25)\\
\left(B_cV^{,c}\right)_{,a} &= 2C_{ab}V^{,b}. &(26)
\end{aligned}
$$

由第4节可得：

$$
C_{ab} = \begin{pmatrix} \gamma y^2 + 2\alpha y + A & -\gamma xy - \alpha x - \beta y + C \\ -\gamma xy - \alpha x - \beta y + C & \gamma x^2 + 2\beta x + B \end{pmatrix} \tag{27}
$$

and

$$\begin{aligned} L_{111} &= a_1y^3+3a_2y^2+3a_3y+a_4 \\ L_{112} &= -a_1xy^2-2a_2xy+a_5y^2-a_3x+a_8y+a_9 \\ L_{221} &= a_1x^2y+a_2x^2-2a_5xy-a_8x-a_6y+a_{10} \\ L_{222} &= -a_1x^3+3a_5x^2+3a_6x+a_7. \end{aligned} \tag{28}$$

将量 (27) 和 (28) 代入 CFI 条件 (25) 和 (26)，可得到一个包含六个偏微分方程的方程组（包括 (26) 的可积性条件——见方程 (278)），其中有三个未知函数 $B_a(x,y)$ 和$V(x,y)$。该方程组无法在一般情况下求解；因此，我们考虑特殊情形。

6.1 情形 $C_{ab}=0$

在这种情形下，第一积分 (24) 中的二次项消失；因此，我们期望找到新的二维可积势$V(x,y)$，它们存在额外的经典第一积分，但不存在二次第一积分。

方程 (24) 变为

$$J_0^{(3,2)}(C_{ab}=0)=L_{abc}\dot{q}^a\dot{q}^b\dot{q}^c+B_a\dot{q}^a+st \tag{29}$$

其中 L_{abc} 是由 (28) 给出的三阶 Killing 张量， s 是任意常数，而向量 B_a 满足以下条件：

$$B_{(a;b)} = 3L_{abc}V^{,c} \tag{30}$$
$$B_aV^{,a} = s. \tag{31}$$

我们注意到，对于 $s=0$，经典第一积分 (29) 是标准的自治守恒第一积分 (3.3.1)，已在参考文献 26 中讨论；而条件 (30) 和 (31) 与参考文献 26 中的方程 (3.3.7) - (3.3.10) 一致。按照参考文献 26 中的记号，我们有$A=L_{111}$, $B=3L_{112}$, $C=3L_{221}$, $D=L_{222}$, $F=B_1$和 $G=B_2$。

方程组 (30) - (31) 包含四个偏微分方程，涉及三个未知函数 $B_1(x,y)$、 $B_2(x,y)$、$V(x,y)$ 和十一个自由常数，即 $s,a_1,a_2,...,a_{10}$。即使是这个方程组也无法在一般情况下求解，因此我们寻找特殊解。

6.2 情形 $C_{ab}=0$, $B^a=Z(V^{,y},-V^{,x})$ - Holt 方法

Holt 首先在参考文献25中引入了这种情形，以讨论存在经典第一积分的二维势的可积性。其形式如下。

由于 $C_{ab}=0$，该 CFI 具有形式 (29)，其相关条件为方程 (30) 和 (31)。

我们假设向量[5]

$$B_a=Z\begin{pmatrix} V_{,y} \\ -V_{,x} \end{pmatrix}^2 \tag{32}$$

其中 $Z(x,y)$ 是一个任意函数。

将 (32) 代入 (31)，我们得到 $s=0$，而剩余的条件 (30) 给出：

$$Z_{,x}V_{,y}+ZV_{,xy}-3L_{111}V_{,x}-3L_{112}V_{,y} = 0 \tag{33}$$
$$Z(V_{,yy}-V_{,xx})+Z_{,y}V_{,y}-Z_{,x}V_{,x}-6L_{112}V_{,x}-6L_{221}V_{,y} = 0 \tag{34}$$
$$-Z_{,y}V_{,x}-ZV_{,xy}-3L_{221}V_{,x}-3L_{222}V_{,y} = 0. \tag{35}$$

这些是参考文献 26 中的方程 (3.3.16) - (3.3.18)。我们有三个偏微分方程 (33) - (35)，涉及两个未知函数$Z(x,y)$、 $V(x,y)$以及十个自由参数 a_1, a_2, ..., a_{10}。

将方程 (33) 和 (35) 相加，可得以下方程[53]:

$$(3L_{111}+3L_{221}+Z_{,y})V_{,x}+(3L_{222}+3L_{112}-Z_{,x})V_{,y}=0 \tag{36}$$

然后，我们需要求解三个偏微分方程 (33)、(34) 和 (36)。

偏微分方程 (36) 求解为

$$Z(x,y)=F(V)+Y(x,y) \tag{37}$$

其中， $F(V)$ 是势 $V(x,y)$ 的任意（光滑）函数，而函数 $Y(x,y)$ 满足以下方程组：

$$\begin{aligned} Y_{,y} &= -3(L_{111}+L_{221}) && (38)\\ Y_{,x} &= 3(L_{222}+L_{112}). && (39)\end{aligned}$$

将 L_{abc} 代入式（28），对方程组（38）—（39）积分，得到函数

$$\begin{aligned} Y(x,y) &= -\frac{3}{4}a_1(x^2+y^2)^2+3(a_5x-a_2y)(x^2+y^2)+\frac{3}{2}(3a_6-a_3)x^2-\frac{3}{2}(3a_3-a_6)y^2+\\ &\quad +3a_8xy+3(a_7+a_9)x-3(a_4+a_{10})y+c \end{aligned} \tag{40}$$

其中， c 是一个任意常数。

将解（37）代入其余偏微分方程（33）和（34），得到方程组[54]：

$$YV_{,xy}+3L_{222}V_{,y}-3L_{111}V_{,x} = -(FV_{,y})_{,x}=-F'V_{,x}V_{,y}-FV_{,xy} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} Y(V_{,yy}-V_{,xx})-3\left(L_{111}+3L_{221}\right)V_{,y}-3\left(L_{222}+3L_{112}\right)V_{,x} &= (FV_{,x})_{,x}-(FV_{,y})_{,y}\\ &= -F'\left[(V_{,y})^2-(V_{,x})^2\right]-F(V_{,yy}-V_{,xx}) \end{aligned} \tag{42}$$

其中， $F'\equiv\frac{dF}{dV}$。由式 $N(V)$引入函数

$$N'\equiv\frac{dN}{dV}=F(V) \tag{43}$$

方程组（41）—（42）变为[55]：

$$YV_{,xy}+3L_{222}V_{,y}-3L_{111}V_{,x} = -N(V)_{,xy} \tag{44}$$

$$Y(V_{,yy}-V_{,xx})-3\left(L_{111}+3L_{221}\right)V_{,y}-3\left(L_{222}+3L_{112}\right)V_{,x} = N(V)_{,xx}-N(V)_{,yy}. \tag{45}$$

这是我们为计算允许具有（29）形式的经典第一积分的势 $V(x,y)$ 而必须求解的方程组[56]。由于我们没有方程组（44）—（45）的通解 $V(x,y)$，因此考虑关于十一个自由参数 a_1、 a_2、...、 a_{10}、 c 以及函数 $N(V)$ 的若干情形。

6.2.1 参数 a_4, a_7, a_9, a_{10}：由 (28) 给出的分量 L_{abc} 为常数

我们有以下情形：

1) $N(V)=0 \implies F(V)=0$, $a_{10}=-a_4$ 和 $c\neq 0$（其余参数均设为零）。我们得到 $L_{111}=a_4$, $L_{221}=-a_4$, $L_{112}=L_{222}=0$ 和 $Z=Y=c$。

方程组 (44) - (45) 变为：

$$cV_{,xy}-3a_4V_{,x} = 0 \tag{46}$$

$$c(V_{,yy}-V_{,xx})+6a_4V_{,y} = 0. \tag{47}$$

该方程组的解为势

$$V(x,y)=c_+e^{\frac{3a_4}{c}(y+\sqrt{3}x)}+c_-e^{\frac{3a_4}{c}(y-\sqrt{3}x)}+c_0e^{-\frac{6a_4}{c}y} \tag{48}$$

其中 c_+, c_- 和 c_0 为任意常数。这是一族二维可积势，当 $a_4=1$ 和$c=3$ 时，它化为众所周知的托达晶格势[57,58]。

CFI (29) 为

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} &= a_4\dot{x}^3-3a_4\dot{x}\dot{y}^2+cV_{,y}\dot{x}-cV_{,x}\dot{y}\\ &= a_4\dot{x}^3-3a_4\dot{x}\dot{y}^2+3a_4\left[c_+e^{\frac{3a_4}{c}(y+\sqrt{3}x)}+c_-e^{\frac{3a_4}{c}(y-\sqrt{3}x)}-2c_0e^{-\frac{6a_4}{c}y}\right]\dot{x}- \end{aligned}$$

$$-3\sqrt{3}a_4\left[c_+e^{\frac{3a_4}{c}(y+\sqrt{3}x)}-c_-e^{\frac{3a_4}{c}(y-\sqrt{3}x)}\right]\dot{y}. \tag{49}$$

2） $N(V)=0 \implies F(V)=0$， $a_4=1$和$a_{10}=\frac{1}{2}$（其余参数均固定为零）。在这种情形下，
$L_{111}=1$、 $L_{221}=\frac{1}{2}$、 $L_{112}=L_{222}=0$和 $Z=Y=-\frac{9}{2}y$。
方程组 (44) - (45) 变为：

$$\begin{aligned} 3yV_{,xy}+2V_{,x} &= 0 \qquad (50)\\ 3y(V_{,yy}-V_{,xx})+5V_{,y} &= 0. \qquad (51)\end{aligned}$$

该方程组的解为势

$$V(x,y)=\left(\frac{4}{3}c_1x^2+c_2x+c_3\right)y^{-2/3}+c_1y^{4/3} \tag{52}$$

其中 c_1、 c_2和 c_3 为任意常数。当 $c_1=\frac{3}{4}$ 和 $c_2=0$ 时，势 (52) 化为参考文献25中得到的势 (173)。在 [59] $c_1=c_3=0$ 和 $x\leftrightarrow y$ 的情况下，我们得到由参考文献59中的哈密顿量 (25) 定义的不可分离势。已证明，由于存在参考文献59的方程 (27) 给出的额外四次函数积分， $V=c_2yx^{-2/3}$ 实际上是一个四阶超可积势。我们未能找到这个四阶第一积分，因为我们只考虑三阶及以下的第一积分。

CFI (29) 为

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} &= \dot{x}^3+\frac{3}{2}\dot{x}\dot{y}^2-\frac{9}{2}yV_{,y}\dot{x}+\frac{9}{2}yV_{,x}\dot{y}\\ &= \dot{x}^3+\frac{3}{2}\dot{x}\dot{y}^2+\left[\left(4c_1x^2+3c_2x+3c_3\right)y^{-2/3}-6c_1y^{4/3}\right]\dot{x}+\left(12c_1x+\frac{9}{2}c_2\right)y^{1/3}\dot{y}. \qquad (53)\end{aligned}$$

注意，对于 $c_1=\frac{3}{4}\epsilon$、 $c_2=0$和 $c_3=\epsilon\delta$，其中 ϵ 和 δ 为任意常数，CFI (53) 与参考文献25的方程 (174) 除以 2 后相同。

3) $N(V)=0 \implies F(V)=0$且 $a_9\neq 0$是唯一的非零参数[60]。仅剩下的量是
$L_{112}=a_9$ 和 $Z=Y=3a_9x$。方程组（44）—（45）变为：

$$\begin{aligned} V_{,xy} &= 0 \qquad (54)\\ x(V_{,yy}-V_{,xx})-3V_{,x} &= 0. \qquad (55)\end{aligned}$$

该方程组的解为势

$$V(x,y)=c_1x^2+\frac{c_2}{x^2}+4c_1y^2+c_3y \tag{56}$$

其中 c_1、 c_2和 c_3 为任意常数。对于 $c_1=1$ 和 $c_3=0$ ，势（56）化为参考文献25中得到的势（175）。

CFI（29）为

$$J_0^{(3,2)}=\dot{x}^2\dot{y}+xV_{,y}\dot{x}-xV_{,x}\dot{y}=\dot{x}^2\dot{y}+x(8c_1y+c_3)\dot{x}-2\left(c_1x^2-\frac{c_2}{x^2}\right)\dot{y}. \tag{57}$$

这是参考文献25中的CFI（176）。

势（56）具有可分形式 $V(x,y)=F_1(x)+F_2(y)$。众所周知（见参考文献 36 中的表格），这类势是可积的，并且具有额外QFI

$$I_{71a}=\frac{1}{2}\dot{x}^2+F_1(x),\quad I_{71b}=\frac{1}{2}\dot{y}^2+F_2(y). \tag{58}$$

因此，利用 CFI（57），可以证明势（56）也是超可积的，因为第一积分（57）、I_{71a} 和 I_{71b} 函数独立。然而，直接查阅参考文献 36 的最后一张表（另见参考文献 36 中的式（67））可知，势（56）是超可积的，因为它还具有额外QFI

$$I_{s2a} = \dot{x}(y\dot{x} - x\dot{y}) - 2c_1x^2y + \frac{2c_2y}{x^2} - \frac{c_3}{2}x^2. \tag{59}$$

因此，CFI (57) 可以表示为 I_{71a}、I_{71b} 和 I_{s2a} 的函数。

4) $N(V) = 0 \implies F(V) = 0$、$a_7 = -a_4$和 c是唯一非零的参数 s.
我们得到 $L_{111} = -L_{222} = a_4$ 和 $Z = Y = -3a_4(x + y) + c$。
求解方程组 (44) - (45)，我们得到可积势

$$V = \frac{k}{-3a_4(x + y) + c} \tag{60}$$

其中，k 是一个任意常数。
CFI (29) 为

$$J_0^{(3,2)} = \dot{x}^3 - \dot{y}^3 + \frac{3k}{-3a_4(x + y) + c}(\dot{x} - \dot{y}). \tag{61}$$

根据参考文献36，势（60）的形式为 $V = F(x + y)$；因此，它还具有以下线性/二次函数独立积分：

$$I_1 = \dot{x} - \dot{y},\ I_2 = t(\dot{x} - \dot{y}) - x + y,\ I_3 = \dot{x}\dot{y} + F(x + y).$$

这意味着势（60）无需借助高阶函数独立积分即可超可积。CFI（61）表示如下：

$$J_0^{(3,2)} = I_1^3 + 3I_1I_3 = \dot{x}^3 - \dot{y}^3 + 3F(x + y)(\dot{x} - \dot{y}).$$

5)$F(V) = \lambda V$, $F' = \lambda \neq 0$和 $a_4 \neq 0$（其余参数均固定为零） .
我们得到 $L_{111} = a_4$、$Y = -3a_4y$ 和 $Z = \lambda V - 3a_4y$。
方程组（44）-（45）变为：

$$[F(V) - 3a_4y]\, V_{,xy} + F'V_{,x}V_{,y} - 3a_4V_{,x} = 0 \tag{62}$$
$$[F(V) - 3a_4y]\,(V_{,yy} - V_{,xx}) + F'\left[(V_{,y})^2 - (V_{,x})^2\right] - 3a_4V_{,y} = 0. \tag{63}$$

上述方程组的结构表明，$F(V) = x^\nu + 3a_4y$，其中 ν为任意常数。代入$F(V) = \lambda V$，得到

$$V(x, y) = \frac{x^\nu}{\lambda} + \frac{3a_4}{\lambda}y$$

将其代入方程组 (62) - (63) 后，得到 $\nu = \frac{1}{2}$。因此，我们得到可分离超可积势

$$V(x, y) = c_1\sqrt{x} + c_2y \tag{64}$$

其中 $c_1 \equiv \frac{1}{\lambda} \neq 0$ 和 $c_2 \equiv \frac{3a_4}{\lambda} = 3c_1a_4$。当 $c_1 = 1$ 时，势 (64) 化为参考文献 32 的表 I 中给出的势。

函数 $Z = \sqrt{x}$ 及其相关CFI (29) 为

$$J_0^{(3,2)} = c_2\dot{x}^3 + 3c_1c_2\sqrt{x}\dot{x} - \frac{3}{2}c_1^2\dot{y} \tag{65}$$

其中 c_1 和 c_2 为任意常数。

6) $F(V) = \lambda V^2 \implies F' = 2\lambda V$、$\lambda \neq 0$和 $a_7 = -a_4 \neq 0$（其余参数均固定为零）。我们得到 $L_{111} = a_4$、$L_{222} = -a_4$、$Y = -3a_4(x + y)$ 和 $Z = \lambda V^2 - 3a_4(x + y)$。
方程组 (44) - (45) 变为：

$$[F(V) - 3a_4(x + y)]\, V_{,xy} + 2\lambda VV_{,x}V_{,y} - 3a_4(V_{,x} + V_{,y}) = 0 \tag{66}$$

$$[F(V)-3a_4(x+y)]\left(V_{,yy}-V_{,xx}\right)+2\lambda V\left[(V_{,y})^2-(V_{,x})^2\right]+3a_4(V_{,x}-V_{,y}) \quad = \quad 0. \tag{67}$$

根据上述方程组的结构以及完全平方假设 $F(V)=\lambda V^2$，我们推断函数 $F(V)$ 必须具有以下形式：

$$F(V)=3a_4(x+y)\pm 6a_4\sqrt{xy} \implies \lambda V^2=3a_4\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^2 \implies$$

$$V(x,y)=k\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right) \tag{68}$$

其中 $k^2\equiv\frac{3a_4}{\lambda}$。容易验证，势 (68) 显然满足方程组 (66) - (67)。Karlovini 也曾利用该系统的雅可比度量，在参考文献 32 的表 I 中求得这一势。

函数 $Z=\pm 6a_4\sqrt{xy}$ 以及相关CFI (29) 为

$$J_0^{(3,2)}=\dot{x}^3-\dot{y}^3+3k\left(\sqrt{x}\dot{x}\mp\sqrt{y}\dot{y}\right). \tag{69}$$

由于势 (68) 可分离，额外的 CFI (69) 使该系统成为超可积系统。

6.2.2 参数 s a_3, a_6, a_8：由 (28) 给出的分量 L_{abc} 线性依赖于 x, y

我们有以下情形：

1) $F(V)\neq 0$ 和 $a_8=\frac{1}{3}$（其余参数设为零）。我们得到 $L_{111}=L_{222}=0$、$L_{112}=\frac{y}{3}$、 $L_{221}=-\frac{x}{3}$、 $Y=xy$和 $Z=F(V)+xy$。方程组 (41) - (42) 变为：

$$[xy+F(V)]\,V_{,xy}+F'V_{,x}V_{,y} \quad = \quad 0 \tag{70}$$

$$[xy+F(V)]\left(V_{,yy}-V_{,xx}\right)+F'\left[(V_{,y})^2-(V_{,x})^2\right]+3(xV_{,y}-yV_{,x}) \quad = \quad 0. \tag{71}$$

Inozemtsev[61] 此前已求解该方程组，结果如下。

根据方程组 (70) - (71) 的结构，我们假设 $V=f(w)$，其中 $w=xy$，且 $f(w)$ 是任意光滑函数。于是，上述方程组变为[62]：

$$[w+F(f)]\left(w\frac{d^2f}{dw^2}+\frac{df}{dw}\right)+wF'\left(\frac{df}{dw}\right)^2 \quad = \quad 0 \tag{72}$$

$$[w+F(f)]\,\frac{d^2f}{dw^2}+F'\left(\frac{df}{dw}\right)^2+3\frac{df}{dw} \quad = \quad 0. \tag{73}$$

将方程 (72) 代入 (73)，我们得到 $\left(\text{假设 } \frac{df}{dw}\neq 0\right)$

$$F(f(w))=2w \implies F'\frac{df}{dw}=2$$

其余方程给出

$$3w\frac{d^2f}{dw^2}+5\frac{df}{dw}=0 \implies f(w)=kw^{-2/3}$$

其中， k 是任意非零常数。

因此，我们得到可积势

$$V(x,y)=k(xy)^{-2/3} \tag{74}$$

以及函数 $F(V)=2\left(\frac{V}{k}\right)^{-3/2} \implies Z=3xy$。

CFI (29) 为

$$J_0^{(3,2)}=(y\dot{x}-x\dot{y})\dot{x}\dot{y}-2k(xy)^{-2/3}(x\dot{x}-y\dot{y})=(\dot{x}^2-2H)x\dot{x}-(\dot{y}^2-2H)y\dot{y} \tag{75}$$

其中哈密顿量为 $H=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+k(xy)^{-2/3}$。

2) $N(V)=0 \implies F(V)=0$和 $a_8=\frac{1}{3}$（其余参数设为零）
We find $L_{221}=-\frac{x}{3}$, $L_{112}=\frac{y}{3}$ and $Z=Y=xy$。
方程组 (44) - (45) 的解为该势（见参考文献 32 的表 II）

$$V=c_1(x^2+y^2)+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{y^2} \tag{76}$$

且相关CFI (29) 为

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} &= y\dot{x}^2\dot{y}-x\dot{x}\dot{y}^2+xy(2c_1y-2c_3y^{-3})\dot{x}-xy(2c_1x-2c_2x^{-3})\dot{y} \\ &= (y\dot{x}-x\dot{y})(\dot{x}\dot{y}+2c_1xy)+2c_2x^{-2}y\dot{y}-2c_3xy^{-2}\dot{x} \end{aligned} \tag{77}$$

其中 c_1、c_2 和 c_3 为任意常数。
势 (76) 是超可积的，因为它具有可分形式 $V=F_1(x)+F_2(y)$；因此，它也存在二次第一积分 (58)。

需要指出的是，仅根据参考文献36的最后一个表——无需使用经典第一积分——就可知势（76）是超可积的，因为它具有以下形式

$$V_{274}=-\frac{\lambda^2}{8}(x^2+y^2)-\frac{\lambda^2}{4}(d_1x+d_2y)-\frac{k_1}{(x+d_1)^2}-\frac{k_2}{(y+d_2)^2} \tag{78}$$

其中，$\lambda\neq 0$、k_1、k_2、d_1和 d_2 为任意常数。参考文献36证明，势（78）是超可积的，因为除了二次第一积分（58）之外，它还具有以下含时二次第一积分

$$I_{73a} = e^{\lambda t}\left[-\dot{x}^2+\lambda(x+d_1)\dot{x}-\frac{\lambda^2}{4}(x+d_1)^2+\frac{2k_1}{(x+d_1)^2}\right] \tag{79}$$

$$I_{73b} = e^{\lambda t}\left[-\dot{y}^2+\lambda(y+d_2)\dot{y}-\frac{\lambda^2}{4}(y+d_2)^2+\frac{2k_2}{(y+d_2)^2}\right]. \tag{80}$$

由此可见，可以使用阶数较低的含时第一积分来证明某个势是超可积的。这一结论很有帮助，因为通常求出高阶函数独立积分是一项艰巨的任务。

3） $F(V)=\lambda V$、$F'=\lambda\neq 0$和$a_6=\frac{1}{3}$（其余参数均设为零）。我们得到
$L_{221}=-\frac{y}{3}$、$L_{222}=x$、$Y=\frac{3}{2}x^2+\frac{y^2}{2}$和 $Z=\lambda V+\frac{3}{2}x^2+\frac{y^2}{2}$。将其代入方程组（41）—（42），得到:

$$\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{y^2}{2}+\lambda V\right)V_{,xy}+3xV_y+\lambda V_{,x}V_{,y} = 0 \tag{81}$$

$$\left[\frac{3}{2}x^2+\frac{y^2}{2}+\lambda V\right](V_{,yy}-V_{,xx})+3yV_{,y}-3xV_{,x}+\lambda\left[(V_{,y})^2-(V_{,x})^2\right] = 0. \tag{82}$$

为求解上述方程组，我们假设[63] $F(V)=-\frac{3}{2}x^2+ky^2$，其中 k是一个任意常数。于是，我们得到

$$V(x,y)=\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{3}{2}x^2+ky^2\right).$$

将上述势代入方程组 (81) - (82)，我们发现唯一的非平凡解对应于$k=-\frac{1}{6}$。

因此，我们得到势（对于 $c_0=1$，见参考文献 32 中的表 II）

$$V(x,y)=c_0\left(9x^2+y^2\right) \tag{83}$$

其中 $c_0\equiv-\frac{1}{6\lambda}$，因此 $Z=\frac{y^2}{3}$。此势包含 Fokas 在参考文献6 中为 $c_0=\frac{1}{2}$（其中 $x\leftrightarrow y$）和 $c_0=\frac{1}{18}$ 分别找到的势 (3.15a) 和 (3.15b) 作为子情形。

相关CFI (29) 为

$$J_0^{(2,3)} = (x\dot{y} - y\dot{x})\dot{y}^2 + \frac{2c_0}{3}y^3\dot{x} - 6c_0xy^2\dot{y}. \tag{84}$$

因此，势（83）是超可积的，因为它具有可分形式 $V(x,y) = F_1(x) + F_2(y)$。

4) $N(V) = 0 \implies F(V) = 0$和 $a_3 = a_6 \neq 0$（其余参数固定为零）。我们得到 $L_{111} = 3a_3y$, $L_{112} = -a_3x$, $L_{221} = -a_3y$, $L_{222} = 3a_3x$ 和 $Z = Y = 3a_3(x^2 - y^2)$。方程组（44）-（45）变为:

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2)V_{,xy} + 3xV_{,y} - 3yV_{,x} &= 0 &(85)\\ V_{,yy} - V_{,xx} &= 0. &(86)\end{aligned}$$

解上述方程组，我们得到势（见参考文献 32 的表 II）

$$V(x,y) = c_1(x^2 + y^2) + \frac{c_2xy + c_3(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \tag{87}$$

其中 c_1、c_2 和 c_3 是任意常数。

相关CFI（29）为

$$\begin{aligned}J_0^{(3,2)} &= (x\dot{y} - y\dot{x})\left(\dot{y}^2 - \dot{x}^2\right) + (x^2 - y^2)(V_{,y}\dot{x} - V_{,x}\dot{y})\\ &= (x\dot{y} - y\dot{x})\left(\dot{y}^2 - \dot{x}^2\right) - 2c_1(x\dot{y} - y\dot{x})(x^2 - y^2) + \frac{x(x^2 + 3y^2)(c_2\dot{x} + 2c_3\dot{y})}{(x^2 - y^2)^2} +\\ &\quad + \frac{y(3x^2 + y^2)(2c_3\dot{x} + c_2\dot{y})}{(x^2 - y^2)^2}. \qquad (88)\end{aligned}$$

由于偏微分方程（86）是波动方程，因此它有如下形式的解：$V = F_3(y + x) + F_4(y - x)$，其中 F_3 和 F_4 是其自变量的任意光滑函数。事实上，势（87）具有此形式，其中

$$F_3(y + x) = \frac{c_1}{2}(y + x)^2 + \frac{2c_3 - c_2}{4(y + x)^2},\ \ F_4(y - x) = \frac{c_1}{2}(y - x)^2 + \frac{2c_3 + c_2}{4(y - x)^2}.$$

因此，势 (87) 是超可积的，因为除了哈密顿量 H 和 CFI (88) 外，它还存在 QFI（见参考文献36中的第四张表）

$$I_8 = \dot{x}\dot{y} + F_3(y + x) - F_4(y - x). \tag{89}$$

5) $F(V) \neq 0$和 $a_3 = a_6 \neq 0$（其余参数固定为零）。

与前一种情形的区别在于，现在我们假设 $F(V) \neq 0$。

我们得到 $L_{111} = 3a_3y$, $L_{112} = -a_3x$, $L_{221} = -a_3y$, $L_{222} = 3a_3x$, $Y = 3a_3(x^2 - y^2)$ 和 $Z = F(V) + Y$。方程组 (44) - (45) 变为:

$$\begin{aligned}\left[3a_3(x^2 - y^2) + F(V)\right]V_{,xy} + F'V_{,x}V_{,y} + 9a_3xV_{,y} - 9a_3yV_{,x} &= 0 &(90)\\ \left[3a_3(x^2 - y^2) + F(V)\right](V_{,yy} - V_{,xx}) + F'\left[(V_{,y})^2 - (V_{,x})^2\right] &= 0. &(91)\end{aligned}$$

上述方程组的结构表明

$$V(x,y) = \phi(w) \tag{92}$$

其中 ϕ 是 $w \equiv x^2 - y^2$的任意光滑函数。

方程组 (90) - (91) 变为[64]:

$$\left[3a_3w + F(\phi)\right]\frac{d^2\phi}{dw^2} + F'\left(\frac{d\phi}{dw}\right)^2 + 9a_3\frac{d\phi}{dw} = 0 \tag{93}$$

$$[3a_3w + F(\phi)]\left(w\frac{d^2\phi}{dw^2} + \frac{d\phi}{dw}\right) + wF'\left(\frac{d\phi}{dw}\right)^2 = 0. \tag{94}$$

两边乘以 i 将方程 (93) 与 $-w$ 相乘，然后把所得方程加到 (94) 上，我们发现 t

$$F = 6a_3w \implies F'\frac{d\phi}{dw} = 6a_3 \tag{95}$$

其中 $\frac{d\phi}{dw} \neq 0$。

将方程（95）代入剩余方程（93），得到

$$3w\frac{d^2\phi}{dw^2} + 5\frac{d\phi}{dw} = 0 \implies \phi = kw^{-2/3}$$

其中 k 是一个任意常数。

回到原坐标系，我们得到可积势

$$V(x,y) = k(x^2 - y^2)^{-2/3}. \tag{96}$$

函数 $Z = 9a_3(x^2 - y^2)$ 及其相关CFI（29）为（见参考文献 32 中的表 II）

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} &= (x\dot{y} - y\dot{x})\left(\dot{y}^2 - \dot{x}^2\right) + 4k(x^2 - y^2)^{-2/3}(y\dot{x} + x\dot{y}) \\ &= (x\dot{y} - y\dot{x})\left(\dot{y}^2 - \dot{x}^2\right) + 4V(y\dot{x} + x\dot{y}). \end{aligned} \tag{97}$$

上述结果与参考文献6中的方程 (3.19) 一致。在参考文献6中，作者通过将 CFI 条件直接应用于形式为 $V = f(x^2 + \nu y^2)$ 的势，推导出了这一结果，其中 f 是任意光滑函数， ν 是任意常数。

6) $N(V) = 0 \implies F(V) = 0$ 和 $a_3 = -a_6 \neq 0$（其余参数均固定为零）。我们得到 $L_{111} = 3a_3y$、$L_{112} = -a_3x$、 $L_{221} = a_3y$、 $L_{222} = -3a_3x$ 和 $Z = Y = -6a_3r^2$ ，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$。方程组 (44)–(45) 变为：

$$2r^2V_{,xy} + 3xV_{,y} + 3yV_{,x} = 0 \tag{98}$$

$$r^2(V_{,yy} - V_{,xx}) + 3yV_{,y} - 3xV_{,x} = 0. \tag{99}$$

求解上述方程组，我们得到势（见参考文献 32 的表V）

$$V(x,y) = \frac{c_1}{r} + \frac{c_2\sqrt{r+x}}{r} + \frac{c_3\sqrt{r-x}}{r} \tag{100}$$

其中 c_1、 c_2 和 c_3 是任意常数。

相关CFI (29) 为

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} &= \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + r^2(V_{,y}\dot{x} - V_{,x}\dot{y}) \\ &= (x\dot{y} - y\dot{x})H + (r^2V_{,y} + yV)\dot{x} - (r^2V_{,x} + xV)\dot{y} \\ &= (x\dot{y} - y\dot{x})H + \frac{1}{2}\left(c_2\sqrt{r-x} + c_3\sqrt{r+x}\right)\dot{x} - \frac{1}{2}\left(c_2\sqrt{r+x} - c_3\sqrt{r-x}\right)\dot{y} \end{aligned} \tag{101}$$

其中哈密顿量 $H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V$。

我们注意到，参考文献36的最后一个表中仅通过自治守恒第一积分证明，势 (100) 是超可积的，因为它具有函数独立的守恒第一积分：

$$I_{s4a} = (x\dot{y} - y\dot{x})\dot{y} + \frac{c_1x}{r} + \frac{c_3(r+x)\sqrt{r-x} - c_2(r-x)\sqrt{r+x}}{r} \tag{102}$$

$$I_{s4b} = -(x\dot{y} - y\dot{x})\dot{x} + G(x,y) \tag{103}$$

其中，光滑函数 $G(x,y)$ 满足条件 $G_{,y} + xV_{,x} = 0$ 以及 $G_{,x} + xV_{,y} - 2yV_{,x} = 0$。

6.2.3 参数 a_2、a_5：由 (28) 给出的分量 L_{abc} 依赖于 x^2、xy、y^2

我们有以下情形：

1) $N(V) = 0 \implies F(V) = 0$ 和 $a_2 \neq 0$（其余参数均固定为零）。我们得到 $L_{111} = 3a_2y^2$、$L_{112} = -2a_2xy$、$L_{221} = a_2x^2$ 和 $Z = Y = -3a_2yr^2$，其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$。方程组 (44) - (45) 变为：

$$\begin{aligned} r^2V_{,xy} + 3yV_{,x} &= 0 \quad (104)\\ yr^2(V_{,yy} - V_{,xx}) + 3r^2V_{,y} - 6xyV_{,x} &= 0. \quad (105)\end{aligned}$$

求解该方程组，我们得到可积势（参见参考文献 32 中的表 III）

$$V(x,y) = \frac{k_1}{y^2} + \frac{k_2}{r} + \frac{k_3x}{ry^2} \quad (106)$$

其中 k_1、k_2 和 k_3 是任意常数。

参考文献 36 的最后一张表中已证明，势 [65] (106) 是超可积的，因为它具有函数独立的二次第一积分：

$$\begin{aligned} I_{s3a} &= (x\dot{y} - y\dot{x})^2 + 2k_1\frac{x^2}{y^2} + 2k_3\frac{rx}{y^2} \quad (107)\\ I_{s3b} &= (x\dot{y} - y\dot{x})\dot{y} + 2k_1\frac{x}{y^2} + k_2\frac{x}{r} + k_3\frac{2x^2+y^2}{ry^2}. \quad (108)\end{aligned}$$

因此，较高的 o 高阶第一积分并非必需。势的情况也相同（见参考文献 32 的表 III ）

$$V = \frac{A}{r} + \frac{B}{r(r+x)} + \frac{C}{r(r-x)} \quad (109)$$

对于 $k_1 = B + C$、$k_2 = A$ 和 $k_3 = C - B$，其类型为 (106)。

2) $N(V) = 0 \implies F(V) = 0$ 和 a_2, a_5 是唯一的非零参数。

我们得到 $L_{111} = 3a_2y^2$、$L_{112} = -2a_2xy + a_5y^2$、$L_{221} = a_2x^2 - 2a_5xy$、$L_{222} = 3a_5x^2$ 和 $Z = Y = 3(a_5x - a_2y)r^2$ 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$。

方程组 (44) - (45) 变为：

$$\begin{aligned} 3(a_5x - a_2y)r^2V_{,xy} + 9a_5x^2V_{,y} - 9a_2y^2V_{,x} &= 0 \quad (110)\\ 3(a_5x - a_2y)r^2(V_{,yy} - V_{,xx}) - 9(a_2r^2 - 2a_5xy)V_{,y} - 9(a_5r^2 - 2a_2xy)V_{,x} &= 0. \quad (111)\end{aligned}$$

求解该方程组，我们得到可积势

$$V(x,y) = \frac{k_1}{(a_2y - a_5x)^2} + \frac{k_2}{r} + \frac{k_3(a_2x + a_5y)}{r(a_2y - a_5x)^2} \quad (112)$$

其中 k_1、k_2 和 k_3 为任意常数。这是一个新的势，其可积性是通过经典第一积分而非二次第一积分得到证明的。注意，当 $a_5 = 0$ 时，我们得到势 (106)。此外，势 (112) 对常数 a_2 和 a_5 的任意取值均成立，因为偏微分方程组 (110) - (111) 是在这一假设下求解的。

相关CFI (29) 为

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} &= (x\dot{y} - y\dot{x})^2(a_2\dot{x} + a_5\dot{y}) + r^2(a_5x - a_2y)(V_{,y}\dot{x} - V_{,x}\dot{y})\\ &= (x\dot{y} - y\dot{x})^2(a_2\dot{x} + a_5\dot{y}) + \frac{2k_1r^2}{(a_2y - a_5x)^2}(a_2\dot{x} + a_5\dot{y}) - \frac{k_2(a_2y - a_5x)}{r}(x\dot{y} - y\dot{x}) +\\ &\quad + \frac{k_3r}{a_2y - a_5x}(a_2\dot{y} - a_5\dot{x}) - \frac{k_3(a_2x + a_5y)}{r(a_2y - a_5x)}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{2k_3(a_2x + a_5y)r}{(a_2y - a_5x)^2}(a_2\dot{x} + a_5\dot{y}). \quad (113)\end{aligned}$$

6.2.4 参数 a_1：由 (28) 给出的分量 L_{abc} 取决于 x^3、xy^2、x^2y、y^3
有以下情形：

1) $N(V)=0 \implies F(V)=0$和 $a_1\neq 0$（其余参数均固定为零）。我们得到 $L_{111}=a_1y^3$、$L_{112}=-a_1xy^2$、$L_{221}=a_1x^2y$、$L_{222}=-a_1x^3$和$Z=Y=-\frac{3}{4}a_1r^4$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$。

方程组 (44) - (45) 变为：

$$\frac{r^4}{4}V_{,xy}+x^3V_{,y}+y^3V_{,x} = 0 \tag{114}$$

$$\frac{r^4}{4}(V_{,yy}-V_{,xx})+(y^3+3x^2y)V_{,y}-(x^3+3xy^2)V_{,x} = 0. \tag{115}$$

解此方程组，我们得到可积势（参见参考文献 32 的表 IV 和参考文献 26 的方程 (3.3.44)）

$$V(x,y)=\frac{k_1}{r^2}+\frac{k_2e^{\sqrt{3}\theta}+k_3e^{-\sqrt{3}\theta}}{r^3} \tag{116}$$

其中 k_1、k_2、k_3 为任意常数，且 $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$。

相关CFI (29) 为

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} &= (x\dot{y}-y\dot{x})^3+\frac{3}{4}r^4(V_{,y}\dot{x}-V_{,x}\dot{y}) \\ &= p_\theta^3+\frac{3}{4}\left[2k_1+\frac{3}{r}\left(k_2e^{\sqrt{3}\theta}+k_3e^{-\sqrt{3}\theta}\right)\right]p_\theta+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(k_2e^{\sqrt{3}\theta}-k_3e^{-\sqrt{3}\theta}\right)p_r \end{aligned} \tag{117}$$

其中 $r\dot{r}=x\dot{x}+y\dot{y}$、$p_\theta=x\dot{y}-y\dot{x}$和 $p_r=\dot{r}$。

2) $N(V)=0 \implies F(V)=0$和 a_1、$c\neq 0$是仅有的非零参数。
此情形没有带来任何新内容。

3) $N(V)=0 \implies F(V)=0$和$a_1=-\frac{4}{3}$。
此情形没有带来任何新内容。

6.2.5 十个参数 $a_1,...,a_{10}$的混合选择：由 (28) 给出的分量 L_{abc} 依赖于 x、y 的混合次数乘积

我们有以下情形：

1) $F(V)=\lambda V \implies F'=\lambda\neq 0$和 a_3,a_4是仅有的非零参数。我们求得 $L_{111}=3a_3y+a_4$，$L_{112}=-a_3x$, $Y=-\frac{3}{2}a_3(x^2+3y^2)-3a_4y$和 $Z=\lambda V+Y$。方程组 (44) - (45) 变为：

$$\left[\lambda V-\frac{3}{2}a_3(x^2+3y^2)-3a_4y\right]V_{,xy}+\lambda V_{,x}V_{,y}-3(3a_3y+a_4)V_{,x}=0 \tag{118}$$

$$\left[\lambda V-\frac{3}{2}a_3(x^2+3y^2)-3a_4y\right](V_{,yy}-V_{,xx})+\lambda\left[(V_{,y})^2-(V_{,x})^2\right]-3(3a_3y+a_4)V_{,y}+9a_3xV_{,x}=0. \tag{119}$$

根据方程组 (118) - (119) 的结构，我们假设

$$F(V)=\lambda V=x^\nu+\frac{3}{2}a_3(x^2+3y^2)+3a_4y \implies V=\frac{1}{\lambda}\left[x^\nu+\frac{3}{2}a_3(x^2+3y^2)+3a_4y\right].$$

于是，函数 $Z=x^\nu$，并将势 V 代入方程组 (118) - (119)，我们得到 $\nu=2$和 $a_3=\frac{1}{3},-1$。我们考虑以下子情形。

- 子情形 $a_3=\frac{1}{3}$。

势的类型为

$$V(x,y)=k_0(x^2+y^2)+k_1 y$$

其中 k_0 和 k_1 为任意常数。参考文献36仅利用二次第一积分证明了该势是超可积的。

- 子情形 $a_3=-1$。
该势为

$$V(x,y)=\frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{2}(x^2+9y^2)+3a_4 y\right]=c_0(x^2+9y^2)+c_1 y \tag{120}$$

其中 $c_0\equiv-\frac{1}{2\lambda}\neq 0$ 和 $c_1\equiv\frac{3a_4}{\lambda}$。我们发现 $a_4=-\frac{c_1}{6c_0}$。这是一个新的可积势。
相关CFI (29)为（除以三）

$$J_0^{(3,2)}=(x\dot{y}-y\dot{x})\dot{x}^2-\frac{c_1}{18c_0}\dot{x}^3+\frac{c_1}{3}x^2\dot{x}+6c_0x^2y\dot{x}-\frac{2c_0}{3}x^3\dot{y}. \tag{121}$$

注意，若取 $c_1=0$ 并交换 $x\leftrightarrow y$，则可得到第6.2.2节情形3)的结果。

势 (120) 也是超可积的，因为它具有可分形式 $V=F_1(x)+F_2(y)$。

2) $N(V)=0\implies F(V)=0$, $a_9=ka_8$ 其中 k 是任意常数，其余参数均固定为零。

这种情形没有带来任何新结果。

6.3 情形 $C_{ab}=0$ 和 $V=F_1(y+\sqrt{3}x)+F_2(y-\sqrt{3}x)+F_3(-2y)$

势

$$V(x,y)=F_1(y+\sqrt{3}x)+F_2(y-\sqrt{3}x)+F_3(-2y) \tag{122}$$

其中， F_1、F_2和 F_3 是任意光滑函数。这是一个三粒子两两相互作用系统的二维等价系统，其内部相互作用取决于粒子间的距离。Toda 型势 (48) 是势 (122) 的一个特例。

对于势 (122)，条件 (30) 和 (31) 变为：

$$\begin{aligned}
B_{1,x}-3L_{111}V_{,x}-3L_{112}V_{,y} &= 0 &(123)\\
B_{1,y}+B_{2,x}-6L_{112}V_{,x}-6L_{221}V_{,y} &= 0 &(124)\\
B_{2,y}-3L_{221}V_{,x}-3L_{222}V_{,y} &= 0 &(125)\\
B_1V_{,x}+B_2V_{,y} &= s. &(126)
\end{aligned}$$

在第6.2节中，我们使用 Holt 方法证明了 Toda 型势具有 CFI (49)。该 CFI 的首项部分为 $(\dot{x}^2-3\dot{y}^2)\dot{x}$ 型。因此，为求解关于向量 $B_a(x,y)$ 的方程组 (123) - (125)，适宜假设 $a_4=-a_{10}=1$ 是由 (28) 给出的三阶 Killing 张量 L_{abc} 中唯一的非零参数，也就是说， $L_{111}=-L_{221}=1$ 和 $L_{112}=L_{222}=0$。于是，方程组 (123) - (125) 变为：

$$\begin{aligned}
B_{1,x} &= 3V_{,x} &(127)\\
B_{1,y}+B_{2,x} &= -6V_{,y} &(128)\\
B_{2,y} &= -3V_{,x}. &(129)
\end{aligned}$$

方程组 (127) - (129) 的解为（参见参考文献 26 中的方程 (3.3.35)）

$$B_a=\begin{pmatrix} 3\left[F_1(y+\sqrt{3}x)+F_2(y-\sqrt{3}x)-2F_3(-2y)\right] \\ -3\sqrt{3}\left[F_1(y+\sqrt{3}x)-F_2(y-\sqrt{3}x)\right]\end{pmatrix}. \tag{130}$$

将向量 B_a 代入剩余的方程 (126)，我们得到 $s=0$ 和循环条件（参见参考文献 32 中的方程） (51)

$$\frac{dF_1}{dw_1}(F_2-F_3)+\frac{dF_2}{dw_2}(F_3-F_1)+\frac{dF_3}{dw_3}(F_1-F_2)=0 \tag{131}$$

其中 $w_1 \equiv y+\sqrt{3}x$、 $w_2 \equiv y-\sqrt{3}x$ 和 $w_3 \equiv -2y$。条件 (131) 也可以通过 Lax 对方法[66] 推导得到（例如参见参考文献 26、66 及其中的参考文献）。

相关 CFI (29) 为

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} &= \dot{x}^3 - 3\dot{x}\dot{y}^2 + 3\left[F_1(y+\sqrt{3}x) + F_2(y-\sqrt{3}x) - 2F_3(-2y)\right]\dot{x} - \\ &\quad -3\sqrt{3}\left[F_1(y+\sqrt{3}x) - F_2(y-\sqrt{3}x)\right]\dot{y} \end{aligned} \tag{132}$$

前提是函数 F_1、F_2 和 F_3 满足条件 (131)。容易证明，Toda 型势 (48) 满足此条件，且 CFI (132) 化简为 CFI (49)。

6.4 情形 $C_{ab}=0$ 和 $s=0$ - 可积条件方法 d

在此情形下，CFI (29) 变为自治守恒第一积分[67]

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} &= -a_1 L^3 + 3\left(a_2\dot{x}+a_5\dot{y}\right)L^2 - 3\left(a_3\dot{x}^2 + a_8\dot{x}\dot{y} - a_6\dot{y}^2\right)L + a_4\dot{x}^3 + 3a_9\dot{x}^2\dot{y} + \\ &\quad +3a_{10}\dot{x}\dot{y}^2 + a_7\dot{y}^3 + B_1(x,y)\dot{x} + B_2(x,y)\dot{y} \end{aligned} \tag{133}$$

其中， $L=x\dot{y}-y\dot{x}$ 是角动量， a_1、...、a_{10} 是三阶 Killing 张量 (28) 的参数，向量分量 $B_1(x,y)$ 和 $B_2(x,y)$ 满足四个偏微分方程（见方程 (30) 和 (31)）：

$$B_1 V_{,x} + B_2 V_{,y} = 0 \tag{134}$$
$$B_{1,x} = 3\left(L_{111}V_{,x} + L_{112}V_{,y}\right) \tag{135}$$
$$B_{2,y} = 3\left(L_{221}V_{,x} + L_{222}V_{,y}\right) \tag{136}$$
$$B_{1,y} + B_{2,x} = 6\left(L_{112}V_{,x} + L_{221}V_{,y}\right). \tag{137}$$

张量 L_{abc} 是三阶 Killing 张量 (28)，而 $V(x,y)$ 是势。上述偏微分方程是参考文献18中的条件 (2.6) - (2.9)。采用参考文献18中的记号，我们有： $g_a = B_a$、$f_1 = L_{111}$、$f_2 = 3L_{112}$、$f_3 = 3L_{221}$、$f_4 = L_{222}$、$A_{300} = -a_1$、$A_{210} = 3a_2$、$A_{201} = 3a_5$、$A_{120} = -3a_3$、$A_{111} = -3a_8$、$A_{102} = 3a_6$、$A_{030} = a_4$、$A_{021} = 3a_9$、$A_{012} = 3a_{10}$ 和 $A_{003} = a_7$。

在第 6.2 节和第 6.3 节中，我们通过假设向量 B_a 具有特定形式，使得量 $B_a V_{,\,a}$ 恒等于零（Holt 方法）；或者假设势 V 具有特定的函数形式，从而直接求解偏微分方程组 (134) - (137)。这些假设得出：

a. 在第一种情形下（见第 6.2 节），得到二阶非线性偏微分方程组 (44) - (45)。对于参数 a_1、...、a_{10}、c 以及函数 $N(V)$ 的某些取值，我们求解了该方程组，并确定了三阶可积与超可积势 $V(x,y)$。

b. 在第二种情形下（见第 6.3 节），得到一个线性一阶偏微分方程组；对于三阶 Killing 张量 (28) 的某些取值，该方程组给出了向量 $B_a(x,y)$ 的相容解。

在本节中，我们将以不同方式处理偏微分方程组 (134) - (137)。具体而言，我们将推导 (30) 的可积性条件，即方程 (135) - (137)，并据此针对特定的 Killing 张量 L_{abc} 找出相容势 $V(x,y)$。随后，将这些势代入原方程组 (134) - (137)，以计算向量 B_a，最终得到相关CFI (133)。

6.4.1 平直空间中（30）的可积性条件

在一般的 n维平直空间 $\{q^a\}$中，条件（30）为

$$B_{a,b} + B_{b,a} = M_{ab} \tag{138}$$

其中 $M_{ab} \equiv 6L_{abc}V_{,\,c}$ 是一个二阶对称张量， L_{abc} 由（28）给出 .

对（138）求偏导数并对指标进行循环置换，得到：

$$B_{a,bc} + B_{b,ac} = M_{ab,c} \tag{139}$$
$$B_{a,cb} + B_{c,ab} = M_{ac,b} \tag{140}$$
$$-B_{b,ca} - B_{c,ba} = -M_{bc,a}. \tag{141}$$

将方程（139）—（141）分部相加，得到

$$B_{a,bc} = \frac{1}{2}\left(M_{ab,c} + M_{ac,b} - M_{bc,a}\right). \tag{142}$$

由于 $B_{a,bc} = B_{a,cb}$，指标对 b, c 可以视为一个整体指标 $A \equiv bc$。于是，我们得到可积条件：

$$B_{a,[Ad]} = 0 \implies B_{a,bcd} = B_{a,dbc} \implies B_{a,bcd} = B_{a,bdc} \implies B_{a,b[cd]} = 0. \tag{143}$$

将 (142) 代入 (143)，得到条件（见参考文献19的式 (2.23)）

$$M_{[a|[c,d]|b]} = 0. \tag{144}$$

在 E^2 中，只有满足 $a \neq b$ 和 $c \neq d$ 的条件保留下来，而方程 (144) 给出

$$M_{11,22} + M_{22,11} - 2M_{12,12} = 0 \implies$$

$$\left(L_{111}V_{,x} + L_{112}V_{,y}\right)_{,yy} + \left(L_{221}V_{,x} + L_{222}V_{,y}\right)_{,xx} - 2\left(L_{112}V_{,x} + L_{221}V_{,y}\right)_{,xy} = 0 \implies$$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & L_{221}V_{,xxx} + \left(L_{222} - 2L_{112}\right)V_{,xxy} + \left(L_{111} - 2L_{221}\right)V_{,xyy} + L_{112}V_{,yyy} + \\ & + 2\left(L_{221,x} - L_{112,y}\right)V_{,xx} + 2\left(L_{111,y} + L_{222,x} - L_{112,x} - L_{221,y}\right)V_{,xy} + \\ & + 2\left(L_{112,y} - L_{221,x}\right)V_{,yy} + \left(L_{221,xx} - 2L_{112,xy} + L_{111,yy}\right)V_{,x} + \\ & + \left(L_{222,xx} - 2L_{221,xy} + L_{112,yy}\right)V_{,y}. \end{aligned} \tag{145}$$

这是一个三阶线性偏微分方程，与参考文献18的式 (2.10) 一致。

因此，为了求出允许存在形式为 (133) 的经典第一积分的可积势 $V(x, y)$，我们必须求解偏微分方程组 (134) - (137)，并同时满足可积性条件 (145)。上述方程组无法求得通解；因此，我们考虑与 KT 的参数 L_{abc} (28) 及 V 的函数形式有关的若干情形。

6.4.2 可分离势 $V(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$

我们考虑一般形式的可分离势[68]

$$V(x, y) = F_1(x) + F_2(y) \tag{146}$$

其中，F_1 和 F_2 是各自自变量的任意光滑函数。由于式（146）的形式，这类势已经具有相互独立的自治二次第一积分

$$I_1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + F_1(x), \;\; I_2 = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + F_2(y). \tag{147}$$

因此，如果我们针对 F_1 和 F_2 的某些特殊选取，找到一个形式如式（133）的额外 CFI，那么所得势（146）就成为超可积势。参考文献20和68采用了这种研究方法，并找到了八个超可积势（见参考文献68附录中的势（C.1）–（C.8）以及参考文献20第4节）。然而，在这些势中，只有五个是纯粹的三阶超可积势，因为可以证明，仅用二次第一积分就能证明参考文献68中的势（C.1）–（C.3）是超可积的。

将参考文献68的结果与前几节用 Holt 方法得到的结果进行比较，我们注意到，势 (C.1) 和 (C.2) 是 (78) 的子情形；(C.3) 是 $x \leftrightarrow y$ 对应的 (56)；(C.4) 是 $c_1 = 0$ 对应的 (120) 的一个子情形；(C.7) 是 (64)；势 (68) 是 (C.5) 的一个特例；而由于对向量 B_a 采用了限制性假设 (32)，无法得到势 (C.6) 和 (C.8)。不过，在下文中，我们将把这两个势推导为更一般情形的子情形。此外，我们还将找到一些新的势。

将 (146) 代入偏微分方程 (134) - (137) 和 (145)，得到[69]：

$$\begin{aligned} B_1(x, y) \;=\; & 3\left(a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4\right)F_1 - \frac{3}{2}x^2\left(a_1 y^2 + 2a_2 y + a_3\right)F_{2,y} + \\ & + 3x\left(a_5 y^2 + a_8 y + a_9\right)F_{2,y} + f_1(y) \end{aligned} \tag{148}$$

$$
\begin{aligned}
B_2(x,y) &= -3\left(a_1x^3-3a_5x^2-3a_6x-a_7\right)F_2+\frac{3}{2}y^2\left(a_1x^2-2a_5x-a_6\right)F_{1,x}+ \\
&\quad +3y\left(a_2x^2-a_8x+a_{10}\right)F_{1,x}+f_2(x) && (149)\\
B_{1,y}+B_{2,x} &= 6\left(L_{112}F_{1,x}+L_{221}F_{2,y}\right) && (150)\\
B_1F_{1,x}+B_2F_{2,y} &= 0 && (151)\\
0 &= L_{221}F_{1,xxx}+L_{112}F_{2,yyy}+2\left(L_{221,x}-L_{112,y}\right)F_{1,xx}+2\left(L_{112,y}-L_{221,x}\right)F_{2,yy}+ \\
&\quad +\left(L_{221,xx}-2L_{112,xy}+L_{111,yy}\right)F_{1,x}++\left(L_{222,xx}-2L_{221,xy}+L_{112,yy}\right)F_{2,y} && (152)
\end{aligned}
$$

其中 $f_1(y)$ 和 $f_2(x)$ 是任意光滑函数。

向量 B_a 的分量见（148）—（149）；因此，我们需要求解含有四个未知函数 $F_1(x)$ $F_2(y)$ $f_1(y)$ 和 $f_2(x)$ 的常微分方程组（150）—（152）。我们考虑关于 KT （28）的参数的几种情形。

1）唯一的非零参数是 $a_4a_9\neq 0$。
KT（28）为 $L_{111}=a_4$、$L_{112}=a_9$ 和 $L_{221}=L_{222}=0$。
由（148）—（149）可得，向量 B_a 为

$$
B_a=\begin{pmatrix} 3a_4F_1+3a_9xF_{2,y}+f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \tag{153}
$$

常微分方程组（150）—（152）变为：

$$
\begin{aligned}
3a_9\left(xF_{2,yy}-2F_{1,x}\right)+f_{1,y}+f_{2,x} &= 0 && (154)\\
F_{2,yyy} &= 0 && (155)\\
3a_4F_1F_{1,x}+3a_9xF_{1,x}F_{2,y}+F_{1,x}f_1+F_{2,y}f_2 &= 0. && (156)
\end{aligned}
$$

由（155）可得 $F_2(y)=c_1y^2+c_2y$，其中 c_1 和 c_2 为任意常数。将该函数代入上述方程，我们得到

$$
B_a=\begin{pmatrix} 3a_4F_1(x)+3a_9x\left(2c_1y+c_2\right)+f_1(y) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \tag{157}
$$

以及条件：

$$
\begin{aligned}
6a_9\left(c_1x-F_{1,x}\right)+f_{1,y}+f_{2,x} &= 0 && (158)\\
3a_4F_1(x)F_{1,x}+3a_9xF_{1,x}\left(2c_1y+c_2\right)+F_{1,x}f_1(y)+\left(2c_1y+c_2\right)f_2(x) &= 0. && (159)
\end{aligned}
$$

此外，势 (146) 变为

$$
V(x,y)=c_1y^2+c_2y+F_1(x). \tag{160}
$$

对 (158) 积分，得到

$$
f_1(y)=c_3y+c_4,\quad f_2(x)=6a_9F_1(x)-3a_9c_1x^2-c_3x+c_5
$$

其中 c_3、c_4,且 c_5 为任意常数。将这些函数代入 (157) 和 (159)，我们得到 et

$$
B_a=\begin{pmatrix} 3a_4F_1(x)+3a_9c_2x+6a_9c_1xy+c_3y+c_4 \\ 6a_9F_1(x)-3a_9c_1x^2-c_3x+c_5 \end{pmatrix} \tag{161}
$$

其中剩余的未知函数 $F_1(x)$ 满足条件

$$
3a_4F_1F_1'+\left(3a_9xF_1'+6a_9F_1-3a_9c_1x^2-c_3x+c_5\right)\left(2c_1y+c_2\right)+F_1'\left(c_3y+c_4\right)=0 \tag{162}
$$

其中 $F_1'\equiv\frac{dF_1}{dx}=F_{1,x}$。

条件 (162) 等价地写为

$$\begin{aligned} 0 &= \left(3a_4F_1F_1' + 3a_9c_2xF_1' + c_4F_1' + 6a_9c_2F_1 - 3a_9c_1c_2x^2 - c_2c_3x + c_2c_5\right) + \\ &\quad +2y\left(3a_9c_1xF_1' + F_1'\frac{c_3}{2} + 6a_9c_1F_1 - 3a_9c_1^2x^2 - c_1c_3x + c_1c_5\right). \end{aligned} \tag{163}$$

该方程具有如下形式： $A(x) + yB(x) = 0$；因此可得 $A(x) = B(x) = 0$，即：

$$3a_4F_1F_1' + 3a_9c_2xF_1' + c_4F_1' + 6a_9c_2F_1 - 3a_9c_1c_2x^2 - c_2c_3x + c_2c_5 = 0 \tag{164}$$

$$3a_9c_1xF_1' + F_1'\frac{c_3}{2} + 6a_9c_1F_1 - 3a_9c_1^2x^2 - c_1c_3x + c_1c_5 = 0. \tag{165}$$

唯一的非平凡情形是 $c_1 = c_3 = 0$。
在这种情形下，势 (160) 为 $V = c_2y + F_1(x)$，且

$$B_a = \begin{pmatrix} 3a_4F_1(x) + 3a_9c_2x + c_4 \\ 6a_9F_1(x) + c_5 \end{pmatrix}. \tag{166}$$

条件 (165) 恒等于零，而条件 (164) 化为

$$3a_4F_1F_1' + 3a_9c_2xF_1' + c_4F_1' + 6a_9c_2F_1 + c_2c_5 = 0. \tag{167}$$

这个一阶非线性常微分方程有如下第一积分

$$\left(F_1 + \frac{c_5}{6a_9}\right)\left(F_1 + \frac{3a_9c_2}{a_4}x + \frac{c_4}{a_4} - \frac{c_5}{3a_9}\right)^2 = k \tag{168}$$

其中， k 是方程 (167) 的解 $F_1(x)$ 上的任意常数。对于 $c_4 = c_5 = 0$，令 $b \equiv -\frac{3a_9c_2}{a_4}$，第一积分 (168) 化为著名条件[70] （参见参考文献68中的方程 (32) 和 (34)）

$$F_1\left(F_1 - bx\right)^2 = k. \tag{169}$$

我们得出结论，参考文献68中的超可积势 (C.8) 是 $V = c_2y + F_1(x)$ 在 $c_4 = c_5 = 0$ 时的一个子情形。回想一下，函数 $F_1(x)$ 现在由更一般的三次代数方程 (168) 确定。
相关CFI (133) 为

$$J_0^{(3,2)} = a_4\dot{x}^3 + 3a_9\dot{x}^2\dot{y} + \left(3a_4F_1 + 3a_9c_2x + c_4\right)\dot{x} + \left(6a_9F_1 + c_5\right)\dot{y} \tag{170}$$

其中，函数 $F_1(x)$ 是 (168) 的一个解。我们注意到，当 $c_4 = c_5 = 0$, $b \equiv -3a_9c_2$，并乘以 $\frac{2c_2}{a_4}$ 后，CFI (170) 与参考文献68中的方程 (41) 一致。
若将这些常数重命名如下，常数的数量便减少一个： $k_1 \equiv \frac{a_4}{3a_9}$, $k_2 \equiv \frac{c_4}{3a_9}$, $k_3 \equiv \frac{c_5}{3a_9}$,$k_4 \equiv k$ 和 $c \equiv c_2$。于是，势

$$V(x, y) = cy + F(x) \tag{171}$$

具有第一积分CFI

$$I = k_1\dot{x}^3 + \dot{x}^2\dot{y} + \left(3k_1F + cx + k_2\right)\dot{x} + \left(2F + k_3\right)\dot{y} \tag{172}$$

其中，函数 $F(x)$ 是三次代数方程的一个解

$$\left(F + \frac{k_3}{2}\right)\left(F + \frac{c}{k_1}x + \frac{k_2}{k_1} - k_3\right)^2 = k_4. \tag{173}$$

我们注意到，参考文献36已证明，形式为 (171) 的所有势都是超可积的，因为它们具有额外的含时LFI $I = \dot{y} + ct$。因此，无需寻找经典第一积分。

2）唯一非零的参数是 $a_4a_7 \neq 0$。
Killing 张量 (28) 为 $L_{111} = a_4$、 $L_{222} = a_7$ 和 $L_{112} = L_{221} = 0$。

根据方程 (148) - (149)，向量

$$B_a = \begin{pmatrix} 3a_4F_1(x) + f_1(y) \\ 3a_7F_2(y) + f_2(x) \end{pmatrix}. \tag{174}$$

方程（150）-（151）变为:

$$\frac{df_1(y)}{dy} + \frac{df_2(x)}{dx} = 0 \tag{175}$$

$$3a_4F_1(x)\frac{dF_1}{dx} + f_1(y)\frac{dF_1}{dx} + 3a_7F_2(y)\frac{dF_2}{dy} + f_2(x)\frac{dF_2}{dy} = 0 \tag{176}$$

且可积性条件（152）恒等地消失。

由（175）可得，$f_1(y) = c_1y + c_2$且 $f_2(x) = -c_1x + c_3$，其中 c_1、c_2和 c_3为任意常数。将这些函数代入（176），可见仅当 $c_1 = 0$时才存在非平凡势；因此，向量（174）为

$$B_a = \begin{pmatrix} 3a_4F_1(x) + c_2 \\ 3a_7F_2(y) + c_3 \end{pmatrix} \tag{177}$$

且函数 F_1、F_2 满足条件

$$\underbrace{3a_4F_1(x)\frac{dF_1}{dx} + c_2\frac{dF_1}{dx}}_{\equiv A(x)} \underbrace{+3a_7F_2(y)\frac{dF_2}{dy} + c_3\frac{dF_2}{dy}}_{B(y)} = 0. \tag{178}$$

后者的形式为 $A(x) + B(y) = 0$；因此，$A(x) = \frac{3c_4}{2}$且 $B(y) = -\frac{3c_4}{2}$，其中 c_4 为任意常数。求解这些常微分方程，我们得到

$$F_1(x) = \pm\sqrt{-\frac{c_4}{a_4}x + \frac{c_2^2}{9a_4^2}} - \frac{c_2}{3a_4},\ \ F_2(y) = \pm\sqrt{\frac{c_4}{a_7}y + \frac{c_3^2}{9a_7^2}} - \frac{c_3}{3a_7}. \tag{179}$$

相关CFI（133）为

$$J_0^{(3,2)} = a_4\dot{x}^3 + a_7\dot{y}^3 + (3a_4F_1 + c_2)\,\dot{x} + (3a_7F_2 + c_3)\,\dot{y}. \tag{180}$$

通过重新命名常数，可将上述表达式简化如下:

$$k_1 \equiv -\frac{c_4}{a_4},\ \ k_2 \equiv \frac{c_4}{a_7},\ \ k_3 = \frac{c_2}{3a_4},\ \ k_4 \equiv \frac{c_3}{3a_7}.$$

于是，得到势 $V = F_1(x) + F_2(y)$，其中

$$F_1(x) = \pm\sqrt{k_1x + k_3^2} - k_3,\ \ F_2(y) = \pm\sqrt{k_2y + k_4^2} - k_4 \tag{181}$$

它们存在经典第一积分

$$J_0^{(3,2)} = k_2\dot{x}^3 - k_1\dot{y}^3 + 3k_2\,(F_1 + k_3)\,\dot{x} - 3k_1\,(F_2 + k_4)\,\dot{y}. \tag{182}$$

若引入新常数 $d_1 = \frac{k_3^2}{k_1}$和 $d_2 = \frac{k_4^2}{k_2}$，则由于平移 $x \to x - d_1$和 $y \to y - d_2$，常数 k_3 和 k_4 可以消去。因此，可以令 $k_3 = k_4 = 0$。

我们注意到，参考文献68中的超可积势 (C.5) 与由 (181) 定义的势一致。此外，对于 $k_1 = k_2 = k^2$，$k_3 = k_4 = 0$ 和$F_1(x) = \sqrt{k_1x}$，势 (68) 也是上述势的一个子情形。

3) 唯一非零参数是 $a_3 \neq 0$。

在这种情形下，$L_{111} = 3a_3y$、$L_{112} = -a_3x$ 和 $L_{221} = L_{222} = 0$。

由（148）-（149）给出的向量为

$$B_a = \begin{pmatrix} 9a_3yF_1(x) - \frac{3}{2}a_3x^2\frac{dF_2}{dy} + f_1(y) \\ f_2(x) \end{pmatrix}. \tag{183}$$

常微分方程组（150）-（152）变为:

$$6a_3x\frac{dF_1}{dx}+9a_3F_1+\frac{df_2}{dx}+\frac{df_1}{dy}-\frac{3}{2}a_3x^2\frac{d^2F_2}{dy^2} = 0 \quad (184)$$

$$f_2\frac{dF_2}{dy}-\frac{3}{2}a_3x^2\frac{dF_1}{dx}\frac{dF_2}{dy}+f_1\frac{dF_1}{dx}+9a_3yF_1\frac{dF_1}{dx} = 0 \quad (185)$$

$$\frac{d^3F_2}{dy^3} = 0. \quad (186)$$

由（186）可得 $F_2(y)=c_1y^2+c_2y$，其中 c_1 和 c_2 为任意常数。将此函数代入其余方程，我们得到:

$$6a_3x\frac{dF_1}{dx}-3c_1a_3x^2+9a_3F_1+\frac{df_2}{dx}+\frac{df_1}{dy} = 0 \quad (187)$$

$$c_2f_2+2c_1yf_2-\frac{3}{2}a_3c_2x^2\frac{dF_1}{dx}-3a_3c_1x^2y\frac{dF_1}{dx}+f_1\frac{dF_1}{dx}+9a_3yF_1\frac{dF_1}{dx} = 0. \quad (188)$$

求解（187）可得 $f_1(y)=c_3y+c_4$，其中 c_3 和 c_4 为任意常数；因此，常微分方程组（187）—（188）变为:

$$6a_3x\frac{dF_1}{dx}-3c_1a_3x^2+9a_3F_1+\frac{df_2}{dx}+c_3 = 0 \quad (189)$$

$$c_2f_2-\frac{3}{2}a_3c_2x^2\frac{dF_1}{dx}+c_4\frac{dF_1}{dx} = 0. \quad (190)$$

$$2c_1f_2-3a_3c_1x^2\frac{dF_1}{dx}+c_3\frac{dF_1}{dx}+9a_3F_1\frac{dF_1}{dx} = 0. \quad (191)$$

我们考虑以下非平凡情形:

3.1. 情形 $c_2=0$ 和 $c_1\neq 0$。

由方程（189）—（191）可得 $c_4=0$ 和 $f_2(x)=-\frac{1}{2}F_1'\left(\frac{9a_3}{c_1}F_1-3a_3x^2+\frac{c_3}{c_1}\right)$，其中函数 $F_1(x)$ 满足条件

$$D\equiv 3a_3\left[\frac{c_1}{2}x^2F_1''+3c_1\left(xF_1\right)'-\frac{3}{4}\left(F_1^2\right)''-c_1^2x^2\right]+c_3\left(c_1-\frac{F_1''}{2}\right)=0. \quad (192)$$

若乘以 8 并令 $a_3=-\frac{A_{120}}{3}$、$c_1=a$ 和 $c_3=\eta$，则可得到参考文献68中关于 $\hbar=0$ 和 $A_{021}=0$ 的条件（16）。

ODE (192) 存在形式为 $A(x)F_1'+B(x)=k_1$ 的 LFI，当且仅当它满足以下条件

$$A'F_1'+AF_1''+B'=0 \implies A'F_1'+AF_1''+B'=g(x)D \quad (193)$$

沿着 (192) 的解。令函数 $g=\frac{x}{3a_3}$，可得:

$$\begin{aligned} A &= c_1x^3-3xF_1-\frac{c_3}{3a_3}x \\ B &= \frac{3}{2}F_1^2+3c_1x^2F_1-\frac{c_1^2}{2}x^4+\frac{c_3}{3a_3}\left(F_1+c_1x^2\right). \end{aligned}$$

因此，ODE (192) 存在第一积分

$$x\left(c_1x^2-3F_1\right)F_1'+\frac{3}{2}F_1^2+3c_1x^2F_1-\frac{c_1^2}{2}x^4+\frac{c_3}{3a_3}\left(F_1-xF_1'+c_1x^2\right)=k_1. \quad (194)$$

若令 $c_3=0$，则这是 $\hbar=0, k=4k_1$ 的参考文献68中的式 (18)。

求解（194），我们发现 $F_1(x)$ 必须满足四次代数方程

$$0 = k_2x^2+4k_1^2+\left(9F_1-c_1x^2\right)\left(F_1-c_1x^2\right)^3-4k_1\left(F_1-c_1x^2\right)\left(3F_1+c_1x^2\right)+$$

$$+4k_3\left(3F_1-c_1x^2\right)\left(F_1-c_1x^2\right)^2+4k_3^2\left(F_1-c_1x^2\right)^2-\frac{8k_1k_3}{3}\left(3F_1-c_1x^2\right) \tag{195}$$

其中 $k_3\equiv\frac{c_3}{3a_3}$ 和 k_2 是任意常数。对于 $k_3=0$，我们得到参考文献68中的方程（24）。

此外，向量 (183) 变为

$$B_a=\left(\begin{array}{c}9a_3yF_1(x)-3a_3c_1x^2y+c_3y\\-\frac{1}{2}F_1'\left(\frac{9a_3}{c_1}F_1-3a_3x^2+\frac{c_3}{c_1}\right)\end{array}\right). \tag{196}$$

我们得出结论，势

$$V(x,y)=c_1y^2+F_1(x) \tag{197}$$

存在 CFI

$$J_0^{(3,2)}=L\dot{x}^2-\left(3yF_1-c_1x^2y+k_3y\right)\dot{x}+\frac{1}{2c_1}F_1'\left(3F_1-c_1x^2+k_3\right)\dot{y} \tag{198}$$

其中 $F_1(x)$ 满足四次代数方程 (195)。我们注意到，参考文献68中的超可积势 (C.6) 是上述结果在 $k_3=0$ 下的一个子情形。

6.4.3 参数 a_4,a_7,a_9,a_{10}：由 (28) 给出的分量 L_{abc} 为常数

1) 唯一非零的参数是 $a_4=a$ 和 $a_9=b$，其中 a 和 b 是任意常数。Killing 张量 (28) 为 $L_{221}=L_{222}=0$、$L_{111}=a$ 和 $L_{112}=b$。偏微分方程 (134) - (137) 和 (145) 变为：

$$\begin{aligned}B_1V_{,x}+B_2V_{,y}&=0 &(199)\\ B_{1,x}&=3\left(aV_{,x}+bV_{,y}\right) &(200)\\ B_{2,y}&=0 &(201)\\ B_{1,y}+B_{2,x}&=6bV_{,x} &(202)\\ bV_{,yyy}+aV_{,xyy}-2bV_{,xxy}&=0. &(203)\end{aligned}$$

未发现新的势。

2) $a_{10}=-a_4$ （其余参数均设为零）；不失一般性，我们令 $a_4=1\implies a_{10}=-1$。

相关CFI (133) 为

$$J_0^{(3,2)}=\dot{x}^3-3\dot{x}\dot{y}^2+B_1\dot{x}+B_2\dot{y}. \tag{204}$$

求解可积性条件 (145)，我们得到一般形式的势：

$$V=F_1(y)+F_2(y+\sqrt{3}x)+F_3(y-\sqrt{3}x). \tag{205}$$

这些是第6.3节中详细讨论的可积势，其中已证明 Toda 型势只是特殊情形。我们注意到，形式为 (204) 的所有经典第一积分仅适用于形式为 (205) 的势。

与第6.3节所采用的方法相比，主要区别在于：这里我们通过求解 KT 参数 $a_{10}=-a_4$的可积性条件 (145)，确定了函数形式 (205)；而在第6.3节中，我们将 (205) 作为试探形式，并将其代入 CFI 条件 (30) 和 (31)，而没有使用可积性条件。

参考文献 71 的式 (4.21) 中给出的势[71] 是 (205) 的一个子情形，条件为

$$F_1=\frac{k}{9y^2},\quad F_2=\frac{4k}{9(y+\sqrt{3}x)^2},\quad F_3=\frac{4k}{9(y-\sqrt{3}x)^2}$$

其中 k 是一个任意常数。事实上，我们有

$$V=\frac{k}{9y^2}+\frac{4k}{9(y+\sqrt{3}x)^2}+\frac{4k}{9(y-\sqrt{3}x)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= k\frac{\frac{1}{9}(y^2-3x^2)^2+\frac{4}{9}y^2(y-\sqrt{3}x)^2+\frac{4}{9}y^2(y+\sqrt{3}x)^2}{y^2(y+\sqrt{3}x)^2(y-\sqrt{3}x)^2}\\
&= \frac{kr^4}{y^2(y+\sqrt{3}x)^2(y-\sqrt{3}x)^2}=\frac{k}{y^2}\left(\frac{r^2}{y^2-3x^2}\right)^2\\
&= \frac{k}{r^2\sin^2\theta(3-4\sin^2\theta)^2}=\frac{k}{r^2\sin^2 3\theta}
\end{aligned}
$$

其中我们使用了变换 $x=r\cos\theta$和 $y=r\sin\theta$，以及三角恒等式 $\sin(3\theta)=3\sin\theta-4\sin^3\theta$。

6.4.4 参数 a_3,a_6,a_8：由 (28) 给出的分量 L_{abc} 与 x,y 线性相关。我们得到在第 (6.2.2) 和 (6.4.2) 节中已得到的势。

6.4.5 参数 a_2,a_5：由 (28) 给出的分量 L_{abc} 依赖于 x^2,xy,y^2

1) 唯一非零的参数是 a_2；不失一般性，令 $a_2=\frac{1}{3}$。

KT (28) 为 $L_{111}=y^2$, $L_{112}=-\frac{2}{3}xy$, $L_{221}=\frac{x^2}{3}$ 和 $L_{222}=0$。

将这些量代入可积性条件 (145)，我们得到二阶可积势（参见参考文献36中的 II 类势）

$$
V=\frac{k}{r}+\frac{F\left(\frac{y}{x}\right)}{r^2} \tag{206}
$$

其中 k 是任意常数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 F 是其自变量的任意光滑函数。将 (206) 代入其余偏微分方程 (134) - (137)，得到以下方程组：

$$
\begin{aligned}
B_1\left(uF'+\frac{2F}{1+u^2}+\frac{k}{1+u^2}r\right)-B_2\left(F'-\frac{2uF}{1+u^2}-\frac{ku}{1+u^2}r\right) &= 0 &(207)\\
xB_{1,x}+\frac{u(2+3u^2)F'}{1+u^2}+\frac{2u^2F}{(1+u^2)^2}+\frac{ku^2}{(1+u^2)^2}r &= 0 &(208)\\
xB_{2,y}+\frac{uF'}{1+u^2}+\frac{2F}{(1+u^2)^2}+\frac{k}{(1+u^2)^2}r &= 0 &(209)\\
xB_{1,y}+xB_{2,x}-\frac{2(1+2u^2)F'}{1+u^2}-\frac{4uF}{(1+u^2)^2}-\frac{2ku}{(1+u^2)^2}r &= 0 &(210)
\end{aligned}
$$

其中 $u\equiv\frac{y}{x}$, $F'\equiv\frac{dF_{(u)}}{du}$, $\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ 和 $\frac{y}{r}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$。

根据上述方程组的结构，我们推断，分量 B_a 必须是关于 r 的线性函数，其系数取决于 u，即：

$$
B_1=A_1(u)+A_2(u)r,\ \ B_2=A_3(u)+A_4(u)r \tag{211}
$$

其中 A_1,A_2,A_3 和 A_4 是 u 的任意光滑函数。

于是，方程 (208) 给出：

$$
\underbrace{-uA_1'+\frac{u(2+3u^2)F'}{1+u^2}+\frac{2u^2F}{(1+u^2)^2}}_{=0}+\underbrace{\left(\frac{ku^2}{(1+u^2)^2}+\frac{A_2}{1+u^2}-uA_2'\right)}_{=0}r=0\implies
$$

$$
A_1'=\left(\frac{2+3u^2}{1+u^2}F\right)',\ \ uA_2'-\frac{A_2}{1+u^2}-\frac{ku^2}{(1+u^2)^2}=0.
$$

求解这些关系式，得到：

$$
A_1=\frac{2+3u^2}{1+u^2}F+c_1,\ \ A_2=\frac{ku^2}{1+u^2}+\frac{c_2u}{\sqrt{1+u^2}} \tag{212}
$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数。

同样，方程 (209) 意味着

$$A_3 = -uf' - f,\ \ A_4 = -\frac{ku}{1+u^2} + \frac{c_3}{\sqrt{1+u^2}} \tag{213}$$

其中 c_3 是任意常数，f 是关于 u 的光滑函数，且满足

$$F = (1+u^2)f'. \tag{214}$$

将 (212)、(213) 和 (214) 代入 (211)，得到向量

$$B_a = \begin{pmatrix} c_1 + (2+3u^2)f' + \frac{ku^2 r}{1+u^2} + \frac{c_2 ur}{\sqrt{1+u^2}} \\ -f - uf' - \frac{kur}{1+u^2} + \frac{c_3 r}{\sqrt{1+u^2}} \end{pmatrix}. \tag{215}$$

将 (215) 和 (214) 代入 (207)，得到关于 r 的二次多项式方程，其形式为 $f_1(u) + f_2(u)r + f_3(u)r^2 = 0$。解此方程，得到 $c_3 = -c_2$，而函数 f 需满足附加条件：

$$3u(1+u^2)^2 f' f'' + (1+u^2) f f'' + c_1 u(1+u^2) f'' + 2(2+3u^2)(1+u^2) f'^2 + 2c_1(1+u^2) f' = 0 \tag{216}$$

$$\left(ku + c_2\sqrt{1+u^2}\right)(1+u^2) f'' + 2\left[k(1+u^2) + c_2 u\sqrt{1+u^2}\right] f' + \frac{k(c_1 - uf)}{1+u^2} = 0. \tag{217}$$

剩余方程 (210) 恒成立。注意到 $c_3 = -c_2 \implies A_2 = -uA_4$。由 (214) 可得，势 (206) 变为

$$V = \frac{k}{r} + \frac{(1+u^2)f'}{r^2}. \tag{218}$$

相关 CFI (133) 为

$$J_0^{(3,2)} = \dot{x}L^2 - \left(\frac{ku}{\sqrt{1+u^2}} + c_2\right) L + \left[\left(2+3u^2\right) f' + c_1\right] \dot{x} - \left(uf' + f\right) \dot{y} \tag{219}$$

其中 f 是满足二阶非线性常微分方程 (216) 和 (217) 的 u 函数

我们注意到，势 (218) 是超可积的，因为它还具有 Ermakov QFI[3] [6]

$$I = \frac{1}{2}L^2 + (1+u^2)f'. \tag{220}$$

使用极坐标 (r, θ)，我们有 $u = \tan\theta$，$\frac{x}{r} = \cos\theta$，以及 $\frac{y}{r} = \sin\theta$。那么，条件 (214) 给出 $F = \frac{df}{d\theta}$，可积势 (218) 变为

$$V = \frac{k}{r} + \frac{df}{d\theta} r^{-2}. \tag{221}$$

相关CFI (219) 变为

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} \ \ = \ \ & p_\theta^2 \left(\cos\theta p_r - \sin\theta \frac{p_\theta}{r}\right) + \left[\left(2\frac{df}{d\theta} + c_1\right)\cos\theta - f\sin\theta\right] p_r - \\ & - \left[\left(\frac{3}{r}\frac{df}{d\theta} + \frac{c_1}{r} + k\right)\sin\theta + \frac{f}{r}\cos\theta + c_2\right] p_\theta \end{aligned} \tag{222}$$

而条件 (216) 和 (217) 写作如下：

$$\sin\theta\left[\left(3\frac{df}{d\theta} + c_1\right)\frac{d^2 f}{d\theta^2} - 2f\frac{df}{d\theta}\right] + \cos\theta\left[f\frac{d^2 f}{d\theta^2} + 4\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 + 2c_1\frac{df}{d\theta}\right] \ \ = \ \ 0 \tag{223}$$

$$c_2\frac{d^2 f}{d\theta^2} + k\sin\theta\left(\frac{d^2 f}{d\theta^2} - f\right) + k\cos\theta\left(2\frac{df}{d\theta} + c_1\right) \ \ = \ \ 0. \tag{224}$$

Ermakov QFI 为 $I = \frac{1}{2}p_\theta^2 + \frac{df}{d\theta}$。

我们考虑两个子情形:

- 子情形 $k \neq 0$。

在这种情形下，二阶线性常微分方程 (224) 的解为

$$f(\theta) = \frac{kc_1 \cos\theta + c_4\theta + c_5}{c_2 + k\sin\theta} \tag{225}$$

其中 c_4 和 c_5 为任意常数。

将 (225) 代入剩余条件 (223)，我们发现 $c_2 = c_4 = 0$ 且解 (225) 变为

$$f(\theta) = c_1 \cot\theta + \frac{c_5}{k\sin\theta}. \tag{226}$$

于是，超可积势 (221) 可写为

$$V = \frac{k}{r} + \frac{k_1}{r^2\sin^2\theta} + \frac{k_2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta} = \frac{k}{r} + \frac{k_3}{r^2(1-\cos\theta)} + \frac{k_4}{r^2(1+\cos\theta)} = \frac{k}{r} + \frac{k_3}{r(r-x)} + \frac{k_4}{r(r+x)} \tag{227}$$

其中 $k_1 = k_3 + k_4 = -c_1$ 和 $k_2 = k_3 - k_4 = -\frac{c_5}{k}$。这是此前通过 Holt 方法发现的著名二阶超可积势 (6.4.7)。

- 子情形 $k = 0$。

开普勒项消失，超可积势 (221) 变为（见参考文献 71 的定理 2 中的方程 (5.1)）

$$V = \frac{df}{d\theta}r^{-2}. \tag{228}$$

条件 (224) 给出 $c_2\frac{d^2f}{d\theta^2} = 0$，这意味着 $c_2 = 0$ 或 $f = b_1\theta + b_2$，其中 b_1 和 b_2 为任意常数。然而，由于还需满足条件 (223)，只有情形 $c_2 = 0$ 能给出非平凡结果。另一种情形意味着 $b_1 = 0 \implies \frac{df}{d\theta} = 0 \implies V = 0$。

因此，超可积势 (228) 存在 CFI

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} \quad = \quad & p_\theta^2\left(\cos\theta p_r - \sin\theta\frac{p_\theta}{r}\right) + \left[\left(2\frac{df}{d\theta} + c_1\right)\cos\theta - f\sin\theta\right]p_r - \\ & - \left[\left(3\frac{df}{d\theta} + c_1\right)\sin\theta + f\cos\theta\right]\frac{p_\theta}{r} \end{aligned} \tag{229}$$

其中， f 是一个任意光滑函数，使得

$$\sin\theta\left[\left(3\frac{df}{d\theta} + c_1\right)\frac{d^2f}{d\theta^2} - 2f\frac{df}{d\theta}\right] + \cos\theta\left[f\frac{d^2f}{d\theta^2} + 4\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 + 2c_1\frac{df}{d\theta}\right] = 0. \tag{230}$$

参考文献 32 的表 III 中第二个超可积势，是由针对 $c_1 = 0$ 的条件 (230) 作为一个子情形导出的。参考文献 32 中给出的条件仅当 $C = 0$ 时才与给定的 CFI 相关。此外，参考文献 72 中的势[72] (4.11)也是由针对 $c_1 = 0$ 的 (230) 导出的。参考文献 72 中给出的 CFI 有一处小的印刷错误（第三项的加号应改为减号）。

6.4.6 参数 a_1：由 (28) 给出的分量 L_{abc} 取决于 x^3、xy^2、x^2y， y^3

在这种情形下，唯一非零的参数是 a_1；不失一般性，我们取 $a_1 = -1$。相关 CFI (133) 的首项为角动量（参见参考文献 26 第 3.3.3 节）， is,

$$J_0^{(3,2)} = L^3 + B_1\dot{x} + B_2\dot{y}. \tag{231}$$

KT (28) 为 $L_{111} = -y^3$、 $L_{112} = xy^2$、 $L_{221} = -x^2y$ 和 $L_{222} = x^3$。

将这些量代入可积性条件 (145)，可得一般形式的势

$$V = F_1(r) + \frac{F_2\left(\frac{y}{x}\right)}{r^2} + \frac{F_3\left(\frac{y}{x}\right)}{r^3} \tag{232}$$

其中， $r=\sqrt{x^2+y^2}$、 F_1、 F_2、 F_3 均为自变量的任意光滑函数。

Replacin将 g (232) 代入其余偏微分方程 (134) - (137)，得到以下方程组 :

$$\begin{aligned} 0 &= B_1\left[\frac{dF_1}{dr}-u(1+u^2)\frac{F_2'}{r^3}-\frac{2F_2}{r^3}-u(1+u^2)\frac{F_3'}{r^4}-\frac{3F_3}{r^4}\right]+ \\ &\quad +B_2\left[u\frac{dF_1}{dr}+(1+u^2)\frac{F_2'}{r^3}-\frac{2uF_2}{r^3}+(1+u^2)\frac{F_3'}{r^4}-\frac{3uF_3}{r^4}\right] \end{aligned} \tag{233}$$

$$B_{1,x} = 3u^2\left(F_2'+\frac{F_3'}{r}\right) \tag{234}$$

$$B_{2,y} = 3\left(F_2'+\frac{F_3'}{r}\right) \tag{235}$$

$$B_{1,y}+B_{2,x} = -6u\left(F_2'+\frac{F_3'}{r}\right) \tag{236}$$

其中 $u\equiv\frac{y}{x}$和 $F'\equiv{}^{dF}\!/_{(u)du}$。注意到 $\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$和 $\frac{y}{r}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$。

根据上述偏微分方程组的结构，我们推断，量 B_1 和 B_2 必定是关于 r 的线性函数，其系数依赖于 u，即

$$B_1=A_1(u)+A_2(u)r,\ \ B_2=A_3(u)+A_4(u)r \tag{237}$$

其中 A_1、 A_2、 A_3和 A_4 是 u的任意光滑函数。

将 (237) 代入 (234)，得到:

$$-\frac{u}{x}A_1'-\frac{ur}{x}A_2'+\frac{x}{r}A_2=3u^2\left(F_2'+\frac{F_3'}{r}\right)\implies$$

$$u\left(\sqrt{1+u^2}A_1'+3uF_3'\right)\frac{1}{r}+u\sqrt{1+u^2}A_2'-\frac{A_2}{\sqrt{1+u^2}}+3u^2F_2'=0\implies$$

$$A_1'=-\frac{3uF_3'}{\sqrt{1+u^2}},\ \ A_2=\frac{-3uF_2+c_1u}{\sqrt{1+u^2}} \tag{238}$$

其中 c_1 是任意常数。

同样，方程 (235) 意味着

$$A_3'=\frac{3F_3'}{\sqrt{1+u^2}},\ \ A_4=\frac{3F_2+c_2}{\sqrt{1+u^2}} \tag{239}$$

其中 c_2 是一个任意常数。

将 (238) 和 (239) 代入 (237)，得到

$$B_a=\begin{pmatrix} f-uf'+\frac{-3uF_2+c_1u}{\sqrt{1+u^2}}r \\ f'+\frac{3F_2+c_2}{\sqrt{1+u^2}}r \end{pmatrix} \tag{240}$$

其中 f 是关于 u 的任意函数，且满足

$$3F_3'=\sqrt{1+u^2}f''. \tag{241}$$

将 向量 (240) 代入 (233)，得到 $c_2=-c_1$、 $F_1=\frac{k}{r}$ 以及附加条件:

$$\frac{kf}{\sqrt{1+u^2}} = 3(1+u^2)F_2F_2'-c_1(1+u^2)F_2' \tag{242}$$

$$3(1+u^2)^{3/2}F_2F_3' = u(1+u^2)fF_2'-(1+u^2)^2f'F_2'+2fF_2+c_1(1+u^2)^{3/2}F_3' \tag{243}$$

$$3fF_3 = \left(1+u^2\right)^2f'F_3'-u\left(1+u^2\right)fF_3' \tag{244}$$

其中 k 是一个任意常数。其余的偏微分方程 (236) 恒成立。

因此，势族 (232) 给出了可积势（参见参考文献 26 中的方程 (3.3.42)）

$$V=\frac{k}{r}+\frac{F_2\left(\frac{y}{x}\right)}{r^2}+\frac{F_3\left(\frac{y}{x}\right)}{r^3} \tag{245}$$

且相关CFI (231) 为

$$J_0^{(3,2)}=L^3+\left(f-uf'+\frac{-3uF_2+c_1u}{\sqrt{1+u^2}}r\right)\dot{x}+\left(f'+\frac{3F_2-c_1}{\sqrt{1+u^2}}r\right)\dot{y} \tag{246}$$

其中 f 是满足条件 (241) - (244) 的 u 的函数。

注：若 $k=c_1=F_2=0$，则势 (245) 变为 $V=\frac{F_3\left(\frac{y}{x}\right)}{r^3}$，这就是参考文献15中例（6）所得到的势。在此情形下，条件 (242) 和 (243) 消失，而 F_3' 可按如下方式从其余条件 (241) 和 (244) 中消去：

$$F_3 = \frac{(1+u^2)^{3/2}f''}{9}\left[(1+u^2)(\ln f)'-u\right] \tag{247}$$

$$0 = \left[(1+u^2)(\ln f)'-u\right]f'''+\left[\frac{f''}{f}-\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right](1+u^2)f''+5u(\ln f)'f''-4f''. \tag{248}$$

定义可积势的函数 F_3 可用同一自变量的任意光滑函数 f 表示，而该函数是三阶非线性常微分方程 (248) 的解。

若采用极坐标 (r,θ)，上述结果将大大简化，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 且 $\tan\theta=u$。回顾一下，共轭动量 $p_r=\dot{r}$ 和 $p_\theta=L=r^2\dot{\theta}$。

可积势 (245) 变为

$$V=\frac{k}{r}+\frac{F_2(\theta)}{r^2}+\frac{F_3(\theta)}{r^3}. \tag{249}$$

对于任意函数 $h(\theta)$，我们有以下恒等式：

$$1+u^2=\frac{1}{\cos^2\theta},\ \ h'=\cos^2\theta\frac{dh}{d\theta},\ \ h''=\cos^4\theta\frac{d^2h}{d\theta^2}-2\cos^3\theta\sin\theta\frac{dh}{d\theta}.$$

如果我们引入变换 $N=f\cos\theta$，条件 (241) - (244) 变为（见参考文献 26 中的公式 (3.3.43)）：

$$\frac{d^2N}{d\theta^2}+N = 3\frac{dF_3}{d\theta} \tag{250}$$

$$kN = (3F_2-c_1)\frac{dF_2}{d\theta} \tag{251}$$

$$2NF_2 = (3F_2-c_1)\frac{dF_3}{d\theta}+\frac{dN}{d\theta}\frac{dF_2}{d\theta} \tag{252}$$

$$3NF_3 = \frac{dN}{d\theta}\frac{dF_3}{d\theta}. \tag{253}$$

我们注意到，参考文献 26 的公式 (3.3.43) 中的条件 $b'=3g'$ 可以求解，并得到 $b=3g+const$。为与参考文献 26 进行比较，我们设 $w=\theta$、$k=c$、$F_2=g$、$F_3=h$、$N=a$ 和 $b=3g-c_1$。

CFI (246) 写为[73]

$$J_0^{(3,2)}=p_\theta^3+Np_r+\left(\frac{1}{r}\frac{dN}{d\theta}+3F_2-c_1\right)p_\theta. \tag{254}$$

参考文献 32 的表 IV 中找到的势是 (249) 在 $k=c_1=F_2=0$, $N=3\frac{dg}{d\theta}$ and$F_3=g+\frac{d^2g}{d\theta^2}$ 下的一个特例，其中 $g(\theta)$ 是任意光滑函数。在这种情形下，条件 (251) 和 (252) 消失，条件 (250) 恒成立，而条件 (253) 变为

$$\frac{d^2g}{d\theta^2}\frac{d^3g}{d\theta^3}-2\frac{dg}{d\theta}\frac{d^2g}{d\theta^2}-3g\frac{dg}{d\theta}=0 \tag{255}$$

这就是参考文献 32 中找到的条件。

此外，当 $k=0$ 和 $F_2=k_1=const$时，条件 (250) - (253) 给出：

$$\frac{d^2N}{d\theta^2}=\frac{3k_1+c_1}{3k_1-c_1}N,\ \ \frac{dF_3}{d\theta}=\frac{2k_1}{3k_1-c_1}N,\ \ 3NF_3=\frac{dN}{d\theta}\frac{dF_3}{d\theta}$$

其中 $c_1\neq 3k_1$ 可得到非平凡结果。求解该常微分方程组，我们得到 $c_1=\frac{3}{2}k_1$ ，并如预期般重新得到可积势 (116) 及其 CFI (117)；此前我们已使用 Holt 方法求得它们。

6.4.7 十个参数 $a_1,...,a_{10}$ 的混合选择：由 (28) 给出的分量 L_{abc} 取决于 x、y 的混合次数乘积

1) 情形 $a_1=-a_2$ （其余参数均为零）；不失一般性，令 $a_1=-1\implies a_2=1$。KT (28) 为 $L_{111}=-y^3+3y^2$、$L_{112}=xy^2-2xy$、$L_{221}=-x^2y+x^2$ 和 $L_{222}=x^3$。

相关CFI (133) 的形式为

$$J_0^{(3,2)}=L^3+3\dot{x}L^2+B_1\dot{x}+B_2\dot{y}. \tag{256}$$

将上述 KT 分量代入可积性条件 (145)，我们再次得到一般形式 (206) 的势。然后，根据剩余条件 (134) - (137)，利用第6.4.5节和第6.4.6节中的技术，我们得到

$$B_a=\begin{pmatrix} c_1+\left(2+3u^2\right)f'+\frac{3ku^2r}{1+u^2}+\frac{u(c_2-3F)r}{\sqrt{1+u^2}} \\ -f-uf'-\frac{3kur}{1+u^2}-\frac{(c_2-3F)r}{\sqrt{1+u^2}} \end{pmatrix} \tag{257}$$

其中 f 是满足以下条件的任意光滑函数

$$\begin{aligned} 0 &= 3F-(1+u^2)f' && (258)\\ 0 &= 3u(1+u^2)^2f'f''+(1+u^2)ff''+c_1u(1+u^2)f''+2(2+3u^2)(1+u^2)f'^2+2c_1(1+u^2)f' && (259)\\ 0 &= ku(1+u^2)f''+\frac{c_2}{3}(1+u^2)^{3/2}f''-(1+u^2)^{5/2}\frac{f'f''}{3}-\frac{2u}{3}(1+u^2)^{3/2}f'^2+\\ &\quad +2k(1+u^2)f'+\frac{2c_2}{3}u\sqrt{1+u^2}f'+\frac{k(c_1-uf)}{1+u^2}. && (260)\end{aligned}$$

如果使用极坐标 (r,θ)，并应用缩放变换 $f\rightleftarrows 3f$、$c_1\rightleftarrows 3c_1$ 和 $c_2\rightleftarrows 3c_2$，则得到新的超可积势（之所以超可积，是因为它还具有 Ermakov不变量 $I=\frac{1}{2}p_\theta^2+\frac{df}{d\theta}$）

$$V=\frac{k}{r}+\frac{df}{d\theta}r^{-2} \tag{261}$$

whe其中 $k\neq 0$ ，且光滑函数 $f(\theta)$ 满足条件 (230) 以及条件

$$\left(c_2-\frac{df}{d\theta}\right)\frac{d^2f}{d\theta^2}+k\left(c_1+2\frac{df}{d\theta}\right)\cos\theta+k\left(\frac{d^2f}{d\theta^2}-f\right)\sin\theta=0. \tag{262}$$

相关CFI (256) 变为

$$\begin{aligned} J_0^{(3,2)} &= \frac{1}{3}p_\theta^3+\left(\cos\theta p_r-\sin\theta\frac{p_\theta}{r}\right)p_\theta^2+\left[\left(2\frac{df}{d\theta}+c_1\right)\cos\theta-f\sin\theta\right]p_r-\\ &\quad -\left[\left(3\frac{df}{d\theta}+c_1\right)\sin\theta+f\cos\theta\right]\frac{p_\theta}{r}-\left(c_2-\frac{df}{d\theta}+k\sin\theta\right)p_\theta. && (263)\end{aligned}$$

上文关于允许存在类型为 $J_0^{(3,2)}$ 的经典第一积分的可积与超可积势所得结果，分别汇总于表1和表2中。在这些表中，我们还列出了参考文献26和32中的相应结果，以展示哪些内容是新的和/或更一般的。对于后一种情况，我们给出可得到参考文献26和32中相应势的参数取值。此外，如果某个势未同时收录于参考文献26和32中，则将其标为“新”；若该势已由其他作者发现，我们会给出相应的参考文献。

可积势		
势与第一积分	参考文献 26	参考文献 32
$V_1 = F_1(y+\sqrt{3}x) + F_2(y-\sqrt{3}x) + F_3(-2y)$ $J_1 = \dot{x}^3 - 3\dot{x}\dot{y}^2 + 3\left[F_1(y+\sqrt{3}x) + F_2(y-\sqrt{3}x) - 2F_3(-2y)\right]\dot{x} -$ $-3\sqrt{3}\left[F_1(y+\sqrt{3}x) - F_2(y-\sqrt{3}x)\right]\dot{y}$ 其中 $\frac{dF_1}{dw_1}(F_2-F_3) + \frac{dF_2}{dw_2}(F_3-F_1) + \frac{dF_3}{dw_3}(F_1-F_2) = 0$, $w_1 \equiv y+\sqrt{3}x$, $w_2 \equiv y-\sqrt{3}x$ 和 $w_3 \equiv -2y$	(3.3.34)	表 I
$V_2 = c_+ e^{k(y+\sqrt{3}x)} + c_- e^{k(y-\sqrt{3}x)} + c_0 e^{-2ky}$ $J_2 = (\dot{x}^2 - 3\dot{y}^2)\dot{x} + 3\left[c_+ e^{k(y+\sqrt{3}x)} + c_- e^{k(y-\sqrt{3}x)} - 2c_0 e^{-2ky}\right]\dot{x} -$ $-3\sqrt{3}\left[c_+ e^{k(y+\sqrt{3}x)} - c_- e^{k(y-\sqrt{3}x)}\right]\dot{y}$	(3.3.37) $k=-\frac{1}{2}$ $c_0=1$ $c_+=1$ $c_-=1$	表 I
$V_3 = \left(\frac{4}{3}c_1x^2 + c_2x + c_3\right)y^{-2/3} + c_1y^{4/3}$ $J_3 = \dot{x}^3 + \frac{3}{2}\dot{x}\dot{y}^2 + \left[\left(4c_1x^2 + 3c_2x + 3c_3\right)y^{-2/3} - 6c_1y^{4/3}\right]\dot{x} +$ $+\left(12c_1x + \frac{9}{2}c_2\right)y^{1/3}\dot{y}$	(3.3.27) $c_1=\frac{3}{4}$ $c_2=0$	表 I
$V_4 = k(xy)^{-2/3}$ $J_4 = (\dot{x}^2 - 2H_4)x\dot{x} - (\dot{y}^2 - 2H_4)y\dot{y}$, 其中 $H_4 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + V_4$	New	New 公式 (10) 参考文献61中
$V_5 = k(x^2-y^2)^{-2/3}$ $J_5 = \left(\dot{y}^2 - \dot{x}^2\right)L + 4(y\dot{x} + x\dot{y})V_5$	(3.3.24) $k=1$	表 II $k=1$
$V_6 = \frac{k_1}{r^2} + \frac{k_2e^{\sqrt{3}\theta} + k_3e^{-\sqrt{3}\theta}}{r^3}$ $J_6 = p_\theta^3 + \frac{3}{4}\left[2k_1 + \frac{3}{r}\left(k_2e^{\sqrt{3}\theta} + k_3e^{-\sqrt{3}\theta}\right)\right]p_\theta +$ $+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(k_2e^{\sqrt{3}\theta} - k_3e^{-\sqrt{3}\theta}\right)p_r$	(3.3.44)	表 IV
$V_7 = \frac{k_1(a_2y-a_5x)}{2} + \frac{k_2}{r} + \frac{k_2(a_2x+a_5y)}{r(a_2y-a_5x)^2}$ $J_7 = (a_2\dot{x} + a_5\dot{y})L^2 + \frac{2k_1r^2}{(a_2y-a_5x)}(a_2\dot{x} + a_5\dot{y}) - \frac{k_2}{(a_2y-a_5x)r}L +$ $+\frac{k_3r}{a_2y-a_5x}(a_2\dot{y} - a_5\dot{x}) - \frac{k_3}{(a_2x+a_5y)\,r(a_2y-a_5x)}L + \frac{2k_3(a_2x+a_5y)r}{(a_2y-a_5x)^2}($	New	New
$V_8 = \frac{k}{r} + \frac{F_2(\theta)}{r^2} + \frac{F_3(\theta)}{r^3}$ $J_8 = p_\theta^3 + N(\theta)p_r + \left(\frac{1}{r}\frac{dN}{d\theta} + 3F_2 - c_1\right)p_\theta$ 其中 $\frac{d^2N}{d\theta^2} + N = 3\frac{dF_3}{d\theta}$, $kN = (3F_2 - c_1)\frac{dF_2}{d\theta}$, $2NF_2 = (3F_2 - c_1)\frac{dF_3}{d\theta} + \frac{dN}{d\theta}\frac{dF_2}{d\theta}$, 以及 $3NF_3 = \frac{dN}{d\theta}\frac{dF_3}{d\theta}$	(3.3.42)	表 IV $k = c_1 = 0$ $N = 3\frac{dg}{d\theta}$ $F_2 = 0$ $F_3 = g + \frac{d^2g}{d\theta^2}$

表1：存在类型为$J_0^{(3,2)}$ 的经典第一积分的可积势 $V(x,y)$。

超可积势		
势和第一积分	参考文献 26	参考文献 32
$V_{s1}=c_1(x^2+4y^2)+\frac{c_2}{x^2}+c_3y$ $J_{s11}=\dot{x}^2\dot{y}+x\left(8c_1y+c_3\right)\dot{x}-2\left(c_1x^2-\frac{c_2}{x^2}\right)\dot{y}$ $J_{s12}=\frac{1}{2}\dot{x}^2+c_1x^2+\frac{c_2}{x^2}$ $J_{s13}=\frac{1}{2}\dot{y}^2+4c_1y^2+c_3y$ $J_{s14}=\dot{x}L+2c_1x^2y-\frac{2c_2y}{x^2}+\frac{c_3}{2}x^2$	(3.3.29) $c_1=1$ $c_3=0$	表 I $x\leftrightarrow y$
$V_{s2}=F(x+y)$ (仅使用二次第一积分即可实现超可积) $J_{s21}=\dot{x}-\dot{y},\ J_{s22}=t(\dot{x}-\dot{y})-x+y,\ J_{s23}=\dot{x}\dot{y}+F(x+y)$ $J_{s24}=J_{s21}^3+3J_{s21}J_{s23}=\dot{x}^3-\dot{y}^3+3F(x+y)(\dot{x}-\dot{y})$	New	New
$V_{s3}=c_1\sqrt{x}+c_2y$ $J_{s31}=\frac{1}{2}\dot{x}^2+c_1\sqrt{x},\ J_{s32}=\frac{1}{2}\dot{y}^2+c_2y,\ J_{s33}=c_2\dot{x}^3+3c_1c_2\sqrt{x}\dot{x}-\frac{3}{2}c_1^2\dot{y}$	not 包含	表 I $c_1=1$
$V_{s4}=k\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)$ $J_{s41}=\frac{1}{2}\dot{x}^2+k\sqrt{x},\ J_{s42}=\frac{1}{2}\dot{y}^2\pm k\sqrt{y},\ J_{s43}=\dot{x}^3-\dot{y}^3+3k\left(\sqrt{x}\dot{x}\mp\sqrt{y}\dot{y}\right)$	not 包含	表 I $k=1$
$V_{s5}=c_1\left(x^2+y^2\right)+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{y^2}$ $J_{s51}=\frac{1}{2}\dot{x}^2+c_1x^2+\frac{c_2}{x^2},\ J_{s52}=\frac{1}{2}\dot{y}^2+c_1y^2+\frac{c_3}{y^2},\ J_{s53}=L^2+2c_2\frac{y}{x^2}+2c_3\frac{x}{y^2}$ $J_{s54}=e^{\lambda t}\left[-\dot{x}^2+\lambda x\dot{x}+2c_1x^2-\frac{2c_2}{x^2}\right],\ J_{s55}=e^{\lambda t}\left[-\dot{y}^2+\lambda y\dot{y}+2c_1y^2-\frac{2c_3}{y^2}\right]$ $J_{s56}=(\dot{x}\dot{y}+2c_1xy)\frac{L}{2}-c_2\frac{y}{x^2}\dot{y}+c_3\frac{x}{y^2}\dot{x},$ 其中 $\lambda^2=-8c_1$	(3.2.34)	表 II
$V_{s6}=c_0\left(9x^2+y^2\right)$ $J_{s61}=\frac{1}{2}\dot{x}^2+9c_0x^2,\ J_{s62}=\frac{1}{2}\dot{y}^2+c_0y^2,\ J_{s63}=\dot{y}^2L+\frac{2c_0}{3}y^3\dot{x}-6c_0xy^2\dot{y}$	(3.3.31) $c_0=\frac{1}{18}$	表 II $c_0=1$
$V_{s7}=c_1\left(x^2+y^2\right)+\frac{c_2xy+c_3(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$ $J_{s71}=\dot{x}\dot{y}+c_1\left(x^2+y^2\right)+\frac{2c_3-c_2}{4(y+x)^2}-\frac{2c_3+c_2}{4(y-x)^2}$ $J_{s72}=\left(\dot{y}^2-\dot{x}^2\right)L-2c_1\left(x^2-y^2\right)L+\frac{x(x^2+3y^2)(c_2\dot{x}+2c_3\dot{y})}{(x^2-y^2)^2}+$ $+\frac{y(3x^2+y^2)(2c_3\dot{x}+c_2\dot{y})}{(x^2-y^2)^2}$	not 包含	表 II
$V_{s8}=\frac{k_1}{y^2}+\frac{k_2}{r}+\frac{k_3x}{ry^2}$ $J_{s81}=\frac{L^2}{2}+k_1\frac{x^2}{y^2}+k_3\frac{r^2}{y},\quad J_{s82}=\dot{y}L+2k_1\frac{x}{y^2}+k_2\frac{x}{r}+k_3\frac{2x^2+y^2}{ry^2}$ $J_{s83}=\dot{x}L^2-\frac{k_2y}{r}L+\frac{2k_1r^2}{y^2}\dot{x}+\frac{k_3x(2x^2+3y^2)}{ry^2}\dot{x}+\frac{k_3y}{r}\dot{y}$	(3.2.36)	表 III
$V_{s9}=\frac{c_1}{r}+\frac{c_2\sqrt{r+x}}{r}+\frac{c_3\sqrt{r-x}}{r}$ $J_{s91}=\dot{y}L+\frac{c_1x}{r}+\frac{c_3(r+x)\sqrt{r-x}-c_2(r-x\sqrt{r+x})}{r}$ $J_{s92}=-\dot{x}L+G(x,y)$ $J_{s93}=H_9L+\frac{1}{2}\left(c_2\sqrt{r-x}+c_3\sqrt{r+x}\right)\dot{x}-\frac{1}{2}\left(c_2\sqrt{r+x}-c_3\sqrt{r-x}\right)\dot{y}$ 其中 $H_9=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+V_{s9},\quad G_y=-xV_{,x},$ 以及 $G_{,x}=2yV_{,x}-xV_{,y}$	not 包含	表V
$V_{s10}=c_0(x^2+9y^2)+c_1y$ $J_{s10a}=\frac{1}{2}\dot{x}^2+c_0x^2,\quad J_{s10b}=\frac{1}{2}\dot{y}^2+9c_0y^2+c_1y$ $J_{s10c}=\dot{x}^2L-\frac{c_1}{18c_0}\dot{x}^3+\frac{c_1}{3}x^2\dot{x}+6c_0x^2y\dot{x}-\frac{2c_0}{3}x^3\dot{y}$	New	New

$V_{s11}=cy+F(x)$ 其中 $F(x)$ 满足 $\left(F+\frac{k_3}{2}\right)\left(F+\frac{c}{k_1}x+\frac{k_2}{k_1}-k_3\right)^2=k_4$ $J_{s111}=\frac{1}{2}\dot{x}^2+F(x)$ ， $J_{s112}=\frac{1}{2}\dot{y}^2+cy$ $J_{s113}=k_1\dot{x}^3+\dot{x}^2\dot{y}+(3k_1F+cx+k_2)\dot{x}+(2F+k_3)\dot{y}$	New	New 式 (C.8) 见参考文献68 对于 $k_2=0$ 以及 $k_3=0$
$V_{s12}=\sqrt{k_1x}\pm\sqrt{k_2y}$ $J_{s121}=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\sqrt{k_1x}$， $J_{s122}=\frac{1}{2}\dot{y}^2\pm\sqrt{k_2y}$ $J_{s123}=k_2\dot{x}^3-k_1\dot{y}^3+3k_2\sqrt{k_1x}\dot{x}\mp3k_1\sqrt{k_2y}\dot{y}$	New	New 方程 (C.5) 见参考文献 68
$V_{s13}=-\sqrt{k_1x}\pm\sqrt{k_2y}$ $J_{s131}=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\sqrt{k_1x}$， $J_{s132}=\frac{1}{2}\dot{y}^2\pm\sqrt{k_2y}$ $J_{s133}=k_2\dot{x}^3-k_1\dot{y}^3-3k_2\sqrt{k_1x}\dot{x}\mp3k_1\sqrt{k_2y}\dot{y}$	New	New 方程（C.5） 见参考文献 68
$V_{s14}=c_1y^2+F_1(x)$ 其中， $F_1(x)$满足 $0=k_2x^2+4k_1^2+\left(9F_1-c_1x^2\right)\left(F_1-c_1x^2\right)^3-4k_1\left(F_1-c_1x^2\right)\left(3F_1+c_1x^2\right)+$ $+4k_3\left(3F_1-c_1x^2\right)\left(F_1-c_1x^2\right)^2+4k_3^2\left(F_1-c_1x^2\right)^2-\frac{8k_1k_3}{3}\left(3F_1-c_1x^2\right)$ $J_{s141}=\frac{1}{2}\dot{x}^2+F_1(x)$， $J_{s142}=\frac{1}{2}\dot{y}^2+c_1y^2$ $I_{s143}=L\dot{x}^2-\left(3yF_1-c_1x^2y+k_3y\right)\dot{x}+\frac{1}{2c_1}F_1'\left(3F_1-c_1x^2+k_3\right)\dot{y}$	New	New 方程（C.6） 见参考文献68 对于 $k_3=0$
$V_{s15}=\frac{df}{d\theta}r^{-2}$ 其中 $\sin\theta\left[\left(3\frac{df}{d\theta}+c_1\right)\frac{d^2f}{d\theta^2}-2f\frac{df}{d\theta}\right]+\cos\theta\left[f\frac{d^2f}{d\theta^2}+4\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2+2c_1\frac{df}{d\theta}\right]=0$ $J_{s151}=\frac{1}{2}p_\theta^2+\frac{df}{d\theta}$ $J_{s152}=p_\theta^2\left(\cos\theta p_r-\sin\theta\frac{p_\theta}{r}\right)+\left[\left(2\frac{df}{d\theta}+c_1\right)\cos\theta-f\sin\theta\right]p_r-$ $-\left[\left(3\frac{df}{d\theta}+c_1\right)$正弦 $\theta+f$余弦$\theta\right]\frac{p_\theta}{r}$	not 包含	表 III $c_1=0$
$V_{s16}=\frac{k}{r}+\frac{df}{d\theta}r^{-2}$ 其中 $k\neq0$ 正弦 $\theta\left[\left(3\frac{df}{d\theta}+c_1\right)\frac{d^2f}{d\theta^2}-2f\frac{df}{d\theta}\right]+$余弦 $\theta\left[f\frac{d^2f}{d\theta^2}+4\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2+2c_1\frac{df}{d\theta}\right]=0$ 和 $\left(c_2-\frac{df}{d\theta}\right)\frac{d^2f}{d\theta^2}+k\left(c_1+2\frac{df}{d\theta}\right)$余弦 $\theta+k\left(\frac{d^2f}{d\theta^2}-f\right)$正弦 $\theta=0$ $J_{s161}=\frac{1}{2}p_\theta^2+\frac{df}{d\theta}$ $J_{s162}=\frac{1}{3}p_\theta^3+$(余弦 θp_r-正弦 $\theta\frac{p_\theta}{r})p_\theta^2+\left[\left(2\frac{df}{d\theta}+c_1\right)$余弦 $\theta-f$正弦 $\theta\right]p_r-$ $-\left[\left(3\frac{df}{d\theta}+c_1\right)$正弦 $\theta+f$余弦$\theta\right]\frac{p_\theta}{r}-\left(c_2-\frac{df}{d\theta}+k$正弦 $\theta\right)p_\theta$	New	New

表2：允许存在 $J_0^{(3,2)}$ 类型 CFI 的超可积势 $V(x,y)$。

注1：在表2中，我们还列出了使允许存在 $J_0^{(3,2)}$ 类型 CFI 的势成为超可积势的其他线性/二次函数独立积分。在某些情形下，了解这些（自治或时变的）线性/二次函数独立积分，就足以证明该势是超可积的（例如参见势 V_{s1}、 V_{s2}、 V_{s5} 和V_{s8}）。在这些情形下，其他 CFI 可以用线性/二次函数独立积分表示。

注2：势（参见参考文献 26 的公式 (3.2.36) 和参考文献 32 的表 III）

$$V_{s8(2)}=\frac{A}{r}+\frac{B}{r(r+x)}+\frac{C}{r(r-x)}$$

其中 A、B、C为任意常数，其类型为 V_{s8}，适用于 $k_1 = B + C$、$k_2 = A$和 $k_3 = C - B$。因此，无需像参考文献 32 中那样单独讨论。

注3：在参考文献6的第3.4节中，作者试图确定所有形式为 $V = F(x^2 + \nu y^2)$ 的势，其中 ν 是任意常数，F 是任意光滑函数，并且允许存在自治CFI。他们找到了以下三个势（见参考文献6中的式 (3.15a)、(3.15b) 和 (3.19)）：

$$V_{(1a)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}y^2,\ V_{(1b)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{18}y^2,\ V_{(1c)} = (x^2 - y^2)^{-2/3}.$$

这些势是两个势族（V_5 和 V_{s6} ——见第6.2.2节情形3）和5））的子情形；这两个势族允许存在非平凡CFI，已汇总于表1和表2中。

事实上，势 $V_{(1a)}$ 可以由势 $\bar{V}_{s6} \equiv V_{s6}(x \leftrightarrow y) = c_0(x^2 + 9y^2)$ 在 $c_0 = \frac{1}{2}$ 时导出。在这种情况下，相关CFI为

$$\bar{J}_{s63} \equiv J_{s63}(x \leftrightarrow y, c_0 = 1/2) = (x\dot{y} - y\dot{x})\dot{x}^2 + 3x^2y\dot{x} - \frac{1}{3}x^3\dot{y}.$$

势 $V_{(1b)}$ 是超可积势 $V_{s6} = c_0(9x^2 + y^2)$ 在 $c_0 = \frac{1}{18}$ 时的一个子情形。在这种情况下，相关CFI为

$$J_{s63}(c_0 = 1/18) = (x\dot{y} - y\dot{x})^2\dot{y}^2 + \frac{1}{27}y^3\dot{x} - \frac{1}{3}xy^2\dot{y}.$$

存在 参考文献6中的第一积分（3.15b）有一处印刷错误，其中末项的 $p_1 = \dot{x}$ 应为 $p_2 = \dot{y}$.

最后，势 $V_{(1c)}$ 是可积势 $V_5 = k(x^2 - y^2)^{-2/3}$ 在 $k = 1$ 时的一个子情形 .

注4：对于 $k_3 = 1$，表1中的可积势 V_7 化简为参考文献 72 的式（4.8）所给出的势。参考文献 72 的作者声称，$V_7(k_3 = 1)$ 是超可积的，因为它有三个独立第一积分：哈密顿量、一个额外QFI（未给出）以及一个 $J_0^{(3,2)}$ 类型的CFI。据我们所知，这一说法并不成立，因为势 V_7 所允许的唯一QFI是哈密顿量；因此，V_7 是一种新的纯三阶可积势，这是由额外CFI J_7 导致的（见表1）。

此外，对于 $a_5 = 0$，可得到超可积势 $V_{s8} = \frac{k_1}{y^2} + \frac{k_2}{r} + \frac{k_3 x}{ry^2} = V_7(a_5 = 0)$ 和 CFI $J_{s83} = J_7(a_5 = 0)$。

注5：势 $V_4 = k(xy)^{-2/3}$ 已由 Inozemtsev 发现（见参考文献 61 的式 (10)）；然而，参考文献26和32中并未提及。在参考文献26的式 (3.3.25) 下方有一条关于参考文献61的评论，但该评论并不正确，因为 Inozemtsev 使用 Holt 方法发现的是势 $V_4 = k(xy)^{-2/3}$，而不是参考文献6中针对 $k = 1$ 所发现的势 $V_5 = k(x^2 - y^2)^{-2/3}$。在第6.2.2节的情形5)中，我们使用 Holt 方法发现了势 V_5。

注6：超可积势（见第6.2.5节） $V_{s10} = c_0(x^2 + 9y^2) + c_1 y$ 是一项新结果，它推广了参考文献6中的势（3.15a）和（3.15b）。有 $V_{s10}(c_1 = 0, x \leftrightarrow y) = V_{s6}$。

注7：参考文献 71 的定理 2 指出，只有四种在极坐标 (r, θ) 中可分离且具有 CFI 的可积/超可积势。这些势均收录于表1和表2中，或以原式呈现，或作为特殊情形。事实上，我们有如下结论：a）参考文献 71 中的势（4.15）和（4.20）分别是众所周知的二阶超可积势 $V_{s8}(x \leftrightarrow y)$和 V_{s5}（另见上文注1）。事实上，对于参考文献 71 中的势（4.15），有：

$$V = \frac{k_2}{r} + \frac{k_1 + k_3 \sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = \frac{k_2}{r} + \frac{k_1 + \frac{k_3 y}{r}}{x^2} = \frac{k_2}{r} + \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_3 y}{rx^2} = V_{s8}(x \leftrightarrow y).$$

b) 参考文献 71 中的势（4.21）是可积势 V_1 的一个子情形。详细推导见第6.4.3节，情形2）。

c) 参考文献 71 中的势（5.1）是超可积势 V_{s15}。相应的条件（230）与参考文献 71 中的方程（4.27）一致，只要我们作变换 $f \leftrightarrow f - c_0$，其中 c_0 是任意常数；或者，也可以在方程（213）的函数 $A_3(u)$ 中加上常数 c_0。与参考文献 71 中的记号比较，我们有 $f = T$、$c_1 = \beta_1$ 和 $c_0 = \beta_2$。

我们注意到， V_{s16} 是一种新的极坐标下的超可积可分离势，未被收录于参考文献 71 中。

注8（可分离性）：根据参考文献74中引用的综述论文[74]，关于 E^2 中动力系统的可分离性，我们有如下分类（参见参考文献74第5.3节）：- 在笛卡尔坐标中可分离的势

（x,y）具有如下形式（参见参考文献74第5.3.1节）

$$V(x,y)=F_1(x)+F_2(y).$$

- 在极坐标（r,θ）中可分离的势，其中 $x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$，具有如下形式（参见参考文献74第5.3.2节）

$$V(r,\theta)=F_1(r)+\frac{F_2(\theta)}{r^2}.$$

- 在抛物坐标（ξ,η）中可分离的势，其中 $x=\frac{\xi^2-\eta^2}{2}$ 和 $y=\xi\eta$，具有如下形式（参见参考文献74第5.3.3节）

$$V(\xi,\eta)=\frac{F_1(\xi)+F_2(\eta)}{\xi^2+\eta^2}.$$

众所周知， E^2 中的可分离牛顿势总是具有一个二次第一积分（QFI），也就是说，变量分离与二次第一积分之间存在一一对应关系。因此，允许存在一个附加三次第一积分（CFI）的二维可分离势成为三阶超可积势。已有证明[75]，在抛物坐标中可分离的这类势实际上是二阶超可积的，因为它们的附加三次第一积分可化为两个二次第一积分（即存在两个不同的坐标系，使势在其中可分离），而这两个二次第一积分的泊松括号给出该三次第一积分。因此，具有变量分离性质的纯三阶超可积势只存在于笛卡尔坐标和极坐标情形（另见参考文献74第5.3.3节最后一段）。

表1中的所有势都是非可分离的三阶可积势（即除哈密顿量外，它们不含其他二次第一积分）。然而，表2中的所有势都能在一组或两组坐标中分离。后者是注1中提到的势。

7 当 $J_1^{(3,1)}$ 时的 CFI

为简化记号，我们令 $L_{(0)ab}=C_{ab}$、$L_{(2)ab}=D_{ab}$ 和 $L_{(1)a}=L_a$。$\ell=1$ 的 CFI (2) 变为

$$J_1^{(3,1)}=-tC_{(ab;c)}\dot q^a\dot q^b\dot q^c+\left(t^2D_{ab}+C_{ab}\right)\dot q^a\dot q^b++tL_a\dot q^a+\frac{t^2}{2}L_aV^{,a}+G(q) \tag{264}$$

其中，对称张量（不是 KT！）C_{ab} 由 (22) 给出，生成的三阶 Killing 张量 $C_{(ab;c)}$ 由 (23) 给出，D_{ab} 是由 (18) 给出的二阶 KT，而向量 L_a 满足以下条件：

$$\begin{aligned}
L_{(a;b)} &= -3C_{(ab;c)}V^{,c}-2D_{ab} &(265)\\
\left(L_bV^{,b}\right)_{,a} &= 4D_{ab}V^{,b} &(266)\\
G_{,a} &= 2C_{ab}V^{,b}-L_a. &(267)
\end{aligned}$$

这些条件还必须补充可积性条件 $\left(L_bV^{,\ b}\right)_{,\ [xy]}=0$ 以及 $G_{,\ [xy]}=0$。根据第4节的结果，对于二阶 KT D_{ab} 和对称张量 C_{ab}，有：

$$D_{ab}=\begin{pmatrix}\gamma y^2+2\alpha y+A & -\gamma xy-\alpha x-\beta y+C\\ -\gamma xy-\alpha x-\beta y+C & \gamma x^2+2\beta x+B\end{pmatrix} \tag{268}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= 3b_2xy^2+3b_5y^3+3b_3xy+3(b_{10}+b_8)y^2+b_4x+3b_{15}y+b_{12}\\
C_{12} &= -3b_2x^2y-3b_5xy^2-\frac{3}{2}b_3x^2-\frac{3}{2}(2b_{10}+b_8)xy-\frac{3}{2}b_6y^2+\frac{3}{2}(b_9-b_{15})x-\frac{3}{2}b_{11}y+b_{13}\\
C_{22} &= 3b_2x^3+3b_5x^2y+3b_{10}x^2+3b_6xy+3(b_1+b_{11})x+b_7y+b_{14} &(269)
\end{aligned}$$

对于三阶 Killing 张量[76] $C_{(ab;c)}$:

$$\begin{aligned} C_{(11;1)} &= 3b_2y^2+3b_3y+b_4 \\ C_{(11;2)} &= -2b_2xy+b_5y^2-b_3x+b_8y+b_9 \\ C_{(22;1)} &= b_2x^2-2b_5xy-b_8x-b_6y+b_1 \\ C_{(22;2)} &= 3b_5x^2+3b_6x+b_7. \end{aligned} \tag{270}$$

将上述量代入条件 (265) - (267)，并考虑相应的可积性条件，我们得到以下偏微分方程组:

$$0 = L_{1,x}+3\left(3b_2y^2+3b_3y+b_4\right)V_{,x}+3\left(b_5y^2-2b_2xy-b_3x+b_8y+b_9\right)V_{,y}+2\gamma y^2+4\alpha y+2A \tag{271}$$

$$0 = L_{1,y}+L_{2,x}+6\left(b_5y^2+b_8y-2b_2xy-b_3x+b_9\right)V_{,x}-6\left(2b_5xy-b_2x^2+b_8x+b_6y-b_1\right)V_{,y}- -4\left(\gamma xy+\alpha x+\beta y-C\right) \tag{272}$$

$$0 = L_{2,y}+3\left(b_2x^2-2b_5xy-b_8x-b_6y+b_1\right)V_{,x}+3\left(3b_5x^2+3b_6x+b_7\right)V_{,y}+2\gamma x^2+4\beta x+2B \tag{273}$$

$$0 = L_1V_{,xx}+L_2V_{,xy}+L_{1,x}V_{,x}+L_{2,x}V_{,y}-4\left(\gamma y^2+2\alpha y+A\right)V_{,x}+4\left(\gamma xy+\alpha x+\beta y-C\right)V_{,y} \tag{274}$$

$$0 = L_1V_{,xy}+L_2V_{,yy}+L_{1,y}V_{,x}+L_{2,y}V_{,y}+4\left(\gamma xy+\alpha x+\beta y-C\right)V_{,x}-4\left(\gamma x^2+2\beta x+B\right)V_{,y} \tag{275}$$

$$0 = G_{,x}+L_1-2\left(3b_2xy^2+3b_5y^3+3b_3xy+3(b_{10}+b_8)y^2+b_4x+3b_{15}y+b_{12}\right)V_{,x}- -2\left(-3b_2x^2y-3b_5xy^2-\frac{3}{2}b_3x^2-\frac{3}{2}(2b_{10}+b_8)xy-\frac{3}{2}b_6y^2+\frac{3}{2}(b_9-b_{15})x-\frac{3}{2}b_{11}y+b_{13}\right)V_{,y} \tag{276}$$

$$0 = G_{,y}+L_2-2\left(3b_2x^3+3b_5x^2y+3b_{10}x^2+3b_6xy+3(b_1+b_{11})x+b_7y+b_{14}\right)V_{,y}- -2\left(-3b_2x^2y-3b_5xy^2-\frac{3}{2}b_3x^2-\frac{3}{2}(2b_{10}+b_8)xy-\frac{3}{2}b_6y^2+\frac{3}{2}(b_9-b_{15})x-\frac{3}{2}b_{11}y+b_{13}\right)V_{,x} \tag{277}$$

$$0 = \left(\gamma xy+\alpha x+\beta y-C\right)\left(V_{,xx}-V_{,yy}\right)+\left[\gamma(y^2-x^2)-2\beta x+2\alpha y+A-B\right]V_{,xy}- -3(\gamma x+\beta)V_{,y}+3(\gamma y+\alpha)V_{,x} \tag{278}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left[-3b_2x^2y-3b_5xy^2-\frac{3}{2}b_3x^2-\frac{3}{2}(2b_{10}+b_8)xy-\frac{3}{2}b_6y^2+\frac{3}{2}(b_9-b_{15})x-\frac{3}{2}b_{11}y+b_{13}\right]\left(V_{,xx}-V_{,yy}\right)+ \\ & +\left[3(b_2x+b_5y)(x^2-y^2)+3b_{10}x^2-3(b_{10}+b_8)y^2+3(b_6-b_3)xy+(3b_1+3b_{11}-b_4)x+\right. \\ & \left.+(b_7-3b_{15})y+b_{14}-b_{12}\right]V_{,xy}+\left(-12b_5y^2-12b_2xy-6b_3x-9b_{10}y-\frac{15}{2}b_8y+\frac{3}{2}b_9-\frac{9}{2}b_{15}\right)V_{,x}+ \\ & +\left(12b_2x^2+12b_5xy+\frac{3}{2}b_8x+9b_{10}x+6b_6y+3b_1+\frac{9}{2}b_{11}\right)V_{,y}+\frac{1}{2}\left(L_{1,y}-L_{2,x}\right) \end{aligned} \tag{279}$$

其中，(278) 是众所周知的 Bertrand-Darboux 方程（由条件 $G,_{[xy]}=0$ 得出）。因此，我们需要求解一个含有四个未知函数 $L_1(x,y)$、$L_2(x,y)$、$V(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 的九个偏微分方程组成的超定方程组。由于无法求得通解，我们考虑若干特殊情形。

7.1 情形 $D_{ab}=0$ 和 $L^a=Z(V,^y,-V,^x)$

在此情形下，CFI (264) 变为

$$\begin{aligned} J_1^{(3,1)}(D_{ab}=0) &= -tC_{(ab;c)}\dot{q}^a\dot{q}^b\dot{q}^c+C_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b+tL_a\dot{q}^a+G(q) \\ &= \underbrace{t\left(-C_{(ab;c)}\dot{q}^a\dot{q}^b\dot{q}^c+L_a\dot{q}^a\right)}_{\equiv J}+C_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b+G(q) \end{aligned} \tag{280}$$

且方程组 (265) - (267) 化简为:

$$L_{(a;b)} = -3C_{(ab;c)}V^{,c} \tag{281}$$

$$G_{,a} = 2C_{ab}V^{,b}-L_a \tag{282}$$

其中，对称张量 C_{ab} 由 (269) 给出，可约 Killing 张量 $C_{(ab;c)}$ 由 (270) 给出，向量[77]

$$L_a = Z \begin{pmatrix} V_{,y} \\ -V_{,x} \end{pmatrix} \tag{283}$$

且 $Z(x,y)$ 是任意光滑函数。

由于 CFI (280) 中 t 的系数

$$J = -C_{(ab;c)}\dot{q}^a\dot{q}^b\dot{q}^c + L_a\dot{q}^a \tag{284}$$

是形如 (29) 的自治守恒第一积分，因此，允许含时CFI (280) 的势也允许自治守恒第一积分 (284)。因此，第6.2节中找到的可积势可通过满足附加条件 (282) 而变为超可积，该条件产生额外的含时CFI (280)。

将向量 (283) 代入 (281)，并采用第6.2节的方法，我们得到

$$Z(x,y) = F(V) + Y(x,y) \tag{285}$$

其中 $F(V)$ 是势 $V(x,y)$ 的任意（光滑）函数，并且

$$\begin{aligned} Y(x,y) &= 3(b_2y - b_5x)(x^2+y^2) - \frac{3}{2}(3b_6 - b_3)x^2 + \frac{3}{2}(3b_3 - b_6)y^2 - 3b_8xy - \\ &\quad -3(b_7+b_9)x + 3(b_4+b_1)y + c \end{aligned} \tag{286}$$

其中 c 是任意常数，且方程组:

$$[F(V)+Y]\,V_{,xy} + F'V_{,x}V_{,y} + 3C_{(11;1)}V_{,x} - 3C_{(22;2)}V_{,y} = 0 \tag{287}$$

$$[F(V)+Y]\,(V_{,yy} - V_{,xx}) + F'\left[(V_{,y})^2 - (V_{,x})^2\right] + 3\left(C_{(11;1)} + 3C_{(22;1)}\right)V_{,y} + 3\left(C_{(22;2)} + 3C_{(11;2)}\right)V_{,x} = 0 \tag{288}$$

其中 $F' \equiv \frac{dF}{dV}$。方程 (287) 和 (288) 还必须补充函数 $G(x,y)$ 的可积性条件 (279):

$$\begin{aligned} 0 &= \left[-3b_2x^2y - 3b_5xy^2 - \frac{3}{2}b_3x^2 - \frac{3}{2}(2b_{10}+b_8)xy - \frac{3}{2}b_6y^2 + \frac{3}{2}(b_9 - b_{15})x - \frac{3}{2}b_{11}y + b_{13}\right](V_{,xx} - V_{,yy}) + \\ &\quad + \left[3(b_2x + b_5y)(x^2-y^2) + 3b_{10}x^2 - 3(b_{10}+b_8)y^2 + 3(b_6 - b_3)xy + (3b_1 + 3b_{11} - b_4)x + (b_7 - 3b_{15})y + \right. \\ &\quad \left. + b_{14} - b_{12}\right]V_{,xy} - \left[\frac{9}{2}b_5(x^2+3y^2) + 9b_2xy + \frac{9}{2}(b_3+b_6)x + 9(b_8+b_{10})y + \frac{3}{2}(b_7+3b_{15})\right]V_{,x} + \\ &\quad + \left[\frac{9}{2}b_2(3x^2+y^2) + 9b_5xy + 9b_{10}x + \frac{9}{2}(b_3+b_6)y + \frac{3}{2}(b_4+3b_1+3b_{11})\right]V_{,y} + \frac{1}{2}(F+Y)(V_{,xx}+V_{,yy}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}F'\left[(V_{,x})^2 + (V_{,y})^2\right]. \end{aligned} \tag{289}$$

最后，通过对条件 (282) 积分，求得函数 $G(x,y)$。我们考虑几种情形。

7.1.1 Case $F(V) = 0$, $b_1 = 1$, $b_{11} = -1$，其余参数固定为零

我们求得 $C_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2}y \\ \frac{3}{2}y & 0 \end{pmatrix}$、$C_{(22;1)} = 1$ 和 $Z = Y = 3y$。

方程组 (287) - (289) 变为:

$$V_{,xy} = 0 \tag{290}$$

$$y(V_{,yy} - V_{,xx}) + 3V_{,y} = 0 \tag{291}$$

$$V_{,xx} = 0. \tag{292}$$

上述方程组的解为势

$$V(x,y)=\frac{c_2}{y^2}+c_3x \tag{293}$$

其中， c_2 和 c_3 是任意常数。若交换 $x\leftrightarrow y$，则势(293)是超可积势 V_{s1} 的一个子情形（见表2和第6.2.2节的情形2），其中 $c_1=0$。

对条件(282)积分，得到 $G(x,y)=3c_3y^2$，相关CFI (280)为

$$J_1^{(3,1)}=-t\dot{x}\dot{y}^2+y\dot{x}\dot{y}-\frac{2c_2}{y^2}t\dot{x}-c_3ty\dot{y}+c_3y^2=tJ_{s11}(c_1=0,x\leftrightarrow y)-x\dot{x}\dot{y}-c_3x^2. \tag{294}$$

7.1.2 情形 $F(V)=\lambda V\implies F'=\lambda\neq 0,\quad b_4\neq 0$，且 $C_{(ab;c)}$的其余参数均固定为零。

我们得到 $C_{(11;1)}=b_4$、 $Y=3b_4y$ 和 $Z=\lambda V-3b_4y$。

将其代入方程(287)和(288)，得到势（见第6.2.1节的情形5）

$$V(x,y)=V_{s3}=c_1\sqrt{x}+c_2y \tag{295}$$

其中$c_1\equiv\frac{1}{\lambda}\neq 0$ 和 $c_2\equiv-\frac{3b_4}{\lambda}=-3c_1b_4$。这是表2中的超可积势 V_{s3}。

将势 (295) 代入 (289)，我们发现仅剩下参数 $b_{10}=b_{11}=b_{13}=b_{15}=0$ 和 b_{12},b_{14}。因此， $Z(x,y)=\sqrt{x}$ 和 $C_{ab}=\begin{pmatrix} b_4x+b_{12} & 0\\ 0 & b_{14}\end{pmatrix}$。将这些结果代入剩余条件 (282)，得到 $G(x,y)=\frac{8b_4}{3\lambda}x\sqrt{x}+\frac{2b_{12}}{\lambda}\sqrt{x}-\frac{6b_4b_{14}}{\lambda}y+\frac{y}{2\lambda}$。

相关CFI (280) 为

$$\begin{aligned}J_1^{(3,1)} &= -tb_4\dot{x}^3+b_4x\dot{x}^2-\frac{3b_4}{\lambda}t\sqrt{x}\dot{x}-\frac{t}{2\lambda}\dot{y}+\frac{8b_4}{3\lambda}x\sqrt{x}+\frac{y}{2\lambda}+2b_{12}J_{s31}+2b_{14}J_{s32}\\ &= \frac{1}{3c_1}\left(J_{s33}t-c_2x\dot{x}^2+\frac{3c_1^2}{2}y-\frac{8c_1c_2}{3}x\sqrt{x}\right)+2b_{12}J_{s31}+2b_{14}J_{s32}\end{aligned} \tag{296}$$

其中， J_{s31} 和 J_{s32} （见表2）是由势 V_{s3}的可分离性所得到的二次第一积分，而 J_{s33}（见表2）是 V_{s3}的自治守恒第一积分。CFI (296) 包含新的含时CFI

$$J_{s34}=tJ_{s33}-c_2x\dot{x}^2+\frac{3c_1^2}{2}y-\frac{8c_1c_2}{3}x\sqrt{x}. \tag{297}$$

7.1.3 情形 $F(V)=\lambda V^2\implies F'=2\lambda V,\ \lambda\neq 0,\ b_4=-b_7$，其余参数取零。

我们求得 $C_{(11;1)}=-b_7$, $C_{(22;2)}=b_7$, $Y=-3b_7(x+y)$和 $Z=\lambda V^2-3b_7(x+y)$。

将其代入方程(287)和(288)，我们得到超可积势（参见第6.2.1节的情形6和表2）

$$V(x,y)=V_{s4}=k(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}) \tag{298}$$

其中 $k^2\equiv\frac{3b_7}{\lambda}$。势(298)恒等地满足方程(289)。

我们计算得： $Z(x,y)=\pm 6b_7\sqrt{xy}$和 $C_{ab}=\begin{pmatrix} -b_7x & 0\\ 0 & b_7y\end{pmatrix}$。将这些量代入剩余条件(282)，得到 $G(x,y)=-\frac{8kb_7}{3}x\sqrt{x}\pm\frac{8kb_7}{3}y\sqrt{y}$。

相关CFI (280)为

$$J_1^{(3,1)} = \underbrace{t\left(\dot{x}^3-\dot{y}^3+3k\sqrt{x}\dot{x}\mp 3k\sqrt{y}\dot{y}\right)}_{=J_{s43}}-x\dot{x}^2+y\dot{y}^2-\frac{8k}{3}x\sqrt{x}\pm\frac{8k}{3}y\sqrt{y} \tag{299}$$

其中， J_{s43} （见表2）是 V_{s4}的自治守恒第一积分。

7.1.4 情形 $F(V)=0$, $b_8=-\frac{1}{3}$，且 $C_{(ab;c)}$ 的其余参数固定为零。

我们求得$C_{(11;2)}=-\frac{y}{3}$、 $C_{(22;1)}=\frac{x}{3}$和 $Z=Y=xy$。

将上述量代入方程 (287) 和 (288)，我们得到超可积势（参见第6.2.2节的情形2和表2）

$$V(x,y)=V_{s5}=c_1(x^2+y^2)+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{y^2} \tag{300}$$

其中 c_1、 c_2 和 c_3 是任意常数。

Repl代入 t he po势 (300) 代入 (289)，我们得到 $c_1=0$ 和 $b_{11}=b_{12}=b_{14}=0$。因此，我们有 :

$$V=V_{s5}(c_1=0)=\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{y^2},\ C_{ab}=\begin{pmatrix}(3b_{10}-1)y^2+b_{12} & \left(\frac{1}{2}-3b_{10}\right)xy\\ \left(\frac{1}{2}-3b_{10}\right)xy & -x^2+b_{14}\end{pmatrix}.$$

代入剩余条件 (282)，我们得到 $b_{10}=-\frac{1}{3}$ 和函数

$$G(x,y)=-\frac{4c_2y^2}{x^2}-\frac{2c_3x^2}{y^2}+2b_{12}\frac{c_2}{x^2}+2b_{14}\frac{c_3}{y^2}.$$

相关CFI (280) 为

$$\begin{aligned}J_1^{(3,1)} &= \underbrace{t\left(y\dot{x}^2\dot{y}-x\dot{x}\dot{y}^2-2c_3\frac{x}{y^2}\dot{x}+2c_2\frac{y}{x^2}\dot{y}\right)}_{=J_{s56}(c_1=0)}-2y^2\dot{x}^2-x^2\dot{y}^2+3xy\dot{x}\dot{y}-\frac{4c_2y^2}{x^2}-\frac{2c_3x^2}{y^2}+\\ &\quad +2b_{12}J_{s51}(c_1=0)+2b_{14}J_{s52}(c_1=0)\end{aligned} \tag{301}$$

其中， J_{s56} （见表2）是 V_{s5} 的自治守恒第一积分， J_{s51}、 J_{s52} （见表2）是由 V_{s5}的可分离性产生的二次第一积分。表达式 (301) 包含新的含时CFI

$$J_{s57}=tJ_{s56}(c_1=0)-2y^2\dot{x}^2-x^2\dot{y}^2+3xy\dot{x}\dot{y}-\frac{4c_2y^2}{x^2}-\frac{2c_3x^2}{y^2}. \tag{302}$$

7.1.5 情形 $F(V)=0$、 $b_3=b_6=1$，其余参数固定为零 .

W我们得到 $C_{(11;1)}=3y$、 $C_{(11;2)}=-x$、 $C_{(22;1)}=-y$、 $C_{(22;2)}=3x$ 和 $Z=Y=3\left(y^2-x^2\right)$.

将上述量代入方程 (287) 和 (288)，我们得到超可积势（见第6.2.2节的情形4和表2）

$$V(x,y)=V_{s7}=c_1(x^2+y^2)+\frac{c_2xy+c_3(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} \tag{303}$$

其中 c_1、 c_2 和 c_3 为任意常数。

由条件 (289)，我们得到 $c_1=0$ ，并且有:

$$V=V_{s7}(c_1=0)=\frac{c_2xy+c_3(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2},\ C_{ab}=\begin{pmatrix}3xy & -\frac{3}{2}(x^2+y^2)\\ -\frac{3}{2}(x^2+y^2)xy & 3xy\end{pmatrix}.$$

对剩余条件 (282) 积分，得到 $G(x,y)=\frac{12c_2x^2y^2}{(x^2-y^2)^2}+\frac{12c_3xy}{(x^2+y^2)\ (x^2-y^2)^2}$。

相关 CFI (280) 为

$$J_{s73}=-tJ_{s72}(c_1=0)+xy(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-(x^2+y^2)\dot{x}\dot{y}+\frac{4c_2x^2y^2}{(x^2-y^2)^2}+\frac{4c_3xy(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} \tag{304}$$

其中， J_{s72} （见表2）是 V_{s7}的自治守恒第一积分。

7.1.6 情形 $F(V)=0$, $b_2=1$ 其余参数均固定为零。

我们求得 $C_{(11;1)}=3y^2$、 $C_{(11;2)}=-2xy$、 $C_{(22;1)}=x^2$和 $Z=Y=3yr^2$ ，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。

将上述量代入方程组 (287) - (289)，我们得到超可积势（见第 6.2.3 节的情形 1 和表2）

$$V(x,y)=V_{s8}(k_2=0)=\frac{k_1}{y^2}+\frac{k_3x}{ry^2} \tag{305}$$

其中 k_1 和 k_3 为任意常数。对称张量 $C_{ab}=3x\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$。

对剩余条件 (282) 积分，得到 $G(x,y)=3^{\frac{2k_1r^2x+k_3r}{(2x^2+y^2)y^2}}$。

相关CFI (280) 为

$$J_{s84}=-tJ_{s83}(k_2=0)+x(x\dot{y}-y\dot{x})^2+\frac{2k_1r^2x+k_3r(2x^2+y^2)}{y^2} \tag{306}$$

其中 J_{s83} （见表2）是 V_{s8}的自治守恒第一积分。

7.1.7 情形 $F(V)=0$ 以及 b_2、 b_5 是唯一的非零参数。

我们将参数重新命名为 $b_2=a_2$ 和 $b_5=a_5$。

我们得到 $C_{(11;1)}=3a_2y^2$、 $C_{(11;2)}=-2a_2xy+a_5y^2$、 $C_{(22;1)}=a_2x^2-2a_5xy$、 $C_{(22;2)}=3a_5x^2$和 $Z=Y=3(a_2y-a_5x)r^2$ ，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。

将上述量代入方程组 (287) - (289)，我们得到可积势（见第 6.2.3 节的情形2和表1）

$$V(x,y)=V_7(k_2=0)=\frac{k_1}{(a_2y-a_5x)^2}+\frac{k_3(a_2x+a_5y)}{r(a_2y-a_5x)^2} \tag{307}$$

其中 k_1 和 k_3 是任意常数。对称张量 $C_{ab}=3(a_2x+a_5y)\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$。

对剩余条件（282）进行积分，得到 $G(x,y)=3\left[^{\frac{2k_1r^2}{(a_2x+a_5y)(a_2y-a_5x)^2}}+^{\frac{2k_3r}{(a_2x+a_5y)^2}}+k_3r\right]^{\frac{1}{(a_2y-a_5x)}}$。

相关CFI（280）为

$$J_{71}=-tJ_7(k_2=0)+(a_2x+a_5y)(x\dot{y}-y\dot{x})^2+\frac{2k_1r^2(a_2x+a_5y)}{(a_2y-a_5x)^2}+\frac{2k_3r(a_2x+a_5y)^2}{(a_2y-a_5x)^2}+k_3r \tag{308}$$

其中， J_7 （见表1）是 V_7 的自治CFI。我们注意到，附加的含时CFI J_{71} 使可积势 $V_7(k_2=0)$ 成为超可积势。

我们将本节的结果汇总于表3中。

超可积势	
势	类型为 $J_1^{(3,1)}$ 的CFI
$V_{s1}\ (c_1=0)\ =\frac{c_2}{x^2}+c_3y$	$J_{s15}=tJ_{s11}(c_1=0)\ -x\dot{x}\dot{y}-c_3x^2$
$V_{s3}=c_1\sqrt{x}+c_2y$	$J_{s34}=tJ_{s33}-c_2x\dot{x}^2+\frac{3c_1^2}{2}y-\frac{8c_1c_2}{3}x\sqrt{x}$
$V_{s4}=k(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})$	$J_{s44}=tJ_{s43}-x\dot{x}^2+y\dot{y}^2-\frac{8k}{3}x\sqrt{x}\pm\frac{8k}{3}y\sqrt{y}$
$V_{s5}(c_1=0)=\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{y^2}$	$J_{s57}=tJ_{s56}(c_1=0)\ -2y^2\dot{x}^2-x^2\dot{y}^2+3xy\dot{x}\dot{y}-\frac{4c_2y^2}{x^2}-\frac{2c_3x^2}{y^2}$
$V_{s7}(c_1=0)=\ \frac{c_2xy+c_3(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$	$J_{s73}=-tJ_{s72}(c_1=0)\ +xy(\ \dot{x}^2+\dot{y}^2)\ -(x^2+y^2)\dot{x}\dot{y}+\ \frac{4c_2x^2y^2}{(x^2-y^2)^2}+$ $+\frac{4c_3xy(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$
$V_{s8}(k_2=0)=\frac{k_1}{y^2}+\frac{k_3x}{ry^2}$	$J_{s84}=-tJ_{s83}(k_2=0)\ +x(x\dot{y}-y\dot{x})^2+\ \frac{2k_1r^2x+k_3r(2x^2+y^2)}{y^2}$
$V_7(k_2=0)=\ \frac{k_1}{(a_2y-a_5x)^2}+\frac{k_3(a_2x+a_5y)}{r(a_2y-a_5x)^2}$	$J_{71}=-tJ_7(k_2=0)\ +(a_2x+a_5y)(x\dot{y}-y\dot{x})^2+\frac{2k_1r^2}{(a_2x+a_5y)(a_2y-a_5x)^2}+$ $+\frac{2k_3r(a_2x+a_5y)^2}{(a_2y-a_5x)^2}+k_3r$

表3：存在时间依赖型 $J_1^{(3,1)}$ 类 CFI 的超可积势 $V(x,y)$。

注1：表3中包含的所有含时守恒第一积分都是新的。事实上，参考文献26和32仅考虑了自治CFI。

注2：势 V_{s1}、V_{s3}、V_{s4}、V_{s5}、V_{s7}和 V_{s8} 已在第6.2节通过Holt 方法（见表2）被发现是超可积的。然而，表3中额外的含时守恒第一积分同样重要，因为它们可用于积分动力学方程。

注3：由于含时守恒第一积分 J_{71}，可知可积势 $V_7(k_2=0)$是超可积的。这是一项新结果，未列入表2，它说明了含时第一积分在确立超可积性方面的重要性。

注4：表1和表2中允许存在类型为 $J_1^{(3,1)}$ 的含时守恒第一积分的可积与超可积势均列于表3中。表1和表2中的其余势不允许存在此类型的CFI。

8 CFI $I_e^{(3)}$

我们有含时CFI（令 $L_a=B_a$）

$$I_e^{(3)}=e^{\lambda t}\left(-L_{(ab;c)}\dot{q}^a\dot{q}^b\dot{q}^c+\lambda L_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b+\lambda B_a\dot{q}^a+B_aV^{,a}\right) \tag{309}$$

其中 $\lambda\neq 0$，对称张量 L_{ab} 由（22）给出，生成的三阶 Killing 张量 $L_{(ab;c)}$ 由（23）给出，向量 B_a 满足以下条件：

$$\begin{aligned} B_{(a;b)} &= -\frac{3}{\lambda}L_{(ab;c)}V^{,c}-\lambda L_{ab} && (310)\\ \left(B_cV^{,c}\right)_{,a} &= 2\lambda L_{ab}V^{,b}-\lambda^2B_a. && (311)\end{aligned}$$

由第4节可知：

$$\begin{aligned} L_{11} &= 3b_2xy^2+3b_5y^3+3b_3xy+3(b_{10}+b_8)y^2+b_4x+3b_{15}y+b_{12}\\ L_{12} &= -3b_2x^2y-3b_5xy^2-\frac{3}{2}b_3x^2-\frac{3}{2}(2b_{10}+b_8)xy-\frac{3}{2}b_6y^2+\frac{3}{2}(b_9-b_{15})x-\frac{3}{2}b_{11}y+b_{13} \quad (312)\\ L_{22} &= 3b_2x^3+3b_5x^2y+3b_{10}x^2+3b_6xy+3(b_1+b_{11})x+b_7y+b_{14}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} L_{(11;1)} &= 3b_2y^2+3b_3y+b_4\\ L_{(11;2)} &= -2b_2xy+b_5y^2-b_3x+b_8y+b_9\\ L_{(22;1)} &= b_2x^2-2b_5xy-b_8x-b_6y+b_1 \quad (313)\\ L_{(22;2)} &= 3b_5x^2+3b_6x+b_7\end{aligned}$$

其中 b_1、b_2、.....、b_{15} 为任意常数。注意，九个参数 b_1、b_2、.....、b_9 中至少有一个不为零，才能使第一积分（309）为三次（即 $L_{(ab;c)}\neq 0$）。

将方程 (312) 和 (313) 代入条件 (310) 和 (311)，得到一个包含六个偏微分方程（包括 (311) 的可积性条件）的系统，其中有三个未知函数 $V(x,y)$、$B_1(x,y)$、$B_2(x,y)$ 和十五个自由参数 $b_1,b_2,...,b_{15}$。该系统无法在一般情形下求解；因此，我们考虑特殊情形。

8.1 情形 $B_aV^{,a}=s=const$

我们假设

$$B_aV^{,a}=s \tag{314}$$

其中 s 是一个任意常数。

将假设 (314) 代入 (311)，我们得到向量

$$B_a=\frac{2}{\lambda}L_{ab}V^{,b}. \tag{315}$$

替换向量 (315) 中的条件 (310) 和 (314)，我们得到以下方程组：

$$\begin{aligned}
0 &= L_{11}(V_{,x})^2+2L_{12}V_{,x}V_{,y}+L_{22}(V_{,y})^2-\frac{s\lambda}{2} && (316)\\
0 &= 2L_{11}V_{,xx}+2L_{12}V_{,xy}+5L_{(11;1)}V_{,x}+\left(3L_{(11;2)}+2L_{12,x}\right)V_{,y}+\lambda^2L_{11} && (317)\\
0 &= 2L_{22}V_{,yy}+2L_{12}V_{,xy}+5L_{(22;2)}V_{,y}+\left(3L_{(22;1)}+2L_{12,y}\right)V_{,x}+\lambda^2L_{22} && (318)\\
0 &= L_{12}\left(V_{,xx}+V_{,yy}\right)+\left(L_{11}+L_{22}\right)V_{,xy}+\left(3L_{(11;2)}+L_{12,x}+L_{11,y}\right)V_{,x}+\\
&\quad+\left(3L_{(22;1)}+L_{22,x}+L_{12,y}\right)V_{,y}+\lambda^2L_{12}. && (319)
\end{aligned}$$

利用方程 (312) 和 (313)，方程组 (316) - (319) 化为：

$$\begin{aligned}
0 =& L_{11}(V_{,x})^2+2L_{12}V_{,x}V_{,y}+L_{22}(V_{,y})^2-\frac{s\lambda}{2} && (320)\\
0 =& 2L_{11}V_{,xx}+2L_{12}V_{,xy}+5L_{(11;1)}V_{,x}-3\left(b_5y^2+6b_2xy+3b_3x+2b_{10}y-2b_9+b_{15}\right)V_{,y}+\lambda^2L_{11} && (321)\\
0 =& 2L_{22}V_{,yy}+2L_{12}V_{,xy}+5L_{(22;2)}V_{,y}-3\left[b_2x^2+6b_5xy+2(b_8+b_{10})x+3b_6y-b_1+b_{11}\right]V_{,x}+\lambda^2L_{22} && (322)\\
0 =& L_{12}\left(V_{,xx}+V_{,yy}\right)+\left(L_{11}+L_{22}\right)V_{,xy}+3\left[3b_5y^2-2b_2xy-b_3x+\left(b_{10}+\frac{5}{2}b_8\right)y+\frac{1}{2}(3b_9+b_{15})\right]V_{,x}+\\
&+3\left[3b_2x^2-2b_5xy-b_6y+\left(b_{10}-\frac{3}{2}b_8\right)x+2b_1+\frac{b_{11}}{2}\right]V_{,y}+\lambda^2L_{12}. && (323)
\end{aligned}$$

这是一个包含四个偏微分方程和一个未知函数 $V(x,y)$ 的方程组。求解该方程组后，我们找到了允许具有（309）形式的含时守恒第一积分的二维势。由于偏微分方程组（320）-（323）取决于十六个自由参数 $s,b_1,b_2,...,b_{15}$，无法求得通解；因此，我们考虑特殊解。

1）情形 $b_3=-b_6\equiv\frac{b}{3}$，其中 b 是一个非零任意常数，其余参数均设为零。

我们得到 $L_{11}=bxy$, $L_{12}=\frac{b}{2}(y^2-x^2)$, $L_{22}=-bxy$, $L_{(11;1)}=by$, $L_{(11;2)}=-\frac{b}{3}x$, $L_{(22;1)}=\frac{b}{3}y$ 和 $L_{(22;2)}=-bx$。

偏微分方程组 (320) - (323) 化为：

$$\begin{aligned}
0 &= xy\left[(V_{,x})^2-(V_{,y})^2\right]+(y^2-x^2)V_{,x}V_{,y} && (324)\\
0 &= xy(2V_{,xx}+\lambda^2)+(y^2-x^2)V_{,xy}+5yV_{,x}-3xV_{,y} && (325)\\
0 &= xy(2V_{,yy}+\lambda^2)+(x^2-y^2)V_{,xy}+5xV_{,y}-3yV_{,x} && (326)\\
0 &= (y^2-x^2)\left(V_{,xx}+V_{,yy}+\lambda^2\right)-2xV_{,x}+2yV_{,y}. && (327)
\end{aligned}$$

求解方程组 (324) - (327)，得到势

$$V(x,y)=-\frac{\lambda^2}{8}r^2+\frac{k}{r^2} \tag{328}$$

其中 $r^2=x^2+y^2$ 和 k 是任意常数。将势（328）代入（315），我们得到 et

$$B_a=\frac{2b}{\lambda}\left(\frac{\lambda^2}{8}r^2+\frac{k}{r^2}\right)\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}. \tag{329}$$

相关CFI（309）为

$$I_e^{(3)} = p_\theta e^{\lambda t}\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2-\lambda(x\dot{x}+y\dot{y})+\frac{\lambda^2}{4}r^2+\frac{2k}{r^2}\right] \tag{330}$$

其中 $p_\theta = x\dot{y}-y\dot{x}$ 是系统的角动量。不过，众所周知（例如参见参考文献 26 和参考文献 36 中的表格），形式为 $V = F(r)$ 的势是可积的，因为它们具有额外的 LFIp_θ。因此，CFI (330) 是两个独立第一积分的乘积：LFI p_θ 和时变的 QFI

$$I = e^{\lambda t}\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2-\lambda(x\dot{x}+y\dot{y})+\frac{\lambda^2}{4}r^2+\frac{2k}{r^2}\right]. \tag{331}$$

哈密顿量、角动量和时变的 QFI (331) 相互独立；因此，势 (328) 是超可积的。这似乎是一个相当新的结果[78]，因为它未收录于参考文献 26、32、36 和 78 中。

2) 情形 $b_3 = b_6$，其余参数均固定为零。
我们得到势（振子） $V = -\frac{\lambda^2}{8}r^2$，这是一个众所周知的超可积势（仅利用二次第一积分）。

3) 情形 $b_3 = b_4$，其余参数固定为零。
我们得到势 $V = -\frac{\lambda^2}{8}r^2 - \frac{\lambda^2}{12}y$。正如参考文献36所示，这是一个借助含时二次第一积分得到的超可积势。具体而言，它是势 V_{274} 在 $k_1 = k_2 = c_1 = 0$ 和 $c_2 = \frac{1}{3}$ 时的一种特殊情形（参见参考文献36第 8 节、情形 7d 及最后一张表）。

我们注意到，对自由参数采用其他取值可能会产生新的超可积势。

我们将本节的结果汇总于表 4。

势与第一积分	参考文献 26	参考文献 32
$V_{s11} = -\frac{\lambda^2}{8}r^2 + \frac{k}{r^2}$ $J_{s11a} = p_\theta J_{s11b}$, $p_\theta = xy - yx$, $J_{s11b} = e^{\lambda t}\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2-\lambda(x\dot{x}+y\dot{y}) + \frac{\lambda^2}{4}r^2 + \frac{2k}{r^2}\right]$	New	New

表 4：可由 $J_e^{(3)}$型经典第一积分表示的超可积势 $V(x,y)$。

9 结论

本文旨在说明，据我们所知，现有研究成果主要汇总于参考文献26和32的综述文章中，涉及能够存在自治CFI的二维保守自治牛顿动力系统的可积势和超可积势；这些成果均可通过一种统一的算法方法得到，该方法基于参考文献24的一般定理1，并针对第2节的定理1中的CFI作了专门处理。

除了已有结果之外，应用该算法还得到了新的可积势和超可积势，其中一些在参数取特定值时包含已知势。此外，我们还找到了当前文献中尚未出现的新的含时守恒第一积分。

需要强调的是，我们找到的经典第一积分是一般偏微分方程组的特殊解；因此，其他研究者采用定理1以及上文所示的方法（例如 Holt 方法或可积性条件法），通过对自由参数作出不同的适当选择，也能够得到更多经典第一积分。

鉴于此，将此前主要文献中有关这一主题的相关结果更新，并以便于查阅的格式补充上述新结果，将会很有用。

我们在表1、表2、表3和表4中进行了整理，内容如下：
a. 已知的可积与超可积势及其相应来源。b. 上文得到的新势。c. 通过本文所得更一般的经典第一积分中的参数取特定值而得到的已知势。下一步是确定具有更多自由度的可积/超可积牛顿动力系统，之后再利用曲空间 Killing 张量的已知结果，确定广义相对论和宇宙学中的可积/超可积动力系统，这是一项意义深远的工作。

数据可用性

支持本研究结论的数据可在本文中获取。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1]V.I. Arnold, *'Mathematical Methods of Classical Mechanics'*, 施普林格（1989），证明见第272–284页。[2]G.H. Katzin 和 J. Levine, *'Related First Integral Theorem: A Method for Obtaining Conservation Laws of Dynamical Systems with Geodesic Trajectories in Riemannian Spaces Admitting Symmetries'* **9** 1 8 1968 ，《数学物理杂志》（），（）。[3] *'Related integral theorem II. A method for obtaining quadratic constants of the motion for conservative dynamical systems admitting symmetries'* **14** 9 1213 1973 G.H. Katzin, ，《数学物理杂志》（），（）。[4]G.H. Katzin 和 J. Levine, *'Dynamical symmetries and constants of motion for classical particle systems'*, 《数学物理杂志》15(9)，1460（1974）。[5]A.S. Fokas, *'Group Theoretical Aspects of Constants of Motion and Separable Solutions in Classical Mechanics'*, 《数学分析及其应用杂志》68，347（1979）。[6]A.S. Fokas 和 P.A. Lagerstrom, *'Quadratic and Cubic Invariants in Classical Mechanics'*, 《数学分析及其应用杂志》74，325（1980）。[7]P.G.L. Leach, *'Applications of the Lie theory of extended groups in Hamiltonian Mechanics: The oscillator and the Kepler problem'* **23**, 173 1981 ，《澳大利亚数学学会杂志 B》（）。[8]P.G.L. Leach, *'A further note on the Hénon-Heiles problem'*, 《数学物理杂志》22(4)，679（1981）。[9]P.A. Damianou 和 C. Sophocleous, *'Symmetries of Hamiltonian systems with two degrees of freedom'*, 《数学物理杂志》40(1)，210（1999）。[10]J. Bertrand, *'Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique'*, 《纯粹与应用数学杂志》1 s´erie 17，121（1852）。[11] E.T. Whittaker, *'A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies'*, 第2版，剑桥大学出版社，（1917）。[12]J. Fris、V. Mandrosov、Ya. A. Smorodinsky、M. Uhlir 和 P. Winternitz, *'On higher symmetries in quantum mechanics'*, 《物理快报》16(3)，354（1965）。[13]G.H. Katzin 和 J. Levine, *'Geodesic first integrals with explicit path-parameter dependence in Riemannian space-times'*, 《数学物理杂志》22(9)，1878（1981）。[14]L.S. Hall, *'A Theory of Exact and Approximate Configurational Invariants'*, 《物理学D辑：非线性现象》8(1-2)，90（1983）。[15]G. Thompson, *'Polynomial constants of motion in flat space'*, 《数学物理杂志》25(12)，3474（1984）。[16]T. Sen, *'Integrable potentials with quadratic invariants'*, 物理快报 A 111(3)，97（1985）。[17]T. Sen, *'Integrable potentials with cubic and quartic invariants'*, 物理快报 A 122(2)，100（1987）。[18]S. Gravel 和 P. Winternitz, *'Superintegrability with third-order integrals in quantum and classical mechanics'*, 《数学物理杂志》43(12)，5902（2002）。[19]J.T. Horwood, *'Higher order first integrals in classical mechanics'*, 《数学物理杂志》48，102902（2007）。[20]I. Marquette 和 P. Winternitz, *'Superintegrable systems with third-order integrals of motion'* **41**, , 《物理学杂志A辑：数学与理论》（）。[21]S. Post 和 P. Winternitz, *'General Nth order integrals of motion in the Euclidean plane'*, 《物理学杂志 A：数学与一般》48，405201（2015）。[22]M. Tsamparlis 和 A. Mitsopoulos, *'Quadratic first integrals of autonomous conservative dynamical systems'*, 《数学物理杂志》61，072703（2020）。[23]M. Tsamparlis 和 A. Mitsopoulos, *'First integrals of holonomic systems without Noether symmetries'* **61**, , 《数学物理杂志》（）。[24]A. Mitsopoulos 和 M. Tsamparlis, *'Higher order first integrals of autonomous dynamical systems'* **170**, , 《几何与物理学杂志》（）。

[25]C.R. Holt, *'Construction of new integrable Hamiltonians in two degrees of freedom'*, 《数学物理杂志》23(6), 1037（1982）。[26]J. Hietarinta, *'Direct methods for the search of the second invariant'*, 《物理报告》147(2), 87（1987）。[27]M.F. Ra˜nada, *'Superintegrable $n = 2$ systems, quadratic constants of motion and potentials of Drach'*, 《数学物理杂志》38(8), 4165（1997）。[28]C. Daskaloyannis 和 K. Ypsilantis, *'Unified treatment and classification of superintegrable systems with integrals quadratic in momenta on a two dimensional manifold'*, 《数学物理杂志》47, 042904（2006）。[29]O.C. Pin, *'Curvature and Mechanics'*, 《高等数学》15, 269（1975）。[30]C. Uggla, *'Geometrizing the dynamics of Bianchi cosmology'*, K. Rosquist 和 R.T. Jantzen, 《物理评论 D》42(2), 404（199 0).

[31]K. Rosquist 和 G. Pucacco, *'Invariants at fixed and arbitrary energy. A unified geometric approach.'*, 《物理学杂志 A：数 th. 通论》28, 3235（1995）。[32]M. Karlovini 和 K. Rosquist, *'A unified treatment of cubic invariants at fixed and arbitrary energy'*, 《数学物理杂志》41(1), 370 (2000). [33]M. Karlovini、G. Pucacco、K. Rosquist 和 L. Samuelsson, *'A unified treatment of quartic invariants at fixed and arbitr ary energy'*, 《数学物理杂志》**43**(8), 4041 (2002).[34]

Levine, G.H. Katzin 和 J . *'Time-dependent quadratic constants of motion symmetries and orbit equations for classical , , , particle dynamical systems with independent Kepler potentials'* **23** 4 552 1982 《数学物理杂志》（）, （）。

[35]M. Tsamparlis 和 A. Paliathanasis, *'Symmetries of Differential Equations in Cosmology'*, Symmetry 10(7), 233 (2018)。[36]A. Paliathanasis, M. Tsamparlis, S. Basilakos 和 J. D. Barrow, *'Noether symmetries in cosmology'*, Phys. Rev. D 91 (2015) 123535, 见定理3.4。[37]V.V. Kozlov, *'Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics'*, Russ . Math. Surv., Turpion, 38(1), 第 1-76（1983），参见第17页，定理1，第二章，第2段。[38]V.V. Kozlov, *'Integrable problems of celestial mechanics in spaces of constant curvature'*, J . Math. Sc. 125(4), 419 (2005)，见定理3.4。

[39]假设 $\det\left[\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\right] \neq 0$，其中 $T = \frac{1}{2}\gamma_{ab}(q)\dot{q}^a\dot{q}^b$ 是系统的动能；因此，动能度量 γ_{ab} 是非退化的。该条件还确保动力学方程可用 $\ddot{q}^a$ 表示。

[40]在一个 n 维流形上，秩为 m 的全对称张量的独立分量为 $\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$。当 $n = 2$ 时，我们有 $m+1$；当 $n = 3$ 时，我们有 $(m+1)(m+2)\,2$。

[41]G. Thompson, *'Killing tensors in spaces of constant curvature'*, J . Math. Phys. 27(11), 2693（1986）

[42]T. Thompson, *'Symmetric tensors and Killing tensors in spaces of constant curvature'*, J . Math. Phys. 58, 487（2008).

[43]M. Eastwood, *'Higher symmetries of the Laplacian'*, 数学年刊 161, 1645 (2005), 见定理1.2。[44]M. Eastwood, *'Notes on conformal differential geometry'*, 数学年刊 161, 1645 (2005), 见定理1.2。[45]T. Thompson, *'The classical theory of algebraic invariants of vector spaces of Killing tensors'*, J . Geom. Phys. 58, 487（2008).

[46]A.G. Nikitin 和 O .I. Prylypko, *'Generalized Killing tensors and symmetry of Klein-Gordon-Fock equations'*, arXiv:math-ph/0506002v1。

[47]M. Chanu, G. Degiovanni 和 R. G. McLenaghan, *'Classification of Killing tensors on bidimensional flat manifolds'*, 《数学物理杂志》47, 073506（2006）。

[48]我们注意到 L_a 在 (19) 中是 E^2 的非本征 AC 之和，而非其给出 $C_{ab} = 0.49$ 。

[49]M. Adam, P. G. McLenaghan 和 R. G. Smirnov, *'On generalized Killing spinors and the Lie derivative'*, 《对称性与偏微分方程超定系统》，IMA数学应用丛书，第144卷，第205–221页，施普林格，纽约（2008）。

[50]J.T. Horwood、R.G. McLenaghan、R.G. Smirnov 和 D. The, *'Fundamental covariants in the invariant theory of Killing tensors'*, SPT 2004, 《对称性与微扰理论》，第 124-131 页，世界科学出版社，新泽西州哈肯萨克（2005年）。[51]这些是参考文献 26 中的方程（3.3.11）-（3.3.14）。参考文献 26 中的记号为： $A = C_{111}$, $B = 3C_{112}$, $C = 3C_{221}$ and $D = C_{222}$。多出的因子 3 是因为参考文献 26 中的作者使用代数方法，而不是该技巧 s of 微分几何。[52]参考文献 26 的方程 (3.3.15) 有一处印刷错误。正确的方程是 (32)。[53]我们注意到，参考文献 26 的方程 (3.3.19) 有一处印刷错误（ C 和 Z_y之间缺少一个加号 $+$ ）。正确的方程 ion 是 (36)。[54]另请使用方程 (38) 和 (39)。[55]我们注意到[56]这些是 Holt 在参考文献25中给出的方程 (170) 和 (171)。我们注意到，R

$$dN = FdV \implies dN = FV_{,x}dx + FV_{,y}dy \implies N_{,x} = FV_{,x},\ \ N_{,y} = FV_{,y}.$$

ef. 26 需要进行小幅修正。[57]M. Toda, *'Wave Propagation in Anharmonic Lattices'*, 《日本物理学会杂志》23(3), 501 (1967)。[58] J. Ford、S.D. Stoddard 和 J.S. Turner, *'On the Integrability of the Toda Lattice'*, 《理论物理进展》50(5), 1547 (1973) .

[59]S. Post 和 P. Winternitz, *'A nonseparable quantum superintegrable system in 2D real Euclidean space'*, J. Phys. A: M ath. 理论 44, 162001（2011）。[60]如果我们取 $a_{10} \neq 0$ 而不是 $a_9 \neq 0$，那么会得到相互对称的结果，它们通过交换 $x \leftrightarrow y$ 彼此转换。[61]V.I. Inozemtsev, 《物理快报》 A 96(9), 447（1983）。[62] 我们计算：[63]我们作出这一假设，以便 Z（x、y）仅成为 y^2 的函数

$$V_{,x} = y\frac{df}{dw},\ \ V_{,y} = x\frac{df}{dw},\ \ V_{,xy} = w\frac{d^2f}{dw^2} + \frac{df}{dw},\ \ V_{,xx} = y^2\frac{d^2f}{dw^2},\ \ V_{,yy} = x^2\frac{d^2f}{dw^2}.$$

.

[64] 我们计算:

$$V_{,x}=2x\frac{d\phi}{dw},\ V_{,y}=-2y\frac{d\phi}{dw},\ V_{,xy}=-4xy\frac{d^2\phi}{dw^2},\ V_{,xx}=2\left(2x^2\frac{d^2\phi}{dw^2}+\frac{d\phi}{dw}\right),\ V_{,yy}=2\left(2y^2\frac{d^2\phi}{dw^2}-\frac{d\phi}{dw}\right).$$

[65]为了与参考文献36中的势 V_{s3} 进行比较，交换 $x\leftrightarrow y$。这是因为对 $a_2\neq 0$ 的分析与对 $a_5\neq 0$的分析具有对称性。[66]M.A. Olshanetsky 和 A.M. Perelomov，*'Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras'*，《物理报告》71(5), 313 (1981)。[67]我们已将三阶 Killing 张量 (28) 代入 CFI (29)。[68]S. Gravel，
'Hamiltonians separable in Cartesian coordinates and third-order integrals of motion'，《数学物理杂志》45(3), 1003 (2004)。[69]向量分量 (148) 和 (149) 由偏微分方程 (135) 和 (136) 推导得出。[70]条件 (169) 写作 $F_1^3-2bxF_1^2+b^2x^2F_1-k=0$。因此，参考文献20第6页末几行中的项 x^4 应更正为 x^2。[71]F. Tremblay 和 P. Winternitz，
'Third-order superintegrable systems separating in polar coordinates'，《物理学杂志A辑：数学与理论》43, 175206 (2010)。[72]A.V. Tsiganov，*'The Drach superintegrable potentials'*，《物理学杂志 A：数学与一般》33, 7407 (2000)。[73]我们注意到，$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$、$\dot{x}=\cos\theta p_r-\sin\theta\frac{p_\theta}{r}$，以及 $\dot{y}=\sin\theta p_r+\cos\theta\frac{p_\theta}{r}$。[74]W. Miller、S. Post 和 P. Winternitz，
'Classical and quantum superintegrability with applications'，《物理学杂志A辑：数学与理论》46, 423001 (2013)。[75]I. Popper、S. Post 和 P. Winternitz，*'Third-order superintegrable systems separable in parabolic coordinates'*，《数学物理杂志》53, 062105 (2012)。[76]我们注意到，如果对称张量 C_{ab} 是二阶 KT（即 $b_1=b_2=...=b_9=0$），那么 $C_{(ab;c)}=0$，且 CFL$J_0^{(3,1)}$ 会退化为参考文献36中研究的 QFI。因此，为了获得新的结果，参数 b_1、b_2、.....、b_9 中至少有一个必须非零。[77]关于选择 (283) 的更多细节，请参见第6.2节。[78]E.G. Kalnins、J.M. Kress、G.S. Pogosyan 和 W. Miller Jr.，*'Completeness of superintegrability in two-dimensional constant-curvature spaces'* **34**, 4705 2001 ，

《物理学杂志 A：数学与一般》（）。