arXiv:2301.02481v1 [physics.app-ph] 6 Jan 2023

基于降维近场动力学的板分层中远端非对称裂纹萌生

R.Cavuoto[a],A. Cutolo[a], K. Dayal[b,c], L. Deseri[d,e,b,f,g,*], M. Fraldi[a,h,*]

[a] *Department of Structures for Engineering and Architecture, University of Naples, Italy*
[b] *Department of Civil and Environmental Engineering, Carnegie Mellon University, USA*
[c] *Center for Nonlinear Analysis, Department of Mathematical Sciences, CMU, USA*
[d] *Department of Civil, Environmental and Mechanical Engineering, University of Trento, Italy*
[e] *Department of Civil and Environmental Engineering, Pittsburgh University, PA, USA*
[f] *Department of Nanomedicine, Houston Methodist Hospital, Houston TX, USA*
[g] *Department of Mechanical Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburgh PA, USA*
[h] *Département de Physique, Ecole Normale Supérieure, Paris, France*

摘要

基于近场动力学框架，本文建立了一种板的降维公式，使断裂面能够沿厚度方向萌生并扩展，从而可在低维模型中处理分层。通过令运动学由绝对连续部分以及允许位移发生跳跃的区域组成，来处理分层断裂的萌生与扩展。该假设使得降维弹性能得以显式推导，并呈现出一系列表征平面单元储存能的项。通过键基近场动力学这一最简单的范例，对约化能量中的各项作出了解释。约化能量的一个显著特点是，尽管采用了小位移假设，膜项与弯曲项之间仍存在耦合。通过最小化过程，获得了简化条件下的半解析解；该模型能够捕捉远端裂纹萌生和曲线裂纹路径等多种非标准行为。最后，确定了当非局部特征长度趋于零时，所提出的近场动力学降阶模型向局部弹性理论的收敛性，从而得到一个用于断裂的局部内聚模型。

全文请访问：https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.105189。

关键词： 裂纹起始、近场动力学、板、分层

*通讯作者。*Email addresses:* luca.deseri@unitn.it (L. Deseri), fraldi@unina.it (M. Fraldi)

1. 引言

分层是薄板和壳结构中典型的一种失效模式，这类结构的厚度远小于另外两个尺寸。此类失效的特征是发生断裂，裂纹前沿沿着结构平面扩展，导致结构分裂成多个层。复合材料层合板在不同材料的界面处天然存在薄弱面，因此尤其容易发生分层；不过，微结构化和均质薄结构中也可能发生分层 [1, 2]。

人们通过多种方法研究了这种断裂模式。主要方法包括内聚区模型（CZM） [3–8] 和扩展有限元法（XFEM） [9, 10]。近来，相场断裂技术已用于模拟层合板中的脱粘 [11, 12]。然而，这些模型将薄结构视为完整的三维实体，并对分层进行显式处理。

在不考虑分层的薄板建模方面，另一种截然不同的方法是采用历史悠久的成熟流程：利用厚度远小于其他尺寸这一特点，系统地约化三维理论，从而推导板或薄膜的二维公式。这种方法已在多种情形下得到研究，而且尤其具有吸引力，因为它能够带来更快的计算算法和良好的收敛性，同时仍能捕捉关键物理现象[13–18]。

本研究旨在提出一种兼具降维模型优势并能考虑分层的方法。也就是说，我们希望推导出一种允许发生分层失效的板二维模型。我们的方法基于近场动力学 [19, 20], ，这是一种非局部理论，它将连续体建模为由无穷小材料粒子构成的集合，这些粒子通过长程力而非典型的接触牵引力相互作用。与依赖应变定义、因而要求位移具有足够正则性的连续介质力学局部理论不同，近场动力学直接处理位移，且无需满足先验正则性要求。因此，它适用于模拟损伤、损伤-断裂转变 [21–26], 以及冲击和爆炸等动态现象 [27–30]。

关于二维近场动力学体的论文，根据所采用的方法可分为两大类：（1）完整的三维数值模拟[31–33], 和（2）二维降阶模型 [34–43]。前一种方法已被广泛用于显式处理分层 [44–46], ，而现有的约化公式仅考虑裂纹尖端垂直于平面的裂纹扩展，因此无法捕捉分层等现象。本文提出一种专为处理薄板贯穿厚度分层而设计的键基近场动力学约化公式；这类薄板由单一材料构成，且不存在预先形成的弱界面。首先，在第 3 节中，将位移场加性分解为其绝对

连续部分及其跳跃，以描述分层断裂的萌生与扩展。也就是说，位移场的自然函数空间是特殊有界变差（SBV）函数空间，例如 [47, 48]。对位移场的这两个部分作进一步假设后，可在第 3.4 节得到近场动力学能量的约化形式。约化过程生成一系列项，用以表征储存在二维连续体单元内部的应变能。约化能量的一个显著特点是，尽管采用了小位移假设，膜项与弯曲项之间仍存在耦合。所得泛函的层级结构为一致的变分方法提供了基础，使得可以通过最小化过程求得位移场。

第 4 节给出了测试案例的半解析解。测试在一块薄悬臂板上进行，并采用所提出的约化公式进行建模。在第一个案例中，板的自由边缘上部受到向上的竖向位移，下边缘则受到向下的竖向位移，且两者对称施加——与剥离试验十分相似。模型表明，非局部相互作用长度尺度δ（亦称视界）的变化会引发不同的行为，即远端或近端损伤成核。在第二个案例中，通过在板上边缘的不同位置施加向上的竖向位移来引入非对称性，从而导致非对称的裂纹扩展。第三个案例研究 II 型断裂或滑移分层。为探究局部情形下约化公式（其几何关系为线性）中弯曲项与膜项之间的耦合，第 5 节考察了当非局部相互作用尺度 δ 趋于零时，所提出的模型向局部理论的收敛。通过施加能量有界且不消失的条件，确定了位移场关于 δ 的尺度律；进而确定能量各项的尺度律，从而使非局部模型实现局部化，并得到约化的局部公式。由于能量中与位移跳跃部分相关的某些项在取极限后仍然存在，该约化局部公式具有内聚结构。

组织结构。第 2 节概述基于键的近场动力学本构框架。第 3 节建立约化公式的理论框架，并推导和阐释近场动力学板的约化弹性能量密度。随后，在第 4 节中，将该理论模型置于变分框架下实现，并通过简单的加载条件进行检验。最后，第 5 节研究了针对消失视界提出的约化公式的行为。

2. 近场动力学模型的公式

键基近场动力学将连续体 $\mathbb{B}$ 建模为一组材料粒子，这些粒子通过键两两相互作用。其

物体静态平衡的方程 [19, 49] 可写为积分微分方程

$$\int_{\mathbb{H}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') \, \mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}'} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = 0 \, , \tag{1}$$

其中： $\boldsymbol{f}$称为成对力场，是材料粒子 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}'$之间的作用力；它可以取决于这些粒子的位移 $\boldsymbol{u}$ ，并包含模型的全部本构信息； $\boldsymbol{b}$ 是外部体力矢量； $\mathbb{H}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的所谓邻域，即所有位于其特征距离范围内的材料点的集合，该特征距离称为视界，δ。在键基近场动力学中，线动量和角动量平衡要求成对力场 $\boldsymbol{f}$ 在交换粒子 [19]时具有反对称性

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}) \, . \tag{2}$$

许多作者都提出了用于定义 $\boldsymbol{f}$ 的本构关系 [19, 50], ，其中最简单的关系之一是 Zhou 重新审视的标准线弹性完全脆性关系 [51],

$$\boldsymbol{f} = \mu \, c \, s \, \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{\sigma} \boldsymbol{\xi} \, , \tag{3}$$

其中， c 称为键常数（正标量）， $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 分别是粒子的相对位置和位移， s 是键的伸长。最后， $\sigma = \sigma$（$\boldsymbol{\xi}$）是一个确保式（3）可积的函数。为使近场动力学模型的刚度和能量分别被限制在有限的正值范围内，还需要对 σ（$\boldsymbol{\xi}$）施加附加条件。 σ（$\boldsymbol{\xi}$）对近场动力学模型（式（3））的影响如图 1 所示。式（3）中的函数$\mu = \mu$（$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$）是一个依赖于历史的标量函数（也称为失效参数），它仅在拉伸作用下促使键断裂:

$$\mu(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \begin{cases} 1 & \text{for } s < s_{\mathrm{cr}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \, , \tag{4}$$

其中， s_{cr} 是键伸长的临界阈值。形式（3）对应一个势能，称为成对势函数:

$$\omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} = \begin{cases} \omega_{el} = \frac{1}{2} c \, s^2 \frac{|\boldsymbol{\xi}|^4}{\sigma} & \text{for } s < s_{\mathrm{cr}} \\ \omega_{\mathrm{cr}} = \frac{1}{2} c \, s_{cr}^2 \frac{|\boldsymbol{\xi}|^4}{\sigma} & \text{otherwise} \end{cases} \, . \tag{5}$$

2.1. 近场动力学的微观结构解释

本研究提出了一种近场动力学板的降维公式，重点关注厚度方向断裂扩展。由于第 3 节建立的模型具有非局部（近场动力学）特性，其能量项呈现出不同寻常的尺度律，因此在本初步

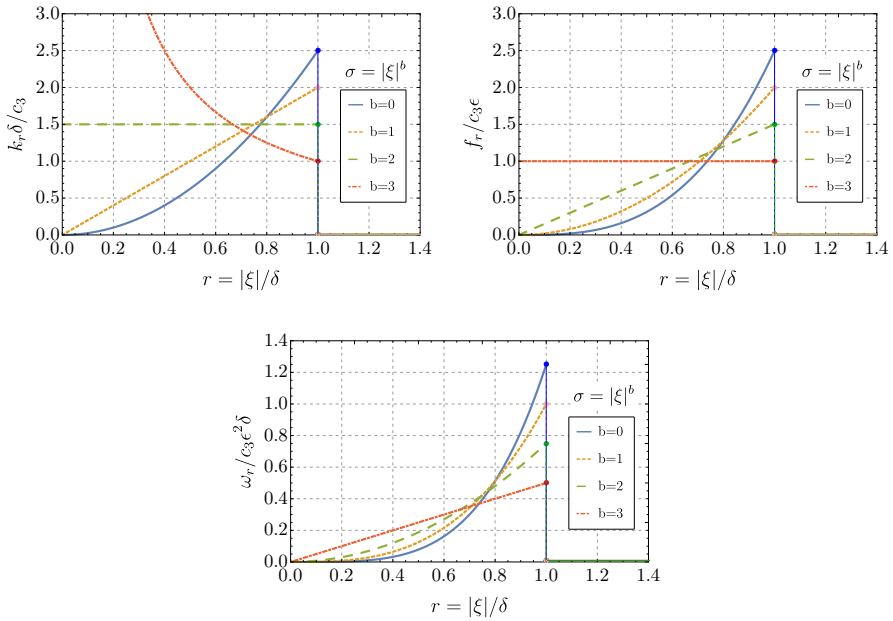

图 1：左上：不同 σ 下键的归一化刚度； $k_r = |\boldsymbol{f}|/|\boldsymbol{\eta}|$, δ 是视界， c_3 是 $\sigma = |\boldsymbol{\xi}|^3$ 情况下的键常数，该情况恢复了 Silling [19] 的原始公式。右上：不同 σ 下的归一化键力； f_r 是力的模，表示为 r （归一化相对距离）的函数，作用于施加了均匀伸长 ϵ 的键上。下方：随着键长度和施加的均匀伸长增加，键能 ω_r （每单位体积平方的能量）的变化。

章节中，我们讨论了对近场动力学的一种可能的微观结构解释，该解释有助于对我们的模型进行力学表征。

从连续体过渡到离散层级的可能性，对于涉及从弹性转变为损伤和断裂等耗散现象的问题至关重要。然而，要找到给定近场动力学模型与相应微观结构之间的精确等价关系，通常并非易事。一种可能的解释可通过纯粹的能量论证得出，具体可借助离散结构来说明，见附录 B。为强调这些观察结果，我们构建了一个简单的数值示例：由相互连接的线弹性元件组成的结构形成了密集排列的桁架集合。尽管人们可能会认为，随着结构中微梁数量不断增加，其渐近行为会趋近于标准的局部连续体，但我们证明，对于给定的拓扑，离散连续体与均匀化局部连续体在位移方面存在显著差异。图 2 展示了一个悬臂梁的情况（长 1 米、厚 0.4 米），该梁由桁架组装而成，呈网状排列，如图中的插图所示。这些桁架将物体中的每个材料点与所有满足相对距离要求的其他材料点相连。所涉及的参数，即梁的轴向刚度和视界长度，

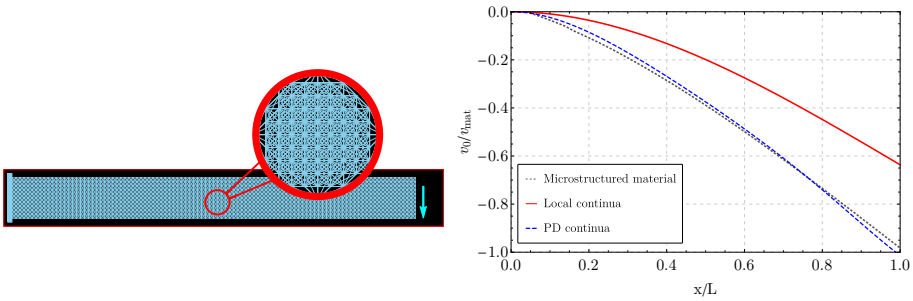

图 2: （左）具有网状微观结构、自由端受到指定位移作用的悬臂梁。（右）根据近场动力学（PD）和局部理论得到的归一化变形形状（v_{mat}结构材料的最大竖向位移）。

经过校准，使其在拉伸作用下的行为与理想均匀化局部连续梁的行为一致。图 2 将结构梁在一端受到竖直力作用时的挠度，与局部理论（红色曲线，欧拉-伯努利梁和铁木辛柯梁的曲线彼此重合）以及近场动力学（PD，蓝色曲线）的预测结果进行了比较。对于上述示例，局部理论未能正确表征弯曲行为，这可归因于梁复杂的内部结构。

3. 薄板的降阶模型

为了开展必要的解析计算，以建立板的降阶模型，需对板的运动学以及基于键的近场动力学连续体的本构关系作出若干假设。

3.1. 运动学

由于材料断裂可视为其位移场中不连续性的成核与扩展，因此可将运动学加法分解为连续部分（描述弹性变形）和跳跃部分（描述由分层引起的位移），即：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_a(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}_J(\boldsymbol{x}) \ , \tag{6}$$

其中，指标 a 表示绝对连续部分，而指标 J 表示跳跃部分。从这个意义上说，可以认为 $\boldsymbol{u}$ 是特殊有界变差（SBV）空间 [47, 48] 中的函数。

现在，我们将研究范围限定于厚度恒定为 H 的薄体 $\mathbb{B}$。给定三维欧几里得空间$\mathbb{E}^3$中的一个区域，以及一个笛卡尔参考系（O, x_1, x_2, x_3），图3，绝对

位移的连续部分近似表示为如下多项式展开

$$\boldsymbol{u}_a(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{\mathcal{A}}(x_1, x_2) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(x_1, x_2)x_3 + \cdots \quad . \tag{7}$$

需要特别指出的是，约化平面（即上述展开中的展开点）的选择可能会影响约化公式中各项的层级分布 [35]。下文选择板的中面进行降维，以便与经典局部弹性约化公式保持一致。

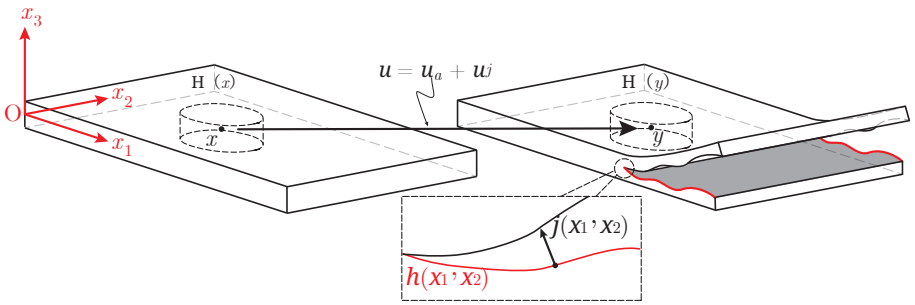

图3：厚度为 H 的板发生贯厚断裂扩展的运动学过程，此处也称为分层。参考构形中位于待确定的可能分层面上的每一点，都会跳跃至由向量 $\boldsymbol{j}(x_1,\ x_2)$ 指定的新位置。

位移场的跳跃部分将以相当一般的方式表示为

$$\boldsymbol{u}_J(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{j}(x_1, x_2) \cdot \Theta(x_3 - h(x_1, x_2)), \tag{8}$$

其中，$h(x_1,\ x_2)$ 可视为裂纹面，定义了可能出现位移不连续的表面；Θ 是 Heaviside 函数；最后，$\boldsymbol{j}(x_1,\ x_2)$ 是定义跳跃本身的向量函数。值得注意的是，上述对 $\boldsymbol{u}_J$ 所作的假设允许发生混合模式断裂过程。由于方程（6）中施加了运动学分解，相对位移场现在表示如下：

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_a + \boldsymbol{\eta}_J. \tag{9}$$

3.2 损伤

需要强调的是，在非局部理论中，位移场的不连续并不一定意味着断裂萌生/扩展，因为已经相隔有限距离的粒子完全可以承受其相对位移的突变。在近场动力学中，确保损伤实际发生的是 μ 函数 (4)，它表示键的失效准则。实际上，可通过方程 (4) 确定相互作用状态，该方程施加了临界伸长条件 ($s < s_{\text{cr}}$) [19, 52, 53]。在文献中提出的许多其他情形下，采用的不是临界延伸准则，

而是基于能量的准则 [54–56]。这种准则将键的断裂与储存能达到某一阈值联系起来，该阈值称为临界键能 ω_{cr}。临界伸长和临界能量通常都通过与断裂力学标准局部理论进行能量比较来评估。具体而言，物体中形成新表面所需的近场动力学能量，即断裂穿过该特定表面的所有键所需的能量（图4），被设定为等于格里菲斯理论的临界能量释放率 [57]，；这一操作确保在视界趋于无限小时恢复格里菲斯理论 [25, 58, 59]。

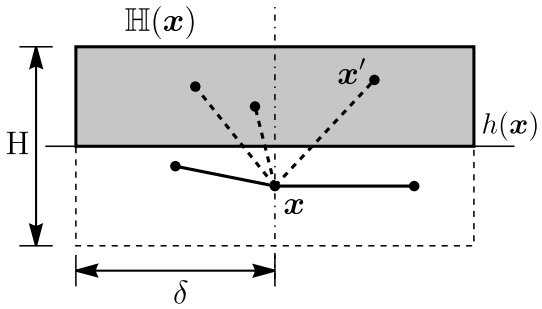

图4：计算断裂面 $h(\boldsymbol{x})$另一侧与材料点 $\boldsymbol{x}$ 相连的所有键断裂所需的总能量 $\boldsymbol{x}'$ 。

对于临界伸长的情况，可以用这种方法得到 [34, 60]

$$s_{cr} = \sqrt{\frac{G_c}{\beta(\mathbb{H}, \sigma)\ \delta}}\ , \tag{10}$$

其中， G_c 为临界能量释放率， β 是一个标量函数，取决于邻域 $\mathbb{H}$ 的形状以及 $\sigma(|\boldsymbol{\xi}|)$。

因此，近场动力学的失效机制能够自然地追踪从损伤到断裂的转变。

3.3. 拉格朗日公式

在某些条件 [61]，下，非局部近场动力学体的平衡问题的解与以下泛函 [62–64]的驻点相一致：

$$\mathcal{L} = -\mathcal{E}_{el} + \mathcal{W}, \tag{11}$$

其中， $\mathcal{E}_{el}$ 为弹性能， $\mathcal{W}$ 为外载荷功。通过明确写出各项，方程（11）变为

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{u}] = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}}\int_{\mathbb{H}} \omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\ \mathrm{dV}'\mathrm{dV} + \int_{\mathbb{B}} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}\ \mathrm{dV}\ , \tag{12}$$

其中， ω 为式（5）中定义的能量密度，而 $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{H}$ 分别为连续体和某点的邻域。此处，我们通过笛卡尔积定义 $\mathbb{B}$ 的分解，如 $\mathbb{B} = \mathbb{B}_\alpha \times \mathbb{B}_3$所示，其中

$$\mathbb{B}_\alpha := \{(x_1, x_2),\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}\} \quad \text{and} \quad \mathbb{B}_3 := \{x_3,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}\}\,.$$

据此，可以定义 $\mathbb{H} = \mathbb{H}_\alpha \times \mathbb{H}_3$，其中

$$\mathbb{H}_\alpha := \left\{(x_1', x_2'),\ \forall \boldsymbol{x}' \in \mathbb{B} : \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2} \leq \delta\right\}\ ,$$
$$\mathbb{H}_3 := \left\{x_3',\ \forall \boldsymbol{x}' \in \mathbb{B} : \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2} \leq \delta\right\}.$$

由于本研究中将 x_3 选作面外坐标（见图3），其取值范围为 $\{-\mathrm{H}/2,\ \mathrm{H}$，其中 H 为板厚。根据前述笛卡尔积，现在可以写出

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{u}] = \int_{\mathbb{B}_\alpha} \left(-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}_\alpha} \int_{\mathbb{H}_3} \int_{\mathbb{B}_3} \omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\ \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_3' \mathrm{dS}_\alpha + \int_{\mathbb{B}_3} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}\ \mathrm{d}x_3 \right) \mathrm{dS}_\alpha. \tag{13}$$

对式（13）进行厚度方向积分，可得到板的总拉格朗日量的约化形式。具体而言，式（13）括号中的第一项，即单位面积弹性能 $\Lambda_{\mathcal{E}}$，变为:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}_\alpha} \int_{\mathbb{H}_3} \int_{\mathbb{B}_3} \omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\ \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_3' \mathrm{dS}_\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}_\alpha} \int_{-\frac{\mathrm{H}}{2}}^{\frac{\mathrm{H}}{2}} \int_{-\frac{\mathrm{H}}{2}}^{\frac{\mathrm{H}}{2}} \omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_3' \mathrm{dS}_\alpha = \int_{\mathbb{H}_\alpha} \omega_{\mathrm{red}} \mathrm{dS}_\alpha\ ,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 ω_{red} 是成对势函数 ω的约化形式。
类似地，我们将外载荷功（式（13）括号中的第二项）进行厚度方向积分所得的结果记为 $\Lambda_{\mathcal{W}}$。
式（13）中涉及的所有泛函都是非局部的，因为未知函数 $\boldsymbol{u}$是在物体的不同点处进行求值的。现在需要一种等价形式的非局部泛函欧拉-拉格朗日方程，以求出式（13）的驻点。关于在泛函定义域的内部搜索驻点（或对其进行最小化），已有文献 [65]对此进行了研究。对于静态弹性近场动力学非局部泛函 [62–64]这一特例，有如下推论成立:

$$\min_u \mathcal{L} \to 2\frac{\partial \Lambda_{\mathcal{E}}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial \Lambda_{\mathcal{W}}}{\partial \boldsymbol{q}} = 0\ , \tag{15}$$

其中， $\boldsymbol{q}$ 是问题中未知函数的向量，由式（6）至（8）可知，它可写为:

$$\boldsymbol{q} = \{h(x_1, x_2), \boldsymbol{j}(x_1, x_2), \boldsymbol{\mathcal{A}}(x_1, x_2), \boldsymbol{\mathcal{B}}(x_1, x_2)\} \ .$$

为得到方程（15），必须将条件（2）应用于 [62–64] 的结果。

3.4. 约化的成对势函数的层次形式

在此，我们给出基于键的近场动力学体的约化成对势函数的显式形式:

$$\omega_{\mathrm{red}} = \int_{-\frac{\mathrm{H}}{2}}^{\frac{\mathrm{H}}{2}} \int_{-\frac{\mathrm{H}}{2}}^{\frac{\mathrm{H}}{2}} \omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_3' \ , \tag{16}$$

对于线弹性情形，函数 σ （出现在式（3）中）对整体行为的影响，已由 Bobaru 等人 [53] 间接研究。他们展示了微模量函数的形状确实会影响材料的整体行为，不过这不会影响消失视界下的收敛速率。这一结果对本研究至关重要；本研究将探讨局部化过程对约化近场动力学模型的影响（第 5 节），旨在为板推导出局部约化形式。为简化计算，依据上文讨论的结果 [53], ，下文将采用条件 $\sigma = 1$ 。忽略失效参数（在方程（4）中记为 μ ），即可求得完全弹性情形下的约化能量形式，即载荷尚未使任何键断裂时的情形。若 c 为键常数，且 ϕ 为视界面内分量与厚度之比，则

$$\frac{\omega_{\mathrm{red}}}{c} = \underbrace{\mathrm{H}^2 \ p_1(\phi, \boldsymbol{u}_a) + \mathrm{H}^4 \ p_2(\phi, \boldsymbol{u}_a) + \mathrm{H}^6 \ p_3(\phi, \boldsymbol{u}_a)}_{\omega_{\mathrm{red},a}} + \omega_{\mathrm{red,J}}(\mathrm{H}, \phi, \boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_J) \ \ , \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}
p_1(\phi, \boldsymbol{u}_a) =& (2\phi - \phi^2)(x_1' - x_1)^2 \left(\mathcal{A}_1(x_1') - \mathcal{A}_1(x_1)\right)^2 / 4 \ \ ; \\
p_2(\phi, \boldsymbol{u}_a) =& \{ \ 2\phi^3(3\phi - 4)(\mathcal{A}_3(x_1') - \mathcal{A}_3(x_1))^2 + \\
& (x_1' - x_1)^2 \phi^3 (3\phi - 4)(\mathcal{B}_1(x_1')^2 + \mathcal{B}_1(x_1)^2) + \\
& (x_1' - x_1)^2 (-2\phi + 3\phi^2 - \phi^4)(\mathcal{B}_1(x_1') - \mathcal{B}_1(x_1))^2 + \\
& 2\phi^3(3\phi - 4)(x_1' - x_1)(\mathcal{A}_1(x_1') - \mathcal{A}_1(x_1))(\mathcal{B}_3(x_1') + \mathcal{B}_3(x_1)) + \\
& 2\phi^3(3\phi - 4)(x_1' - x_1)(\mathcal{A}_3(x_1') - \mathcal{A}_3(x_1))(\mathcal{B}_1(x_1') + \mathcal{B}_1(x_1)) \} / 48 \ \ ; \\
p_3(\phi, \boldsymbol{u}_a) =& \{ \left(20 - 45\phi + 72\phi^2 - 80\phi^3\right) \left(\mathcal{B}_3(x_1') - \mathcal{B}_3(x_1)\right)^2 + \\
& (20 - 45\phi - 72\phi^2 + 80\phi^3)(\mathcal{B}_3(x_1')\mathcal{B}_3(x_1)) \} / 1440 \ \ ;
\end{aligned}$$

而 $\omega_{\mathrm{red,\ J}}$ 是 ϕ、H 和未知场的隐函数，表示约化能量中与跳跃场相关的部分。如公式 (17) 所示，约化能量中与连续位移相关的部分此后记为 $\omega_{\mathrm{red,\ a}}$。

在厚度方向视界等于薄元整体厚度的情况下，假定相互作用具有各向同性。在这种情况下：

$$p_1(1,\boldsymbol{u}) = (x_1' - x_1)^2 \left(\mathcal{A}_1(x_1') - \mathcal{A}_1(x_1)\right)^2/4 \ ; \tag{18}$$

$$\begin{aligned} p_2(1,\boldsymbol{u}) = \{ & -2(x_1' - x_1)(\mathcal{A}_3(x_1') - \mathcal{A}_3(x_1))(\mathcal{B}_1(x_1') + \mathcal{B}_1(x_1)) + \\ & -2(\mathcal{A}_3(x_1') - \mathcal{A}_3(x_1))^2 - (x_1' - x_1)^2(\mathcal{B}_1(x_1')^2 + \mathcal{B}_1(x_1)^2) + \\ & -2(x_1' - x_1)(\mathcal{A}_1(x_1') - \mathcal{A}_1(x_1))(\mathcal{B}_3(x_1') + \mathcal{B}_3(x_1))\}/48 \ ; \end{aligned} \tag{19}$$

$$p_3(1,\boldsymbol{u}) = \{10\mathcal{B}_3(x_1')\mathcal{B}_3(x_1) + 7\mathcal{B}_3(x_1')^2 + 7\mathcal{B}_3(x_1)^2\}/1440 \ ; \tag{20}$$

and:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{\mathrm{red},J}}{c} = & \ r_0(\boldsymbol{u}_J) + \mathrm{H}\ r_1(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_J) + \mathrm{H}^2\ r_2(\boldsymbol{u}_J) + \\ & \mathrm{H}^3\ r_3(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_J) + \mathrm{H}^4\ r_4(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_J) + \mathrm{H}^5\ r_5(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_J) \quad , \end{aligned} \tag{21}$$

其中，r_i 函数见附录 A。

为简单起见，方程（17）针对平面应变情形进行了专门化处理。变量 x_1 和 x_1' 分别表示粒子 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 的位置向量的面内分量。此外，我们使用了 $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3\}$、$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3\}$ 和 $\boldsymbol{j} = \{0, j_3\}$。后者将运动学限制为纯 I 型断裂的运动学。可以看出，成对势函数的降维生成了一系列具有层级关系的项，用于表征储存在平面元内部的应变能。

在附录 B 中，遵循第 2.1 节给出的微观结构解释，并通过定义离散近场动力学的一个范式情形，提出了一种用于物理解释近场动力学连续体约化能量中各项的简单工具。借助这一范式情形，可以立即对式（17）中随厚度的平方 p_1 和四次方 p_2 缩放的各项作出物理解释，即前者为膜项，后者为弯曲项。

通过分析 p_1 的表达式（见式 (18)），由于 $\mathcal{A}_1(x_1)$ 是约化平面上各点位移场的面内分量，可以确认，随 H^2 缩放的 $\omega_{\mathrm{red,\ a}}$ 各项可视为纯膜项。相反，在高阶项中，例如乘以 H^4, 的 p_2 （式 19），可以看出其中既包含纯弯曲贡献（例如仅取决于 $\mathcal{B}_1(x_1)^2$ 的项），也包含混合项。混合项引入了膜行为与弯曲行为之间的耦合。这是非局部形式的独特特征。事实上，膜行为与弯曲行为之间的耦合是局部理论难以再现的特征，如附录 C 所示。第 5 节将说明，当近场动力学模型被局部化，即在消失视界 δ 的极限下计算约化能量时，这种耦合会消失。

最后，随 H^6 缩放的各项是高阶项，仅取决于$\mathcal{B}_3(x_1)$；后者是厚度方向上的应变变形 $\partial_{x_3}(\boldsymbol{u}_a \cdot \boldsymbol{e}_3)$ 的非局部等效量，其中 $\boldsymbol{e}_3$ 是平面法向单位向量（x_1， x_2）。需要注意的是，为了恢复基尔霍夫板理论的运动学，$\mathcal{B}_3(x_1)$ 必须为零。

位移场跳跃部分对约化能量的贡献，如$\omega_{\mathrm{red所示J}}$，分布得更为分散。我们可以看到，跳跃场对膜、混合量以及弯曲相关量均有贡献。同样，位移跳跃部分的不同场与连续部分之间也存在耦合。厚度（H）中的最高阶项由位移连续部分泰勒展开的截断阶数决定。仅保留 x_3中截至一阶的项后，最高次幂为 6。作出这一特定选择是为了检验非局部模型的收敛性，相关检验将在本文最后一节进行。

4. 模型实现与应用

在上述条件下，采用伽辽金方法求解近场动力学模型的欧拉-拉格朗日方程组（15），得到如下形式的方程组

$$\int_{\mathcal{B}_\alpha} \left(2\frac{\partial \Lambda_{\mathcal{E}}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial \Lambda_{\mathcal{W}}}{\partial \boldsymbol{q}} \right) \boldsymbol{\delta q} = 0 \ , \tag{22}$$

该方程组可以通过迭代求解。
随后编写了 Mathematica 代码，以在不同加载条件下测试该模型。这里展示了针对对称和非对称载荷分布的位移诱导测试。

结果表明，该降阶模型能够再现传统和非常规的力学行为，例如远端裂纹萌生以及裂纹模式失去对称性。

力学与几何量	**数值**
杨氏模量 [MPa]	5000
临界表面能 G_c [J/m^2]	5.3
厚度与长度之比 (H/L)	$1/25$
非局部参数	**值**
视界(δ)/长度(L)	$1/5$
键常数 c [N/mm^6]	7.7x10^6
临界伸长 s_{cr} [-]	0.2x10^{-4}

表1：局部等效材料的参数及板的几何形状（上）；近场动力学键基降阶模型的非局部参数（下）。

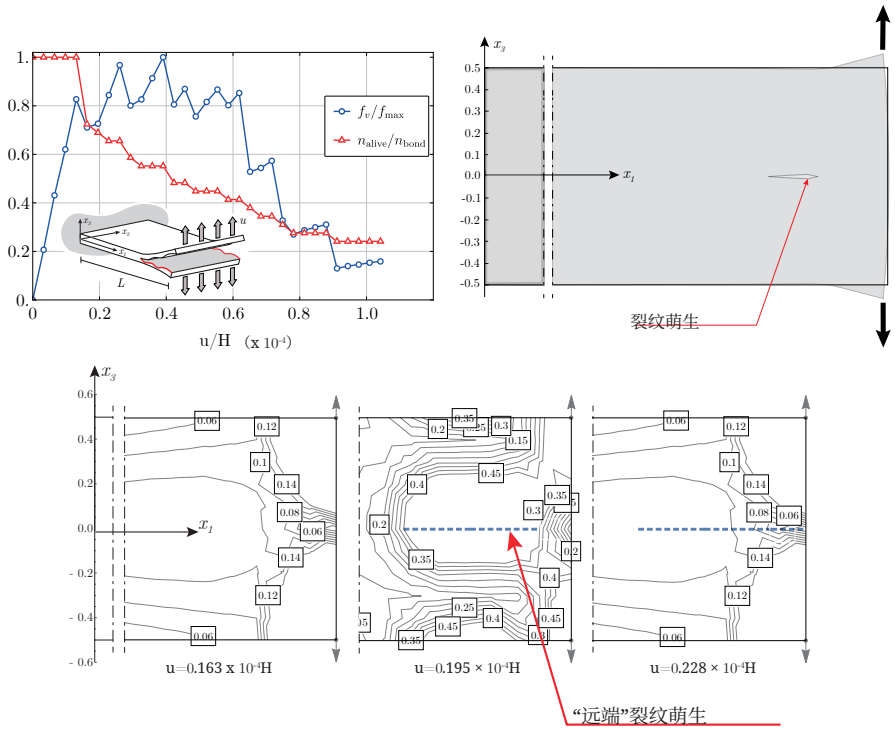

图5：使用本文提出的公式，对上下边缘施加两个方向相反的竖向位移的近场动力学悬臂板进行分析所得结果。上半部分：左侧为力-位移响应的演化及试验示意图，右侧为施加位移 $u/H = 0.195 \times 10^{-4}$ 并放大100倍后的变形形状。下半部分：表示位移的等值线（相对于施加的位移归一化），展示随着边缘处施加的位移增大，裂纹面 $h(x)$的演化；裂纹面以蓝色虚线表示。

4.1. 位移诱导剥离试验

上述提出的近场动力学约化公式用于研究位移控制试验的情形，该试验通过贯厚断裂使悬臂板发生破坏。如图5所示，在自由边缘的上部和下部施加一对竖向位移，对板进行加载。初始几何形状无需预先设置裂纹或缺口即可形成裂纹。这是因为近场动力学理论在本构层面引入了损伤，并且采用了前述关于损伤-断裂转变的运动学假设。

试验一直进行到最终竖向位移约为 H/600，此数值足以使所选弹性参数和临界参数下的断裂得以发展（见表1）。图5（上）中以蓝色展示了归一化力与位移的关系曲线，以红色展示了加载区域附近尚未断裂的键的比例。后者已用于

研究断裂扩展前及其过程中的损伤扩展。具体而言，如图5（下）所示，损伤和断裂面均首先在距板边缘（施加载荷的轨迹）一定距离的远端截面处形成，随后向两个方向扩展，这一点也可在层压纸中观察到 [18]。当近场动力学连续体具有显著的非局部特性，即视界大于板的厚度时，便会产生这种异常响应。事实上，减小该参数后，相互作用会变得更加局部化，并得到不同的响应：裂纹在更靠近自由边缘处成核；当视界消失时，裂纹最终到达自由边缘，这正是标准局部连续体理论的典型结果。图6展示了参数分析结果，视界值从板厚 H 的两倍降至近似为零的数值；在该数值下，断裂从自由边缘处的截面（施加载荷的位置）成核并扩展。当采用近场动力学离散

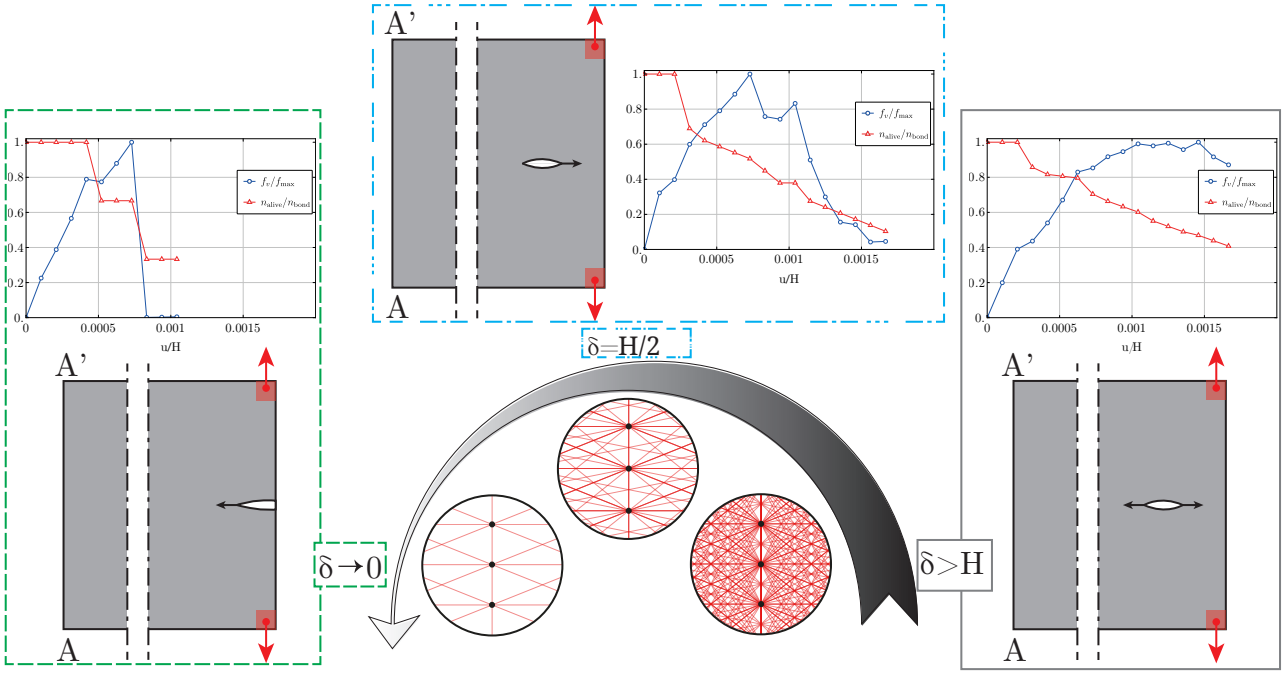

图6：近场动力学降阶悬臂板在位移诱导测试中，随着视界减小，裂纹萌生与扩展的定性行为。板在横截面AA’处固定，并在另一侧边缘施加载荷。

物体或连续体的视界减小时，一个点的总相互作用数，即键的数量，也会随之减少。因此，结构的内聚性会降低；图6所示各个工况的力-位移图清楚地呈现了这一特征。令人意外的是，正如下一节所示，在局部情形下，内聚特性并未完全消失。最后，力图中的红线表示断裂相对数量

的键，因此代表载荷施加区域内的总损伤。除内聚性的损失外，键数量减少还会影响板的整体刚度。因此，我们展示了在整体刚度恒定的条件下，对比不同视界尺寸时板的行为所得结果。随着 δ 减小，可以通过增大近场动力学模型的键常数 c 来满足这一条件；考虑到近场动力学离散体的典型微观结构，增大 c 可通过加厚代表键的每根梁来实现，见图7（见附录 B）。同一幅图中的对比表明，与视界较小的情形相比，非局部微观结构能够吸收更多能量，因而韧性更高；较小视界的情形则相对更脆。视界尺寸与总耗散能量之间的关系似乎并非线性：根据我们的研究，相互作用体积增大四倍，耗散的总能量仅增加了1.5倍。值得一提的是，等值线图和力-位移图

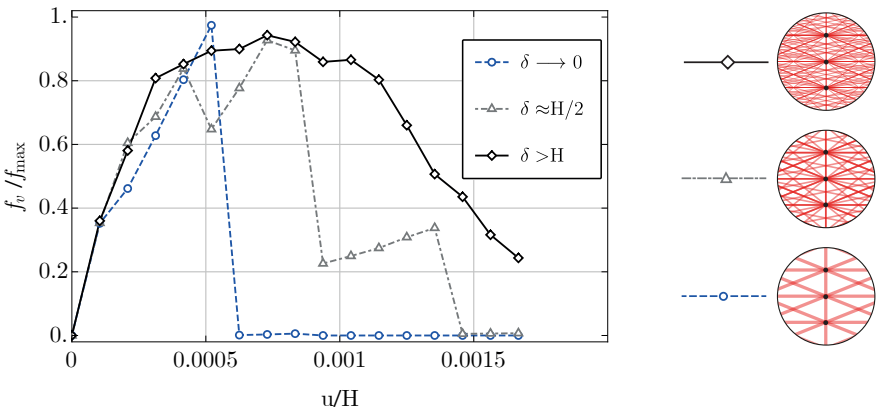

图7：具有不同视界尺寸但整体刚度相同的非局部板的力-位移响应对比（左图）。右图为不同情况下近场动力学体的等效微观结构；通过加厚每根梁的横截面来提高键刚度。

均展示了近场动力学板中裂纹扩展的早期现象，即损伤起始、断裂胚胎的成核，以及裂纹在极近区域内的扩展。

4.2. 非对称载荷分布诱发贯穿厚度裂纹

从前述对称加载板的案例出发，我们在此探讨对悬臂板裂纹面施加载荷时的非对称性所产生的影响。非对称加载条件通过在上边缘的多个点施加拉力实现，而板的下边缘仍仅在一个点受拉，见右侧图8。模拟所用参数为 $c = 7618$ N/mm^6 （键常数）、 $\delta = H/2$ （视界），

$s_{cr} = 0.02036$ （单键的临界伸长），并且试验一直进行到最终竖向位移约为 H/20。

就裂纹路径而言，非对称载荷分布会导致意料之外的非对称裂纹轨迹，裂纹从外侧区域起裂并向板的中心扩展，见图8。对于遵循圣维南原理的薄结构，即使规定的边界条件仅有轻微的对称性丧失，裂纹路径也会对此表现出敏感性，这种现象通常并不明显。

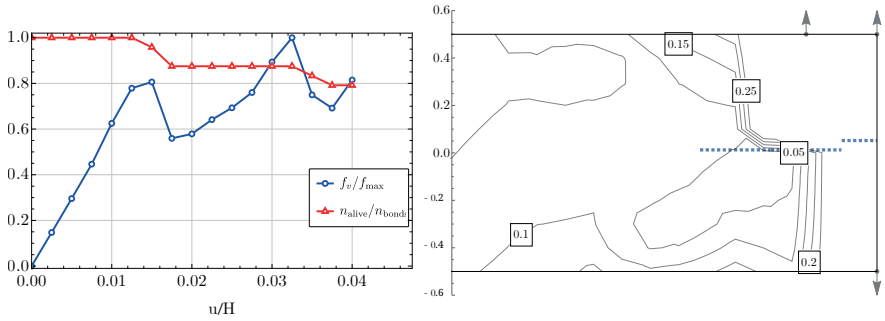

图8：非对称载荷分布导致裂纹路径失去对称性。左图为相对于峰值力归一化的力-位移图（蓝色），完整键的数量以红色表示；后者反映了损伤演化。右图为受非对称力和位移分布加载的试样中的裂纹面（蓝色虚线），以水平集曲线表示。

*4.3. II*型断裂扩展

非局部近场动力学板可能会因外力偶的作用而沿厚度方向出现连续性丧失。为说明这一点，对一块夹持的近场动力学板施加载荷：在板自由端的上、下边缘施加两个反向力，并逐渐增大其倾角（见图 9）。模拟所选用的力学参数和几何参数与第4.2节所示的前一案例相同。当力几乎处于水平方向（倾角为零，右侧图 9）时，前一案例中反向竖直力和 I型破坏所呈现的典型远端起裂现象消失了，取而代之的是一种更为“经典”的裂纹扩展：裂纹在自由端截面处以 II型方式成核。然而，在后一案例中，裂纹的演化并不连续；在后续阶段，又会在远离第一条裂纹的位置形成一条更靠远端的裂纹。

最后还需指出，从上述各个例子中可以看出，施加载荷与位移场之间存在复杂而丰富的相互作用。因此，要用某种可能的静力等效载荷（例如合力）来替代特定的载荷分布，并将其施加于降维板上，是非常困难的。由于需要追踪断裂/分层过程，整体合力为零的力与合力不为零的力同样重要，因此，非零的合力和合力偶并非唯一需要考虑的有效载荷，

也是如此。事实上，第一个例子中的两个反向力作用于板的同一自由表面，方向相同且均为竖直方向，虽然整体合力为零，但对分层仍然十分重要，这与经典剥离试验的情况一致。

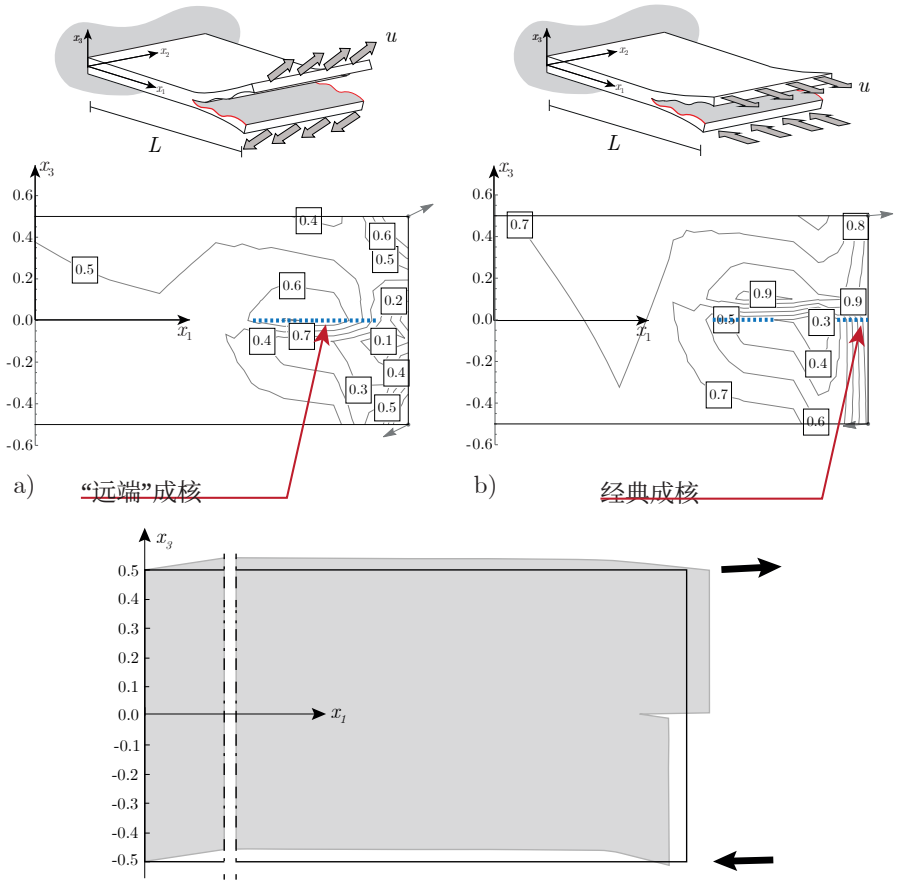

图 9：受一对反向力作用的非局部近场动力学板，这对力的倾角逐渐增大。图的上部给出了载荷和板的示意图，分别对应以下两种情况：a）力的倾角为 30°；b）力的倾角接近于零。图的中部展示了这两种情况下由力引起的板的位移（相对于施加的最大位移进行归一化，即 $u/H = 0.01$），并显示了不同的裂纹萌生和扩展情况（蓝色虚线）。最后，图的下部展示了非局部板的变形形状，对应施加的水平位移为 $u/H = 0.003$（放大 40 倍）。

5. 收敛到局部弹性模型

所提出的近场动力学模型仅对位移场的连续部分保证收敛 [62, 66–68]。然而，通过对跳跃场函数进行适当的尺度调整，在视界消失时的收敛会使能量趋于有界。

将（9）代入（5），（12）的第一项，即基于键的近场动力学体的弹性能，变为

$$\frac{1}{4}\frac{c}{\sigma(\boldsymbol{\xi})}\mu\int_{\mathbb{B}}\int_{\mathbb{H}}\left[(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}_a)^2+2(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}_a)(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}_J)+(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}_J)^2\right]\mathrm{d}V'\mathrm{d}V\ . \tag{23}$$

为确保在非局部性消失时收敛，即 $\delta\to 0$，必须检查每一项的尺度律。

5.1. 近场动力学参数评估

基于键的近场动力学理论中的各向同性均匀线弹性材料由一个称为键常数的单一常数表征c。这是因为基于键的材料的泊松比 ν 固定为 $1/4$ 或 $1/3$，具体取值取决于问题的维度，因此只有一个参数可以调节。该常数通常通过与标准局部弹性材料进行能量等价来定义。施加这种等价关系的条件（即各向同性膨胀、纯拉伸，甚至剪切）会对该常数的取值产生巨大影响。事实上，收敛到局部模型后得到的能量会受到键常数选取的影响，以至于某些项可能收敛到局部理论中的经典形式，而其他项则可能不会。例如，如果选择令近场动力学模型中的拉伸能与局部弹性模型中的拉伸能等价，那么局部化近场动力学模型中只有关于 H 的一阶项会收敛，而二阶、三阶及更高阶项则不会。

通常，为通过与局部连续介质的能量等价性来评估键常数，变形映射会选择各向同性膨胀。这一选择并不意味着所有项都会收敛到经典项，但可以大致了解通过收敛获得的模型所具备的可能性。各向同性膨胀下键基近场动力学线弹性材料的能量密度 ($\boldsymbol{\eta}=\alpha\boldsymbol{\xi}$) 定义为

$$W_{PD}=\frac{1}{2}c\alpha^2\int_{\mathbb{H}}|\boldsymbol{\xi}|^{4-b}\mathrm{dV}=\frac{1}{2}c\alpha^2\ \gamma(\mathbb{H},b,d)\ \delta^{4-b+d}, \tag{24}$$

其中，γ 是一个标量函数，取决于邻域 $\mathbb{H}$的形状、问题的维数 d，以及参数 b；该参数源自对 $\sigma(|\boldsymbol{\xi}|)=|\boldsymbol{\xi}|^b$的选择。同样，经典局部弹性中各向同性膨胀线弹性材料的能量定义为

$$W_{CL}=\frac{1}{2}\alpha^2\ \boldsymbol{I}\cdot\mathbb{E}[\boldsymbol{I}]=\frac{1}{2}\alpha^2\frac{3\mathrm{E}}{1-2\nu}, \tag{25}$$

其中， $\boldsymbol{I}$ 是单位张量， $\mathbb{E}$是四阶弹性张量，E 是局部弹性材料的杨氏模量， ν 是泊松比。通过令能量 (24) 和 (25) 等价，可得

$$c = \frac{3\mathrm{E}}{\gamma(b)\ \delta^{4-b+d}(1-2\nu)}. \tag{26}$$

对于球形视界，可得

$$c = \frac{15\ \mathrm{E}}{56\ \delta^{6}}. \tag{27}$$

根据式 (26)，键常数的尺度律定义为 $c \sim \delta^{b-4-d}$。

5.2. 位移标度

能量的连续部分（式 (23) 的第一项）的尺度律为

$$\int_{\mathbb{B}}\int_{\mathbb{H}} \frac{c}{|\boldsymbol{\xi}|^{b}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}_a)^2 \mathrm{dV}\mathrm{dV}' \sim \delta^{-(4-b+d)-b+2(1+m)+d} = \delta^{2(m-1)}, \tag{28}$$

由于 c 的尺度律在式 (27) 中定义，其他项的尺度律如下： $|\boldsymbol{\xi}| \sim\delta$； $|\boldsymbol{\eta}| \sim \delta^{m}$； $V' \sim \delta^{d}$。要使积分项保持有界且非零，必须满足 $m = 1$。

因此， $\boldsymbol{\eta}_a \sim \delta^{1}$，这意味着

$$\boldsymbol{\eta}_a \approx \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{A}}(x_1,x_2)\ \boldsymbol{\xi} + \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{B}}(x_1,x_2)\boldsymbol{\xi}\ x_3 + \boldsymbol{\mathcal{B}}(x_1,x_2)\ \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{e}_3 + \cdots \tag{29}$$

定义了形函数的尺度律，因为 $\boldsymbol{\xi} \sim \delta^{1}$。特别是，无需进行尺度调整

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{A}}(x_1,x_2) \sim \delta^{0}\ \ ,\ \ \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\mathcal{B}}(x_1,x_2) \sim \delta^{0}\ \ ,\ \ \boldsymbol{\mathcal{B}}(x_1,x_2) \sim \delta^{0}. \tag{30}$$

同理，式（23）的第二项必须遵循以下尺度律:

$$\int_{\mathbb{B}}\int_{\mathbb{H}} \frac{c}{|\boldsymbol{\xi}|^{b}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}_J)(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}_a) \mathrm{dV}\mathrm{dV}' \sim \delta^{-(4-b+d)-b+(2+m+n)+d} = \delta^{-2+m+n}. \tag{31}$$

为了使能量保持有界，位移场的跳跃部分（由 n 定义）的尺度律必须满足 $n \geq 1$ 条件，因为根据式（28）， $m = 1$。因此，由能量的最后一项可得:

$$\int_{\mathbb{B}}\int_{\mathbb{H}} \frac{c}{|\boldsymbol{\xi}|^{b}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}_J)^2 \mathrm{dV}\mathrm{dV}' \sim \delta^{-(4-b+d)-b+2(1+n)+d} = \delta^{2(n-1)}, \tag{32}$$

这给出了冗余条件： $n \geq 1$。根据式 (8)，在非局部性趋于零时，可以将相对跳跃位移 $\boldsymbol{\eta}_J$ 近似为

$$\boldsymbol{\eta}_J \approx \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{u}'_J|_{\boldsymbol{\xi}=0}\cdot\boldsymbol{\xi}, \tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{u}'_J$ 是粒子 $\boldsymbol{x}'$的位移。如果我们将 $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{u}'_J$的尺度律称为 p，那么根据式 (32)，$p \geq 0$。不过，由于

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{u}'_J|_{\boldsymbol{\xi}=0} = \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{j}\ \Theta(x_3 - h(x_1,x_2)) + \boldsymbol{j} \otimes (\boldsymbol{e}_3 - \nabla_{\boldsymbol{x}} h(x_1,x_2))\, \phi(x_3 - h(x_1,x_2)), \tag{34}$$

其中 ϕ 是狄拉克δ分布，可以很容易看出，为使$h(x_1,\ x_2)$和能量有界，必须满足以下尺度律

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{j} \sim \delta^0 \quad , \quad \boldsymbol{j} \sim \delta^0 \quad , \quad \nabla_{\boldsymbol{x}} h \sim \delta^0. \tag{35}$$

5.3. 失效准则的尺度律

与能量一样，损伤准则（$s < s_{\mathrm{cr}}$）也按 $\delta \to 0$缩放。临界伸长 s_{cr} 的尺度律由方程（10）定义，因此 $s_{\mathrm{cr}} \sim \delta^{-1/2}$。另一方面，伸长 s的尺度律可通过使用方程（33）和（34）得出

$$s = \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{u}'_J|_{\boldsymbol{\xi}=0} \cdot \boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{u}'_J|_{\boldsymbol{\xi}=0} : \frac{\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}. \tag{36}$$

双点积[1] 中的第二个张量是按 δ^0缩放的量，而第一个张量包含一个奇异项，即狄拉克δ函数 ϕ；当 $x_3 = h(x_1,\ x_2)$时，该函数会使伸长变为无穷大。因此，只要位于裂纹面上，该准则就会立即不满足。最后：

$$s < s_{\mathrm{cr}} \to \begin{cases} \text{False} & \text{for } x_3 = h(x_1,x_2) \\ \text{True} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{37}$$

5.4. 平面应变下的局部化能量

通过对PD非局部弹性能在 δ趋于零时取极限，得到了PD非局部模型的局部化。由此得到的局部化能量由两部分构成：一部分完全由位移场的连续部分定义，即项（28）；另一部分由混合跳跃项和纯跳跃项组成

$$\mathcal{E}_{local} = \mathcal{E}_{local,a} + \mathcal{E}_{local,J}, \tag{38}$$

其中，连续位移场假设（7）在 x_3 处截断至一阶，并采用平面应变

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{local,a} =& \mathrm{HE}\left(\frac{3}{56}\mathcal{A}'_1(x_1)^2 + \frac{5}{84}\mathcal{B}_3(x_1)\mathcal{A}'_1(x_1) + \frac{5}{168}\mathcal{A}'_3(x_1)^2 + \right. \\ & \left. \frac{5}{84}\mathcal{B}_1(x_1)\mathcal{A}'_3(x_1) + \frac{5}{168}\mathcal{B}_1(x_1)^2 + \frac{3}{56}\mathcal{B}_3(x_1)^2\right) + \\ & \mathrm{H}^3\mathrm{E}\left(\frac{1}{224}\mathcal{B}'_1(x_1)^2 + \frac{5\mathcal{B}'_3(x_1)^2}{2016}\right). \end{aligned} \tag{39}$$

[1]给定两个二阶张量 A 和 B，双点积运算记为 A:B^T = Tr(AB) $= A_{ij}B_{ji}$。

这里，$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3\}$、$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3\}$，撇号表示对 x_1 求导。同时，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{local,J} =& \mathrm{HE}\left(\frac{5}{168}\mathcal{B}_1(x_1)j_3'(x_1) + \frac{5}{336}j_3'(x_1)^2 + \frac{5}{168}j_3'(x_1)\mathcal{A}_3'(x_1)\right) + \\ & \mathrm{H}^2\mathrm{E}\left(\frac{5}{672}j_3'(x_1)\mathcal{B}_3'(x_1)\right) + \\ & \mathrm{E}\ \left(\frac{3}{28}j_3(x_1)\mathcal{B}_3(x_1) - \frac{5}{84}j_3'(x_1)\mathcal{B}_1(x_1)h(x_1) - \frac{5}{168}h(x_1)j_3'(x_1)^2 + \right. \\ & -\frac{5}{84}h'(x_1)j_3(x_1)\mathcal{B}_1(x_1) - \frac{5}{84}j_3(x_1)j_3'(x_1)h'(x_1) + \\ & -\frac{5}{84}j_3'(x_1)h(x_1)\mathcal{A}_3'(x_1) - \frac{5}{84}j_3(x_1)h'(x_1)\mathcal{A}_3'(x_1) + \\ & \frac{5}{84}j_3(x_1)\mathcal{A}_1'(x_1) + \frac{5}{84}h(x_1)j_3(x_1)\mathcal{B}_1'(x_1) + \\ & \left.-\frac{5}{168}j_3'(x_1)h(x_1)^2\mathcal{B}_3'(x_1) - \frac{5}{84}j_3(x_1)h(x_1)h'(x_1)\mathcal{B}_3'(x_1)\right)\ ,\end{aligned} \tag{40}$$

其中考虑了纯 I 型裂纹扩展的假设 $\boldsymbol{j} = \{0, j_3\}$。

方程（38）基本上表示一种具有内聚本构定律的材料，其能量源于位移跳跃。

现在，可以通过写出局部板的拉格朗日量并对其进行最小化，得到第 3 节所引入的非局部模型的局部化表述；该局部板的内能由方程（39-40）给出。

5.5. 类 *Kirchhoff* 板的 *I* 型断裂

通过施加以下条件，即可直接恢复 Kirchhoff 板的运动学

$$\mathcal{A}_1(x_1) \to 0, \quad \mathcal{B}_3(x_1) \to 0, \quad \mathcal{B}_1(x_1) \to -\mathcal{A}_3'(x_1), \tag{41}$$

使得

$$\boldsymbol{u}_a(x_1, x_3) = \{-\mathcal{A}_3'(x_1)x_3,\ \mathcal{A}_3(x_1)\}. \tag{42}$$

通过如下方式选择跳跃函数及其导数，即可实现 I 型分层：

$$j_1(x_1) \to 0, \quad j_1'(x_1) \to 0, \tag{43}$$

使得

$$\boldsymbol{u}_J[x_1, x_3] = \{0, j_3(x_1)\ \Theta(x_3 - h(x_1))\}, \tag{44}$$

其中，Θ 是 Heaviside 函数。在这些条件下，局部化能量的各项变为

$$\mathcal{E}_{local,a} = \frac{1}{224}\mathrm{EH}^3\mathcal{A}_3''(x_1)^2, \tag{45}$$

and

$$\mathcal{E}_{local,J} = \mathrm{E}\left(\frac{5}{84} j_3(x_1) j_3'(x_1) h'(x_1) + \frac{5}{168} h(x_1) j_3'(x_1)^2 + \right. \tag{46}$$
$$\left. - \frac{5}{84} j_3(x_1) h(x_1) \mathcal{A}_3''(x_1) - \frac{5}{336} j_3'(x_1)^2 \right) ,$$

分别。值得一提的是，位移连续部分的极限局部能量与 Kirchhoff 板的经典结果类似：$\mathcal{E}_{local,\ a} = \mathrm{H}^3\mathrm{E}\,12(1-\nu^2)\,\mathcal{A}_3''(x_1)^2,$其中，显然需要考虑泊松比 $1/4$ 。

6. 结论

本文提出了一种降阶模型，用于明确研究薄结构中的贯穿厚度断裂萌生与扩展。该模型通过对薄元的运动学作出假设而获得，将其视为连续部分与跳跃部分之和。对这些场作出特定选择，显式表达其对面外变量的依赖，从而使沿厚度方向的积分成为可能。所得降阶模型通过定义跳跃的函数，保留了材料连续性丧失的信息。所提出的模型具有明确的弱平面/弱表面，但仍能恢复板厚度方向上的水平裂纹模式和偏斜裂纹模式。降维过程在板内储存的弹性能中生成了一系列层级项。对这些项进行力学解释是可能的（尤其是与位移连续部分相关的能量部分），本文通过定义一种简单的近场动力学结构范式提出了这种解释。研究发现，尽管该 formulation 采用线性框架表达，能量的层次形式仍体现出膜与弯曲行为之间的耦合。

随后，在针对悬臂板的对称位移诱导分层试验中对降阶模型进行了测试，并获得了随视界变化而呈现的广泛定性响应。特别是，当视界大于板的高度时，观察到了远端成核；而在消失视界极限下，则恢复了线性断裂力学中的经典结果，断裂从板的受载横截面开始扩展。除裂纹路径的发展之外，不同的视界还被证明会极大地影响结构的力-位移响应：视界较大时，非局部模型表现出更高的韧性和能量耗散；而视界较小时，则呈现出更明显的脆性行为。

此外，还进行了非对称位移诱导试验；模拟结果显示，近场动力学板表现出显著的敏感性，其失效响应以薄非局部构件中的曲线裂纹路径为特征。

为进一步研究该模型的局部极限，对非局部

约化公式进行局部化。首先，评估非局部能量是否收敛至有限且非零的局部等效量。局部化约化模型具有内聚性，表现为断裂扩展时，与不连续位移场相关的能量部分能够储存能量。

CRediT 作者贡献声明

R. Cavuoto：构建理论，完成计算与数值运算，撰写并编辑稿件。**A. Cutolo**：完成计算，撰写并编辑稿件。**K. Dayal**：构建理论，撰写并编辑稿件，负责监督整个研究工作。**M. Fraldi**：构建理论，撰写并编辑稿件，负责监督整个研究工作。**L.Deseri**：构建理论，撰写并编辑稿件，负责监督整个研究工作。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在已知的可能影响本文所报告工作的经济利益冲突或个人关系。

致谢

LD、AC 和 MF 衷心感谢意大利研究部（MIUR）通过 PRIN-20177TTP3S 和 PON “Stream”-ARS01 01182 项目提供的支持。LD 还衷心感谢欧盟委员会通过以下项目提供的支持：(i) FET Open “Boheme” 项目（编号 863179）；(ii) LIFE GREEN VULCAN LIFE19 ENV/IT/000213；以及 (iii) ERC-ADG-2021-101052956-BEYOND。Kaushik Dayal 感谢陆军研究办公室（MURI W911NF-19-1-0245）、海军研究办公室（N00014-18-1-2528）和美国国家科学基金会（DMREF 2118945、DMS 2108784）提供的经费支持。

附录 A. 约化能量的展开形式

现再次为读者列出约化能量的层次形式：

$$\omega_{\mathrm{red}} = \omega_{\mathrm{red},a} + \omega_{\mathrm{red},J} \tag{A.1}$$

其中，在 $\phi = 1$ 的情况下，具体为

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{red},a} &= \mathrm{H}^2\ p_1(\phi, \boldsymbol{u}_a) + \mathrm{H}^4\ p_2(\phi, \boldsymbol{u}_a) + \mathrm{H}^6\ p_3(\phi, \boldsymbol{u}_a)\ \ ; \\
\omega_{\mathrm{red},J} &= r_0(\boldsymbol{u}_J) + \mathrm{H}\ r_1(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_J) + \mathrm{H}^2\ r_2(\boldsymbol{u}_J) + \\
&\qquad \mathrm{H}^3\ r_3(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_J) + \mathrm{H}^4\ r_4(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_J) + \mathrm{H}^5\ r_5(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_J)\quad ,
\end{aligned}$$

其中， p_i 函数由公式（18）至（20）规定。另一方面，与位移的跳跃部分相关的约化能量系数为:

$$
\begin{aligned}
r_0 &= -\frac{1}{6}j_3(x_1')j_3(x_1)h(x_1')h(x_1)\left(2h(x_1')^2 - 3h(x_1')h(x_1) + 2h(x_1)^2\right) \ ; \\
r_1 &= -\frac{1}{3}j_3(x_1')\mathcal{A}_3(x_1')h(x_1')^3 - \frac{1}{6}j_3(x_1')^2h(x_1')^3 + \frac{1}{3}j_3(x_1')h(x_1')^3\mathcal{A}_3(x_1) + \\
&\quad \frac{1}{2}j_3(x_1')h(x_1')^2(x_1' - x)\mathcal{A}_1(x_1) + \frac{1}{2}j_3(x_1)\mathcal{A}_1(x_1')(x - x_1')h(x_1)^2 + \\
&\quad \frac{1}{3}j_3(x_1)\mathcal{A}_3(x_1')h(x_1)^3 + \frac{1}{6}j_3(x_1')j_3(x_1)h(x_1')^3 + \frac{1}{6}j_3(x_1')j_3(x_1)h(x_1)^3 + \\
&\quad \frac{1}{3}j_3(x_1)(x_1' - x)h(x_1)^3\mathcal{B}_1(x_1) - \frac{1}{4}j_3(x_1')h(x_1')^4\mathcal{B}_3(x_1') + \\
&\quad -\frac{1}{4}j_3(x_1)h(x_1)^4\mathcal{B}_3(x_1) + \frac{1}{2}j_3(x_1')\mathcal{A}_1(x_1')h(x_1')^2(x - x_1') + \\
&\quad \frac{1}{2}j_3(x_1)(x_1' - x)\mathcal{A}_1(x_1)h(x_1)^2 + \frac{1}{3}j_3(x_1')h(x_1')^3(x - x_1')\mathcal{B}_1(x_1') + \\
&\quad -\frac{1}{6}j_3(x_1)^2 - \frac{1}{3}j_3(x_1)\mathcal{A}_3(x_1)h(x_1)^3h(x_1)^3 \ ; \\
r_2 &= -\frac{1}{8}j_3(x_1')j_3(x_1)\left(h(x_1')^2 + h(x_1)^2\right) \ ; \\
r_3 &= -\frac{1}{12}j_3(x_1')\mathcal{A}_3(x_1')h(x_1') - \frac{1}{24}j_3(x_1')^2h(x_1') + \frac{1}{12}j_3(x_1')h(x_1')\mathcal{A}_3(x_1) + \\
&\quad -\frac{1}{12}j_3(x_1)\mathcal{A}_3(x_1)h(x_1) + \frac{1}{8}j_3(x_1')\mathcal{A}_1(x_1')(x_1' - x) + \\
&\quad \frac{1}{8}j_3(x_1)(x - x_1')\mathcal{A}_1(x_1) + \frac{1}{12}j_3(x_1)(x_1' - x)\mathcal{B}_1(x_1')h(x_1) + \\
&\quad \frac{1}{12}j_3(x_1')h(x_1')(x - x_1')\mathcal{B}_1(x_1) - \frac{1}{12}j_3(x_1')h(x_1')^2\mathcal{B}_3(x_1) + \\
&\quad -\frac{1}{24}j_3(x_1')h(x_1')^2\mathcal{B}_3(x_1') - \frac{1}{24}j_3(x_1)^2h(x_1) - \frac{1}{24}j_3(x_1)h(x_1)^2\mathcal{B}_3(x_1) + \\
&\quad \frac{1}{8}j_3(x_1)\mathcal{A}_1(x_1')(x_1' - x) + \frac{1}{12}j_3(x_1)\mathcal{A}_3(x_1')h(x_1) - \frac{1}{12}j_3(x_1)\mathcal{B}_3(x_1')h(x_1)^2 + \\
&\quad \frac{1}{8}j_3(x_1')(x - x_1')\mathcal{A}_1(x_1) + \frac{1}{24}j_3(x_1')j_3(x_1)h(x_1) + \frac{1}{24}j_3(x_1')j_3(x_1)h(x_1') \ ; \\
r_4 &= \frac{1}{12}j_3(x_1')\mathcal{A}_3(x_1') - \frac{1}{12}j_3(x_1')\mathcal{A}_3(x_1) - \frac{1}{12}j_3(x_1)\mathcal{A}_3(x_1') + \\
&\quad \frac{1}{24}j_3(x_1')(x_1' - x)\mathcal{B}_1(x_1) + \frac{1}{24}j_3(x_1)(x - x_1')\mathcal{B}_1(x_1') + \\
&\quad \frac{1}{12}j_3(x_1)\mathcal{A}_3(x_1) + \frac{1}{24}j_3(x_1)^2 + \frac{1}{24}j_3(x_1')(x_1' - x)\mathcal{B}_1(x_1') + \\
&\quad -\frac{1}{96}j_3(x_1')j_3(x_1) + \frac{j_3(x_1')^2}{24} + \frac{1}{24}j_3(x_1)(x - x_1')\mathcal{B}_1(x_1) \ ; \\
r_5 &= \frac{1}{48}j_3(x_1)\mathcal{B}_3(x_1') + \frac{1}{48}j_3(x_1')\mathcal{B}_3(x_1) + \frac{5}{192}j_3(x_1')\mathcal{B}_3(x_1') + \frac{5}{192}j_3(x_1)\mathcal{B}_3(x_1).
\end{aligned}
$$

附录 B. 键基近场动力学的微观结构解释

键基近场动力学本构方程 (3) 的结构便于作出直观而简单的物理解释。事实上，可以设想将所研究的物体均匀划分为若干块，并用一个节点替代每一块，以代表该块的质量[2]。然后，可以在节点之间引入无质量连接，以表示它们之间的相互作用。这些连接必须反映近场动力学表述中粒子对彼此施加力的方式。

为此，可以考察近场动力学连续体模型中相互作用体积（二维问题中则为面积）V_i and V_j之间储存的能量。结合方程 (5)，利用积分中值定理，可得

$$\mathcal{E}_{i,j} = \int_{V_i}\int_{V_j} \frac{c}{\sigma}\,\frac{(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta})^2}{4}\mathrm{d}V_i\mathrm{d}V_j = \frac{c}{\sigma^*}(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{\eta}^*)^2\frac{V_iV_j}{4} = \frac{c}{\sigma^*}\frac{V_iV_j}{4}\;|\boldsymbol{\xi}^*|^2\;|\boldsymbol{\eta}^*|^2\cos^2\beta\;, \tag{B.1}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}^*$ and $\boldsymbol{\eta}^*$ 是满足该定理的一对点（$\boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{x}_j^*$）的相对位置向量和相对位移向量，这两个点分别属于体积 V_i和 V_j； β 是它们之间的夹角。当体积 V_i 和 V_j 非常小时，可以合理地假设 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 函数在所关注的体积之间为常数，并用各体积的中点近似表示（$\boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{x}_j^*$）。

方程（B.1）右端项类似于一根桁架在 $\boldsymbol{\xi}$ 与水平轴$\mathbf{e}_1$, 之间的夹角作用下倾斜，并承受边界位移$|\boldsymbol{\eta}|$时的能量。因此，表示体积之间相互作用的键的刚度为

$$k_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{c}{\sigma^*}V_iV_j|\boldsymbol{\xi}^*|^2\;, \tag{B.2}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}^*$ 现在是体积 V_i和 V_j中点之间的相对位置向量。方程 (B.2) 表明，刚度与粒子$k_{i,j} \sim l_{i,j}^n$ 之间距离的某个幂次n 成正比（回想一下，$\sigma^* = \sigma(|\boldsymbol{\xi}^*|)$）。对所有节点对执行这种替换，会将近场动力学连续体转变为复杂的网格梁。按照上述近场动力学近似构建的最简单范式结构如图 B.10 所示。该范式结构以简单运动学为特征，能够正确预测能量 (17) 的层次形式，并使我们能够将连续体的运动学与某种更易于控制的对象进行比较，引导读者理想地完成这一过渡

[2]在有限元分析中，网格细化是一种有效的策略，可在问题定义域中需要细化的区域提高该问题近似解的精度和准确性。细化过程不可避免地会导致定义域离散不均匀；对于近场动力学，这可能会降低解的准确性[69]。

从离散到连续，以清楚展示上述非标准项如何自然地出现在近场动力学板模型中。

在此，我们将范式结构限定为拉伸和弯曲运动学，这足以进行定性解释。具体而言，通过对外侧节点（图 B.10 中的节点 1 和 2）施加水平位移，对该结构进行加载。在此条件下，可以轻松解析地求得总能量。记

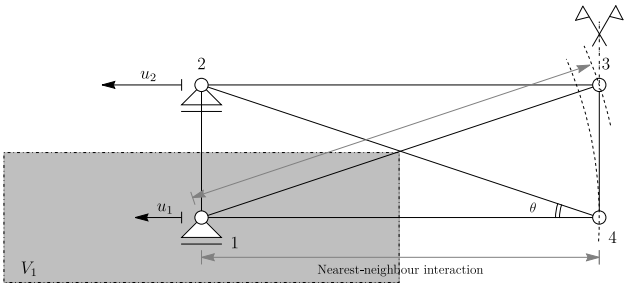

图 B.10：表示键基近场动力学体的最简单结构。节点是该体的材料粒子，而键则由连接每对节点的桁架表示。该结构在加载条件、构件刚度和坐标方面均具有对称性。灰色区域（记为 V_1）表示可归属于节点 1 的体积。视界 δ 取为该结构的对角线长度。

$$\overline{\varepsilon} = \frac{u_2 + u_1}{4\ l_{14}}\ ,\quad \overline{\chi} = \frac{2(u_1 - u_2)}{l_{12}\ l_{14}},$$

分别记平均伸长和曲率，总能量可表示为：

$$\mathcal{E}_{\text{discrete}} = \mathrm{E}\ \alpha\ l_{14}^{4+n} \left(\mathrm{H}^2\ \overline{\varepsilon}^2\ \frac{4\left(1 + 2\psi^2 + \psi^n\right)}{1 + \psi^2 + \psi^n} + \mathrm{H}^4\ \overline{\chi}^2 \right), \tag{B.3}$$

回想一下，l_{12} =H 是图 B.10 中连接点 1 和点 2 的桁架长度，$\psi = \cot\theta$，E 是梁的杨氏模量（假定为常数），且$\alpha = c\ V_1^2/2$。方程 (B.3) 表示近场动力学连续体的等效能量（视界已隐含其中，因为 $l_{13} = \delta = l_{14}/\sin\theta$）。显然，膜能与厚度 H 的平方成正比，而弯曲能与 H^4 成正比，这与局部弹性的经典结果 [70, 71]不同。
根据第 3.4 节得到的约化能量，通过选择 L= $2l_5$, $\delta = l_5/\cos\ \theta$（因此 $\Psi = (\cos\ \theta)/2$），即可恢复形状和载荷与范式情形相似的板的总能量：

$$\mathcal{E}_{\text{PD}} = c\ \sec^5\theta\ (29 + 20\cos\theta)\ l_5^6 \left(\mathrm{H}^2\ \overline{\varepsilon}^2\ \frac{108}{29 + 20\cos 2\theta} + \mathrm{H}^4\ \overline{\chi}^2 \right)\ , \tag{B.4}$$

这至少在定性上与 $n = 2$ 的 (B.3) 相对应。

范式结构对视界的敏感性分析。范式情形的总能量是在视界取固定值时推导出来的，即 $\delta = l_5/\cos\,\theta$；而式 (17) 的简化形式则适用于该参数的任意取值。为将上述基于范式工具的解释分析推广到一般情形，本文使用 ANSYS APDL 对若干个近场动力学键基连续体的离散近似进行了系列数值分析，每个近似均具有不同的视界尺寸。

图 B.11 展示了三种不同近场动力学离散体的尺度律，其视界从最小值（绿色点线）到相互作用范围更广的情形（深色点划线）。左图中，膜能的尺度律无论视界大小如何，均呈二次关系；而弯曲能（图 B.11 右图）的尺度律与厚度的四次方成正比。膜能尺度律的几何解释是：例如，厚度加倍时，可用键的数量大致随节点数量的平方增长：$n_{bonds} \sim n_{nodes}(n_{nodes}-1)/2$。

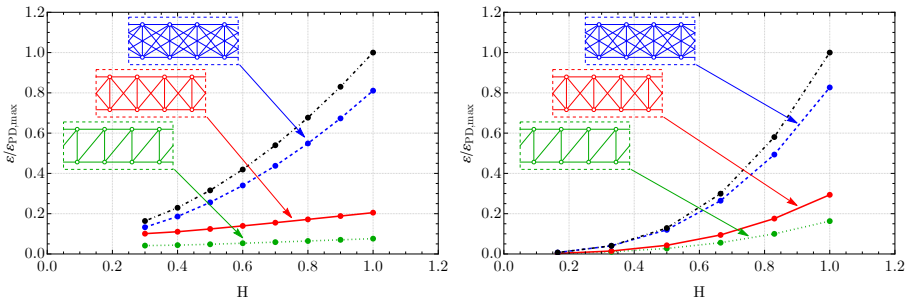

图 B.11：左图：标准普拉特桁架（绿色）、超静定桁架（红色）以及两种不同构型的近场动力学离散梁中，与均匀拉伸变形（纯膜变形）相关的能量随总高度 H 变化的尺度律；右图：标准普拉特桁架（绿色）、超静定梁（红色）以及两种不同构型的近场动力学离散梁中，与均匀弯曲变形相关的能量随总高度 H 变化的尺度律。

附录 C. 板的局部理论中的耦合

式（17）基于一种运动学假设推导而来，该假设是局部板所采用的一阶剪切变形理论 （FSDT），即 Reissner-Mindlin理论中的典型假设 [72, 73]。为进一步探讨式（17）中耦合的前述结果，我们依据 FSDT 假设，将各种局部板模型的能量与近场动力学结果进行比较。在 FSDT、小位移（线弹性响应）和厚度方向不可伸长性的条件下，单位面积的弹性能为：

$$\omega_{\mathrm{red}} = \frac{\mathrm{H}}{2}\left((\lambda+2\mu)\mathcal{A}_1'^2 + \mu(\mathcal{B}_1+\mathcal{A}_3'^2)\right) + \frac{\mathrm{H}^3}{24}(\lambda+2\mu)\mathcal{B}_1'^2\,, \qquad \text{(C.1)}$$

其中， $\mathcal{A}_1$、 $\mathcal{A}_3$、 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_3$ 应视为 x_1的函数，而 ω_{red} 现在表示局部板的约化能量密度。
若放宽不可伸长约束，即垂直位移分量沿厚度方向遵循线性近似，则弹性能变为:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{red}} =&\mathrm{H}\left\{(\lambda+2\mu)(\mathcal{A}_1'+\mathcal{B}_3)^2+\mu(\mathcal{A}_3'+\mathcal{B}_1)^2+(\lambda-2\mu)\mathcal{A}_1'\mathcal{B}_3\right\}/2+ \\ &\mathrm{H}^3\left\{(\lambda+2\mu)\mathcal{B}_1'^2+\mu\mathcal{B}_3'^2\right\}/24\ .\end{aligned} \tag{C.2}$$

最后，在模型中加入几何非线性，即采用小位移、大转动／有限转动假设，可得:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{red}} =&\mathrm{H}\left\{\mathcal{A}_3'^4\frac{(\lambda+2\mu)}{4}+\mathcal{A}_1'^2(\lambda+2\mu)+\mathcal{A}_3'^2\left(\mathcal{A}_1'(\lambda+2\mu)+\mu+\lambda\mathcal{B}_3\right)+\right. \\ &\left.2\lambda\mathcal{B}_3\mathcal{A}_1'+2\mu\mathcal{B}_1\mathcal{A}_3'+\mathcal{B}_3^2(\lambda+2\mu)+\mu\mathcal{B}_1^2\right\}/2+ \\ &\mathrm{H}^3\left\{40\mathcal{A}_3'(\lambda+2\mu)\mathcal{B}_3'\mathcal{B}_1'+\mathcal{B}_3'^2\left(\left(3\mathcal{A}_3'^2+2\mathcal{A}_1'\right)(\lambda+2\mu)+2\mu+2\lambda\mathcal{B}_3\right)+\right. \\ &\left.80(\lambda+2\mu)\mathcal{B}_1'^2\right\}/48 \\ &\mathrm{H}^5\left\{(\lambda+2\mu)\mathcal{B}_3'^4\right\}/640\ .\end{aligned} \tag{C.3}$$

从上述几类弹性能所导出的欧拉-拉格朗日方程可以看出，只有最后一种非线性模型考虑了拉伸与弯曲之间的耦合。这是因为变形与位移场之间存在非线性关系。近场动力学连续体的内在微观结构也自然地体现了类似效应：粒子之间的有限距离使复杂的连接关系能够在轴向加载且合力矩为零的情况下诱发转动效应。

参考文献

[1] T. Inoue, F. Yin, Y. Kimura, K. Tsuzaki, S. Ochiai，温轧孔型轧制制备的超细晶低碳钢的冲击性能中的分层效应，Metall. Mater. Trans. A 41 (2010) 341–355.[2] B. Naganarayana, S. Atluri，压缩载荷作用下薄、厚复合材料板的强度降低与分层扩展，Computational Mechanics 16 (1995) 170–189.[3] D. Dugdale，含狭缝钢板的屈服，《固体力学与物理学杂志》8 (1960) 100–104.[4] G. Barenblatt，脆性断裂中平衡裂纹的数学理论，Advances in Applied Mechanics 7 (1962) 55–129。

[5] A. Hillerborg, M. Modeer, P.-E. Petersson，利用断裂力学和有限元分析混凝土中的裂纹形成与扩展，《水泥与混凝土研究》6 (1976) 773–781.[6] A. Turon, C. Da'vila, P. Camanho, J. Costa，采用内聚区模型模拟分层时网格尺寸效应的工程解决方案，《工程断裂力学》74 (2007) 1665–1682.[7] M. Elices, G. Guinea, J. Gomez, J. Planas，内聚区模型：优点、局限性与挑战，《工程断裂力学》69 (2002) 137–163.[8] C. Fan, P.-Y. B. Jar, J. R. Cheng, 具有连续体损伤特性的内聚区模型：用于模拟纤维复合材料中的分层及胶接接头失效，《工程断裂力学》75 (2008) 3866–3880.[9] L. Zhao, J. Zhi, J. Zhang, Z. Liu, N. Hu，扩展有限元法模拟复合材料层合板中的分层，Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 80 (2016) 61–71.[10] S. Yazdani, W. Rust, P. Wriggers，采用扩展有限元法对复合材料层合板中的分层进行建模，《复合材料结构》135 (2016) 353–364.[11]P. A. V. Kumar, A. Dean, J. Reinoso, M. Paggi，层合复合材料的多相场–内聚区模型：在分层迁移中的应用，《复合材料结构》276 (2021) 114471.[12] P. Roy, S. Deepu, A. Pathrikar, D. Roy, J. Reddy，基于相场的近场动力学损伤模型：用于复合材料结构的分层，《复合材料结构》180 (2017) 972–993.[13] I. Giorgio, N. Rizzi, U. Andreaus, D. Steigmann，描述在三维空间中运动的万花筒结构薄片并考虑纤维偏移和相对转动的二维连续体模型，《复杂系统数学与力学》7 (4) (2019) 311–325.[14] B. Li, D. Mill´an, A. Torres-S´anchez, B. Roman, M. Arroyo，脆性薄片撕裂的断裂变分模型，《固体力学与物理学杂志》119 (2018) 334–348.[15] W. Lai, J. Gao, Y. Li, M. Arroyo, Y. Shen，考虑横向部分贯穿裂纹的欧拉–伯努利梁脆性断裂相场建模，《计算力学与工程方法》361 (2020) 112787.[16]M. Pigazzini, D. Kamensky, D. van Iersel, M. Alaydin, J. Remmers, Y. Bazilevs，基尔霍夫–洛夫壳的梯度增强损伤建模：在复合材料层合板等几何分析中的应用，《计算力学与工程方法》346 (2019) 152–179。

[17] S. Chowdhury, J. Reddy，几何精确微极性铁木辛柯梁及其在结构化晶格芯层夹层梁建模中的应用，《复合材料结构》226 (2019) 111228。[18] S. Conti, P. Dondl，弯曲作用下纸板分层的变分建模，《工程数学》5 (2) (2023) 1–28。[19] S. Silling，针对不连续性和长程力的弹性理论重构，《固体力学与物理学杂志》48 (1) (2000) 175–209。[20] I. Kunin，微观结构弹性介质理论：非局部弹性理论，莫斯科，科学出版社，1975。[21] N. Prakash, B. Deng, R. Stewart, C. Smith, J. Harris，利用近场动力学模拟研究玻璃陶瓷中的微观断裂机制，《美国陶瓷学会志》105 (6) (2022) 4304–4320。[22]M. R. Karim, K. Kadau, S. Narasimhachary, F. Radaelli, C. Amann, K. Dayal, S. Silling, T. Germann，利用非局部近场动力学模拟研究锻造缺陷处的裂纹萌生，《固体数学与力学》27 (2022) 1129–1149。[23] M. Rezaul Karim, K. Kadau, S. Narasimhachary, F. Radaelli, C. Amann, K. Dayal, S. Silling, T. C. Germann，利用近场动力学模拟描述铝合金中非金属夹杂物处的裂纹萌生，《国际疲劳杂志》153 (2021) 106475。[24] J. Chua, V. Agrawal, T. Breitzman, G. Gazonas, K. Dayal，缺陷动力学的相场建模与近场动力学，以及包含黏性应力的增强型相场模型，《固体力学与物理学杂志》159 (2022) 104716。[25] R. Lipton, R. Lehoucq, P. Jha，利用非局部弹性动力学研究复杂断裂萌生与演化，《近场动力学与非局部建模杂志》1 (2) (2019) 122–130。[26] P. Diehl, R. Lipton, T. Wick, M. Tyagi，近场动力学与相场模型在工程断裂力学中的比较综述，《计算力学》(2022)。[27] L. Jooeun, L. Wenyang, H. Jung-Wuk，通过近场动力学与有限元公式间的接触增强冲击断裂分析，《国际冲击工程学杂志》87 (2016) 108–119。[28] N. Liu, D. Liu, W. Zhou，带偏置缺口三点弯曲梁冲击损伤的近场动力学建模，《应用数学与力学（英文版）》38 (2017) 99–110。

[29]J. Xu, A. Askari, O. Weckner, S. Silling，复合材料层合板冲击损伤的近场动力学分析，航空航天工程杂志21 (2008)。[30] G. Zhang, G. Gazonas, F. Bobaru，边缘冲击引发的超剪切损伤扩展与亚瑞利裂纹扩展：近场动力学分析，《国际冲击工程学杂志》113 (2018) 73–87。[31] F. Bobaru, Y. D. Ha，二维近场动力学中的自适应细化与多尺度建模，多尺度计算工程杂志9 (6) (2011) 635–659。[32] Q. Le, W. Chan, J. Schwartz，线弹性固体的二维普通态基近场动力学模型，国际数值方法与工程杂志98 (2014) 547–561。[33] G. Sarego, Q. Le, F. Bobaru, M. Zaccariotto, U. Galvanetto，二维问题的线性化态基近场动力学，国际数值方法与工程杂志108 (10) (2016) 1174–1197。[34] S. Silling, F. Bobaru，膜与纤维的近场动力学建模，《国际非线性力学杂志》40 (2005) 395–409。[35] M. Taylor, D. Steigmann，薄板的二维近场动力学模型，《固体数学与力学》20 (8) (2013) 998–1010。[36] K. Naumenko, V. Eremeyev，非线性直接近场动力学板理论，《复合材料结构》279 (2022) 114728。[37] J. O'Grady, J. Foster，近场动力学板与扁平壳：非普通态基模型，国际固体与结构杂志51 (2014) 4572–4579。[38] J. O'Grady, J. Foster，近场动力学梁：非普通态基模型，国际固体与结构杂志51 (18) (2014) 3177–3183。[39] J. O'Grady, J. Foster，近场动力学梁与板：非普通态基模型，ASME国际机械工程大会暨展览会第1卷：航空航天技术进展（11 2014）。[40] M. Behzadinasab, M. Alaydin, N. Trask, Y. Bazilevs，适用于近场动力学的通用非弹性无转动Kirchhoff–Love壳体公式，《计算力学与工程方法》389 (2022) 114422。[41] S. Chowdhury, P. Roy, D. Roy, J. Reddy, 线弹性壳体的近场动力学理论，国际固体与结构杂志84 (2016) 110–132。

[42] J. Reddy, A. Srinivasa, A. Arbind, P. Khodabakhshi，关于梯度弹性与离散近场动力学及其在梁和板中的应用，载于：《先进材料研究》，第745卷，Trans Tech Publ，2013年，第145–154页。[43] Z. Yang, E. Oterkus, S. Oterkus，面向高阶板理论的近场动力学表述，《近场动力学与非局部建模杂志》3 (2021) 185–210。[44] U. Yolum, E. Gok, D. Coker, M. Guler，双悬臂梁试样分层的近场动力学建模，《结构完整性会议论文集》13 (2018) 2126–2131。[45] Y. Hu, N. D. Carvalho, E. Madenci，复合材料层合板分层扩展的近场动力学建模，《复合结构》(2015)。[46] X.-W. Jiang, S. Guo, H. Li, H. Wang，双悬臂复合材料梁试验中 I 型分层扩展的近场动力学建模：采用修正的基于能量的失效准则进行二维建模，《应用科学》9 (2019) 656。[47] R. Choksi, G. D. Piero, I. Fonseca, D. Owen，断裂与滞后模型中作为能量极小化解的结构化形变，《固体数学与力学》4 (3) (1999年) 321–356。[48] M. Gobbino，Mumford–Shah 泛函的有限差分近似，《纯粹与应用数学通讯》51 (2) (1998年) 197–228。[49] K. Dayal, K. Bhattacharya，连续介质力学近场动力学表述中的相变动力学，《固体力学与物理学杂志》54 (9) (2006年) 1811–1842。[50] Q. Du, K. Zhou，近场动力学非局部连续体理论的数学分析，《数学建模与数值分析》45 (2011年) 217–234。[51] K. Zhou, D. Qiang，具有非局部边界条件的线性近场动力学模型的数学与数值分析，《数值分析学会杂志》48 (5) (2010年) 1759–1780。[52] F. Erdogan, M. Ozturk，断裂与接触力学中的奇异性，《应用力学杂志》75 (2008) 051111–1–12。[53] F. Bobaru, M. Yang, S. Silling, L. Alves, E. Askari, J. Xu，一维近场动力学中的收敛、自适应细化与尺度律，《国际数值方法与工程杂志》77 (2009年) 852–877。[54] J. Foster, S. Silling, W. Chen，一种用于近场动力学状态的基于能量的失效准则，《国际多尺度计算工程杂志》9 (2011年) 675–687。

[55] H. Zhang, P. Qiao，用于弹性与断裂分析的二维普通态基近场动力学模型，《工程断裂力学》232 (2020年) 107040。[56] E. Madenci, S. Oterkus，依据冯·米塞斯屈服准则并采用各向同性硬化的塑性变形普通态基近场动力学，《固体力学与物理学杂志》86 (2016年) 192–219。[57] A. Griffith，固体断裂与流动现象，《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑》221 (1921) 163–198。[58] R. Lipton, P. Jha，非局部弹性动力学与断裂，《非线性微分方程及其应用》28 (2) (2021年) 23。[59] P. Jha, R. Lipton，非线性非局部连续体模型向局部弹性动力学的数值收敛，《国际工程数值方法杂志》114 (13) (2018年) 1389–1410。[60] S. Silling, R. Lehoucq，固体力学的近场动力学理论，《Advances in Applied Mechanics》44 (2010年) 73–168。[61] T. Breitzman, K. Dayal，近场动力学中的键级变形梯度与能量平均，《固体力学与物理学杂志》110 (2018年) 192–204。[62] T. Mengesha, Q. Du，关于一类与近场动力学相关的非局部泛函的变分极限，《非线性》28 (2015年) 3999–4035。[63] J. Bellido, C. Mora-Corral，近场动力学非局部变分问题解的存在性，《数值分析学会杂志》46 (1) (2014年) 890–916。[64] B. Aksoylu, T. Mengesha，关于非局部边值问题的结果，《数值泛函分析与优化》31 (12) (2010年) 1301–1317。[65] D. Foss, P. Radu, C. Wright，非局部能量泛函极小化子的存在性与正则性，《微分与积分方程》31 (11-12) (2018年) 807–832。[66] J. Bellido, C. Mora-Corral, P. Pedregal，视界趋于零时超弹性作为近场动力学的伽马极限，《变分法与偏微分方程》54 (2015年) 1643–1670。[67] J. Bellido, J. Cueto, C. Mora-Corral，视界趋于零时，键基近场动力学并不收敛到超弹性，《弹性杂志》141 (2020年9月)。[68] S. Silling, R. Lehoucq，近场动力学向经典弹性理论的收敛，《弹性杂志》93 (2008年) 13。

[69] H. Chen，采用不规则非均匀空间离散的近场动力学模型比较研究，《计算力学与工程方法》345（2019年）539–554。[70] D. Steigmann，具有弯曲刚度的薄弹性片有限应变适定模型，《固体数学与力学》18（1）（2012）103–112。[71] D. Steigmann，塑性变形薄壳势能的渐近估计，施普林格，2020年，第22章，第409–420页。[72] J. Reddy，《层合复合材料板壳力学：理论与分析》，CRC出版社，2004年。[73] J. Reddy，A. Srinivasa，考虑中等转动和材料长度尺度的梁和板非线性理论，《国际非线性力学杂志》66（2014）43–53。