arXiv:2301.02495v1 [nlin.SI] 6 Jan 2023

耿-薛系统的贝克隆变换

吴丽华，李年华[1]

华侨大学数学科学学院，中国福建泉州362021。

摘要

借助倒易变换和规范变换，我们为耿-薛系统构造了一个贝克隆变换。此外，借助Bianchi可交换性，我们推导出了耿-薛系统的 N-贝克隆变换。作为应用，我们获得了耿-薛系统的一些精确解，包括多 kink 解和钟形孤子。最后，我们讨论了Degasperis-Procesi方程和Novikov方程的贝克隆变换，这两个方程是耿-薛系统的两种约化。

数学主题分类：37K10、37K35、37K40、35C08

关键词：Geng-Xue系统、Degasperis-Procesi 方程、Novikov方程、B¨acklund变换、精确解。

1. 引言

Camassa-Holm（CH）方程 [1]

$$m_t + um_x + 2u_x m = 0, \quad m = u - u_{xx}, \tag{1}$$

它是通过对欧拉方程的哈密顿量作渐近近似而得到的浅水长波模型。它是一个完全可积系统，因为它具有带双哈密顿结构的 Lax 对，并且既可通过 B¨acklund 变换 [2] 求解，也可通过逆散射变换 [3, 4] 求解。CH 方程可通过倒数变换 [5]与 KdV 层级的第一个负流相联系。CH 方程的一个重要特征是存在峰子解 [6, 7, 8], ，这些解具有

[1]通讯作者。linianh@hqu.edu.cn

在 x 处存在导数不连续，但两个单侧导数均存在，且在波峰处仅相差一个符号。因此，近年来，具有峰子解的可积方程 [9]引起了广泛关注。

Geng-Xue（GX）系统 [10]

$$\begin{aligned} &m_t + 3u_x vm + uvm_x = 0, \qquad m = u - u_{xx}, \\ &n_t + 3v_x un + uvn_x = 0, \qquad n = v - v_{xx}, \end{aligned} \tag{2}$$

是一种具有三次非线性的耦合可积CH型系统，存在Lax对及相应的双哈密顿结构 [11]。它通过倒数变换与修正Boussinesq层级的第一负流相联系 [12]。Lundmark和Szmigielski深入研究了逆谱问题，并得到了GX系统的多峰子解 [13]。最近，研究者通过Darboux变换得到了GX系统的多扭结解 [14]。

此外，GX系统与Degasperis-Procesi（DP）方程密切相关 [15]

$$m_t + um_x + 3u_x m = 0, \quad m = u - u_{xx}, \tag{3}$$

以及Novikov方程 [16]

$$m_t + u^2 m_x + 3uu_x m = 0, \quad m = u - u_{xx}, \tag{4}$$

因为它们分别可由式（2）约化得到，如 $v = 1$ 和 $v = u$所示。关于它们的Lax表示、双哈密顿结构、倒数变换伴侣以及精确解，已有许多研究 [17]-[27]。

贝克隆变换（BT）¨源于微分几何，在可积系统理论中发挥着重要作用，例如寻找精确解、实现可积离散化以及构造对称性等 [28, 29, 30]。然而，鉴于CH型方程谱问题的特殊性，直接构造其贝克隆变换十分困难。最近，Rasin和Schiff借助倒数变换讨论了CH方程的贝克隆变换，并指出它不仅涉及因变量，也涉及独立空间变量 [2]。随后，Mao、Liu等人构造了DP方程、Novikov方程和短脉冲方程的贝克隆变换 [31, 32, 33, 34]。据我们所知，目前尚无关于GX系统贝克隆变换的研究。本文旨在构造GX系统的 N-贝克隆变换。

本文安排如下。在第2节中，我们首先引入一个倒数变换，将GX系统与伴随GX（aGX）

系统联系起来，并通过规范变换进一步将其联系到Boussinesq 层级的一个负流。借助这两种变换，我们从负Boussinesq流的Darboux变换推导出GX系统的贝克隆变换。在第3节中，我们利用Bianchi可交换性，推导出GX系统的2阶和 N阶贝克隆变换。在第4节中，我们应用贝克隆变换，获得GX系统的精确解，例如多 kink、钟形孤子等。在第5节中，我们讨论DP方程和Novikov方程的贝克隆变换。

2. 耿-薛系统的 B¨acklund 变换

根据文献 [10], ，GX 系统（2）具有如下 Lax对

$$\psi_x = U\psi, \qquad \psi_t = V\psi, \tag{5}$$

其中 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ 以及

$$U = \begin{bmatrix} 0 & \lambda m & 1 \\ 0 & 0 & \lambda n \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -u_x v & \frac{u_x}{\lambda} - \lambda uvm & u_x v_x \\ \frac{v}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} + u_x v - uv_x & -\lambda uvn - \frac{v_x}{\lambda} \\ -uv & \frac{u}{\lambda} & uv_x \end{bmatrix}.$$

已有研究表明，GX 系统具有无穷多个守恒律[10, 12]，其中第一个为

$$q_t = (-uvq)_x, \qquad q = (mn)^{\frac{1}{3}}.$$

这自然定义了一个倒数变换

$$dy = qdx - uvqdt, \qquad d\tau = dt. \tag{6}$$

将（6）应用于 Lax对（5），得到

$$\psi_y = F\psi, \qquad \psi_\tau = G\psi, \tag{7}$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \lambda p & \frac{1}{q} \\ 0 & 0 & \lambda\frac{q}{p} \\ \frac{1}{q} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -u_y vq & \frac{u_y q}{\lambda} & uv + u_y v_y q^2 \\ \frac{v}{\lambda} & u_y vq - uv_y q - \frac{1}{\lambda^2} & -\frac{v_y q}{\lambda} \\ 0 & \frac{u}{\lambda} & uv_y q \end{bmatrix},$$

以及 $p = \frac{m}{q}$ 。直接计算可知，线性系统 (7) 的相容条件导出 aGXsystem

$$\begin{aligned} &p_\tau = pq(uv_y - 2u_y v), && u_{yy}q^2 + u_y qq_y + pq - u = 0, \\ &q_\tau = -q^2(uv)_y, && v_{yy}q^2 + qq_y v_y + p^{-1}q^2 - v = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

从 (7) 中消去 ψ_1, ψ_2，得到波函数 ψ_3 的标量谱问题。经过规范变换 $\psi_3 = p^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{2}{3}} \phi$ 后，标量谱问题转化为经典的 Boussinesq 层级谱问题

$$(\partial_y^3 + Q_1 \partial_y + Q_2)\phi = (\partial_y - r)(\partial_y - s)(\partial_y + r + s)\phi = \lambda^2 \phi, \tag{9}$$

其中

$$r = \frac{2p_y}{3p} - \frac{q_y}{3q}, \qquad s = -\frac{p_y}{3p} - \frac{q_y}{3q} - \frac{1}{q}. \tag{10}$$

借助 Boussinesq 层级的经典达布变换 [35], ，我们得到 aGX 系统 (8) 的一个达布变换。

命题 1. Lax 表示 (7) 在达布变换下是协变的:

$$\begin{aligned}
&\psi_{[1]} = T(\lambda_1, a_1, b_1)\psi, \qquad T(\lambda_1, a_1, b_1) = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{c_1} & \frac{\lambda(a_1^2-1)}{\lambda_1 b_1 c_1} & \frac{1}{c_1} \\ 0 & -1 & \frac{\lambda b_1}{\lambda_1} \\ \frac{1}{c_1} & 0 & -\frac{a_1}{c_1} \end{bmatrix}, \\
&p_{[1]} = \frac{q(a_1^2-1)}{p b_1^2 c_1}, \qquad q_{[1]} = \frac{a_1^2 - 1}{\lambda_1 p b_1}, \\
&u_{[1]} = \frac{1}{c_1}(u a_1 - u_y q), \qquad v_{[1]} = \frac{c_1}{a_1^2 - 1}(v a_1 - v_y q - \frac{b_1}{\lambda_1}),
\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $a_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}$、$b_1 = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$、$c_1 = \sqrt{|a_1^2 - 1|}$ 和 $(\varphi_1$、φ_2、$\varphi_3)^T$ 是 (7) 或 (5) 在 $\lambda = \lambda_1$ 处的一个特殊解。

为了构造 GX 系统的贝克隆变换，需要注意

$$\frac{1}{q_{[1]}} = \frac{1}{q} + \frac{a_{1,y}}{a_1^2 - 1}, \qquad u_{[1]} v_{[1]} = uv + \frac{a_{1,\tau}}{a_1^2 - 1}. \tag{12}$$

考虑到 (6) 和 (12)，我们得到

$$dx_{[1]} = \frac{1}{q_{[1]}} dy + u_{[1]} v_{[1]} d\tau = d(x - \frac{1}{2}\ln|\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1}|).$$

对该方程两边进行积分，并令积分常数为零，可得

$$x_{[1]} = x - \frac{1}{2}\ln|\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1}|. \tag{13}$$

经过上述准备，可以得到以下命题。

命题 2. GX 系统存在贝克隆变换

$$\begin{aligned} x_{[1]} &= x - \frac{1}{2}\ln|\frac{a_1+1}{a_1-1}|, \qquad\qquad t_{[1]} = t, \\ u_{[1]} &= \frac{1}{c_1}(ua_1 - u_x), \\ v_{[1]} &= \frac{c_1}{a_1^2-1}(va_1 - v_x - \frac{a_{1,x}+a_1^2-1}{\lambda_1^2 m}), \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $c_1 = \sqrt{|a_1^2-1|}$, 而 a_1 由该系统控制

$$\begin{aligned} a_{1,xx} &= (\frac{m_x}{m} - a_1)(a_{1x} + a_1^2 - 1) - 2a_1a_{1x} + \lambda_1^2 mn, \\ a_{1,t} &= \frac{u_x - ua_1}{\lambda_1^2 m}(a_{1,x} + a_1^2 - 1) - (uva_1)_x + uv + u_xv_x. \end{aligned} \tag{15}$$

3. N-B¨acklund 变换的耿-薛系统

本节首先推导耿-薛系统的 2-Bäcklund 变换，然后将其推广为 N-贝克隆变换。首先，我们来展示如下的 Bianchi可交换性示意图。

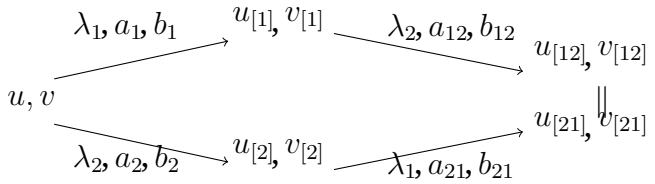

图 1：Bianchi 可置换性

利用这种Bianchi可交换性，我们得到

$$T(\lambda_2, a_{12}, b_{12})T(\lambda_1, a_1, b_1) = T(\lambda_1, a_{21}, b_{21})T(\lambda_2, a_2, b_2), \tag{16}$$

由此得到

$$a_{12} = \frac{\lambda_2 b_2(a_1^2-1) + \lambda_1 b_1(1-a_1a_2)}{\lambda_1 b_1(a_2-a_1)}, \quad a_{21} = \frac{\lambda_1 b_1(a_2^2-1) + \lambda_2 b_2(1-a_1a_2)}{\lambda_2 b_2(a_1-a_2)},$$

$$b_{12} = \frac{(\lambda_2 b_1 - \lambda_1 b_2)c_1}{\lambda_1(a_2-a_1)}, \qquad b_{21} = \frac{\lambda_1 c_2}{\lambda_2 c_1} b_{12}, \qquad c_{21} = \frac{(a_2^2-1)\lambda_1 b_1 c_1}{(a_1^2-1)\lambda_2 b_2 c_2} c_{12}.$$

然后，根据命题 2，我们得到 GX 系统的 2-Bäcklund 变换。主要结果如下所述。

命题3. GX 系统存在 2-Bäcklund 变换

$$
\begin{aligned}
x_{[12]} &= x - \frac{1}{2}\ln|\frac{(a_1+1)(a_{12}+1)}{(a_1-1)(a_{12}-1)}|, \qquad\qquad t_{[12]} = t,\\
u_{[12]} &= \frac{1}{c_1 c_{12}}[u(a_1 a_{12}+1) - u_x(a_1+a_{12}) - \frac{a_1^2-1}{\lambda_1 b_1}],\\
v_{[12]} &= \frac{c_1 c_{12}}{(a_1^2-1)(a_{12}^2-1)}[v(a_1 a_{12}+1) - (v_x + \frac{b_1}{\lambda_1})(a_1+a_{12})]\\
&\quad - \frac{c_1 c_{12}}{(a_2-a_1)(a_{12}^2-1)}(\frac{b_1}{\lambda_1} - \frac{b_2}{\lambda_2}).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

这里，$c_{12} = \sqrt{|a_{12}^2-1|}$、$a_2 = \frac{h_1}{h_3}$、$b_2 = \frac{h_2}{h_3}$和（$h_1$、$h_2$、$h_3$）^{T}是在 $\lambda = \lambda_2$处方程（5）的一个特殊解。

接下来，我们将推导 GX 系统的 N-贝克隆变换。为方便起见，令$\widehat{\ }$表示从 1 到任意正整数 N 的自然排列 N，即$\frown N = 12\cdots N$。于是，构造 N-贝克隆变换归结为给出$x_{[\widehat{N}]}$、$a_{[\widehat{N}]}$、$u_{[\widehat{N}]}$和$v_{[\widehat{N}]}$的紧凑形式。事实上，由命题 1 可得

$$
x_{[\widehat{N}]} = x - \frac{1}{2}\ln|\frac{(a_1+1)(a_{12}+1)...(a_{\widehat{N}}+1)}{(a_1-1)(a_{12}-1)...(a_{\widehat{N}}-1)}|. \tag{18}
$$

Si由于直接得到$a_{[\widehat{N}]}$的紧凑形式并不容易，我们定义$w_{\widehat{N}}$为

$$
\frac{(a_1+1)(a_{12}+1)...(a_{\widehat{N}}+1)}{(a_1-1)(a_{12}-1)...(a_{\widehat{N}}-1)} = \frac{w_{\widehat{N}}+1}{w_{\widehat{N}}-1}, \tag{19}
$$

这意味着

$$
a_{\widehat{N}} = \frac{1 - w_{\widehat{N-1}} w_{\widehat{N}}}{w_{\widehat{N}} - w_{\widehat{N-1}}}. \tag{20}
$$

我们首先致力于推导$w_{\widehat{N}}$的递推关系，以获得其紧凑形式的表达式，进而得到$a_{\widehat{N}}$、$x_{\widehat{N}}$、$u_{\widehat{N}}$、$v_{\widehat{N}}$的紧凑形式。

借助Bianchi可交换性，我们得到递推关系

$$
a_{\widehat{N}} = \frac{(a_{\widehat{N-1}}^2-1)\lambda_N b_{\widehat{N-2N}} + \lambda_{N-1} b_{\widehat{N-1}}(1 - a_{\widehat{N-2N}} a_{\widehat{N-1}})}{\lambda_{N-1} b_{\widehat{N-1}}(a_{\widehat{N-2N}} - a_{\widehat{N-1}})}, \tag{21}
$$

$$
b_{\widehat{N}} = \frac{\lambda_N b_{\widehat{N-1}} - \lambda_{N-1} b_{\widehat{N-2N}}}{\lambda_{N-1}(a_{\widehat{N-2N}} - a_{\widehat{N-1}})} c_{\widehat{N-1}}, \tag{22}
$$

其中 $c_{\widehat{N}}=\sqrt{|a_{\widehat{N}}^2-1|}$。此外，引入

$$\sigma_{\widehat{N-1}}^{N}=\frac{b_{\widehat{N-2N}}}{b_{\widehat{N-1}}},\qquad N\geq 2, \tag{23}$$

将 (20) 代入 (21)，即可得出

$$w_{\widehat{N}}=\frac{\lambda_N\sigma_{\widehat{N-1}}^{N}w_{\widehat{N-1}}(w_{\widehat{N-2N}}-w_{\widehat{N-2}})+\lambda_{N-1}w_{\widehat{N-2N}}(w_{\widehat{N-2}}-w_{\widehat{N-1}})}{\lambda_N\sigma_{\widehat{N-1}}^{N}(w_{\widehat{N-2s}}-w_{\widehat{N-2}})+\lambda_{N-1}(w_{\widehat{N-2}}-w_{\widehat{N-1}})}, \tag{24}$$

或者等价地

$$\sigma_{\widehat{N-1}}^{N}=\frac{\lambda_{N-1}}{\lambda_N}\frac{(w_{\widehat{N-2}}-w_{\widehat{N-1}})(w_{\widehat{N-2N}}-w_{\widehat{N}})}{(w_{\widehat{N-2}}-w_{\widehat{N-2N}})(w_{\widehat{N-1}}-w_{\widehat{N}})}. \tag{25}$$

现在我们可以求出 $w_{\widehat{N}}$ 和$\sigma_{\widehat{N-1}}^{N}$ 的行列式表达式。一个自然的想法是，观察 $N\leq 3$ 的显式公式，猜出它们的表达式，再加以证明。事实上，不难证明，(24) 和 (25) 中前几项为

$$\begin{aligned}
&w_1=a_1,\qquad w_{12}=\frac{\lambda_1b_1a_2-\lambda_2b_2a_1}{\lambda_1b_1-\lambda_2b_2},\\
&w_{123}=\frac{\lambda_1b_1(a_3\lambda_2^2-a_2\lambda_3^2)+\lambda_2b_2(a_1\lambda_3^2-a_3\lambda_1^2)+\lambda_3b_3(a_2\lambda_1^2-a_1\lambda_2^2)}{\lambda_1b_1(\lambda_2^2-\lambda_3^2)+\lambda_2b_2(\lambda_3^2-\lambda_1^2)+\lambda_3b_3(\lambda_1^2-\lambda_2^2)},\\
&\sigma_1^2=\frac{b_2}{b_1},\qquad \sigma_{12}^3=\frac{b_{13}}{b_{12}}=\frac{(\lambda_3b_1-\lambda_1b_3)(a_2-a_1)}{(\lambda_2b_1-\lambda_1b_2)(a_3-a_1)}.
\end{aligned} \tag{26}$$

鉴于式 (26)，我们引入以下行列式

$$\Delta_N=\begin{cases}
\begin{vmatrix}1 & a_1 & \lambda_1b_1 & \cdots & \lambda_1^{2k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_N & \lambda_Nb_N & \cdots & \lambda_N^{2k}\end{vmatrix}, & N=3k+1,\\[2ex]
\begin{vmatrix}1 & a_1 & \lambda_1b_1 & \cdots & \lambda_1^{2k}a_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_N & \lambda_Nb_N & \cdots & \lambda_N^{2k}a_N\end{vmatrix}, & N=3k+2,\\[2ex]
\begin{vmatrix}1 & a_1 & \lambda_1b_1 & \cdots & \lambda_1^{2k+1}b_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_N & \lambda_Nb_N & \cdots & \lambda_N^{2k+1}b_N\end{vmatrix}, & N=3k+3,
\end{cases} \tag{27}$$

其中 $k \in \mathbf{N}$。

定理 1. $\sigma^{N}_{\widehat{N-1}}$ 和 $w_{\widehat{N}}$ 关于行列式 Δ_N 的表达式为

$$w_{\widehat{N}} = \frac{A_N}{B_N}, \quad N \geq 1, \tag{28}$$

$$\sigma^{N}_{\widehat{N-1}} = \frac{\lambda_{N-1}(A_{N-2}B_{N-1} - A_{N-1}B_{N-2})(C_{N-1}B_N - A_N D_{N-1})}{\lambda_N (A_{N-2}D_{N-1} - C_{N-1}B_{N-2})(A_{N-1}B_N - A_N B_{N-1})}, N \geq 3, \tag{29}$$

其中

$$A_N = \Delta_{N+1}\begin{bmatrix} N+1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C_{N-1} = \Delta_N \begin{bmatrix} N-1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_N = \Delta_{N+1}\begin{bmatrix} N+1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad D_{N-1} = \Delta_N \begin{bmatrix} N-1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

这里，$J\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$ 表示从行列式 J 中删去 i_1、$\cdots$、i_k 行以及 j_1、$\cdots$、j_k 列后得到的行列式。

为证明该定理，我们需要以下引理中给出的两个有用恒等式。

引理1. 假设 π 是一个（$N+2$）$\times N$ 矩阵，χ_k 是 $N+2$ 阶列向量。则有

1. Pl ¨ucker 关系

$$|\pi, \chi_1, \chi_2||\pi, \chi_3, \chi_4| - |\pi, \chi_1, \chi_3||\pi, \chi_2, \chi_4| + |\pi, \chi_1, \chi_4||\pi, \chi_2, \chi_3| = 0.$$

2. 雅可比恒等式

$$J \times J\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix} = J\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \end{bmatrix} \times J\begin{bmatrix} i_2 \\ j_2 \end{bmatrix} - J\begin{bmatrix} i_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \times J\begin{bmatrix} i_2 \\ j_1 \end{bmatrix}.$$

定理 1 的证明：这里我们仅用数学归纳法证明 $N = 3k+2$ 的情形，因为另外两种情形也可以用类似的方法验证。

首先，容易验证 (28) 和 (29) 对 $N \leq 3$ 均成立。接下来，假设 (28) 和 (29) 对 $N-1$ 成立，我们的任务是验证它们对 N 也成立。根据 (22) 和 (23)，不难得出

$$\sigma^{N+1}_{\widehat{N}} = \frac{b_{\widehat{N-1}N+1}}{b_{\widehat{N}}} = \frac{a_{\widehat{N-2}N} - a_{\widehat{N-1}}}{a_{\widehat{N-2}N+1} - a_{\widehat{N-1}}} \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_{N-1}\sigma^{N+1}_{\widehat{N-1}}}{\lambda_N - \lambda_{N-1}\sigma^{N}_{\widehat{N-1}}}. \tag{30}$$

一方面，由 (20) 可得

$$\begin{aligned}\frac{a_{\widehat{N-2N}}-a_{\widehat{N-1}}}{a_{\widehat{N-2N+1}}-a_{\widehat{N-1}}}&=\frac{(w_{\widehat{N-2N}}-w_{\widehat{N-1}})(w_{\widehat{N-2}}-w_{\widehat{N-2N+1}})}{(w_{\widehat{N-2N+1}}-w_{\widehat{N-1}})(w_{\widehat{N-2}}-w_{\widehat{N-2N}})}\\&=\frac{(C_{N-1}B_{N-1}-A_{N-1}D_{N-1})(A_{N-2}H_{N-1}-B_{N-2}E_{N-1})}{(E_{N-1}B_{N-1}-A_{N-1}H_{N-1})(A_{N-2}D_{N-1}-C_{N-1}B_{N-2})}\end{aligned}\tag{31}$$

with

$$E_{N-1}=\Delta_{N+1}\begin{bmatrix}N-1 & N\\ 1 & N+1\end{bmatrix},\quad H_{N-1}=\Delta_{N+1}\begin{bmatrix}N-1 & N\\ 2 & N+1\end{bmatrix}.$$

另一方面，根据归纳假设，可得

$$\frac{\lambda_{N+1}-\lambda_{N-1}\sigma_{\widehat{N-1}}^{N+1}}{\lambda_N-\lambda_{N-1}\sigma_{\widehat{N-1}}^{N}}=\frac{\lambda_N R_1}{\lambda_{N+1}R_2}\frac{(A_{N-2}D_{N-1}-B_{N-2}C_{N-1})(A_{N-1}B_N-A_NB_{N-1})}{(A_{N-2}H_{N-1}-B_{N-2}E_{N-1})(A_{N-1}D_N-B_{N-1}C_N)},\tag{32}$$

其中

$$\begin{aligned}R_1=&\lambda_{N+1}^2(A_{N-2}H_{N-1}-B_{N-2}E_{N-1})(A_{N-1}D_N-C_NB_{N-1})\\&-\lambda_{N-1}^2(A_{N-2}B_{N-1}-A_{N-1}B_{N-2})(E_{N-1}D_N-C_NH_{N-1}),\\R_2=&\lambda_N^2(A_{N-2}D_{N-1}-B_{N-2}C_{N-1})(A_{N-1}B_N-A_NB_{N-1})\\&-\lambda_{N-1}^2(C_{N-1}B_N-A_ND_{N-1})(A_{N-2}B_{N-1}-A_{N-1}B_{N-2}).\end{aligned}$$

将 (31) 和 (32) 代入 (30)，得到

$$\sigma_{\widehat{N}}^{N+1}=\frac{\lambda_N(A_{N-1}B_N-A_NB_{N-1})}{\lambda_{N+1}(A_{N-1}D_N-B_{N-1}C_N)}\frac{R_1(C_{N-1}B_{N-1}-A_{N-1}D_{N-1})}{R_2(E_{N-1}B_{N-1}-A_{N-1}H_{N-1})}.\tag{33}$$

继续之前，我们先列出一些由雅可比恒等式和普吕克关系得到的有用恒等式，如下所示

$$\begin{aligned}&C_{N-1}B_{N-1}-A_{N-1}D_{N-1}=\Delta_N\Delta_N\begin{bmatrix}N-1 & N\\ 1 & 2\end{bmatrix},\\&E_{N-1}B_{N-1}-A_{N-1}H_{N-1}=\Delta_{N+1}\begin{bmatrix}N\\ N+1\end{bmatrix}\Delta_N\begin{bmatrix}N-1 & N\\ 1 & 2\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{34}$$

$$
\begin{aligned}
&A_{N-1}B_N - A_N B_{N-1} = \Delta_N \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N & N+1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
&C_{N-1}B_N - A_N D_{N-1} = \Delta_N \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N-1 & N+1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
&A_{N-1}D_N - C_N B_{N-1} = \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N \\ N+1 \end{bmatrix} \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N & N+1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
&E_{N-1}D_N - C_N H_{N-1} = \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N \\ N+1 \end{bmatrix} \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N-1 & N \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
&A_{N-2}H_{N-1} - B_{N-2}E_{N-1} = \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N-1 & N \\ N & N+1 \end{bmatrix} \Delta_N \begin{bmatrix} N-1 & N \\ 1 & 2 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{35}
$$

其证明将在附录中给出。利用（34）和（35），直接计算可得

$$
\sigma_{\widehat{N}}^{N+1} = \frac{\lambda_N (A_{N-1}B_N - A_N B_{N-1})}{\lambda_{N+1}(A_{N-1}D_N - B_{N-1}C_N)} \frac{R_3}{R_4}, \tag{36}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
R_3 = {} & \lambda_{N+1}^2 \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N-1 & N \\ N & N+1 \end{bmatrix} \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N & N+1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
& - \lambda_{N-1}^2 \Delta_{N-1} \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N-1 & N \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
R_4 = {} & \lambda_N^2 \Delta_N \begin{bmatrix} N-1 \\ N \end{bmatrix} \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N & N+1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
& - \lambda_{N-1}^2 \Delta_{N-1} \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N-1 & N+1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

利用雅可比恒等式，我们得到（证明见附录）

$$
\begin{aligned}
R_3 &= \tfrac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_{N-2}^2} \Delta_{N+2} \begin{bmatrix} N & N+2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N-1 & N & N+1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \\
R_4 &= \tfrac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_{N-2}^2} \Delta_{N+2} \begin{bmatrix} N+1 & N+2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N-1 & N & N+1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

将（37）代入（36），并注意到（35）中的前两个等式，我们得到

$$\begin{aligned}\sigma_{\widehat{N}}^{N+1} &= \frac{\lambda_N(A_{N-1}B_N-A_NB_{N-1})\Delta_{N+2}\begin{bmatrix} N & N+2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{\lambda_{N+1}(A_{N-1}D_N-B_{N-1}C_N)\Delta_{N+2}\begin{bmatrix} N+1 & N+2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \\ &= \frac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}}\frac{(A_{N-1}B_N-A_NB_{N-1})(C_NB_{N+1}-A_{N+1}D_N)}{(A_{N-1}D_N-B_{N-1}C_N)(A_NB_{N+1}-B_NA_{N+1})},\end{aligned} \tag{38}$$

这就证明了式 (29)。

此外，由归纳假设、式 (25)、(34) 和 (35) 可得

$$\begin{aligned}w_{\widehat{N+1}} &= \frac{\lambda_{N+1}\sigma_{\widehat{N}}^{N+1}w_{\widehat{N}}(w_{\widehat{N-1}N+1}-w_{\widehat{N-1}})+\lambda_Nw_{\widehat{N-1}N+1}(w_{\widehat{N-1}}-w_{\widehat{N}})}{\lambda_{N+1}\sigma_{\widehat{N}}^{N+1}(w_{\widehat{N-1}N+1}-w_{\widehat{N-1}})+\lambda_N(w_{\widehat{N-1}}-w_{\widehat{N}})} \\ &= \frac{\frac{(A_{N-1}B_N-A_NB_{N-1})(C_NB_{N+1}-A_{N+1}D_N)}{(A_{N-1}D_N-B_{N-1}C_N)(A_NB_{N+1}-B_NA_{N+1})}\frac{A_N}{B_N}(\frac{C_N}{D_N}-\frac{A_{N-1}}{B_{N-1}})+\frac{C_N}{D_N}(\frac{A_{N-1}}{B_{N-1}}-\frac{A_N}{B_N})}{\frac{(A_{N-1}B_N-A_NB_{N-1})(C_NB_{N+1}-A_{N+1}D_N)}{(A_{N-1}D_N-B_{N-1}C_N)(A_NB_{N+1}-B_NA_{N+1})}(\frac{C_N}{D_N}-\frac{A_{N-1}}{B_{N-1}})+\frac{A_{N-1}}{B_{N-1}}-\frac{A_N}{B_N}} \\ &= \frac{\Delta_{N+2}\begin{bmatrix} N+1 & N+2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\Delta_{N+1}\begin{bmatrix} N \\ 1 \end{bmatrix}-\Delta_{N+2}\begin{bmatrix} N & N+2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\Delta_{N+1}\begin{bmatrix} N+1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\Delta_{N+2}\begin{bmatrix} N+1 & N+2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\Delta_{N+1}\begin{bmatrix} N \\ 2 \end{bmatrix}-\Delta_{N+2}\begin{bmatrix} N & N+2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\Delta_{N+1}\begin{bmatrix} N+1 \\ 2 \end{bmatrix}} \\ &= \frac{A_{N+1}\begin{bmatrix} N+1 \\ 1 \end{bmatrix}A_{N+1}\begin{bmatrix} N \\ N+1 \end{bmatrix}-A_{N+1}\begin{bmatrix} N \\ 1 \end{bmatrix}A_{N+1}\begin{bmatrix} N+1 \\ N+1 \end{bmatrix}}{B_{N+1}\begin{bmatrix} N+1 \\ 1 \end{bmatrix}B_{N+1}\begin{bmatrix} N \\ N+1 \end{bmatrix}-B_{N+1}\begin{bmatrix} N \\ 1 \end{bmatrix}B_{N+1}\begin{bmatrix} N+1 \\ N+1 \end{bmatrix}} \\ &\xlongequal[identity]{Jacobi} \frac{A_{N+1}A_{N+1}\begin{bmatrix} N \\ 1 \end{bmatrix}}{B_{N+1}B_{N+1}\begin{bmatrix} N \\ 1 \end{bmatrix}} \\ &= \frac{A_{N+1}}{B_{N+1}},\end{aligned}$$

至此，定理 1 得证。

现在，根据定理 1，可直接由式 (20) 推得

$$a_{\widehat{N}} = \frac{A_{N-1}A_N-B_{N-1}B_N}{A_{N-1}B_N-B_{N-1}A_N}. \tag{39}$$

T因此，我们可以将所得结果总结为以下定理。

定理 2. GX 系统存在 N-贝克隆变换

$$
\begin{aligned}
&x_{[\widehat{N}]} = x - \frac{1}{2}\ln|\frac{A_N + B_N}{A_N - B_N}|, \qquad t_{[\widehat{N}]} = t,\\
&u_{[\widehat{N}]} = \frac{1}{c_{\widehat{N}}}(u_{[\widehat{N-1}]}a_{\widehat{N}} - \frac{u_{[\widehat{N-1}],x}}{x_{[\widehat{N-1}],x}}),\\
&v_{[\widehat{N}]} = \frac{c_{\widehat{N}}}{a_{\widehat{N}}^2 - 1}[v_{[\widehat{N-1}]}a_{\widehat{N}} - \frac{v_{[\widehat{N-1}],x}}{x_{[\widehat{N-1}],x}} - \frac{1}{\lambda_N^2 m_{[\widehat{N-1}]}}(\frac{a_{\widehat{N},x}}{x_{[\widehat{N-1}],x}} + a_{\widehat{N}}^2 - 1)],
\end{aligned}
\tag{40}
$$

其中 $a_{\widehat{N}}$由（39）给出，$c_{\widehat{N}} = \sqrt{|a_{\widehat{N}}^2 - 1|}$，以及 $m_{\widehat{N-1}} = u_{\widehat{N-1}} - \frac{1}{x_{[\widehat{N-1}],\ x}}(u_{[\widehat{N-1}],} \frac{x}{x_{[\widehat{N-1}]\ x,}})_x$。

4. 精确解

作为贝克隆变换的应用，我们将推导 GX 系统的一些精确解。取 $u = u_0$、$v = v_0$、$u_0 v_0 \neq 0$ 作为 GX 系统的一个初始解。设 α_j、β_j、$-\alpha_j - \beta_j$（$1 \leq j \leq N$）是方程$\gamma^3 - \gamma - \lambda_j^2 u_0 v_0 = 0$的三个根，且 f_j 是下列系统的解

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{xxx} - \varphi_x - \lambda_j^2 u_0 v_0 \varphi = 0,\\
&\varphi_t - \frac{1}{\lambda_j^2}\varphi_{xx} + u_0 v_0 \varphi_x + \frac{1}{\lambda_j^2}\varphi = 0,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

它是（5）在 $\lambda = \lambda_j$、$u = u_0$、$v = v_0$处的标量形式。

例 1：单孤子解。

若 $27\lambda_1^4 u_0^2 v_0^2 - 4 < 0$，则 α_1、β_1、$-\alpha_1 - \beta_1$ 是三个不同的实根。我们取

$$
f_1 = e^{\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}}(e^{\theta_1} + \delta_1 e^{-\theta_1}),
$$

其中 $\xi_1 = \alpha_1 x - \frac{\lambda_1^2 u_0^2 v_0^2}{\alpha_1^2}t + \xi_{10}$，$\eta_1 = \beta_1 x - \frac{\lambda_1^2 u_0^2 v_0^2}{\beta_1^2}t + \eta_{10}$，$\theta_1 = \frac{\mu_1}{2}[x + u_0 v_0 \frac{(4-\mu_1^2)}{\mu_1^2 - 1} t] + \theta_{10}$，$\mu_1 = \alpha_1 - \beta_1$，$\delta_1 = \pm 1$，$\theta_{10} = \frac{1}{2}(\xi_{10} - \eta_{10})$，且 ξ_{10}, η_{10}是两个常数。为方便起见，设 $\mu_1 > 0$，并令 $\nu_1 = \alpha_1 + \beta_1$，可推得 $\mu_1 = \sqrt{4 - 3\nu_1^2}$。于是

$$
a_1 = \frac{(\mu_1 + \nu_1)e^{\theta_1} + \delta_1(\nu_1 - \mu_1)e^{-\theta_1}}{2(e^{\theta_1} + \delta_1 e^{-\theta_1})} = \begin{cases} \frac{\nu_1 + \mu_1 \tanh\theta_1}{2}, & \delta_1 = 1, \\ \frac{\nu_1 + \mu_1 \coth\theta_1}{2}, & \delta_1 = -1, \end{cases}
$$

结合命题 2，可得双曲正切型单孤子解

$$
\begin{aligned}
x_{[1]} &= x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\nu_1 + 2 + \mu_1\tanh\theta_1}{\nu_1 - 2 + \mu_1\tanh\theta_1}\right|,\\
u_{[1]} &= \frac{u_0(\nu_1 + \mu_1\tanh\theta_1)}{\sqrt{|(\nu_1 + \mu_1\tanh\theta_1)^2 - 4|}},\\
v_{[1]} &= -\frac{v_0\nu_1(\nu_1^2 - 2 + \mu_1\mu_1\tanh\theta_1)\sqrt{|(\nu_1 + \mu_1\tanh\theta_1)^2 - 4|}}{(1-\nu_1^2)[(\nu_1 + \mu_1\tanh\theta_1)^2 - 4]},
\end{aligned}
\tag{42}
$$

以及双曲余切型单孤子解

$$
\begin{aligned}
x_{[1]} &= x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\nu_1 + 2 + \mu_1\coth\theta_1}{\nu_1 - 2 + \mu_1\coth\theta_1}\right|,\\
u_{[1]} &= \frac{u_0(\nu_1 + \mu_1\coth\theta_1)}{\sqrt{|(\nu_1 + \mu_1\coth\theta_1)^2 - 4|}},\\
v_{[1]} &= -\frac{v_0\nu_1(\nu_1^2 - 2 + \mu_1\nu_1\coth\theta_1)\sqrt{|(\nu_1 + \mu_1\coth\theta_1)^2 - 4|}}{(1-\nu_1^2)[(\nu_1 + \mu_1\coth\theta_1)^2 - 4]}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

容易看出，当 $x \to \pm\infty$ 时，$x_{[1]} \to \pm\infty$ 在（42）和（43）中成立。进一步分析表明，（42）中从 $x_{[1]}$ 到 x 的映射是双射；当 $1 < |\nu_1| < \frac{2}{\sqrt{3}}$ 时，$x_{[1]}$、$u_{[1]}$、$v_{[1]}$ 均为非奇异，而在（43）中，无论 ν_1 取何值，$x_{[1]}$、$u_{[1]}$、$v_{[1]}$ 都是奇异的。这表明，（42）给出了 $1 < |\nu_1| < \frac{2}{\sqrt{3}}$ 的光滑孤子解，而（43）给出的是奇异解，因此我们不再深入讨论。（42）中的单孤子解图像如图2–3所示。

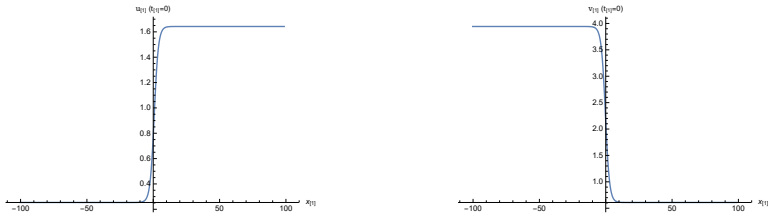

图2： $u_0 = 1$、$v_0 = 1$、$\nu_1 = 1.1$. 时（42）中的光滑单孤子解图像

例2：二孤子解及其相互作用。

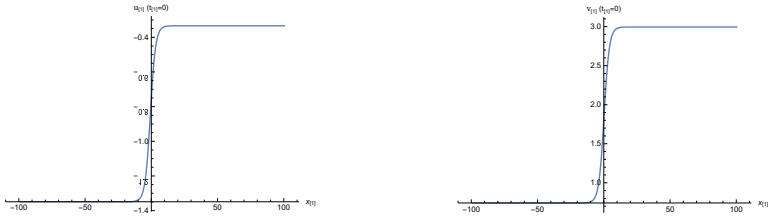

图3：光滑单孤子解 (42) 在 $u_0 = 1$、 $v_0 = -1$、 $\nu_1 = -1.1$ 处的剖面 2.

应用命题3，我们得到双孤子解

$$
\begin{aligned}
x_{[12]} &= x - \frac{1}{2}\ln|\frac{(a_1+1)(a_{12}+1)}{(a_1-1)(a_{12}-1)}|, \qquad\qquad t_{[12]} = t,\\
u_{[12]} &= \frac{1}{c_1 c_{12}}[u_0(a_1 a_{12}+1) - \frac{a_1^2-1}{\lambda_1 b_1}),\\
v_{[12]} &= \frac{c_1 c_{12}}{(a_1^2-1)(a_{12}^2-1)}[v_0(a_1 a_{12}+1) - \frac{b_1}{\lambda_1}(a_1+a_{12})]\\
&\quad - \frac{c_1 c_{12}}{(a_2-a_1)(a_{12}^2-1)}(\frac{b_1}{\lambda_1} - \frac{b_2}{\lambda_2})
\end{aligned}
\tag{44}
$$

其中 $c_1 = \sqrt{|a_1^2-1|}$, $c_{12} = \sqrt{|a_{12}^2-1|}$. 分别称式（44）为双曲正切-双曲正切型和双曲正切-双曲余切型二孤子解，当

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\nu_1 + \mu_1\tanh\theta_1}{2}, \qquad\qquad a_2 = \frac{\nu_2 + \mu_2\tanh\theta_1}{2},\\
b_1 &= \frac{-\nu_1(\nu_1 - \mu_1\tanh\theta_1)}{2\lambda_1 u_0}, \qquad\qquad b_2 = \frac{-\nu_2(\nu_2 - \mu_2\tanh\theta_2)}{2\lambda_2 u_0},\\
a_{12} &= \frac{4 - (\nu_1+\mu_1\tanh\theta_1)(\nu_2+\mu_2\tanh\theta_2)}{2(\nu_2-\nu_1+\mu_2\tanh\theta_2-\mu_1\tanh\theta_1)}\\
&\quad - \frac{\nu_2(\nu_2-\mu_2\tanh\theta_2)[4-(\nu_1+\mu_1\tanh\theta_1)^2]}{2\nu_1(\nu_1-\mu_1\tanh\theta_1)(\nu_2-\nu_1+\mu_2\tanh\theta_2-\mu_1\tanh\theta_1)},
\end{aligned}
$$

and

$$a_1 = \frac{\nu_1 + \mu_1 \tanh\theta_1}{2}, \qquad a_2 = \frac{\nu_2 + \mu_2 \coth\theta_1}{2},$$
$$b_1 = \frac{-\nu_1(\nu_1 - \mu_1 \tanh\theta_1)}{2\lambda_1 u_0}, \qquad b_2 = \frac{-\nu_2(\nu_2 - \mu_2 \coth\theta_2)}{2\lambda_2 u_0},$$
$$a_{12} = \frac{4 - (\nu_1 + \mu_1 \tanh\theta_1)(\nu_2 + \mu_2 \coth\theta_2)}{2(\nu_2 - \nu_1 + \mu_2 \coth\theta_2 - \mu_1 \tanh\theta_1)}$$
$$- \frac{\nu_2(\nu_2 - \mu_2 \coth\theta_2)[4 - (\nu_1 + \mu_1 \tanh\theta_1)^2]}{2\nu_1(\nu_1 - \mu_1 \tanh\theta_1)(\nu_2 - \nu_1 + \mu_2 \coth\theta_2 - \mu_1 \tanh\theta_1)}.$$

这里，$\theta_1 = \frac{\mu_1}{2}[x + \frac{u_0 v_0 (4-\mu_1^2)}{\mu_1^2 - 1} t] + \theta_{10}$，$\theta_2 = \frac{\mu_2}{2}[x + \frac{u_0 v_0 (4-\mu_2^2)}{\mu_2^2 - 1} t] + \theta_{20}$，$\mu_1 = \sqrt{4 - 3\nu_1^2}$，$\mu_2 = \sqrt{4 - 3\nu_2^2}$，$\lambda_1^2 = \frac{\nu_1}{(1-\nu_1^2) u_0 v_0}$，$\lambda_2^2 = \frac{\nu_2}{(1-\nu_2^2) u_0 v_0}$，以及 ν_1，ν_2 是两个常数。

分析表明，当 $1 < |\nu_1|, |\nu_2| < \frac{2}{\sqrt{3}}$，$\nu_1 \nu_2 < 0$ 时，双曲正切-双曲正切型二孤子解给出光滑的扭结-反扭结解或反扭结-扭结解。尤其有趣的是，当 $\nu_1 = -\nu_2$ 时，双曲正切-双曲正切型二孤子解会变为钟形单孤子解。此外，当 $1 < |\nu_2| < |\nu_1| < \frac{2}{\sqrt{3}}$，$\nu_1 \nu_2 > 0$ 时，双曲正切-双曲余切型二孤子解给出扭结-扭结解或反扭结-反扭结解。二孤子解 (44) 的轮廓及其相互作用如图4–6所示。

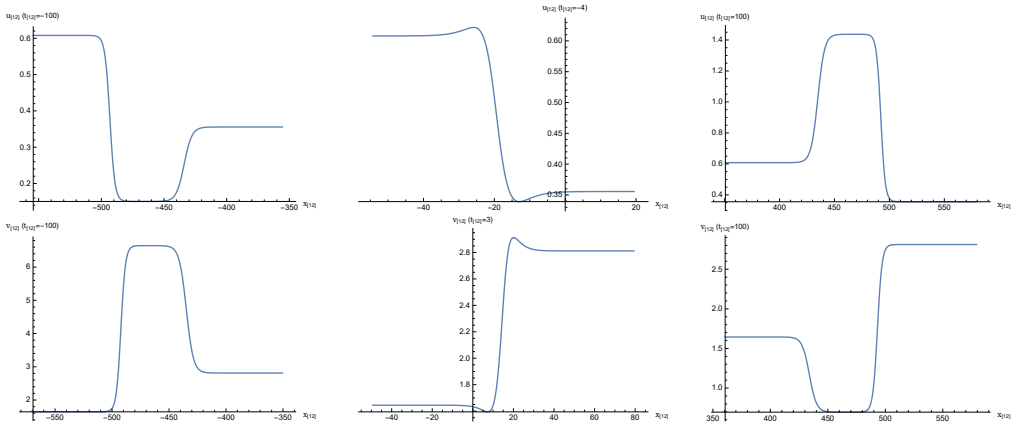

图4：在 $u_0 = -1, v_0 = -1, \nu_1 = -1.12, \nu_2 = 1.14, \theta_{10} = \theta_{20} = 0$.处的反扭结-扭结解和扭结-反扭结解

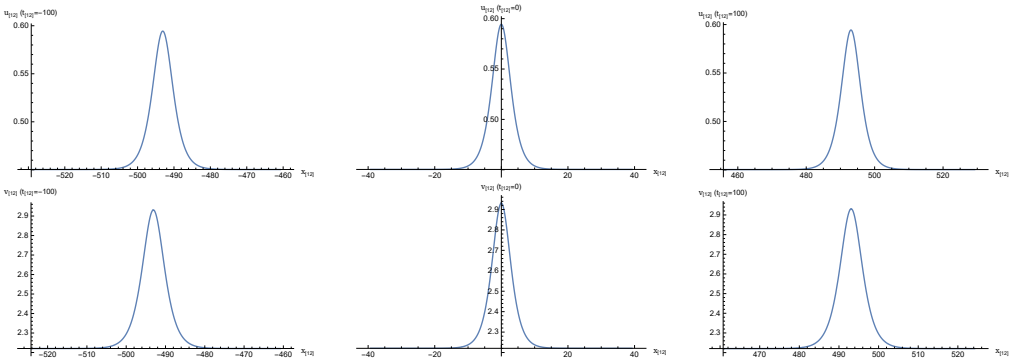

图5：在 $u_0=-1,v_0=-1,\nu_1=-\nu_2=-1.12,\theta_{10}=\theta_{20}=0.$处的钟形单孤子解

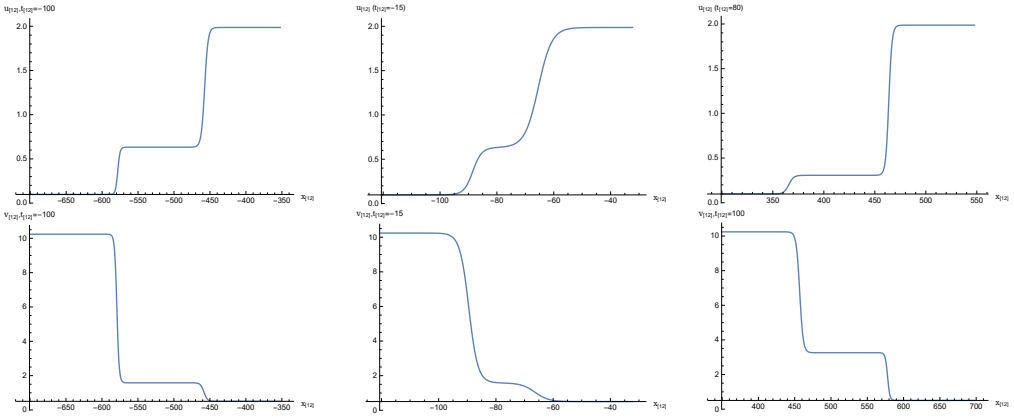

图6：在 $u_0=1,v_0=1,\nu_1=1.13,\nu_2=-1.1,\theta_{10}=\theta_{20}=0.$处的扭结-扭结解和反扭结-反扭结解

5. Degasperis-Procesi方程和Novikov方程的B¨acklund变换

5.1. Degasperis-Procesi情形

众所周知，当 $v=1$ 时，GX 系统约化为 DP方程。因此，我们将研究DP方程的贝克隆变换。DP方程 (3) 具有一个 Lax对 [19]

$$\psi_x=U_1\psi,\qquad \psi_t=V_1\psi, \tag{45}$$

其中 $\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)^T$和

$$U_1=\begin{bmatrix}0 & \lambda m & 1\\ 0 & 0 & \lambda\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad V_1=\begin{bmatrix}-u_x & \frac{u_x}{\lambda}-\lambda u m & 0\\ \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2}+u_x & -\lambda u\\ -u & \frac{u}{\lambda} & 0\end{bmatrix}.$$

自然地，耿-薛系统的倒数变换 (6) 化为 DP 方程的倒数变换

$$dy=qdx-uqdt,\qquad d\tau=dt. \tag{46}$$

其中 $q=m^{\frac{1}{3}}$。应用此变换，Lax 表示 (45) 转化为

$$\psi_y=F_1\psi,\qquad \psi_\tau=G_1\psi, \tag{47}$$

其中

$$F_1=\begin{bmatrix}0 & \lambda q^2 & \frac{1}{q}\\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{q}\\ \frac{1}{q} & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad G_1=\begin{bmatrix}-u_y q & \frac{u_y q}{\lambda} & u\\ \frac{1}{\lambda} & u_y q-\frac{1}{\lambda^2} & 0\\ 0 & \frac{u}{\lambda} & 0\end{bmatrix}.$$

Lax对 (47) 的相容条件给出相关DP（aDP）方程 [17, 36]

$$q_\tau=-u_y q^2,\qquad u-q^3-q(u_y q)_y=0. \tag{48}$$

容易验证，在规范变换 $\chi=q\psi_2$ 下，(47) 中谱问题的标量形式转化为

$$(\partial_y^3+U_1\partial_y+\frac{1}{2}U_{1y})\chi=\lambda_1^2\chi,\qquad U_1=-2\frac{q_{yy}}{q}+\frac{q_y^2-1}{q^2},$$

这正是 KK 层级的经典谱问题 [35]。利用 KK 层级的达布变换，我们得到如下命题。

命题4. Lax对 (47) 在达布变换下是协变的

$$\begin{aligned}&\psi_{[1]}=T\psi,\\ &T=I+\begin{bmatrix}\frac{(\lambda_1\sigma_1-\sigma_2)(\lambda_1^2-\sigma_2^2)}{\lambda_1^2-2\lambda_1\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2} & \sigma_2 & 0\\ 0 & \lambda\sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda & -\lambda^2\\ \lambda_1^2 & -\lambda & -\lambda_1^2\\ \lambda_1^2 & -\lambda & -\lambda_1^2\end{bmatrix}T_1,\\ &q_{[1]}=\frac{q(\lambda_1^2-\sigma_2^2)}{\lambda_1^2-2\lambda_1\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2},\\ &u_{[1]}=u+\frac{2(\lambda_1^2u_yh\sigma_2-\lambda_1^3u+\lambda_1\sigma_1-\sigma_2)}{\lambda_1(\lambda_1^2-\sigma_2^2)},\end{aligned} \tag{49}$$

或达布变换

$$\begin{aligned}
&\psi_{[1]} = \tilde{T}\psi, \qquad \tilde{T} = \mathrm{diag}[-1,-1,1]T,\\
&q_{[1]} = -\tfrac{q(\lambda_1^2-\sigma_2^2)}{\lambda_1^2-2\lambda_1\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2},\\
&u_{[1]} = -u + \tfrac{2(\sigma_2-\lambda_1\sigma_1+\lambda_1^3 u-\lambda_1^2 u_y h\sigma_2)}{\lambda_1(\lambda_1^2-\sigma_2^2)},
\end{aligned} \tag{50}$$

其中 $T_1 = \frac{2}{(\lambda^2+\lambda_1^2)(\lambda_1^2-\sigma_2^2)}\mathrm{diag}[\sigma_2, \lambda_1\sigma_1-\sigma_2, \lambda_1]$, $\sigma_i = \frac{g_i}{g_3}, i = 1, 2,$ 且 $(g_1, g_2, g_3)^T$是线性系统 (47) 在 $\lambda = \lambda_1$处的一个特殊解。

由于过程非常相似，我们只考虑命题 4 中的第二个达布变换。容易验证

$$\frac{1}{q_{[1]}} = \frac{1}{q} + \frac{2\vartheta_y}{\vartheta^2-1}, \qquad u_{[1]} = u + \frac{2\vartheta_\tau}{\vartheta^2-1}, \qquad \vartheta = \frac{\lambda_1}{\sigma_2}. \tag{51}$$

然后，借助 (46)，可得

$$dx_{[1]} = d(x - \ln|\frac{\vartheta+1}{\vartheta-1}|),$$

由此可知

$$x_{[1]} = x - \ln|\frac{\vartheta+1}{\vartheta-1}|.$$

这里取积分常数为零。

推论1. DP方程具有如下形式的贝克隆变换

$$\begin{aligned}
&x_{[1]} = x - \ln|\frac{\vartheta+1}{\vartheta-1}|, \qquad t_{[1]} = t,\\
&u_{[1]} = u - \frac{2\vartheta}{\lambda_1^2} + \frac{2\lambda_1^2(u-u_x\vartheta) - 2\vartheta\vartheta_x}{\lambda_1^2(\vartheta^2-1)},
\end{aligned} \tag{52}$$

其中 ϑ 由下式确定

$$\vartheta_{xx} = \lambda_1^2 m - 3\vartheta\vartheta_x + \vartheta - \vartheta^3, \qquad \vartheta_t = u - (u\vartheta)_x + \lambda_1^{-2}(\vartheta - \vartheta^3 - \vartheta\vartheta_x).$$

注：事实上，考虑命题4中的第一个达布变换，可以得到一个与 [31], 中的贝克隆变换等价的贝克隆变换，它们通过 $a = \frac{f_2^2 p^2}{\int f_2^2 p^2 dy}$相关联。此外，也可以像第2节中那样讨论DP方程的 N-贝克隆变换，此处不再赘述。

5.2. Novikov方程

现在我们考虑Novikov方程(4)的贝克隆变换，它是耿-薛系统的另一种约化，如 $u = v$所示。Novikov方程具有如下Lax对 [18]

$$\psi_x = U_2\psi, \qquad \psi_t = V_2\psi, \tag{53}$$

其中 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$且

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda m & 1 \\ 0 & 0 & \lambda m \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -uu_x & \frac{u_x}{\lambda} - \lambda u^2 m & u_x^2 \\ \frac{u}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & -\lambda u^2 m - \frac{u_x}{\lambda} \\ -u^2 & \frac{u}{\lambda} & uu_x \end{bmatrix}.$$

在这种情况下，倒数变换 (6) 化为

$$dy = p^2 dx - u^2 p^2 dt, \qquad d\tau = dt, \tag{54}$$

其中 $p = m^{\frac{1}{3}}$。这是 Novikov方程的一个倒数变换，它将 Lax对 (53) 变为

$$\psi_y = F_2\psi, \qquad \psi_\tau = G_2\psi, \tag{55}$$

其中

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda p & \frac{1}{p^2} \\ 0 & 0 & \lambda p \\ \frac{1}{p^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G_2 = \begin{bmatrix} -u_y u p^2 & \frac{u_y p^2}{\lambda} & u^2 + u_y^2 p^4 \\ \frac{u}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & -\frac{u_y p^2}{\lambda} \\ 0 & \frac{u}{\lambda} & u_y u p^2 \end{bmatrix}.$$

(55) 的相容条件给出相关的 Novikov（aNovikov）方程 [18, 37]

$$p_\tau = -p^3 u u_y, \qquad u_{yy} p^4 + 2p^3 p_y u_y + p^3 - u = 0. \tag{56}$$

容易证明，Lax对 (55) 关于 ψ_2 的标量谱问题正是 SK 层级的谱问题

$$[\partial_y^3 - (\frac{p_{yy}}{p} + \frac{1}{p^4})\partial_y]\psi_2 = \lambda^2 \psi_2. \tag{57}$$

借助 Sawada-Kotera层级的达布变换 [35], ，可得以下命题。

命题 5. Lax对 (55) 关于达布变换具有协变性

$$\begin{aligned}
&\psi_{[1]} = T\psi, \quad T = \mathrm{diag}[\tfrac{p_{[1]}}{p}, 1, \tfrac{p}{p_{[1]}}]((\lambda^2+\lambda_1^2)I - \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \frac{2\lambda\lambda_1}{\sigma_2} & 2\lambda_1^2 & -2\lambda\lambda_1\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \\ -2\frac{\lambda_1^2}{\sigma_2^2} & 2\frac{\lambda\lambda_1}{\sigma_2} & 2\frac{\lambda_1^2\sigma_1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}) \\
&p_{[1]}^2 = p^2|(1-2\tfrac{\sigma_1}{\sigma_2^2})^2 - \tfrac{4}{\sigma_2^4}|, \\
&u_{[1]} = -\tfrac{p}{p_{[1]}}(u + \tfrac{2p^2u_y - 2u\sigma_1}{\sigma_2^2} + \tfrac{2}{\lambda_1\sigma_2}).
\end{aligned} \tag{58}$$

其中

$$\begin{aligned}
T_{11} &= 2\tfrac{\lambda_1^2}{\sigma_2^2}(p^2\tfrac{p_{[1],y}}{p_{[1]}} - pp_y - \sigma_1) + 4p^3\tfrac{\lambda_1^3}{\sigma_2^3}, \\
T_{12} &= 2\tfrac{\lambda\lambda_1}{\sigma_2}(\sigma_1 - p^2\tfrac{p_{[1],y}}{p_{[1]}} + pp_y) - \tfrac{4\lambda\lambda_1^2p^3}{\sigma_2^2}, \\
T_{13} &= (\lambda^2+\lambda_1^2 - 2\tfrac{\lambda_1^2\sigma_1}{\sigma_2^2})(2\tfrac{\lambda_1p^3}{\sigma_2} + p^2\tfrac{p_{[1],y}}{p_{[1]}} - pp_y) + 2\tfrac{\lambda_1^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2},
\end{aligned}$$

并且 $\sigma_1 = \frac{g_1}{g_3}, \sigma_2 = \frac{g_2}{g_3}$, $(g_1, g_2, g_3)^T$ 是线性系统 (55) 在 $\lambda = \lambda_1$ 处的一个特殊解。

现在，我们将借助倒数变换 (54) 为 Novikov方程建立一个贝克隆变换。由命题 5 可推得

$$p_{[1]}^2 = \frac{4p^2}{\sigma_2^4}|\vartheta^2 - 1|, \qquad \vartheta = \frac{1}{2}\sigma_2^2 - \sigma_1. \tag{59}$$

若 $\vartheta^2 - 1 > 0$，直接计算可得

$$\frac{1}{p_{[1]}^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{\vartheta_y}{\vartheta^2-1}, \qquad u_{[1]}^2 = u^2 - \frac{\vartheta_\tau}{\vartheta^2-1}, \tag{60}$$

将 (60) 代入 (54)，并令积分常数为零，可得

$$x_{[1]} = x + \frac{1}{2}\ln|\frac{\vartheta+1}{\vartheta-1}|. \tag{61}$$

如果 $\vartheta^2 - 1 < 0$，类似的过程可得

$$x_{[1]} = -x - \frac{1}{2}\ln|\frac{\vartheta+1}{\vartheta-1}|. \tag{62}$$

推论2. Novikov方程的贝克隆变换为

$$\begin{aligned} x_{[1]} &= x + \frac{1}{2}\ln|\frac{\vartheta+1}{\vartheta-1}|, \qquad t_{[1]} = t, \\ u_{[1]} &= \pm\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2-1}}(u\vartheta + u_x + \frac{\eta}{\lambda_1}), \end{aligned} \tag{63}$$

若 $\vartheta^2 - 1 > 0$, 且

$$\begin{aligned} x_{[1]} &= -x - \frac{1}{2}\ln|\frac{\vartheta+1}{\vartheta-1}|, \qquad t_{[1]} = t, \\ u_{[1]} &= \pm\frac{1}{\sqrt{1-\vartheta^2}}(u\vartheta + u_x + \frac{\eta}{\lambda_1}), \end{aligned} \tag{64}$$

若 $\vartheta^2 - 1 < 0$。这里, $\theta = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{\eta_x}{\eta} - \lambda_1\frac{m}{\eta}$和 η由下式确定

$$\begin{aligned} \eta_{xx} &= \lambda_1 m_x - \eta - \lambda_1 m\eta^2 + (2\eta_x^2 - 3\lambda_1 m\eta_x + \lambda_1^2 m^2)/\eta, \\ \eta_t &= -(u^2 + \frac{u}{\lambda_1\eta})\eta_x - \eta(uu_x + \frac{1}{\lambda_1^2}) - \frac{u_x}{\lambda_1} + \frac{um}{\eta} - \frac{u\eta^2}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

注：比较贝克隆变换 (63) 与 [32], 中的贝克隆变换，可知它们通过 $a = \frac{2\lambda_1 p}{\sigma_2}$ 相关联。

6. 附录：恒等式 (35) 和 (37) 的证明

本节将证明恒等式（34）、（35）和（37）。实际上，（34）直接由雅可比恒等式得出。由于（35）中的恒等式证明方法类似，我们只证明其中一个，（37）也同样如此。这里我们证明（35）中关于 $N = 3k + 2$ 的第一个恒等式。为方便起见，我们定义

$$\vec{\alpha}_N = (\alpha_1, ..., \alpha_N)^T, \quad \lambda^k\vec{\alpha}_N = (\lambda_1^k\alpha_1, ..., \lambda_N^k\alpha_N)^T, \quad \vec{1}_N = (1, ..., 1)^T, \tag{65}$$

并将 $\vec{1}_N(i)$ 定义为一个列向量，其第 i 个元素为 **1**，其余元素为 **0**。然后，利用 Pl¨ucker 关系，我们计算

$$
\begin{aligned}
&A_{N-1}B_N - A_N B_{N-1} \\
&= \left|\vec{a}_{N-1} \quad \lambda\vec{b}_{N-1} \quad \cdots \quad \lambda^{2k}\vec{a}_{N-1}\right| \left|\vec{1}_N \quad \lambda\vec{b}_N \quad \cdots \quad \lambda^{2k+1}\vec{b}_N\right| \\
&\quad - \left|\vec{a}_N \quad \lambda\vec{b}_N \quad \cdots \quad \lambda^{2k+1}\vec{b}_N\right| \left|\vec{1}_{N-1} \quad \lambda\vec{b}_{N-1} \quad \cdots \quad \lambda^{2k}\vec{a}_{N-1}\right| \\
&= \left|\vec{a}_N \quad \lambda\vec{b}_N \quad \cdots \quad \lambda^{2k}\vec{a}_N \quad \vec{1}_N(N)\right| \left|\vec{1}_N \quad \lambda\vec{b}_N \quad \cdots \quad \lambda^{2k+1}\vec{b}_N\right| \\
&\quad - \left|\vec{a}_N \quad \lambda\vec{b}_N \quad \cdots \quad \lambda^{2k+1}\vec{b}_N\right| \left|\vec{1}_N \quad \lambda\vec{b}_N \quad \cdots \quad \lambda^{2k}\vec{a}_N \quad \vec{1}_N(N)\right| \\
&= \left|\vec{a}_N \quad \lambda\vec{b}_N \quad \cdots \quad \lambda^{2k}\vec{a}_N \quad \vec{1}_N\right| \left|\vec{1}_N(N) \quad \lambda\vec{b}_N \quad \cdots \quad \lambda^{2k}\vec{a}_N \quad \lambda^{2k+1}\vec{b}_N\right| \\
&= \Delta_N \Delta_{N+1} \begin{bmatrix} N & N+1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

现在，我们继续证明（37）中的第一个等式，即 $N = 3k+2$。借助雅可比恒等式，我们有

$$
\begin{aligned}
R_3 &= \lambda_{N+1}^2 \begin{vmatrix} \vec{1}_{N-2} & \vec{a}_{N-2} & \cdots & \lambda^{2k}\vec{1}_{N-2} \\ 1 & a_{N+1} & \cdots & \lambda_{N+1}^{2k} \end{vmatrix} \left|\lambda\vec{b}_{N-1} \quad \cdots \quad \lambda^{2k+1}\vec{b}_{N-1}\right| \\
&\quad -\lambda_{N-1}^2 \left|\vec{1}_{N-1} \quad \vec{a}_{N-1} \quad \cdots \quad \lambda^{2k}\vec{1}_{N-1}\right| \begin{vmatrix} \lambda\vec{b}_{N-2} & \cdots & \lambda^{2k+1}\vec{b}_{N-2} \\ \lambda_{N+1}b_{N+1} & \cdots & \lambda_{N+1}^{2k+1}b_{N+1} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{N-2} \lambda_i^{-2} \{ \begin{vmatrix} \lambda^2\vec{1}_{N-2} & \cdots & \lambda^{2k+2}\vec{1}_{N-2} \\ \lambda_{N+1}^2 & \cdots & \lambda_{N+1}^{2k+2} \end{vmatrix} \left|\lambda\vec{b}_{N-1} \quad \cdots \quad \lambda^{2k+1}\vec{b}_{N-1}\right| \\
&\quad - \left|\lambda^2\vec{1}_{N-1} \quad \cdots \quad \lambda^{2k+2}\vec{1}_{N-1}\right| \begin{vmatrix} \lambda\vec{b}_{N-2} & \cdots & \lambda^{2k+1}\vec{b}_{N-2} \\ \lambda_{N+1}b_{N+1} & \cdots & \lambda_{N+1}^{2k+1}b_{N+1} \end{vmatrix} \} \\
&= \prod_{i=1}^{N-2} \lambda_i^{-2} \{ \triangle_{N+2} \begin{bmatrix} N-1 & N & N+2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \triangle_{N+1} \begin{bmatrix} N & N+1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&\quad - \triangle_{N+2} \begin{bmatrix} N & N+1 & N+2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \triangle_{N+1} \begin{bmatrix} N-1 & N \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \} \\
&= \prod_{i=1}^{N-2} \lambda_i^{-2} \{ \triangle_{N+2} \begin{bmatrix} N & N+2 & N-1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \triangle_{N+2} \begin{bmatrix} N & N+2 & N+1 \\ 1 & 2 & N+2 \end{bmatrix} \\
&\quad - \triangle_{N+2} \begin{bmatrix} N & N+2 & N+1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \triangle_{N+2} \begin{bmatrix} N & N+2 & N-1 \\ 1 & 2 & N+2 \end{bmatrix} \}
\end{aligned}
$$

$$= \prod_{i=1}^{N-2} \lambda_i^{-2} \triangle_{N+2} \begin{bmatrix} N & N+2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \triangle_{N+1} \begin{bmatrix} N-1 & N & N+1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

致谢

本工作部分得到国家自然科学基金（项目编号：12271190 和 11871232）以及厦门市青年创新基金（项目编号：3502Z20206011）的资助,

参考文献

参考文献

[1] R. Camassa 和 D. D. Holm，具有尖峰孤子的可积浅水方程，Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 1661-1664。[2] A. G. Rasin 和 J. Schiff, Camassa-Holm 方程的 Bäcklund 变换，J. Nonlinear Sci. 27 (2017) 45-69。[3] A. Constantin，关于 Camassa-Holm 方程的散射问题, Proc. R. Soc. London, Ser. A 457 (2001) 953-970。[4] A. Constantin、V. S. Gerdjikov 和 R. I. Ivanov，Camassa-Holm 方程的逆散射变换, 《逆问题》22 (2006) 2197-2207。[5] B. Fuchssteiner，非线性方程对称性工具箱中的一些技巧：Camassa-Holm 方程的推广，Phys. D 95 (1996) 229-243。[6] R. Beals、D. H. Sattinger 和 J. Szmigielski，多峰子与 Stieltjes 定理，《逆问题》15 (1999) L1-4。[7]R. Beals、D. H. Sattinger 和 J. Szmigielski，多峰子与经典矩问题，Adv. Math. 154 (2000) 229-257。[8] R. Beals、D. H. Sattinger 和 J. Szmigielski，峰子、弦与有限Toda格，Comm. Pure Appl. Math. 54 (2001) 91-106。

[9] N. Li、Q. P. Liu 和 Z. Popowicz，四分量 Camassa-Holm 型层级，J. Geom. Phys. 85 (2014) 29-39。[10] X. Geng 和 B. Xue，具有三次非线性的可积峰子方程的扩展，Nonlinearity 22 (2009) 1847-1856。[11] N. Li 和 Q. P. Liu，二分量 Novikov方程的双哈密顿结构，Phys. Lett. A 377 (2013) 257-261。[12] N. Li 和 X. Niu，Geng-Xue 方程的倒数变换，J. Math. Phys. 55 (2014) 053505。[13] H. Lundmark 和 J. Sz migielski，与 Geng-Xue 二分量峰子方程相关的逆谱问题，Mem. Amer. Math. Soc. 244 (2016) viii+87 页码。[14] N. Li 和 Q. P. Liu，具有三次非线性的二分量峰子系统的光滑多孤子解，SIGMA 18 (2022), 066。[15] A. Degasperis 和 M. Procesi，《对称性与摄动理论》中的渐近可积性，编者 A. Degasperis 和 G. Gaeta，世界科技出版社，新加坡，1999，第 23-37 页。[16] V. Novikov，Camassa-Holm 方程的推广，J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 342002。[17] A. N. W. Hone 和 J. P. Wang，峰子方程的延拓代数与哈密顿算子，《逆问题》19 (2003) 129-145。[18] A. N. W. Hone 和 J. P. Wang，具有三次非线性的可积峰子方程，J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 372002。[19] A. Degasperis、D. D. Holm 和 A. N. W. Hone，具有峰子孤子的新可积方程，《理论与数学物理》133 (2002) 1463-1474。[20] Y. Matsuno，Degasperis-Procesi 方程的多孤子解及其峰子极限，《逆问题》21 (2005) 1553-1570。[21] Y. Matsuno，具有三次非线性的 Novikov-Camassa-Holm 型方程的光滑多孤子解及其峰子极限，J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 365203。

[22] N. Li、G. Wang 和 Y. Kuang, 《Degasperis-Procesi 方程及其短波极限的多孤子解：Darboux变换方法》, 《理论与数学物理》203 (2020) 608-620。[23] L. Wu、C. Li 和 N. Li, 《Novikov方程及 Novikov 层级一个负流的孤子解》, 应用数学快报 87 (2019) 134-140。[24]A. Constantin 和 R. Ivanov, 《Degasperis-Procesi 方程的规范变换法》, 应用数学研究 138 (2017) 205-226。[25] A. N. W. Hone、H. Lundmark 和 J. Szmigielski, 《Novikov 三次非线性可积 Camassa-Holm 型方程的显式多峰子解》, 动力学偏微分方程 6 (2009) 253-289。[26]H. Lundmark 和 J. Szmigielski, 《Degasperis-Procesi 方程的多峰子解》, 《逆问题》19 (2003) 1241-1245。[27] H. Lund mark 和 J. Szmigielski, 《Degasperis-Procesi 峰子与离散三次弦》, Int. Math. Res. Pap. 2005 (2005) 53-116。[28] A.V. B¨acklund，A V. 《曲面变换理论》，数学年刊 1881，19 (1881) 387-422。[29] R. M. Miura, 《B¨acklund 变换、逆散射法、孤子及其应用》。施普林格，纽约，1976。[30] C. Rogers、W.K. Schief。《B¨acklund 变换与 Darboux变换：孤子理论中的几何学与现代应用》。剑桥大学出版社，剑桥，2002。[31] H. Mao 和 G. Wang, 《Degasperis-Procesi 方程的 B¨ acklund 变换》, 《理论与数学物理》203 (2020) 747-760。[32] H. Mao, 《Novikov方程：B¨acklund 变换及其应用》, 《理论与数学物理》206 (2021) 163-173。[33] H. Mao 和 Q. P. Liu, 《短脉冲方程：B¨ acklund 变换及其应用》, 应用数学研究 145 (2020) 791-811。[34] S. Huang 和 H. Li, 《Camassa-Holm 型系统的 Darboux变换》, 混沌、孤子与分形 157 (2022) 111910。

[35] S. B. Leble 和 N. V. Ustinov, 《三阶谱问题：约化与达布变换》, 《逆问题》10 (1994年) 617-633。[36]A. G. Rasin 和 J. Schiff, 《B¨acklund 变换的鲜为人知的方面及一个相关的 Degasperis-Procesi 方程》, 《理论与数学物理》196 (2018年) 1333-1346。[37] A. G. Rasin 和 J. Schiff, 《Novikov、Hirota-Satsuma 与泽田–小寺方程的一个貌似简单的近亲》, 《非线性数学物理》26 (2019年) 555-568。