arXiv:2301.02497v1 [math.AT] 6 Jan 2023

一些　　同伦群中挠元的渐近公式

GUY BOYDE 和 RUIZHI HUANG

Abstract. 受 F´elix、Halperin 和 Thomas 关于有理同伦群秩的渐近估计的一项重要研究，以及 Wu 和作者近期关于局部双曲性的研究启发，我们证明了两个关于同伦群挠秩的渐近公式，一个使用普通同调，另一个使用 K-理论。我们利用这些公式，得到许多有趣空间在悬挂后的同伦群挠秩的显式定量渐近下界，其中包括穆尔空间、Eilenberg-MacLane空间、复射影空间、复Grassmann流形、Milnor超曲面和酉群。

1. 引言

Th单连通的 CW-复形 Y 的有限型同伦群具有如下形式

$$\pi_i(Y) \cong (\bigoplus_{d_i} \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{\substack{\text{prime } p \\ t\in\mathbb{Z}^+}} (\bigoplus_{k_{p,t}} \mathbb{Z}/p^t),$$

其中， d_i 和$k_{p,\ t}$ 分别是 $\pi_i(Y)$的自由直和项的秩和 $\mathbb{Z}/p^t$-直和项的秩。记作 $\mathrm{rank}_0(\pi_i(Y)) := d_i$ 以及 $\mathrm{rank}^{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_i(Y)) := k_{p,\ t}$。

在著名的工作 [FHT], F´中，Felix、Halperin 和 Thomas 为同伦群的自由部分的秩 $\mathrm{rank}_0(\pi_i(Y))$证明了一个渐近公式。特别地，他们证明，如果$Y$是有限的，并且对于无穷多个 $i \in \mathbb{Z}^+$, $\mathrm{rank}_0(\pi_i(Y)) \neq 0$ ，那么存在一个常数 $\delta > 1$ ，使得当 N 充分大时

$$\sum_{i=N+2}^{N+\dim(Y)} \mathrm{rank}_0(\pi_i(Y)) \geq \delta^N,$$

他们将这一性质解释为同伦群自由部分的秩 $\mathrm{rank}_0(\pi_i(Y))$所具有的强“正则性”性质。关于同伦群挠元部分的秩 $\mathrm{rank}^{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_i(Y))$，他们进一步提出了以下自然问题；Wu 和第二作者在 [HW，第 1.8]问中将其重新表述为一个明确的形式。

问题 1.1. 同伦群$\pi_i(Y)$ 的挠子群是否具有某些“正则性”性质，其中 $i \to \infty$?

本文通过在某些情形下给出秩 $\mathrm{rank}^{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_i(Y))$ 的估计，研究上述问题。特别地，我们对作者与 Wu 在论文 [HW], [Boy1], and [Boy2] 中的结果给出了定量改进。这些论文的方法所蕴含的内容超出了文中所述

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 55Q52、55Q05，次要分类号 55Q15、55P40。

定理的表述：文中始终只说，各种空间的同伦群中 p-挠元的体积呈指数增长；但实际上，这些方法完全具有构造性，经过进一步努力，可以提取出具体的指数下界。本文的工作正是提取这些下界。

我们每个主要定理（1.2 和 1.7）的证明都从自由李代数的组合学入手；早在 F´elix、Halperin 和 Thomas 著名的定理提出之前，人们就已充分理解了自由李代数。我们特别用到了 Babenko [Bab] 和 Lambrechts [Lam],的一些结果，这些结果的适用范围都更广。从这一共同起点出发，每个定理的证明都以不同的方式变得复杂起来；我们将在陈述每个定理后简要说明。

Burklund 和 Senger [BS] 近期的工作极大地推进了我们对这些现象的理解：他们完成了由 Henn [Hen] 和 Iriye [Iri] 开启的研究，并证明 p-局部“同伦”与“环路同调”幂级数的收敛半径相等。我们同样会结合这一点讨论各个定理。

1.1. 通过同调得到的结果。我们首先给出对 [Boy2]主要结果的定量改进。为陈述这些结果，对于任意整数 $q \geq 2$ ，定义函数

$$f_q(x) = (1 - \frac{x}{x-1}\frac{1}{\varphi}) \cdot \frac{1}{x}\varphi^x - cx\varphi^{\frac{x}{2}} - \kappa|\psi|^x$$

其中 $x \geq 2$,

- φ 是次数为 $q+1$ 的多项式 $P(z) = z^{q+1} - z - 1$的唯一正实根,
- $c = 2(q+2)(1+\varphi)$，并且
- $\kappa = (q+1)(1+\frac{1}{|\psi|})$，其中 ψ是 $P(z)$的绝对值次大的根。

我们具有以下性质

- $2^{\frac{1}{q+1}} < \varphi < 1 + \frac{1}{q}$，并且
- 对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 x 足够大，我们就有

$$f_q(x) \geq (1-\varepsilon)(1-\frac{1}{\varphi}) \cdot \frac{1}{x}\varphi^x > (1-\varepsilon)(1-2^{-\frac{1}{q+1}}) \cdot \frac{1}{x}2^{\frac{x}{q+1}}.$$

在本小节中，我们将自由地使用函数 $f_q(x)$ 及其性质。

令 $P^{q+1}(p^r)$ 为由次数为 p^r 的映射 $S^q \to S^q$的映射锥定义的穆尔空间。以下定理给出了满足同调条件时 p-局部同伦群的渐近公式。

定理 1.2. 设 Y 是一个单连通的 CW-复形， $p \neq 2$ 是素数，并且 $s \leq r \in \mathbb{Z}^+$。若存在一个映射

$$\mu : P^{q+1}(p^r) \longrightarrow Y$$

对于某个 $q \geq 2$，使得诱导映射

$$(\Omega\mu)_* : H_*(\Omega P^{q+1}(p^r); \mathbb{Z}/p^s) \longrightarrow H_*(\Omega Y; \mathbb{Z}/p^s)$$

是单射，那么我们有如下界

$$\sum_{t=s}^{r} \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_{N+1}(Y)) \geq f_q(N).$$

特别地，对于任意 $\varepsilon > 0$，一旦 N 足够大，我们就有

$$\sum_{t=s}^{r} \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_{N+1}(Y)) > (1-\varepsilon)(1-2^{-\frac{1}{q+1}}) \cdot \frac{1}{N} 2^{\frac{N}{q+1}}.$$

从代数角度看，定理 1.2 依赖于有限域上自由李代数中的边界模结构。与 Babenko 和 Lambrechts 的工作相比，正是取边界的需要使问题变得复杂。第 2.3 小节利用 Cohen、Moore 和 Neisendorfer 的一个结果 [CMN] 解决了这一问题。

由 [Boy2] 可知，当 $Y = \Sigma X$ 是一个悬挂时，定理 1.2 的假设条件可简化如下：

定理 1.3. 设 X 是一个连通的 CW-复形， $p \neq 2$ 是素数，且 $s \leq r \in \mathbb{Z}^+$。假设 $H_*(X;\mathbb{Z}/p^s)$ 是有限型的。若存在一个映射

$$\mu : P^{q+1}(p^r) \longrightarrow \Sigma X$$

对于某个 $q \geq 2$，使得

$$\mu_* : \widetilde{H}_*(P^{q+1}(p^r);\mathbb{Z}/p^s) \longrightarrow \widetilde{H}_*(\Sigma X;\mathbb{Z}/p^s)$$

是单射，那么我们有以下界

$$\sum_{t=s}^{r} \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_{N+1}(\Sigma X)) \geq f_q(N).$$

特别地，对于任意 $\varepsilon > 0$，一旦 N 足够大，我们就有

$$\sum_{t=s}^{r} \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_{N+1}(\Sigma X)) > (1-\varepsilon)(1-2^{-\frac{1}{q+1}}) \cdot \frac{1}{N} 2^{\frac{N}{q+1}}.$$

定理 1.2 和定理 1.3 中的空间 X 和 Y 可以是无限的。这两个定理中的渐近公式将 p-局部同伦群的秩从下方界定为一个指数函数。特别地，它们强化了第一作者近期关于局部双曲性的结果 [Boy2，定理 1.5 和 1.6]。

定理 1.3 有一些有趣的应用。例如，我们可以证明以下推论。

推论 1.4。设 X 是一个具有 $q \geq 2$ 的 $(q-2)$-连通 CW-复形，并设 $p \neq 2$ 为素数。假设 $H_*(X;\mathbb{Z}/p^r)$ 是有限型的，且 $H_q(\Sigma X;\mathbb{Z})$ 含有一个 $\mathbb{Z}/p^r$-直和项。那么我们有

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p^r}(\pi_{N+1}(\Sigma X)) \geq f_q(N).$$

特别地，对于任意 $\varepsilon > 0$，一旦 N 足够大，我们就有

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p^r}(\pi_{N+1}(\Sigma X)) > (1-\varepsilon)(1-2^{-\frac{1}{q+1}}) \cdot \frac{1}{N} 2^{\frac{N}{q+1}}. \qquad \square$$

推论 1.4 或定理 1.3 都可立即推出以下关于 Moore 空间的结论。

推论 1.5。设 p 是一个奇素数，且 $q \geq 2$。那么

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/p^r}(\pi_{N+1}(P^{q+1}(p^r)) \geq f_q(N).$$

特别地，对于任意 $\varepsilon > 0$，一旦 N 足够大，我们就有

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/p^r}(\pi_{N+1}(P^{q+1}(p^r)) > (1-\varepsilon)(1-2^{-\frac{1}{q+1}}) \cdot \frac{1}{N} 2^{\frac{N}{q+1}}. \qquad \square$$

这加强了 Wu 和第二作者关于 $\mathbb{Z}/p^r$-双曲性的结果 $P^{q+1}(p^r)$[HW，定理 1.6]。

将此结果与 Burklund 和 Senger 的工作 [BS] 已经能推出的结论相比较，颇有启发。由他们的推论 A.5 可知，级数 $\sum_{N=1}^{\infty} \dim^{\mathbb{Z}/p}(\pi_N(P^{q+1}(p^r)) \otimes \mathbb{Z}/p) \cdot t^N$ 的收敛半径恰为 $\frac{1}{\varphi}$。由于 $P^{q+1}(p^r)$ 是有理椭圆的（因为它有理可缩），这个幂级数确实描述了挠元。推论 1.5 从两个方面补充了信息：首先，它给出了一个具体函数，作为所有 N 的下界；其次，它特别指出了与 $\mathbb{Z}/p^r$ 同构的直和项，而不是笼统讨论 p-挠元。

悬挂后的 Eilenberg-MacLane 空间是推论 1.4 的另一个有趣例子。特别地，下面这个直接推论强化了 [Boy2，例 2.5]。

推论 1.6. 设 p 是一个奇素数，且 $q \geq 2$。那么

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/p^r}(\pi_N(\Sigma K(\mathbb{Z}/p^r, q-1)) \geq f_q(N).$$

特别地，对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 N 足够大，我们就有

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/p^r}(\pi_N(\Sigma K(\mathbb{Z}/p^r, q-1)) > (1-\varepsilon)(1-2^{-\frac{1}{q+1}}) \cdot \frac{1}{N} 2^{\frac{N}{q+1}}. \qquad \square$$

1.2. 通过 K-理论得到的结果。记

$$\mathrm{rank}_p(\pi_i(\Sigma X)) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_i(\Sigma X))$$

$\pi_i(\Sigma X)$ 的 p-挠元直和项的秩。我们的另一个主要结果将 [Boy1] 的主定理细化为一个定量结论，其条件基于 K-理论：

定理 1.7（定理 3.3 的弱版本）。设 p 是一个奇素数，并设 X 是一个道路连通空间，其 p-局部同伦类型为有限 CW-复形。假设存在一个映射

$$\mu : \bigvee_{i=1}^{\ell} \bigvee_{j=1}^{m_i} S^{q_i+1} \to \Sigma X$$

存在 $1 \leq q_1 < q_2 < \cdots < q_\ell$，使得映射

$$\widetilde{K}^*(\Sigma X) \otimes \mathbb{Z}/p \xrightarrow{\mu^*} \widetilde{K}^*(\bigvee_{i=1}^{\ell} \bigvee_{j=1}^{m_i} S^{q_i+1}) \otimes \mathbb{Z}/p \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} \bigoplus_{j=1}^{m_i} \mathbb{Z}/p$$

是满射。

那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 $M = mg'$ 的倍数

$$g' = \gcd(q_1, \dots q_\ell, 2(p-1))$$

足够大，我们就有

$$\mathrm{rank}_p(\pi_M(\Sigma X)) \geq \frac{1}{M^{1+\varepsilon}} \varphi^{(\frac{\mathrm{conn}(X)+1}{\dim(X)+1})M},$$

其中 φ 是次数为 q_ℓ 的多项式的唯一正实根

$$z^{q_\ell} - \sum_{i=1}^{\ell} m_i z^{q_\ell - q_i} = 0,$$

（特别地， $\varphi \geq (\sum_{i=0}^{\ell} m_i)^{\frac{1}{q_\ell}} = (\sum_{i=0}^{\ell} m_i)^{\frac{1}{\max(q_1, \dots q_\ell)}}$ ，conn(X) 是 X 的 p-局部连通度，而 dim(X) 是 X 的有理上同调维数。

论文末尾的定理 3.3 和注记 3.4 给出了一个更强的估计。特别是，这两个定理中的渐近公式都从下方给出了 p-局部同伦群的秩的指数函数下界。与定理 1.2 不同，证明定理 1.7 并不需要取边界，但其拓扑图景颇为复杂。这种困难最终源于 James 构造与 Adams 运算之间的相互作用；据作者所知，这种相互作用最早见于 Selick 的论文 [Sel] ，而 [Boy1] 正是以该文为模型的。从组合角度看，这种相互作用体现为最后一节中的条件 (*)。这一条件意味着，我们最终能在同伦群中找到其副本的那个“李代数”会“滞后”——出现在比预期更高的维数中。最终，这一点例如体现为定理 1.7 的指数中的因子 ($\frac{\mathrm{conn}(X)+1}{\dim(X)+1}$)。

定理 1.7 有一些有趣的应用。例如，令 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ 表示由 $\mathbb{C}^n$中的k维复线性子空间构成的格拉斯曼流形，它是单连通的，复维数为$k(n-k)$。回顾一下，$\mathrm{Gr}_1(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$。在 [Boy1 的例 2.6]，中，证明了当 $n \geq 3$ 且$0 < k < n$ 时，存在一个映射

$$S^3 \vee S^5 \longrightarrow \Sigma \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$$

~它在 $K^*(\ ) \otimes \mathbb{Z}/p$ 上诱导出满射，对所有奇素数 p 都成立。因此，以下推论可由定理 1.7 立即推出，它强化了 [Boy1 的例 2.5 和 2.6]。

推论 1.8。设 p 为奇素数， $n \geq 3$ 且 $0 < k < n$。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 m 足够大，就有

$$\mathrm{rank}_p(\pi_{2m}(\Sigma \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))) \geq \frac{1}{(2m)^{1+\varepsilon}} \Big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^{\frac{m}{2k(n-k)+1}}. \qquad \square$$

类似地，令 $H_{n,\ell}$ 为由下式定义的 Milnor 超曲面

$$H_{n,\ell} = \{([z],[w]) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^\ell \mid \sum_{i=0}^{\min(n,\ell)} z_i w_i = 0\},$$

它是单连通的，复维数为 $n+\ell-1$。在 [Boy1 的例 2.7], 中证明了，当 $n \geq 2$ 且 $\ell \geq 3$ 时，存在一个映射

$$S^3 \vee S^5 \longrightarrow \Sigma H_{n,\ell}$$

~它在 $K^*(\ ) \otimes \mathbb{Z}/p$ 上诱导满射，对所有奇素数 p均成立。因此，以下推论可直接由定理 1.7 得出，它强化了 [Boy1，例 2.7]。

推论 1.9。设 p 为奇素数， $n \geq 2$ 且 $\ell \geq 3$。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 m 足够大，我们就有

$$\operatorname{rank}_p(\pi_{2m}(\Sigma H_{n,\ell})) \geq \frac{1}{(2m)^{1+\varepsilon}} \Big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^{\frac{m}{2(n+\ell)-1}}. \qquad \square$$

考虑 n阶酉群 $U(n)$，它是连通的，实维数为 n^2。在 [Boy1，例 2.8], 中，已证明当 $n \geq 3$ 时，存在一个映射

$$S^3 \vee S^5 \longrightarrow U(n)$$

~它在 $K^*(\ )\otimes\mathbb{Z}/p$ 上诱导满射，对所有奇素数 p均成立。显然，此映射可以提升到特殊酉群 $SU(n)$，该群是 2-连通的，实维数为 n^2-1。因此，以下推论可直接由定理 1.7 得出，它强化了 [Boy1，例 2.8]。

推论 1.10. 设 p 是奇素数且 $n \geq 3$。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 m 足够大，我们就有

$$\operatorname{rank}_p(\pi_m(\Sigma U(n))) \geq \frac{1}{m^{1+\varepsilon}} \varphi^{\frac{m}{n^2+1}} > \frac{1}{m^{1+\varepsilon}} (1.19)^{\frac{m}{n^2+1}},$$
$$\operatorname{rank}_p(\pi_m(\Sigma SU(n))) \geq \frac{1}{m^{1+\varepsilon}} \varphi^{\frac{3m}{n^2}} > \frac{1}{m^{1+\varepsilon}} (1.70)^{\frac{m}{n^2}},$$

其中 φ 是 $z^5 - z^2 - 1 = 0$ 的唯一正实根。 $\square$

本文结构如下。第 2 节讨论代数与组合学。第 2.2 小节讨论不带微分的自由李代数，第 2.3 小节研究带微分情形下的边界模。随后利用这些结果证明第 3 节中的主要定理。

致谢 本文是在 Guy Boyde 于南安普顿大学担任英国工程与自然科学研究委员会博士奖博士后期间撰写的。他谨向 Naomi Andrew、George Davenport、Lawk Mineh 和 Stephen Theriault 致谢，感谢他们提供的许多有益交流。

Ruizhi Huang 得到了国家自然科学基金委员会（项目编号：11801544 和 12288201）、国家重点研发计划（编号：2021YFA1002300）、中国科学院青年创新促进会以及中国科学院数学与系统科学研究院“陈景润”未来之星计划的部分资助。

2. Algebra

2.1. 复数运算。

引理 2.1. 设 S 是一个有限的正整数集合，设 $g =$ 为 S 的最大公约数，并设 $\eta \in \mathbb{C}$ 非零。那么，η^g 是正实数，当且仅当对所有 $i \in S$， η^i 都是正实数。

证明。“仅当”方向由以下事实得出： g 整除 S 中的每一项。对于“若”方向，由贝祖定理可知，对每个 $i \in S$，都有 $\alpha_i \in \mathbb{Z}$，使得 $\sum_i \alpha_i \cdot i = g$。因此，若每个 η^i 都是正实数，则可得

$$\eta^g = \eta^{\sum_i \alpha_i \cdot i} = \prod_i (\eta^i)^{\alpha_i},$$

这是正实数幂的乘积，因此也是正实数。 □

引理 2.2. 设 c_0、 $\dots c_{k-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中 $c_0 \geq 1$。多项式

$$P(z) = z^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i z^i$$

恰有一个正实根 φ，其重数为 1，且满足 $\varphi \geq 1$。其余根 η 满足 $|\eta| \leq \varphi$；等号成立当且仅当 η 是 φ 与一个 g 次单位根的乘积，其中 $g =$ 与 $\{i \mid c_i \neq 0\} \cup \{k\}$的最大公约数。

证明。 P 中相邻系数之间的符号变化次数为 1，因此根据笛卡尔符号法则， P 恰有一个正实根。记此根为 φ。重新整理可得 $\varphi^k = \sum_{i=0}^{k-1} c_i \varphi^i$。由于 $c_0 \geq 1$，必有 $\varphi^k \geq 1$，因此 $\varphi \geq 1$。

设 $\eta \in \mathbb{C}$ 是 P的一个根。取模并应用三角不等式，得到

$$|\eta|^k = |\eta^k| = |\sum_{i=0}^{k-1} c_i \eta^i| \leq \sum_{i=0}^{k-1} c_i |\eta|^i.$$

上述等号成立当且仅当：1）对于所有满足 $c_i \neq 0$的 i， η^i 都是非负实数；2） $|\eta|$ 是 P的一个根。根据引理 2.1，第一个条件等价于 η^g 是非负实数，其中 $g =$ 与 $\{i \mid c_i \neq 0\}$的最大公约数。第二个条件等价于 $|\eta| = \varphi$，因为 $|\eta|$ 是非负实数。根 φ 满足这些条件，其余解可表示为 φ与 g 次单位根的乘积。

如果不等式是严格的，那么我们有 $P(|\eta|) < 0$。由于当 $|z|$ 足够大时，多项式 $P(|z|)$ 的值为正，且 φ 是唯一的正实根，因此对于任意 $|z| > \varphi$， $P(|z|) > 0$ 。由此可得 $|\eta| < \varphi$，证毕。□

对于次数为 k 的多项式 $P(z)$，设 $\eta_1, \dots, \eta_k$ 是 P 的根，计入重数。 P 的第 N 个牛顿多项式是复数 $\eta_1^N + \cdots + \eta_k^N$。如果 P 的系数均为实数，那么它的根成共轭对出现，牛顿多项式的取值也都是实数。引理 2.2 对牛顿多项式给出了相当精确的控制。特别地，下一个引理说明，当 $N = gn$ 是

g-可整除时，它们渐近地可由 $g\varphi^{gn}$ 很好地近似；当 N 不能被 g 整除时，则可用零以相同的误差近似。

引理 2.3. 设 $c_0, \dots c_{k-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中 $c_0 \geq 1$。当 $n \to \infty$ 时， c_0 的牛顿多项式

$$P(z) = z^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i z^i$$

满足

- 对于不能被 g 整除的 N，有

$$|\eta_1^N + \cdots + \eta_k^N| \leq (k-g)|\psi|^N.$$

- 当 $N = gn$ 可被 g 整除时，有

$$|g\varphi^{gn} - (\eta_1^{gn} + \cdots + \eta_k^{gn})| \leq (k-g)|\psi|^{gn},$$

其中 φ 是 $P(z)$ 的唯一正实根， ψ 是按绝对值大小排列的次大根，并且 $g =$ 与 $\{i \mid c_i \neq 0\} \cup \{k\}$ 的最大公约数。

根据定义， r_N 是小于 φ的正实数的 N次幂之和。这意味着，例如，该引理推出当 $n \to \infty$时，$(\eta_1^{gn} + \cdots + \eta_k^{gn}) \sim g\varphi^{gn}$。

证明。根据引理 2.2， $P(z)$的根分为两类：一类是 φ 与一个g次单位根的乘积，另一类是满足 $|\eta| < \varphi$ 的根 η （因此 $|\eta| \leq |\psi|$）。重要的是，第一类中的每个根的重数恰好为 1。

要看出这一点，将引理 2.2 应用于多项式

$$P'(z) = z^{\frac{k}{g}} - \sum_{i=0}^{k-1} c_i z^{\frac{i}{g}}$$

该多项式由将所有幂除以 g得到；再利用这样一个事实： $P(z)$的根恰好是 $P'(z)$的根的 g次方根。

于是，不妨设 η_1，..... η_g 是第一类根，从而 $|\eta_1| = \cdots = |\eta_g| = \varphi$。根据复分析或群论的基本知识，我们有 $\eta_1^N + \cdots + \eta_g^N = \begin{cases} g\varphi^N & g \mid N \\ 0 & g \nmid N \end{cases}$ ，，结论便由三角不等式得出。 □

2.2. 自由李代数。我们将域 $\mathbb{Z}$ 上自由李代数 $L = L(X)$ 的生成集 X 写作如下。令 $q_1 < \cdots < q_\ell$ 表示 X 中含有元素的不同次数。令 $x_{i,\,1}$， $x_{i,\,2}$，....., $x_{i,\,m_i}$ 表示次数为 q_i 的不同生成元，因此次数为 q_i 的生成元数目为 m_i。Hilton [Hil] 证明了 L 是一个自由 $\mathbb{Z}$-模。

令 $\mu\colon\ \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \{-1,0,1\}$ 为 Möbius 反演函数，定义如下：

$$\mu(s) = \begin{cases} 1 & s = 1 \\ 0 & s > 1 \text{ is not square free} \\ (-1)^{\ell} & s > 1 \text{ is a product of } \ell \text{ distinct primes.} \end{cases}$$

给定多项式 $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k$ 其中 $a_0 \neq 0$， $P(z)$ 的倒数多项式为 $a_k + a_{k-1}z + \cdots + a_0 z^k$。对于给定的 $P(z)$，设 $\eta_1, \ldots \eta_k$ 为 $P(z)$ 的倒数多项式的复根，计重数（因此 $P(z) = a_0 \prod_{i=1}^{k}(1 - \eta_i z)$）。记

$$S_N(P(z)) := \eta_1^N + \cdots + \eta_k^N$$

为倒数多项式的零点的第 N 个牛顿多项式。

以下定理归功于 Babenko。相较于他的表述，我们利用以下事实作了变量替换：对于固定的 N， $d \mapsto \frac{N}{d}$ 是 N 的约数集合上的一个自双射。

定理 2.4. [Bab，命题 1] 设 L 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上、以有限生成元集 $\{x_{i,j}\}$ 为生成元的自由分次李代数，记号同上。则

$$\operatorname{rank}(L_N) = \frac{(-1)^N}{N} \sum_{d|N} (-1)^{\frac{N}{d}} \mu(d) S_{\frac{N}{d}}(1 - \sum_{i=1}^{\ell} m_i z^{q_i}),$$

其中，求和遍历 N 的约数 d。 □

我们的下一个定理本质上是 Lambrechts [Lam，命题 1] 在自由李代数这一特殊情形下的一个结果。我们从 Babenko 的结果推导出这一结果，方法与 Lambrechts 的基本相同，但这里的情形更简单，而且还能得到稍强一些的结论。该定理的要点是，当 $g \mid N$ 时，$\operatorname{rank}(L_N)$ 可由 $\frac{g}{N}\varphi^N$ 很好地近似，其误差项由底数较小的指数项之和给出。

定理 2.5. 设 L 为定义在 $\mathbb{Z}$ 上、由有限生成元集 X 生成的自由分次李代数。与前面一样，记 $q_1 < \cdots < q_\ell$ 为包含 X 中某个元素的不同次数，并令 $g = \gcd(q_i)$。设 m_i 为次数 q_i 上的生成元个数。

- *If* $g \nmid N$, *then* $\operatorname{rank}(L_N) = 0$.
- *If* $g \mid N$, *then* $|\operatorname{rank}(L_N) - \frac{g}{N}\varphi^N| \leq \frac{q_\ell}{N}|\psi|^N + g\varphi^{\frac{N}{2}} + q_\ell|\psi|^{\frac{N}{2}}$,

其中， φ 是次数为 q_ℓ 的多项式的唯一正实根

$$P(z) = z^{q_\ell} - \sum_{i=1}^{\ell} m_i z^{q_\ell - q_i} = 0,$$

且 ψ 是绝对值次大的根。特别地， $\varphi \geq (\sum_{i=0}^{\ell} m_i)^{\frac{1}{q_\ell}} = (\sum_{i=0}^{\ell} m_i)^{1 \max(q_1, \ldots q_\ell)}$。

如果 $P(z)$ 没有绝对值严格小于 φ 的根（即“ψ 不存在”），那么可以忽略涉及 ψ 的项：准确地说，第二条中的不等式可以替换为 $|\mathrm{rank}(L_N) - \frac{g}{N}\varphi^N| \le g\varphi^{\frac{N}{2}}$。

证明。第一条直接由 L 集中在可被 g整除的次数上这一事实得出。

现在证明第二条。关键在于，定理 2.4 的巴本科公式由 $d=1$ 项主导。设 N 可被 g整除。根据定理 2.4（利用 $\mu(1)=1$），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(L_N) &= \frac{(-1)^N}{N}\sum_{d|N}(-1)^{\frac{N}{d}}\mu(d)S_{\frac{N}{d}}(1-\sum_{i=1}^{\ell}m_i z^{q_i}) \\ &= \frac{1}{N}S_N(1-\sum_{i=1}^{\ell}m_i z^{q_i}) + \frac{(-1)^N}{N}\sum_{\substack{d|N\\ d\ge 2}}(-1)^{\frac{N}{d}}\mu(d)S_{\frac{N}{d}}(1-\sum_{i=1}^{\ell}m_i z^{q_i}).\end{aligned}$$

我们将这两项记为 $S_N = S_N(1-\sum_{i=1}^{\ell}m_i z^{q_i})$，以简化记号。令

$$A_N := \frac{1}{N}S_N,$$

并令

$$B_N := \frac{(-1)^N}{N}\sum_{\substack{d|N\\ d\ge 2}}(-1)^{\frac{N}{d}}\mu(d)S_{\frac{N}{d}}.$$

根据引理 2.3（取 $n=\frac{N}{g}$），对于定理陈述中的 φ 和 ψ，我们有 $|S_N - g\varphi^N| \le (q_\ell - g)|\psi|^N \le q_\ell|\psi|^N$。因此，只需证明 $|B_N| \le g\varphi^{\frac{N}{2}} + q_\ell|\psi|^{\frac{N}{2}}$.

由于 $|\mu(d)| \le 1$，由引理 2.3 可知

$$|B_N| = \frac{1}{N}|\sum_{\substack{d|N\\ d\ge 2}}(-1)^{\frac{N}{d}}\mu(d)S_{\frac{N}{d}}| \le \frac{1}{N}\sum_{\substack{d|N\\ d\ge 2}}|S_{\frac{N}{d}}| \le \frac{1}{N}\sum_{\substack{d|N\\ d\ge 2}}(g\varphi^{\frac{N}{d}} + q_\ell|\psi|^{\frac{N}{d}}).$$

这个求和中的项数至多为 N 的约数个数，而这至多为N。该项是正底数的指数项之和，因此严格递增；特别地，对于 $d\ge 2$，有逐项估计 $g\varphi^{\frac{N}{d}} + q_\ell|\psi|^{\frac{N}{d}} \le g\varphi^{\frac{N}{2}} + q_\ell|\psi|^{\frac{N}{2}}$。综合以上结果可得

$$|B_N| \le g\varphi^{\frac{N}{2}} + q_\ell|\psi|^{\frac{N}{2}},$$

这正是所需的。

最后，我们验证 $\varphi \ge (\sum_{i=0}^{\ell}m_i)^{\frac{1}{q_\ell}}$。由于多项式 $P(z) = z^{q_\ell} - \sum_{i=1}^{\ell}m_i z^{q_\ell - q_i}$ 根据引理 2.2 有唯一的正根，因此只需验证 $P((\sum_{i=0}^{\ell}m_i)^{\frac{1}{q_\ell}})$ 非正。对于

每个 i, $\frac{q_\ell - q_i}{q_\ell}$都介于 1 和 0 之间，因此对任意 $x \geq 1$，我们都有 $x^{\frac{q_\ell - q_i}{q_\ell}} \geq 1$。由此可得

$$P((\sum_{i=0}^{\ell} m_i)^{\frac{1}{q_\ell}}) = (\sum_{i=0}^{\ell} m_i) - \sum_{i=1}^{\ell} m_i (\sum_{i=0}^{\ell} m_i)^{\frac{q_\ell - q_i}{q_\ell}} \leq (\sum_{i=0}^{\ell} m_i) - \sum_{i=1}^{\ell} m_i \cdot 1 = 0,$$

如所要求。 □

带微分的自由李代数。由于张量积给出了正确的泛性质，因而可通过将相应的自由李代数与 $\mathbb{Z}/p^r$ 作张量积，得到 $\mathbb{Z}/p^r$ 上的自由李代数。

在本小节中，我们考虑 $L = L(x, y) = L(x, dx)$，即以生成元 x 和 y ($dx = y$) 上的无环秩 2 自由微分 $\mathbb{Z}/p^r$-模为基础的 $\mathbb{Z}/p^r$上的自由微分李代数。假设 $\deg(x) = q + 1$，则 $\deg(y) = q$。根据定理 2.5，由于 $\gcd(q, q+1) = 1$，我们知道

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p^r}(L_N) \sim \frac{1}{N}\varphi^N,$$

其中 φ 是次数为 $q+1$ 的多项式的唯一正实根

$$z^{q+1} - z - 1 = 0.$$

此近似的误差大小呈指数级，其底数取决于次大根 ψ （按绝对值计）以及 $\sqrt{\varphi}$。

在本小节中，我们转而关注 $B := \operatorname{Im}(d) \subset L$，即边界模。我们的目标是证明定理 2.11。论证将按以下方式展开。已知（定理 2.7）， L 上的微分是“几乎无环”的。利用 $\operatorname{rank}(L_N) \sim \frac{1}{N}\varphi^N$这一事实进行计数论证，便可推出边界模的秩必须渐近地等于 L_N的秩的某个固定分数。

我们首先借助以下引理将问题化归到 $r = 1$ 的情形，该引理在 [Boy2]中作为引理 7.10 得到证明。

引理 2.6。设 $\varphi\colon\ M \longrightarrow N$ 是 $\mathbb{Z}/p^r$-模的一个映射，且 N 自由。则 $\operatorname{rank}^{\mathbb{Z}/p^r}(\operatorname{Im}(\varphi))$ =$\operatorname{rank}^{\mathbb{Z}/p}(\operatorname{Im}(\varphi \otimes \mathbb{Z}/p))$。□

现在假设 $r = 1$。设 u 是分次微分李代数 L over $\mathbb{Z}/p$ 中的一个偶维类，且对于 $p \neq 2$成立。按照 [CMN], , 令

$$\tau_k(u) = \operatorname{ad}^{p^k - 1}(u)(du),$$

并令

$$\sigma_k(u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p^k-1} \frac{1}{p}\binom{p^k}{j}[\operatorname{ad}^{j-1}(u)(du), \operatorname{ad}^{p^k-1-j}(u)(du)].$$

从我们的角度来看，下一个定理的要点是，自由微分李代数几乎无环。

定理 2.7。 [CMN，命题 4.9] 设 V 是一个无环微分 $\mathbb{Z}/p$向量空间。对于一个无环模 K，记作$L(V) \cong HL(V) \oplus K$。如果 K 有一个无环基，也就是说，一个基

$$\{x_\alpha, y_\alpha, z_\beta, w_\beta\},$$

其中 α 和 β 分别遍历指标集 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{J}$，并且我们有

$$d(x_\alpha) = y_\alpha, \deg(x_\alpha) \text{ even},$$

$$d(z_\beta) = w_\beta, \deg(z_\beta) \text{ odd},$$

那么 $HL(V)$ 有一个基

$$\{\tau_k(x_\alpha), \sigma_k(x_\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}, k\geq 1}.$$ □

该定理意味着，可以稍微修改 L 上的微分，使其成为无环的。具体而言，定义一个新的微分 $\overline{d}$: $L(V) \to L(V)$，令 $\overline{d} = d$ 作用于 K，并令 $\overline{d}(\tau_k(x_\alpha)) = \sigma_k(x_\alpha)$，$\overline{d}(\sigma_k(x_\alpha)) = 0$。当然，$\overline{d}$ 将不再满足莱布尼茨法则，但它仍将是一个次数为 -1 且满足 $\overline{d}^2 = 0$的向量空间自同态。

现在令 $\overline{B} := \mathrm{Im}(\overline{d}) \subset L$，并令 $\sigma \subset L$ 为由元素 $\sigma_k(x)$ 张成的子空间，其中 $x \in L$ 为某个偶数次且 $k \in \mathbb{Z}^+$。根据 $\overline{d}$ 的定义，我们得到以下推论。

推论 2.8。我们有 $\overline{B}_N \cong B_N \oplus \sigma_N$。 □

下一个引理给出一个粗略的上界，从而证明对 σ_N 进行近似是合理的 .

引理 2.9。我们有如下界

$$\dim_{\mathbb{Z}/p} \sigma_N \leq c_1 \cdot N\varphi^{\frac{N}{p}},$$

其中 $c_1 = 2(q+2)\varphi^{\frac{2}{p}}$。

证明。根据定义，σ_N 由类 $\sigma_k(x_\alpha)$ 张成，并且我们有 $\deg(\sigma_k(x_\alpha)) = k\deg(x_\alpha) - 2$。因此我们有

$$\dim_{\mathbb{Z}/p^r} \sigma_N \leq \sum_{\substack{M\leq N \\ p^k M-2=N}} \dim_{\mathbb{Z}/p} L_M \leq \sum_{\substack{M\leq N \\ p^k M-2=N}} (\frac{1}{M}\varphi^M + \frac{q+1}{M}|\psi|^M + \varphi^{\frac{M}{2}} + (q+1)|\psi|^{\frac{M}{2}})$$

$$\leq \sum_{\substack{M\leq N \\ p^k M-2=N}} ((q+2)\varphi^M + (q+2)\varphi^{\frac{M}{2}}) \leq \sum_{\substack{M\leq N \\ p^k M-2=N}} 2(q+2)\varphi^M.$$

根据定理 2.5（我们使用 $|\psi| < \varphi$，然后去掉因子 $\frac{1}{M}$，从而得到一个即使在 M 很小时也严格递增的界）。此求和包含少于 N 项，并且由于给定项的值随 M 增大，最大项的大小由 $M = \frac{N+2}{p^k} \leq \frac{N+2}{p}$ 控制，因此

$$\dim_{\mathbb{Z}/p} \sigma_N \leq N \cdot 2(q+2)\varphi^{\frac{N+2}{p}},$$

如所需。 □

接下来，我们估计 $\dim \overline{B}_N$ 的大小。

引理 2. 10. 设 ψ 是 $z^{q+1}-z-1$ 在 φ 之后绝对值最大的根。我们有

$$\dim_{\mathbb{Z}/p} \overline{B}_N \geq (1-\frac{N}{N-1}\frac{1}{\varphi})\cdot\frac{1}{N}\varphi^N - \kappa|\psi|^N - c_2\varphi^{\frac{N}{2}},$$

其中 $\kappa=(q+1)(1+\frac{1}{|\psi|})$ 且 $c_2=(q+2)(1+\frac{1}{\sqrt{\varphi}}) \leq 2(q+2)$。

证明。由于 $\overline{d}$ 是无圈的，我们有 $\overline{B}_N=\mathrm{Ker}(\overline{d}: L_N \to L_{N-1})$。于是由第一同构定理可得 $L_N/\overline{B}_N \cong \overline{B}_{N-1}$，又由于 $\overline{B}_{N-1}\subset L_{N-1}$，我们得到

$$\dim_{\mathbb{Z}/p}\overline{B}_N \geq \dim_{\mathbb{Z}/p} L_N - \dim_{\mathbb{Z}/p} L_{N-1}.$$

由定理 2.5 可得（因为 $g=1$ 和 $|\psi|<\varphi$）

$$\dim_{\mathbb{Z}/p} L_{N-1} \leq \frac{1}{N-1}\varphi^{N-1} + \frac{q+1}{N-1}|\psi|^{N-1} + (q+2)\varphi^{\frac{N-1}{2}},$$

and

$$\dim_{\mathbb{Z}/p} L_N \geq \frac{1}{N}\varphi^N - \frac{q+1}{N}|\psi|^N - (q+2)\varphi^{\frac{N}{2}}.$$

合并这些不等式即可得到结论。 □

现在我们可以陈述并证明本小节的主要定理。

定理 2.11. 设 $L\otimes\mathbb{Z}/p^r = L(x,dx)\otimes\mathbb{Z}/p^r = L(x,y)\otimes\mathbb{Z}/p^r$ 是在 $\mathbb{Z}/p^r$ 上由两个生成元 x 和 y 自由生成、且满足 $y=dx$ 的微分分次李代数。设 $q=\deg(y)$，使得 $\deg(x)=q+1$。设 $B=\mathrm{Im}(d)\subset L\otimes\mathbb{Z}/p^r$ 为边界子模。那么我们有如下界

$$\mathrm{rank}(B_N) \geq (1-\frac{N}{N-1}\frac{1}{\varphi})\cdot\frac{1}{N}\varphi^N - cN\varphi^{\frac{N}{2}} - \kappa|\psi|^N,$$

其中 $\varphi>1$ 是次数为 n 的多项式的唯一正实根

$$z^{q+1}-z-1=0,$$

ψ 是绝对值次大的根，$c=2(q+2)(1+\varphi)$，且 $\kappa=(q+1)(1+\frac{1}{|\psi|})$。我们有如下界 $2^{\frac{1}{q+1}}<\varphi<1+\frac{1}{q}$。

证明。B 根据引理 2.6，只需证明 $r=1$ 情况下的定理。由引理 2.8，我们有 ve

$$\dim_{\mathbb{Z}/p} B_N \geq \dim_{\mathbb{Z}/p}\overline{B}_N - \dim_{\mathbb{Z}/p}\sigma_N.$$

结合引理 2.9 和 2.10（$c=c_1+c_2$）即可得出结论。 □

3. Topology

3.1. 同调。现在我们证明定理 1.2。

定理 1.2 的证明。在 [Boy2] it 的定理 1.5 的证明中，已经证明存在一个交换图表（此处无需关注映射定义的具体细节）：

$$\begin{array}{ccccc} L'(x,y) & \xrightarrow{\beta^r\circ\Phi_{\pi}^{r,r}} & \pi_*(\Omega P^{n+1}(p^r)) & \xrightarrow{(\Omega\mu)_*} & \pi_*(\Omega Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta\circ d} & & \downarrow{\scriptstyle h\circ\rho^s} & & \downarrow{\scriptstyle h\circ\rho^s} \\ L(x,y)\otimes\mathbb{Z}/p^s & \xrightarrow{\Phi_H^{r,s}} & H_*(\Omega P^{n+1}(p^r);\mathbb{Z}/p^s) & \xrightarrow{(\Omega\mu)_*} & H_*(\Omega Y;\mathbb{Z}/p^s). \end{array}$$

在图表中， $L(x,dx)\otimes\mathbb{Z}/p^s$ 是自由微分李代数（其中 $dx=y$， $\deg(x)=q+1$， $\deg(y)=q$）。左上角的项 $L'(x,dx)$ 是一个关于 $\mathbb{Z}/p^r$ 的模，它是一个“几乎”自由微分李代数。

现在我们使用 [Boy2] 中的各种结果。根据该论文推论 8.9 之前紧接着的注记，左侧竖直映射 $\theta\circ d$ 的像恰好是边界模BL。由引理 9.6，映射 $\Phi^r{}_{,H}{}^s$ 是一个单射，并且由假设，诱导的同调映射 $(\Omega\mu)_*$ 也是单射。由交换性可知，右下方的像 $I:=\mathrm{Im}(h\circ\rho^s\circ(\Omega\mu)_*\circ\beta^r\circ\Phi^r{}_{,\pi}{}^r)$ 同构于 BL。

关键在于， Y 的同伦群满射到 I，因此必须同样大。更确切地说，我们得到

$$\sum_{t=s}^{r}\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_N(\Omega Y))\geq\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/p^s}(I_N)=\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/p^s}(BL_N)$$

根据 [Boy2] 的引理 7.8，应用于图表中由以下部分组成的部分

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_N(\Omega Y) \\ & \nearrow & \uparrow \\ (L'(x,y))_N & \longrightarrow & H_N(\Omega Y;\,\mathbb{Z}/p^s)。 \end{array}$$

Y 上的环路只会使同伦群的次数发生平移，因此结论由本文的定理 2.11 得出。

□

3.2. K 理论。在本小节中，以下涉及整数 j 和 N 的线性不等式将频繁出现。我们将其称为条件（$*$）。这里， X 是一个固定的空间，$\mathrm{conn}(X)$ 是 X 的 p-局部连通度，而 $\dim(X)$ 是使得 $H^d(X;\mathbb{Q})\neq 0$ 成立的最大 d。

$$(*)\qquad j>\frac{1}{2(p-1)}\left(\frac{\dim(X)+1}{\mathrm{conn}(X)+1}-1\right)N+\left(\frac{\dim(X)+1}{\mathrm{conn}(X)+1}\right)(\mathrm{conn}(X)+2)-1),$$

下一个定理细化并略微推广了 [Boy1] 的定理 1.4。

定理 3.1. 设 p 是一个奇素数，且 X 是一个具有有限 CW-复形的 p-局部同伦型的道路连通空间。假设存在一个映射

$$\mu : \bigvee_{i=1}^{\ell} \bigvee_{j=1}^{m_i} S^{q_i+1} \to \Sigma X$$

满足 $1 \leq q_1 < q_2 < \cdots < q_\ell$，使得映射

$$\widetilde{K}^*(\Sigma X) \otimes \mathbb{Z}/p \xrightarrow{\mu^*} \widetilde{K}^*(\bigvee_{i=1}^{\ell} \bigvee_{j=1}^{m_i} S^{q_i+1}) \otimes \mathbb{Z}/p \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} \bigoplus_{j=1}^{m_i} \mathbb{Z}/p$$

是一个满射。

那么对于任意满足以下条件的 N, j

$$j > \frac{1}{2(p-1)}(\frac{\dim(X)+1}{\mathrm{conn}(X)+1} - 1)N + (\frac{\dim(X)+1}{\mathrm{conn}(X)+1})(\mathrm{conn}(X)+2)+1)$$

（即满足条件 (*)）我们有

$$\sum_{t=1}^{\infty} \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_{N+2j(p-1)-1}(\Omega\Sigma X)) \geq \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/p^r}(L_N \otimes \mathbb{Z}/p^r),$$

其中 L 如定理 2.5 所述（由与楔和中的球面对应的生成元生成的自由李代数），$\mathrm{conn}(X)$ 是 X 的 p-局部连通度，$\dim(X)$ 是由有理上同调衡量的 X 的维数，而 $g =$ 是 $q_1, \ldots, q_\ell$ 的最大公约数。

证明。这实质上是对 [Boy1] 的定理 1.4 更为谨慎的重述。该论文中的一些论证只针对两个球面的楔和给出，但都可原样适用于任意有限个球面的楔和。该论文的构造 7.15（用略有不同的语言表述）给出了如下形式的图表

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_N(\Omega\Sigma X) \\ & \nearrow & \uparrow \\ L_N \otimes \mathbb{Z}/p^r & \longrightarrow & E_{N+2j(p-1)} \end{array}$$

对于某个模 E_*，其定义与我们无关。

该论文的定理 7.16 接着指出，水平映射是单射，因此，正如定理 1.2 的证明中那样，只要存在某个 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得 $\ell^{j(p-1)+\frac{N-1}{2}} > \lambda_\ell^k$，其中整数 k 可取为 $\lceil \frac{N+1}{X\ \mathrm{conn}()+1} \rceil$.

因此，不等式可重排为 $j > \frac{1}{p-1}(\lceil \frac{N+1}{\mathrm{conn}(X)+1} \rceil \frac{\log(\lambda_\ell)}{\log(\ell)} - \frac{N-1}{2})$。在 [AA], 中已证明 $\lambda_\ell = \ell^{\lceil \frac{\dim(X)}{2} \rceil}$，因此可简化为

$$j > \frac{1}{p-1}(\lceil \frac{N+1}{\mathrm{conn}(X)+1} \rceil \lceil \frac{\dim(X)}{2} \rceil - \frac{N-1}{2}),$$

这由条件 (*) 推出，利用了对于整数 z，我们有 $\lceil \frac{z}{2} \rceil \leq \frac{z+1}{2}$。证明至此完成。□

下一步是贝祖定理的一个简单应用。

引理 3.2. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ 满足 $\alpha, \beta > 0$，且设 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足 $a > 0$。考虑线性组合的集合

$$S_n = \{n\alpha + j\beta \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ j > an + b\} \subset \mathbb{Z}.$$

令 $g' =$ 最大公约数(α, β)。存在一个与 n 无关的常数 B，使得对于每个 n，所有至少达到 $\min(S_n) + B$ 的 g' 的倍数，都包含在 S_i 中；其中某个 i 在以下意义下接近于 n：$n \leq i < n + \beta(\beta + 1)$。此外，存在一个满足界$B \leq \beta^2(\alpha + a(1 + \beta)) + \beta$的合适 B，因此任何 $B \geq \beta^2(\alpha + a(1 + \beta)) + \beta$ 也都是合适的。

如果固定 α 和 β（而允许 j 和 n 变化），那么一个熟知的事实是，形如 $n\alpha + j\beta$ 的整数集合恰好是 g' 的倍数集合。我们的陈述本质上只是这一事实的更复杂版本。

证明。首先考虑集合 S_n。如果整数 j 满足 $j > an + b$（因此 $n\alpha + j\beta$ 位于 S_n 中），那么增大参数 j 显然不会违反这一条件。因此，将 β 的正倍数加到 S_n 的一个元素上，会得到 S_n 的另一个元素。特别地，S_n 已经包含了所有通过将 $\min(S_n)$ 增加 β 的倍数而得到的整数。这些值按构造是 α 和 β 的线性组合，因此它们都是 g' 的倍数。

因此，接下来只需证明：通过将 n 增加‘一点点’，我们就能‘填补’ g'的中间倍数。为此，我们将通过‘给自己留出足够空间’来实现，具体来说，就是定义一个临时使用的量。定义（j，n）的超额为 $j -$（$an + b$）。于是，条件 $j > an + b$ 等价于（j，n）具有正的超额。

根据贝祖定理，设 $x > 0$ 和 $y \geq 0$ 是 $x\alpha - y\beta = g'$ 的解，且 y为最小的非负值。我们有 $0 < x \leq \frac{g'}{\alpha} + \beta$ 和 $0 \leq y \leq \alpha$。给定表达式 $n\alpha + j\beta$，将其中的 n 替换为$n + x$，并将 j 替换为 $j - y$，会使线性组合 $n\alpha + j\beta$ 的值增加 g'，同时使超额减少常数 $ax + y$。我们将利用这一点来填补 g'的其余倍数。

令 j_0 取 S_n 中最小的元素，即 $\min(S_n) = n\alpha + j_0\beta$。现在任取 $j \geq j_0 + \frac{\beta}{g'}(ax + y)$。$(n, j_0)$ 的超额为正，因此 (n, j) 的超额大于 $\frac{\beta}{g'}(ax + y)$。因此，我们可以将 $(x, -y)$ 加到 (n, j) 上，最多加 $\frac{\beta}{g'}$ 次，同时保持超额为正（并使 j 非负）。这表明，所有介于 $n\alpha + j\beta$ 和 $n\alpha + (j + 1)\beta$ 之间的 g' 的倍数，都包含在某个满足 $n \leq i < n + \frac{\beta}{g'}x$ 的 S_i 中；对于任意 $j \geq j_0 + \frac{\beta}{g'}(ax + y)$，我们都可以执行这一过程。特别地，所有不小于 $\min(S_n) + \beta(\frac{\beta}{g'}(ax + y) + 1)$ 的 g' 的倍数，都包含在某个满足 $n \leq i < n + \frac{\beta}{g'}x$ 的 S_i 中。这里多出的 $+1$ 是因为 j 必须为整数。这基本上就是所需结果，剩下的只需证明可以取与定理陈述中相同的常数。

现在，$\frac{g'}{\alpha} \leq 1$，所以 $x \leq 1 + \beta$，且$\frac{\beta}{g'}x \leq \beta x \leq \beta(1 + \beta)$。由此得到 i的界。结合这些不等式和 $y \leq \alpha$，即可推出 B 的界。证明至此完成。□

现在我们证明定理 1.7 的以下强版本。

定理 3.3. 设 p 是一个奇素数, X 是一个具有有限 CW-复形的 p-局部同伦类型的道路连通空间。假设存在一个映射

$$\mu : \bigvee_{i=1}^{\ell} \bigvee_{j=1}^{m_i} S^{q_i+1} \to \Sigma X$$

使得映射具有 $1 \le q_1 < q_2 < \cdots < q_\ell$, 且该映射

$$\widetilde{K}^*(\Sigma X) \otimes \mathbb{Z}/p \xrightarrow{\mu^*} \widetilde{K}^*(\bigvee_{i=1}^{\ell} \bigvee_{j=1}^{m_i} S^{q_i+1}) \otimes \mathbb{Z}/p \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} \bigoplus_{j=1}^{m_i} \mathbb{Z}/p$$

是满射。

那么存在常数 $\tau, \theta > 0$, 使得对于.....的倍数 $M = mg'$

$$g' = \gcd(q_1, \dots q_\ell, 2(p-1))$$

我们有

$$\sum_{t=1}^{\infty} \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_M(\Sigma X)) \ge \frac{\tau}{\frac{1}{g}\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1}M + \theta} \varphi^{(\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1})M} - o(\frac{1}{M}\varphi^{(\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1})M}),$$

其中 φ 是次数为 q_ℓ 的多项式的唯一正实根

$$z^{q_\ell} - \sum_{i=1}^{\ell} m_i z^{q_\ell - q_i} = 0,$$

（特别是, $\varphi \ge (\sum_{i=0}^{\ell} m_i)^{\frac{1}{q_\ell}} = (\sum_{i=0}^{\ell} m_i)^{\frac{1}{1 \max(q_1, \dots q_\ell)}}$） , $\operatorname{conn}(X)$ 是 X 的 p-局部连通度, $\dim(X)$ 是 X 的有理上同调维数, 并且 $g = \gcd(q_1, \dots, q_\ell)$。

证明。令 S_n 为满足以下条件的维数集合：定理 3.1 告诉我们, $\sum_{t=1}^{\infty} \operatorname{rank}^{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_M(\Sigma X)) \ge \operatorname{dim}^{\mathbb{Z}/p}(L_{ng} \otimes \mathbb{Z}/p^r)$。也就是说：

$$S_n = \{ng + j \cdot 2(p-1) \mid j \in \mathbb{Z},\ j > an + b\} \subset \mathbb{Z},$$

其中 $a = 2^{\frac{g}{(p-1)(\frac{\dim(X)+1}{\operatorname{conn}(X)+1} - 1)}}$, 而 $b = 2^{\frac{1}{(p-1)(\frac{\dim(X)+1}{\operatorname{conn}(X)+1}(\operatorname{conn}(X)+2)+1)}}$。

由引理 3.2, 存在一个常数 B, 可取为 $4(p-1)^2(g + a(1 + 2(p-1))) + 2(p-1)$, 使得对于每个 $M = mg' \ge \min(S_n) + B$, 都有 $\sum_{t=1}^{\infty} \operatorname{rank}^{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_M(\Sigma X)) \ge \operatorname{dim}^{\mathbb{Z}/p}(L_{ig} \otimes \mathbb{Z}/p^r)$, 其中某个 i 满足 $n \le i < n + 8(p-1)^2$。根据定理 2.5,

$$\sum_{t=1}^{\infty} \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_M(\Sigma X)) \ge \frac{1}{i}\varphi^{ig} - q_\ell |\psi|^{ig} - g\varphi^{\frac{ig}{2}} - q_\ell |\psi|^{\frac{ig}{2}}.$$

无论 $|\psi| > 1$ 是否成立, 我们都有 $|\psi|^{\frac{ig}{2}} < 1 + |\psi|^{ig} < 2 + |\psi|^{(n+8(p-1)^2)g}$, 因此该不等式意味着

$$(\dagger) \qquad \sum_{t=1}^{\infty} \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}/p^t}(\pi_M(\Sigma X)) \ge \frac{1}{n + 8(p-1)^2}\varphi^{ng} - g\varphi^{\frac{(n+8(p-1)^2)g}{2}} - q_\ell(3 + 2|\psi|^{(n+8(p-1)^2)g}).$$

现在只需找出 n 对 M的依赖关系, 并将这个表达式改写为以 M表示的形式。

S_n 的最小成员可通过取满足条件 (*) 的最小 $j = j_n$ 得到。根据定义， j_n 是满足 $j_n > an + b$的最小整数，因此 $j_n \leq an + b + 1$。于是，

$$\min(S_n) = ng + 2j_n(p-1) \leq g(\frac{\dim(X)+1}{\operatorname{conn}(X)+1})n + 2(p-1)(b+1).$$

总之，对于给定的 $M = mg'$，令 $n = n(M)$ 为满足$M \geq g(\frac{\dim(X)+1}{\operatorname{conn}(X)+1})n + 2(p-1)(b+1) + B$ 的最大非负整数。整理后得到 $n \leq \frac{M}{g(\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1})} - \frac{(2(p-1)(b+1)+B)}{(\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1})}$。由于 n 是这样的最大整数，因此它至少比这个表达式小 1。应用界$n \leq i < n + 8(p-1)^2$, , 现在可得

$$\frac{1}{n+8(p-1)^2}\varphi^{ng} \geq \frac{\tau}{\frac{1}{g}\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1}M + \theta}\varphi^{\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1}M},$$

对于常数 θ 和 τ，并且表明不等式 † 的其他项为 $o(\frac{1}{M}\varphi^{\operatorname{conn}(X)+1\dim(X)^{+1}})$，如所需。□

注记 3.4。在本注记中，我们给出定理 3.3 的常数和误差项，并汇总证明中出现的其他常数。

正整数 q_1、 $\dots q_\ell$ 已在定理 3.3（或定理 2.5）的假设条件中给出。于是

$$g = \gcd(q_1, \dots, q_\ell),$$

and

$$g' = \gcd(q_1, \dots q_\ell, 2(p-1)) = \gcd(g, 2(p-1)).$$

空间 X 和素数 $p \neq 2$ 已在定理 3.3 的假设条件中给出，$\dim(X)$ 是 X 的有理维数，而 $\operatorname{conn}(X)$ 是其 p-局部连通性。

定理 3.3 的证明中出现的常数于是为

$$a = \frac{g}{2(p-1)}(\frac{\dim(X)+1}{\operatorname{conn}(X)+1} - 1),$$

$$b = \frac{1}{2(p-1)}(\frac{\dim(X)+1}{\operatorname{conn}(X)+1}(\operatorname{conn}(X)+2)+1), \text{ and}$$

$$B = 4(p-1)^2(g + a(1+2(p-1))) + 2(p-1).$$

由证明可知，定理 3.3 的常数 θ 和 τ 可取为如下形式。

$$\theta = 8(p-1)^2 - (\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1})\frac{2(p-1)(b+1+B)}{g} \leq 8(p-1)^2, \text{ and}$$

$$\tau = \varphi^{-g-(\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1})(2(p-1)(b+1)+B)},$$

其中，a 通常， φ 是多项式 $P(z) = z^{q_\ell} - \sum_{i=1}^{\ell} m_i z^{q_\ell - q_i}$ 的唯一正根 $= 0.$

定理 3.3 中界的误差项表达式并不理想，我们仅指出它是负的，且形式为

$$-c_1\varphi^{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1}M} - c_2|\psi|^{\frac{\operatorname{conn}(X)+1}{\dim(X)+1}M} - 3q_\ell,$$

其中 c_i 为常数， ψ 是 $P(z)$ 在绝对值上仅次于 φ 的根。因此，该界与简洁表达式之间的偏差呈指数级，其底数由 $P(z)$ 的根决定。

References

[AA] J. F. Adams 和 M. F. Atiyah， K-理论与 Hopf不变量， *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **17**(1966)，31-38。3.2[Bab] I.K. Babenko，环空间 Poincar´e 级数的解析性质， *Mat. Zametki* **27** (5) (1980)，359-367。1, 2.4[Boy1] G. Boyde，通过 K-理论研究同伦群的 p-双曲性，即将在 *Math. Z.* 发表，2021。arXiv: 2101.04591。1, 1.2, 1.2, 1.2, 1.2, 3.2, 3.2[Boy2] G. Boyde，通过同调研究 $\mathbb{Z}/p^r$-双曲性，即将在 *Isr. J. Math.* 发表，2021。arXiv: 2106.03516。1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 2.3, 3.1[BS] R. Burklund，《球面的稳定同伦群有多大》，附录与 A. Senger 合作撰写，预印本，2022。arXiv:2203.00670 1, 1.1[CMN] F. R. Cohen、J. C. Moore 和 J. A. Neisendorfer，《同伦群中的挠元》，*Ann. of Math. (2)* **109** (1) (1979)，121-168。1.1, 2.3, 2.7[FHT] Y. F´élix、S. Halperin 和 J.-C. Thomas，《有限单连通复形的同伦群秩的指数增长与渐近公式》， *Ann. of Math.* **170** (2009)，443-464。1[Hen] Hans-Werner Henn，《同伦群的增长》， *Manuscripta Math.* **56** (2) (1986)，第 235–245 页。1[Hil] P. J. Hilton，《球面的并的同伦群》，*J. London Math. Soc.* **30** (1955)，154-172。2.2[HW] R. Huang 和 J. Wu，《悬垂有限复形的同伦群的指数增长》，*Math. Z.* **295**(2020)，第 1301-1321 页。1, 1, 1.1[Iri] Kouyemon Iriye，《空间的同伦群的秩》，*Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **23**(1) (1987)，第 209-213 页。1[Lam] P. Lambrechts，《空间 Poincar´e 级数的解析性质》，*Topology* **37** (6) (1998)，第 1363-1370 页。1, 2.2[Sel] Paul Selick，《无挠悬垂情形下的 Moore 和 Serre 猜想》，*Math. Proc. CambridgePhilos. Soc.* **94**(1) (1983)，第 53-60 页。1.2

Mathematical Institute, Utrecht University, Heidelberglaan 8 3584 CS Utrecht, The Netherlands*Email address*: g.boyde@uu.nl
Institute of Mathematics、 Academy of Mathematics and Systems Science、 Chinese Academy of Sciences、Beijing 100190、 China*Email address*: haungrz@amss.ac.cn*URL*: https://sites.google.com/site/hrzsea/