arXiv:2301.02506v1 [math.PR] 6 Jan 2023

多面体随机样本中的最大最近邻连边与连通阈值 †

Mathew D. Penrose ‡ Xiaochuan Yang §

2023年1月9日

摘要

设 X_1,X2, . . . 是凸多面体区域 A $\subset \mathbb{R}^d$ 中独立同分布的随机点。定义最大最近邻连边 L_n 为满足以下条件的最小 r：集合 $\mathscr{X}_n := \{X1, \ldots, X_n\}$ 中的每个点，在距离 r 以内都有另一个同类点。我们证明，当 n 趋于无穷大时，L_n 满足强大数定律。相关的连通阈值 M_n是使随机几何图 G($\mathscr{X}_n$, r) 连通的最小 r。我们证明，当 n $\to \infty$ 时，几乎必然有 $nL_n^d/\log n$ 收敛到一个取决于区域 A 几何形状的极限，而 $nM_n^d/\log n$ 收敛到同一个极限。

1 引言

本文主要研究随机样本 $\mathscr{X}_n$ 的连通阈值和最大最近邻边。该样本由欧几里得空间中一个指定紧区域 A 内的 n 个点组成。

连通阈值（记为 M_n）定义为使随机几何图 G($\mathscr{X}_n$,r) 连通的最小 r。对于任意有限的 $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^d$，图 G($\mathscr{X}$, r) 定义为顶点集为 $\mathscr{X}$、并在满足 $\|x - y\| \leq r$ 的顶点对 x,y 之间连边的图，其中 $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数。更一般地，对于 k $\in \mathbb{N}$, k-连通阈值 $M_{n,\,k}$ 定义为使 G($\mathscr{X}_n$,r) 为 k-连通的最小 r（参见第 2 节中的定义）。

†由英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/T028653/1

‡巴斯大学数学科学系，巴斯 BA2 7AY，英国。m.d.penrose@bath.ac.uk §伦敦布鲁内尔大学数学系，阿克斯布里奇 UB83PH，英国。xiaochuan.yang@brunel.ac.uk
ORCID:0000-0003-2435-4615

最大最近邻连接（记为 L_n）定义为使 $G(\mathcal{X}_n, r)$ 中每个顶点的度至少为 1 的最小 r。更一般地，对于满足 $k < n$ 的 $k \in \mathbb{N}$，最大 k 近邻连边 $L_{n,\,k}$ 定义为使 $G(\mathcal{X}_n, r)$ 中每个顶点的度至少为 k 的最小 r。这些阈值是随机变量，因为中心点的位置是随机的。我们研究当 n 增大时它们的概率行为。

我们将推导强大数定律，证明 $nL_{n,k}^{d}/\log n$ 几乎必然收敛到一个有限的正极限（当 $n \to \infty$ 时），并确定该极限的值。此外，我们还将证明 $nM_{n,k}^{d}/\log n$ 收敛到同一个极限。这些强大数定律也适用于更一般的情形，其中 k 可以随 n 变化，点的分布也可以是非均匀的。我们给出了 A 为凸多胞体时的此类结果。

此前，这类结果（对于 $L_{n,k}$ 和 $M_{n,k}$）已在 A 具有光滑边界以及 A 为 d维超立方体的情形下得到；参见 [5]。然而，对于一般的多胞体 A，极限常数如何取决于 A 的几何形状（即 A 的拓扑边界），从先前的结果中或许并不显而易见，而且情况相当微妙。

例如，事实证明，当 $d = 3$ 且点在一个多面体上均匀分布时，如果最尖锐的棱的角小于 $\pi/2$，L_n 的极限行为便由该角决定。我们认为（但在此不作正式证明），如果该角大于 $\pi/2$，那么距离其余点最远的点的位置在 A 上渐近均匀分布；但如果该角小于 $\pi/2$，该点的位置则渐近均匀分布于那些最尖锐的棱的并集上。

我们开展这项研究的动机有两个方面。首先，了解二维空间中的连通性阈值对于电信至关重要，例如在 5G 无线网络设计中，$\mathcal{X}_n$ 的节点代表移动收发器（例如参见[1]）。其次，在现代拓扑数据分析（TDA）中，检测连通性是检测所有其他高维拓扑特征的基础步骤，而环境空间的维度可能非常高。关于与 TDA 相关、且与本文所研究问题有关的问题，参见 [2, 3] 。关于研究随机几何图的一般动机，参见 [5]。

虽然我们的主要结果是在多胞体样本 $\mathbb{R}^d$ 的具体情形下给出的（见第 2 节），但我们的证明是通过一般的下界和上界（命题3.2和3.6）展开的；这些界是在更一般的情形下提出的，即考虑度量空间中满足某些正则性条件的随机点样本。这或许有助于未来可能开展的相关研究，例如探讨黎曼流形带边界时随机样本的类似问题；这一情形在拓扑数据分析中具有重要意义。

2 结果陈述

本文始终采用以下数学框架。令 $d \in \mathbb{N}$。假设我们具备以下要素：

- 有限紧凸多面体 $A \subset \mathbb{R}^d$（即只有有限个面。）
- A 上的博雷尔概率测度 μ，其概率密度函数为 f。
- 在同一个概率空间 $(\mathbb{S}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上，有一列独立同分布的随机 d 维向量 $X_1, X_2, \ldots$，它们具有共同的概率分布 μ；此外，还有一个单位速率泊松计数过程 $(Z_t, t \geq 0)$，它与 $(X_1, X_2, \ldots)$ 独立（因此，对于每个 $t > 0$，Z_t 均服从均值为 t 的泊松分布）。

对于 $n \in \mathbb{N}$、$t > 0$，令 $\mathscr{X}_n := \{X_1, \ldots, X_n\}$，并令 $\mathscr{P}_t := \{X_1, \ldots, X_{Z_t}\}$。这就是我们在此关注的点过程。注意，$\mathscr{P}_t$ 是 $\mathbb{R}^d$中的一个泊松点过程，其强度测度为 $t\mu$（例如参见 [4]）。

对于 $x \in \mathbb{R}^d$和 $r > 0$，设 $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq r\}$。对于 $r > 0$，令 $A^{(r)} := \{x \in A : B(x, r) \subset A^o\}$，即 A 的“r-内域”。

对于任意点集 $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^d$ 和任意 $D \subset \mathbb{R}^d$，我们用 $\mathscr{X}(D)$ 表示 $\mathscr{X}$中落在 D 内的点数，并在下文采用约定 $\inf(\varnothing) := +\infty$。

给定 n、$k \in \mathbb{N}$和 $t \in (0, \infty)$，定义最大 k 近邻连边 $L_{n,k}$ 如下：

$$L_{n,k} := \inf(\{r > 0 : \mathscr{X}_n(B(x, r)) \geq k + 1 \quad \forall x \in \mathscr{X}_n\}). \tag{2.1}$$

令 $L_n := L_{n,1}$。则 L_n 是最大最近邻连边。

我们主要关注 n 较大时 L_n 的渐近行为。更一般地，我们考虑 $L_{n,k}$，其中 k 可以随 n 变化。

令 $\theta_d := \pi^{d/2}/\Gamma(1 + d/2)$，表示 $\mathbb{R}^d$中单位球的体积。给定 x、$y \in \mathbb{R}^d$，我们用 $[x, y]$ 表示从 x 到 y 的线段，也就是集合 $\{x,y\}$的凸包。

给定 $m \in \mathbb{N}$ 以及函数 $f : \mathbb{N} \cap [m\ \infty) \to \mathbb{R}$ 和 $g : \mathbb{N} \cap [m\ \infty) \to (0, \infty)$，若当 $n \to \infty$时 $\limsup_{n\to\infty} |f(n)|/g(n) < \infty$，则记 $f(n) = O(g(n))$。若当 $n \to \infty$时 $\liminf_{n\to\infty} f(n)/g(n)) > 0$，则记 $f(n) = \Omega(g(n))$。给定 $s > 0$ 以及函数 $f : (0, s) \to \mathbb{R}$ 和 $g : (0, s) \to (0, \infty)$，若当 $r \downarrow 0$时 $\limsup_{r\downarrow 0} |f(r)|/g(r) < \infty$，则记 $f(r) = O(g(r))$。若当 $r \downarrow 0$时 $\liminf_{r\downarrow 0} f(r)/g(r)) > 0$，则记 $f(r) = \Omega(g(r))$。

在本节中，假设给定一个常数 $\beta \in [0, \infty]$ 和一个序列 $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，且满足

$$\lim_{n\to\infty} (k(n)/\log n) = \beta; \qquad \lim_{n\to\infty} (k(n)/n) = 0. \tag{2.2}$$

全文将使用以下记号：

$$f_0 := \operatorname{ess\,inf}_{x\in A} f(x); \qquad f_1 := \inf_{x\in\partial A} f(x); \tag{2.3}$$

$$H(t) := \begin{cases} 1-t+t\log t, & \text{if } t>0 \\ 1, & \text{if } t=0. \end{cases} \tag{2.4}$$

注意， –H(·) 是单峰的，在 t $=1$ 处取得最大值 0。给定一个 $\in[0,\infty)$，我们定义函数 ˆH$_a$：$[0,\infty) \to$ [a ∞) 如下：

$$y=\hat{H}_a(x) \Longleftrightarrow yH(a/y)=x,\ y\geq a,$$

其中 ˆH$_0$(0) $:=0$。注意，ˆH$_a$(x) 随 x 增大而增大，且 ˆH$_0$(x) $=$ x，ˆH$_a$(0) $=$ a。

在本文中，“almost surely”或“a.s.”表示“除了一个测度为零的$\mathbb{P}$-可测集之外”。对于 n $\in\mathbb{N}$，我们用 [n] 表示 $\{1,2,\ldots,n\}$。我们用 f $|_A$ 表示 f 在 A 上的限制。

令 Φ(A) 表示多胞体 A 的所有面（维数不超过 d -1）构成的集合。此外，令 Φ*(A) $:=$ Φ(A) $\cup\{$A$\}$；有时将 A 本身视为一个维数为 d 的面，对我们来说很有用。

给定一个面 φ $\in\Phi^*$(A)，用 D(φ) 表示该面的维数。那么 $0\leq$ D(φ) $\leq$d，且 φ 是嵌入在 $\mathbb{R}^d$ 中的 D(φ) 维多胞体。令 φ^o 表示 φ 的相对内部，并设 $\partial\varphi := \varphi\setminus\varphi^o$ （若 D(φ) $=0$，则取 $\varphi^o := \varphi$）。若 D(φ) $<$d，则设 fφ $:=$ inf$_{x\in\varphi}$ f (x)，若 φ $=$A，则设 fφ $:=$ f$_0$。

于是存在一个锥 $\mathscr{K}_\varphi$，包含于 $\mathbb{R}^d$，使得每个 x $\in\varphi^o$ 都有一个邻域 U$_x$，满足 A $\cap$U$_x$ $=$(x $+\mathscr{K}_\varphi$) $\cap$U$_x$。定义 φ 的角体积 ρφ 为 $\mathscr{K}_\varphi\cap$B(o,1) 的 d 维勒贝格测度。

例如，若 φ $=$A，则 ρφ $=\theta_d$。若 D(φ) $=$d -1，则 ρφ $=\theta_d/2$。若 D(φ) $=0$，则 φ $=\{$v$\}$，其中 v 是 $\in\partial$A 的某个顶点；并且对于所有充分小的 r，ρφ 等于 B(v, r) $\cap$A 的体积除以 r^d。若 d $=2$，D(φ) $=0$，且 ω_φ 表示 A 在顶点 φ处所张的角，则 ρφ $=\omega_\varphi/2$。若 d $=3$ 且 D(φ) $=1$，并且 α_φ 表示 A 在棱 φ处所张的角（即 A 的两个边界平面在 φ处相交所成的角），则 ρφ $=2\alpha_\varphi/3$。

定理 2.1. 设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的紧凸有限多面体。假设对于所有 x $\in\partial$A，f$|_A$ 在 x 处连续，且 f$_0>0$。假设 k(·) 满足 (2.2)。那么，几乎必然，

$$\lim_{n\to\infty} nL^d_{n,k(n)}/k(n) = \max_{\varphi\in\Phi^*(A)}\left(\frac{1}{f_\varphi\rho_\varphi}\right) \qquad \text{if } \beta=\infty; \tag{2.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} nL^d_{n,k(n)}/\log n = \max_{\varphi\in\Phi^*(A)}\left(\frac{\hat{H}_\beta(D(\varphi)/d)}{f_\varphi\rho_\varphi}\right) \qquad \text{if } \beta<\infty. \tag{2.6}$$

在接下来的三个结果中，我们将详细说明定理 2.1 的一些特殊情形。

推论 2.2。设 d $=2$，A 是一个凸多边形，且对于所有 x $\in \partial$A，f$|_A$ 在 x 处连续。令 V 表示 A 的顶点集，对于 v $\in$V，令 ω_v 表示 A 在顶点 v 处的张角。假设 (2.2) 在 $\beta < \infty$ 条件下成立。那么，几乎必然，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{nL^2_{n,k(n)}}{\log n}\right) = \max\left(\frac{\hat{H}_\beta(1)}{\pi f_0}, \frac{2\hat{H}_\beta(1/2)}{\pi f_1}, \max_{v\in V}\left(\frac{2\beta}{\omega_v f(v)}\right)\right). \tag{2.7}$$

特别地，对于任意常数 k $\in \mathbb{N}$，极限$_{n\to\infty}\left(\frac{n\pi L^2_{n,\ k}}{k\log n}\right) = \frac{1}{f_0}$.

推论 2.3。设 d $=3$ （因此 $\theta_d = 4\pi/3$），A 是一个凸多面体，且对于所有 x$\in\partial$A，f$|_A$ 在 x 处连续。令 V 表示 A 的顶点集，E 表示 A 的边集。对于 e$\in$E，令 α_e 表示 A 在边 e 处的张角，令 f$_e$ 表示 f 在 e 上的下确界。对于 v $\in$V，令 ρ_v 表示顶点 v 的角体积。假设 (2.2) 在$\beta < \infty$条件下成立。那么，几乎必然，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{nL^3_{n,k(n)}}{\log n}\right) = \max\left(\frac{\hat{H}_\beta(1)}{\theta_3 f_0}, \frac{2\hat{H}_\beta(2/3)}{\theta_3 f_1}, \frac{3\hat{H}_\beta(1/3)}{2\min_{e\in E}(\alpha_e f_e)}, \max_{v\in V}\left(\frac{\beta}{\rho_v f(v)}\right)\right).$$

具体而言，若 $\beta = 0$ 上述极限取到最大值$\left(\frac{3}{4\pi f_0}, \frac{1}{\pi f_1}, \max_{e\in E}\left(\frac{1}{2\alpha_e f_e}\right)\right)$。
In p

推论 2.4 ([5])。设 A $= [0,1]^d$，且 f $|_A$在 A 中所有 x 处均连续。对于1 $\le$ j $\le$ d，令 ∂_j 表示 A 的所有 (d $-$ j) 维面的并集，并令 f$_j$ 表示 f 在 ∂_j 上的下确界。假设 (2.2) 成立，且 $\beta < \infty$。那么

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{nL^d_{n,k(n)}}{\log n}\right) = \max_{0\le j\le d}\left(\frac{2^j\hat{H}_\beta(1-j/d)}{\theta_d f_j}\right), \quad a.s. \tag{2.8}$$

或许值得具体说明一下，在 $\beta = 0$ （例如，若 k(n) 为常数）且 μ 是 A 上的均匀分布（即 f (x) $\equiv$ f$_0$ 在 A 上）的特殊情形下，前述结果意味着什么。在此情形下，(2.6) 右侧等于 max$_{\varphi\in\Phi^*(A)}$ $D(\varphi)$ ($\int f_0\rho_\varphi$)。(2.7) 中的极限等于 $1/(\pi f_0)$，而推论 2.3 中的极限等于 $f_0^{-1}\max[1/\pi, \max_e(1/(2\alpha_e))]$。

到目前为止，我们只给出了最大 k近邻连接的结果。一个密切相关的阈值是 k-连通阈值，其定义为

$$M_{n,k} := \inf\{r > 0 : G(\mathscr{X}_n, r) \text{ is } k\text{-connected}\},$$

其中，若一个阶为 n 的图 G 无法通过移除至多 $k-1$ 个顶点而变为不连通，则称 G 为 k- 连通（$k<n$）。令 $M_{n,1}=M_n$。那么 M_n 就是连通阈值。

注意，对于所有满足 $k<n$ 的 k、n，我们都有

$$L_{n,k} \le M_{n,k}. \tag{2.9}$$

事实上，如果 $r<L_{n,k}$，那么存在 $i\in[n]$ 使得在 $G(\mathscr{X}_n, r)$ 中 $\deg X_i<k$。随后，移除所有与 X_i 相邻的顶点会使 $G(\mathscr{X}_n, r)$ 不连通，从而 $r<M_{n,k}$。这就证明了该结论。

我们的第二个主要结果表明，当 $n\to\infty$ 时，$(M_{n,k}/L_{n,k})\to 1$ 几乎必然成立。对于这一结果，我们需要 $d\ge 2$。

定理 2.5。设 $d\ge 2$。设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个紧凸有限多面体。假设 $f|_A$ 在 A 中的每个 $x\in\partial$处连续，并且 $f_0>0$。假设 $k(\cdot)$ 满足 (2.2)。那么，几乎必然有

$$\lim_{n\to\infty} nM_{n,k(n)}^d/k(n) = \max_{\varphi\in\Phi^*(A)}\left(\frac{1}{f_\varphi \rho_\varphi}\right) \qquad \text{if } \beta=\infty; \tag{2.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} nM_{n,k(n)}^d/\log n = \max_{\varphi\in\Phi^*(A)}\left(\frac{\hat{H}_\beta(D(\varphi)/d)}{f_\varphi \rho_\varphi}\right) \qquad \text{if } \beta<\infty. \tag{2.11}$$

注 2.6。在维数 $d=2,3$ 的情形以及 $[0,1]^d$ 恰有的情形下，可以阐明定理 2.5 的推论，其表述与推论 2.2–2.4 完全相同。

注 2.7. 定理 2.1 和 2.5 将 [5] 中关于 A 为单位立方体的情形的早期工作推广到了更一般的多面体区域。[5] 还考虑了 A 具有光滑边界的情形（在此情形下，$k(n)=$ 为常数；关于 $L_{n,k}$ 的结果最早见于 [6]，关于 $M_{n,k}$的结果最早见于 [7]）。

注 2.8. [8], 给出了关于 k-覆盖阈值 $R_{n,k}$的类似结果，其定义为

$$R_{n,k} := \inf\{r>0 : \mathscr{X}_n(B(x,r))\ge k \quad \forall x\in A\}; \quad n,k\in\mathbb{N}. \tag{2.12}$$

本文的结果与 [8, 定理 4.2], 共同表明，当 $n\to\infty$ 时，$L_{n,k(n)}$ 和 $M_{n,k(n)}$ 几乎必然都渐近于 $R_{n,k(n)}$。

3 证明

本节证明第 2 节中陈述的结果。在本节中，我们假设给定一个常数 $\beta\in[0,\infty]$ 以及一个满足 (2.2) 的序列 $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$。

回忆一下， μ表示 X_1，的分布，它具有密度 f，支撑集为 A；此外，$L_{n,\,k}$ 定义于 (2.1)。回忆一下，ˆHβ(x) 定义为满足 yH(β /y) =x 的 y ≥ β ，其中 H(·) 定义于 (2.4)。

对于 n ∈ ℕ 且 p ∈ [0, 1]，用 Bin(n, p) 表示参数为 n、p 的二项随机变量。回顾一下，H(·) 已在 (2.4) 中定义，而 Z_t 是参数为 t > 0 的泊松随机变量。本节的证明主要依赖以下引理。

引理 3.1（切尔诺夫界）。设 n ∈ ℕ、p ∈ (0, 1)、t > 0，且 0 ≤ k < n。(a) 若 k ≥ np，则 ℙ[Bin(n, p) ≥ k] ≤ exp(−npH(k/(np)))。(b) 若 k ≤ np，则 ℙ[Bin(n, p) ≤ k] ≤ exp(−npH(k/(np)))。(c) 若 k ≥ e^2np，则 ℙ[Bin(n, p) ≥ k] ≤ exp(−(k/2) log(k/(np))) ≤ e^{-k}。(d) 若 k < t，则 ℙ[Z_t ≤ k] ≤ exp(−tH(k/t))。(e) 若 k ∈ ℕ，则 ℙ[Z_t = k] ≥ $(2\pi k)^{-1/2}e^{-1/(12k)}$exp(−tH(k/t))。

证明。参见例如 [5, 引理 1.1、1.2 和 1.3]。 □

3.1 一个一般下界

在本小节中，我们给出 $L_{n,\,k(n)}$ 的渐近下界，无需对 A 作任何额外假设。事实上，此处的 A 可以是任意赋有博雷尔概率测度 μ 的度量空间，该测度满足以下条件，其中 $\varepsilon' > 0$ 和某个 d > 0:

$$\mu\left(B(x,r)\right) \geq \varepsilon' r^d, \quad \forall\, r \in (0,1), x \in A. \tag{3.1}$$

Th在这一一般情形下，(2.1) 中 $L_{n,\,k}$ 的定义显然可以沿用 g.

稍后，我们将通过把本小节的结果应用于 A 内的不同区域（即内部、边界和低维面），推导出第 2 节所述的结果。

给定 r > 0、a > 0，定义“装球数” ν(r,a) 为满足以下条件的最大整数 m：存在由 m 个互不相交的半径为 r 的闭球组成的集合，这些闭球的球心位于 A 中，且每个闭球的 μ-测度至多为 a。

命题 3.2（一般下界）。设 (3.1) 成立，其中 d $\varepsilon' > 0$。令 a > 0，b ≥0。假设 ν(r, ar^d) = Ω(r^{-b})，当 r ↓ 0 时。假设 (2.2)。那么几乎必然，若 β = ∞，则 $\liminf_{n\to\infty}\left(nL_{n,k(n)}^d/k(n)\right) \geq 1/a$。若 β < ∞，则 $\liminf_{n\to\infty}\left(nL_{n,k(n)}^d/\log n\right) \geq a^{-1}$ ˆHβ(b/d)，几乎必然。

证明。首先假设 β = ∞。令 u ∈ (0, 1/a)。设 $r_n := (uk(n)/n)^{1/d}$, n ∈ ℕ。由 (2.2)，当 n → ∞ 时，$r_n \to 0$ as。于是，当 n 充分大时，我们有 ν(r_n, ar_n^d) > 0，因此可以找到 y_n ∈ A，使得 μ(B(y_n, r_n)) ≤ ar_n^d，从而 nμ(B(y_n, r_n)) ≤ auk(n)。如果

$k(n) \le e^2 n\mu(B(y_n, r_n))$（因此 $n\mu(B(y_n,r_n)) \ge e^{-2}k(n)$），那么由于 $\mathscr{X}_n(B(y_n,r_n))$ 服从参数为 n 和 $\mu(B(y_n,r_n))$ 的二项分布，由引理 3.1(a) 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathscr{X}_n(B(y_n,r_n)) \ge k(n)] &\le \exp\left(-n\mu(B(y_n,r_n))H\left(\frac{k(n)}{n\mu(B(y_n,r_n))}\right)\right)\\ &\le \exp\left(-e^{-2}k(n)H\left((au)^{-1}\right)\right),\end{aligned}$$

而如果 $k(n) > e^2 n\mu(B(y_n, r_n))$，那么根据引理 3.1(c)，$\mathbb{P}[\mathscr{X}_n(B(y_n, r_n)) \ge k(n)] \le e^{-k(n)}$。因此，$\mathbb{P}[\mathscr{X}_n(B(y_n, r_n)) \ge k(n)]$ 关于 n 可求和，因为根据 (2.2)，当 $n \to \infty$ 时，$k(n)/\log n \to \infty$。

令 $\delta_0 \in (0, 1)$。由 (3.1) 可得 $\mu(B(y_n, \delta_0 r_n) \ge \varepsilon' \delta_0^d u k(n)/n$。因此根据引理 3.1(b)，$\mathbb{P}[\mathscr{X}_n(B(y_n, \delta_0 r_n)) = 0] \le \exp(-\varepsilon' \delta_0^d u k(n))$，这关于 n 可求和。

因此，根据博雷尔-坎泰利引理，事件 $F_n := \{\mathscr{X}_n(B(y_n, r_n)) < k(n)\} \cap \{\mathscr{X}_n(B(y_n, \delta_0 r_n)) > 0\}$ 几乎必然对除有限多个 n 之外的所有 n 都发生。但若 F_n 发生，则 $L_{n,\,k(n)} \ge (1-\delta_0) r_n$，从而 $nL_{n,\,k(n)}^d / k(n) \ge (1-\delta_0)^d u$。这就得到了 $\beta = \infty$ 的结果。

现在反过来假设 $\beta < \infty$。首先假设 $b = 0$，使得 $\hat{}H_\beta(b/d) = \beta$。假设 $\beta > 0$（否则结论显然成立）。取 $\beta' \in (0,\beta)$。令 $\delta > 0$，满足 $\beta' < \beta - 2\delta$，且 $\beta' H\left(\frac{\beta-2\delta}{\beta'}\right) > \delta$.。这是可行的，因为 $H(\beta/\beta') > 0$，且 $H(\cdot)$ 连续。对于 $n \in \mathbb{N}$，设 $r_n := ((\beta' \log n)/(an))^{1/d}$。再设 $k'(n) = \lceil(\beta - \delta)\log n\rceil$，以及 $k''(n) = \lceil(\beta - 2\delta)\log n\rceil$。根据假设，$\nu(r_n, a r_n^d) = \Omega(1)$，因此对于所有充分大的 n，我们可以（并确实）选取 $x_n \in A$，使得 $n\mu(B(x_n, r_n)) \le n a r_n^d = \beta' \log n$。接着，由简单的耦合以及引理 3.1(a)，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathscr{X}_n(B(x_n,r_n)) \ge k''(n)] &\le \mathbb{P}\left[\mathrm{Bin}\left(n, (\beta' \log n)/n\right) \ge k''(n)\right]\\ &\le \exp\left(-\left(\beta' \log n\right) H\left(\frac{\beta - 2\delta}{\beta'}\right)\right) \le n^{-\delta}.\end{aligned}$$

令 $\delta' \in (0, 1)$。根据 (3.1)，当 n 足够大且对所有 $x \in A$ 时，

$$n\mu(B(x, \delta' r_n)) \ge n\varepsilon'(\delta' r_n)^d = \varepsilon'(\delta')^d(\beta'/a)\log n$$

因此，根据引理 3.1(b)，$\mathbb{P}[\mathscr{X}_n(B(x\delta' r_n)) = 0] \le n^{-\varepsilon'(\delta')^d \beta'/a}$。

现在选择 $K \in \mathbb{N}$ 使得 $\delta K > 1$ 且 $K\varepsilon'(\delta')^d\beta'/a > 1$。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $z(n) := n^K$。当 n 足够大时，我们有 $k'(z(n)) \ge k''(z(n+1))$，因此根据前述估计，

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[\mathscr{X}_{z(n+1)}(B(x_{z(n+1)}, r_{z(n+1)})) \ge k'(z(n))]\\ &\quad\le \mathbb{P}[\mathscr{X}_{z(n+1)}(B(x_{z(n+1)}, r_{z(n+1)})) \ge k''(z(n+1))] \le (n+1)^{-\delta K},\end{aligned}$$

并且由于 $x^{z(n+1)} \in A$，同时 $\mathbb{P}[\mathscr{X}_{z(n)}(B(x^{z(n+1)}, \delta' r^{z(n)})) = 0] \le n^{-\varepsilon'(\delta')^d \beta' K/a}$。这两个上界关于 n 均可求和，因此根据博雷尔-坎泰利引理，几乎必然地，对所有

充分大的 n，我们都有事件

$$\{\mathscr{X}_{z(n+1)}(B(x_{z(n+1)}, r_{z(n+1)})) < k'(z(n))\} \cap \{\mathscr{X}_{z(n)}(B(x_{z(n+1)}, \delta' r_{z(n)})) > 0\}.$$

假设上述事件发生，并且 $m \in \mathbb{N}$ with $z(n) \le m \le z(n+1)$。注意，$r_{z(n+1)}/r_{z(n)} \to 1$ as $n \to \infty$。那么，只要 n 足够大，

$$L_{m,k'(z(n))} \ge r_{z(n+1)} - \delta' r_{z(n)} \ge (1-\delta')^2 r_m,$$

此外，$k'(z(n)) \le k(m)$，因此 $L_{m,\,k(m)} \ge (1-\delta')^2 r_m$。因此，几乎必然有

$$\liminf_{m\to\infty} (m L_{m,k(m)}^d / \log m) \ge (1-\delta')^{2d} \liminf_{m\to\infty} (m r_m^d / \log m) = (1-\delta')^{2d} a^{-1} \beta',$$

由此得到该情形下的结果。

现在转而假设 $\beta < \infty$ and $b > 0$。令 $u \in (a^{-1}\beta, a^{-1}\hat{}H\beta(b/d))$；注意，这意味着 $uaH(\beta/(ua)) < b/d$。选取 $\varepsilon > 0$ 使得 $(1+\varepsilon)uaH(\beta/(ua)) < (b/d) - 9\varepsilon$。另令 $\delta' \in (0, 1)$。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $r_n = (u(\log n)/n)^{1/d}$。令 $m_n := v(r_n, ar_n^d)$，并选取 $x_{n,\,1}, \ldots, x_{n,\,m_n} \in A$，使得球 $B(x_{n,\,1}, r_n) \ldots, B(x_{n,\,m_n}, r_n)$ 两两不相交，且每个球的 μ-测度至多为 ar_n^d。

设 $\lambda(n) := n + n^{3/4}$ 且 $\lambda^-(n) := n - n^{3/4}$。对于 $1 \le i \le m_n$，若 $k(n) \ge 1$，则由一个简单的耦合以及引理 3.1(e),

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\mathscr{P}_{\lambda(n)}(B(x_{n,i}, r_n)) \le k(n)] \ge \mathbb{P}[Z_{\lambda(n)ar_n^d} \le k(n)] \\
&\ge \left(\frac{e^{-1/(12k(n))}}{\sqrt{2\pi k(n)}}\right) \exp\left(-\lambda(n) a r_n^d H\left(\frac{k(n)}{\lambda(n) a r_n^d}\right)\right).
\end{aligned}$$

现在 $\lambda(n) r_n^d / \log n \to u$，因此由 (2.2)，当 $n \to \infty$ 时，$k(n)/(\lambda(n) a r_n^d) \to \beta/(ua)$。因此，由于 H(·) 的连续性，只要 n 足够大，对于 $1 \le i \le m_n$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\mathscr{P}_{\lambda(n)}(B(x_{n,i}, r_n)) \le k(n)] \\
&\ge \left(\frac{e^{-1/12}}{\sqrt{2\pi(\beta+1)\log n}}\right) \exp\left(-(1+\varepsilon) auH\left(\frac{\beta}{au}\right) \log n\right).
\end{aligned}$$

因此，根据我们对 ε 的选择，存在一个常数 $c > 0$，使得对于所有充分大的 n 以及所有 $i \in [m_n]$，我们都有

$$\mathbb{P}[\mathscr{P}_{\lambda(n)}(B(x_{n,i}, r_n)) \le k(n)] \ge c(\log n)^{-1/2} n^{9\varepsilon - b/d} \ge n^{8\varepsilon - b/d}. \tag{3.2}$$

由于 $x_{n,i} \in A$，根据 (3.1)，当 n 足够大且 $1 \le i \le m_n$ 时，我们有 $\mu(B(x_{n,i}, \delta' r_n)) \ge \varepsilon'(\delta' r_n)^d$（同样，$\mu(B(x_{n,i}, r_n)) \le ar_n^d$）。因此，给定 $\mathscr{P}_{\lambda(n)}(B(x_{n,i}, r_n))$ 的值，

$\mathscr{P}_{\lambda^{-}(n)}(B(x_{n,i},\delta' r_n))$ 的值服从二项分布，其概率参数有一个正的下界。此外，$\max_{1\le i\le m_n}\mathbb{E}[\mathscr{P}_{\lambda(n)}(B(x_{n,i},r_n))]$ 随着 $n\to\infty$ 趋于无穷。因此，存在 $\eta>0$，使得对所有足够大的 n，定义事件

$$E_{n,i}:=\{\mathscr{P}_{\lambda(n)}(B(x_{n,i},r_n))\le k(n)\}\cap\{\mathscr{P}_{\lambda^{-}(n)}(B(x_{n,i},\delta' r_n)\ge 1\},$$

对于所有充分大的 n，我们有

$$\inf_{1\le i\le m_n}\mathbb{P}[E_{n,i}|\mathscr{P}_{\lambda(n)}(B(x_{n,i},r_n))\le k(n)]\ge\eta.$$

因此，令 $E_n:=\cup_{i=1}^{m_n}E_{n,i}$，对于所有充分大的 n，我们有

$$\mathbb{P}[E_n^c]\le(1-\eta n^{8\varepsilon-b/d})^{m_n}\le\exp(-\eta m_n n^{8\varepsilon-b/d}).$$

根据假设，$m_n=\nu(r_n,ar_n^d)=\Omega(r_n^{-b})$，因此对于充分大的 n，我们有 $m_n\ge n^{(b/d)-\varepsilon}$，从而 $\mathbb{P}[E_n^c]$ 关于 n 可求和。

根据引理 3.1(d)，并对 $H(x)$ 在 $x=1$ 处作泰勒展开（详见《引理 1.4]》的印刷版 [5,；电子版中可能有笔误），对于所有充分大的 n，有 $\mathbb{P}[Z^{\lambda(n)}<n]\le\exp(-\frac{1}{9}n^{1/2})$。类似地，$\mathbb{P}[Z_{\lambda^{-}(n)}>n]\le\exp(-\frac{1}{9}n^{1/2})$。如果 E_n 发生，且 $Z_{\lambda^{-}(n)}\le n$，并且 $Z_{\lambda(n)}\ge n$，那么对某个 $i\le m_n$，$\mathscr{X}_n$ 中至少有一个点落在 $B(x_n,i,\delta' r_n)$ 内，且至多有 $k(n)$ 个点落在 $B(x_n,i,r_n)$ 内，因此 $L_{n,k(n)}>(1-\delta')r_n$。于是根据并集界

$$\mathbb{P}[L_{n,k(n)}\le r_n(1-\delta')]\le\mathbb{P}[E_n^c]+\mathbb{P}[Z_{\lambda(n)}<n]+\mathbb{P}[Z_{\lambda^{-}(n)}>n],$$

根据前面的估计，该项关于 n 可求和。因此，由博雷尔-坎泰利引理，

$$\mathbb{P}[\liminf(nL_{n,k(n)}^d/\log n)\ge u(1-\delta')^d]=1,\quad u<a^{-1}\hat{H}_\beta(b/d),\delta'\in(0,1),$$

所以该情形下结论也成立。 □

3.2 定理 2.1 的证明

在本小节中，我们与定理 2.1 中一样，假设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个紧凸有限多胞体。我们还假设概率测度 μ 相对于 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度具有密度 f，且对所有 $x\in\partial A$，$f|_A$ 在 x 处连续；并且 $f_0>0$，回顾 (2.3)，$f_0:=\operatorname{ess\,inf}_{x\in A}f(x)$。此外，设 $k(n)$ 满足某个$\beta\in[0,\infty]$对应的 (2.2)。令 Vol 表示 d 维勒贝格测度

引理 3.3. 存在仅依赖于 f_0 和 A 的 $\varepsilon'>0$，使得 (3.1) 成立。

证明. 令 B_0 为包含在 A 中的一个（固定）球，并令 b 表示 B_0 的半径。对于 $x \in A$，令 S_x 表示 $B_0 \cup \{x\}$ 的凸包。由于 A 是凸集，故 $S_x \subset A$。若 $x \notin B_0$,，则对 $r < b$，集合 $B(x, r) \cap S_x$ 是 B(x, r) 与一个顶点为 x 的锥的交集；又由于 A 有界，该锥的角体积有一个正的下界，且此下界对所有 $x \in A \setminus B_0$ 一致。因此，$r^{-d}\mathrm{Vol}(B(x, r) \cap A)$ 对所有 $r \in (0, b)$ 和 $x \in A \setminus B_0$ 都有一个正的下界（进而对所有 $x \in A$ 也如此）。由假设 $f_0 > 0$，(3.1) 得证。 □

回忆一下，$\nu(r, a)$ 在命题 3.2 之前定义。回忆一下，对于每个面$\varphi \in \Phi^*(A)$，我们用 ρ_φ表示 A 在 φ 处的角体积，并令 $f_\varphi := \inf_\varphi f(\cdot)$（若$\varphi \in \Phi(A)$）或 $f_\varphi = f_0$（若 $\varphi = A$）。

引理 3.4. 设 $\varphi \in \Phi^*(A)$。假设 $f|_A$ 在所有 $x \in \varphi$处连续。那么，几乎必然：

$$\liminf_{n\to\infty} \left(nL^d_{n,k(n)}/k(n) \right) \geq (\rho_\varphi f_\varphi)^{-1} \qquad \text{if } \beta = \infty; \tag{3.3}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left(nL^d_{n,k(n)}/\log n \right) \geq (\rho_\varphi f_\varphi)^{-1} \hat{H}_\beta(D(\varphi)/d) \qquad \text{if } \beta < \infty. \tag{3.4}$$

证明. 设 $a > f_\varphi$。取 $x_0 \in \varphi$ 使得 $f(x_0) < a$。若 $D(\varphi) > 0$，还假设 $x_0 \in \varphi^o$。由假设 $f|_A$ 在 x_0, 处的连续性，对于所有充分小的 $r > 0$，有$\mu(B(x_0,r)) \leq a\rho_\varphi r^d$，因此 $\nu(r, a\rho_\varphi r^d) = \Omega(1)$，当 $r \downarrow 0$时。于是，根据命题 3.2（取 $b = 0$），若 $\beta = \infty$，则几乎必然有 $\liminf_{n\to\infty} nL^d_{n,k(n)}/k(n) \geq 1/(a\rho_\varphi)$，且 (3.3) 得证。

若 $\beta < \infty$ 且 $D(\varphi) = 0$，则由命题 3.2（取 $b = 0$），几乎必然有 $\liminf_{n\to\infty} (nL^d_{n,k(n)}/\log n) \geq \hat{}H^\beta(0)/(a\rho_\varphi)$，因此在此情形下有 (3.4)。

现在假设 $\beta < \infty$ 且 $D(\varphi) > 0$。取 $\delta > 0$，使得对所有 $x \in B(x0, 2\delta) \cap A$，均有 $f(x) < a$；此外还满足 $B(x0, 2\delta) \cap A = B(x0, 2\delta) \cap (x_0 + \mathscr{K}_\varphi)$（锥 $\mathscr{K}_\varphi$ 在第 2 节中定义）。那么，对所有 $x \in B(x0, \delta) \cap \varphi$ 以及所有 $r \in (0, \delta)$，我们有 $\mu(B(x, r)) \leq a\rho_\varphi r^d$。

存在常数 $c > 0$，使得当 $r > 0$ 足够小时，我们可以找到至少 $cr^{-D(\varphi)}$个点 $x_i \in B(x0, \delta) \cap \varphi$，这些点两两之间的距离均大于 2r，因此 $\nu(r, a\rho_\varphi r^d) = \Omega(r^{-D(\varphi)})$，当 $r \downarrow 0$时成立。于是由命题 3.2 可得

$$\liminf_{n\to\infty} \left(nL^d_{n,k(n)}/k(n) \right) \geq (a\rho_\varphi)^{-1} \hat{H}_\beta(D(\varphi)/d),$$

几乎必然成立，并且由此可得（3.4）。 □

如果我们假设 $f|_A$ 在整个 A 上连续，就不需要下面的引理，因为我们可以对 $\varphi = A$ 以及低维面使用引理 3.4。不过，在定理 2.1 中，我们采用了较弱的假设：仅当 $x \in \partial A$ 时，$f|_A$ 在 x 处连续。在这种情况下，我们还需要以下引理来处理 $\varphi = A$。

引理 3.5。以下情形成立：

$$\mathbb{P}[\liminf(nL^d_{n,k(n)}/k(n)) \geq 1/(\theta_d f_0)] = 1 \qquad \text{if } \beta = \infty; \tag{3.5}$$

$$\mathbb{P}[\liminf_{n\to\infty}(nL^d_{n,k(n)}/\log n) \geq \hat{H}_\beta(1)/(\theta_d f_0)] = 1 \qquad \text{if } \beta < \infty. \tag{3.6}$$

证明。令 $\alpha > f_0$。于是通过在 [8, 引理 6.4], 中取 $B = A$。

$$\liminf_{r\downarrow 0} r^d \nu(r, \alpha\theta_d r^d) > 0. \tag{3.7}$$

若 $\beta = \infty$，令 $r_n := (k(n)/(n\theta_d\alpha))^{1/d}$；若 $\beta < \infty$，则令 $r_n := (\hat{H}_\beta(1)(\log n)/(n\theta_d\alpha))^{1/d}$。

若 $\beta = \infty$，则由 (3.7)，我们可以应用命题 3.2（取 $a = \alpha\theta_d$ 和 $b = 0$），从而推出几乎必然有 $\liminf_{n\to\infty} nL^d_{n,k(n)}/k(n) \geq (\theta_d\alpha)^{-1}$，并且 (3.5) 得证。

反之，假设 $\beta < \infty$。由 (3.7)，$\nu(r\ \alpha\theta_d r^d) = \Omega(r^{-d})$，当 $r \downarrow 0$ 时成立。因此由命题 3.2，几乎必然有 $\liminf_{n\to\infty}\left(nL^d_{n,k(n)}/\log n\right) \geq (\alpha\theta_d)^{-1}\hat{H}_\beta(1)$。令 $\alpha \downarrow f_0$ 即得结论。

□

定理 2.1 的证明。首先假设 $\beta < \infty$。由 (2.1) 和 (2.12) 可知，对所有 n、k，$L_{n,k} \leq R_{n,k+1}$。此外，由 (2.2) 可得 $(k(n)+1)/\log n \to \beta$ 当 $n \to \infty$ 时。因此，利用[8, 定理 4.2] 得到下面的第二个不等式，可得几乎必然有

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{nL^d_{n,k(n)}}{\log n}\right) \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{nR^d_{n,k(n)+1}}{\log n}\right) \leq \max_{\varphi\in\Phi^*(A)}\left(\frac{\hat{H}_\beta(D(\varphi)/d)}{f_\varphi\rho_\varphi}\right). \tag{3.8}$$

或者，也可以利用 (2.9) 以及 M_n 的渐近上界推导出这个上界；该渐近上界将在下一节证明定理 2.5 时推导。

由引理 3.5 和 3.4 可知，几乎必然有

$$\liminf_{n\to\infty}\left(nL^d_{n,k(n)}/\log n\right) \geq \max_{\varphi\in\Phi^*(A)}\left(\frac{\hat{H}_\beta(D(\varphi)/d)}{f_\varphi\rho_\varphi}\right), \tag{3.9}$$

将此结果与 (3.8) 结合，得到 (2.6)。

现在假设 $\beta = \infty$。在这种情形下，同样利用不等式 $L_{n,k} \leq R_{n,k+1}$ 和 [8,定理 4.2]，可得以下结果取代 (3.8)：几乎必然有

$$\limsup_{n\to\infty}\left(nL^d_{n,k(n)}/k(n)\right) \leq \max_{\varphi\in\Phi^*(A)}\left(\frac{1}{f_\varphi\rho_\varphi}\right). \tag{3.10}$$

此外，根据引理 3.5 和 3.4，我们几乎必然有以下结论，而非式 (3.9)：

$$\liminf_{n\to\infty}\left(nL^d_{n,k(n)}/k(n)\right) \geq \max_{\varphi\in\Phi^*(A)}\left(\frac{1}{f_\varphi\rho_\varphi}\right),$$

将此结果与 (3.10) 结合，即得 (2.5)。 □

3.3 一个一般上界

本小节给出 $M_{n,k(n)}$ 的一个渐近上界。与第 3.1 节中给出的下界一样，我们将在更一般的情形下陈述结果（下文的命题 3.6）；假设 A 是一个一般的度量空间，并赋有两个 Borel 测度 μ 和 μ_*（二者可能相同，也可能不同）。假设 μ 是一个概率测度，且 μ_* 是一个倍增测度，也就是说，存在常数 c_*（称为 μ_* 的倍增常数），使得对所有 $x \in A$ 和 $r > 0$，均有 $\mu_*(B(x, 2r)) \le c_*\mu_*(B(x, r))$。我们还需要对 A 施加以下条件：序条件 (O)、球条件 (B)、拓扑条件 (T) 和几何条件 (G)：

(O) A 中的元素存在一个全序。

(B) 对所有 $x \in A$ 和 $r > 0$，球 B(x,r) 都是连通的。

(T) 空间 A 是单连通的（参见 [5,第 9.1] 节），且也是连通的。

(G) 存在 $\delta_1 > 0$ 和 $K_0 \in (1,\infty)$，使得对所有 $r < \delta_1$ 以及任意 $x \in A$，$A \setminus B(x, r)$ 的连通分支数至多为两个；若有两个连通分支，则其中至少一个的直径不超过 $K_0 r$。

给定 $D \subset A$ 和 $r > 0$，记 D_r 为 $\{y \in A : \mathrm{dist}(y,D) \le r\}$。此外，令 $\kappa(D,r)$ 表示 D 的 r-覆盖数，即满足 D 可由以 D 中的点为中心、半径为 r 的 m 个球覆盖的最小 $m \in \mathbb{N}$。

与前文相同，给定 μ，我们假设 $X_1, X2, \ldots$ 是 A 中相互独立的 μ-分布随机元素，其 k-连通阈值为 $M_{n,\,k}$ 定义为使 $G(\mathscr{X}_n, r)$ 连通的最小 r，其中 $\mathscr{X}_n := \{X1, \ldots, X_n\}$。

命题 3.6（一般上界）。设 (A, μ, μ_*) 如上所述，且 A 满足条件 (O)、(B)、(T)、(G)。令 $\ell \in \mathbb{N}$，并令 $d > 0$。对每个 $j \in [\ell]$，令 $a_j > 0$、$b_j \ge 0$。假设对于每个 $K \in \mathbb{N}$，存在 $r_0(K) > 0$，使得对于所有 $r \in (0, r_0(K))$，A 都存在一个划分 $\{T(j,K,r), j \in [\ell]\}$，满足以下两个性质。首先，对于每个固定的 $K \in \mathbb{N}$、$j \in [\ell]$，有

$$\kappa(T(j,K,r), r) = O(r^{-b_j}) \quad \text{as } r \downarrow 0, \tag{3.11}$$

其次，对于所有 $K \in \mathbb{N}$、$j \in [\ell]$、$r \in (0, r_0(K))$，以及任意与 T(j,K,r) 相交且直径 $(G) \le Kr$ 的 $G \subset A$，我们有

$$\mu(G_r \setminus G) \ge a_j r^d. \tag{3.12}$$

假设 (2.2) 成立。则几乎必然，

$$\limsup_{n\to\infty} \left(nM^d_{n,k(n)}/k(n)\right) \le \max_{j\in[\ell]}(a_j^{-1}) \qquad \text{如果 } \beta = \infty;$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(nM^d_{n,k(n)}/\log n\right) \le \max_{j\in[\ell]}(a_j^{-1}\hat{H}_\beta(b_j/d)) \qquad \text{如果 } \beta < \infty.$$

稍后我们将使用命题 3.6 来证明定理 2.5，具体情形为：A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个凸多胞体，μ 取为密度为 f 的测度，μ_* 取为限制在 A 上的勒贝格测度（事实上，如果 f 有上界，则可以改为取 $\mu_* = \mu$）。划分中的每个集合都表示靠近某个特定面 $\varphi \in \Phi^*(A)$ 的区域（若 $\varphi = A$，则划分中对应的集合是一个内部区域）。在这种情形下，测度下界 (3.12) 中的系数 a_i 很大程度上取决于特定面附近确定锥的几何。

为了证明命题 3.6，我们首先阐明测度倍增性质的一些有用推论。在这一结果中（稍后还会再次用到），我们用 $|\cdot|$ 表示集合的基数（元素个数）。

引理 3.7. 设 μ_* 是度量空间 A 上的一个倍增测度，其倍增常数为 c_*。则有以下结论。

(i) 对任意 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $\rho(\varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得对所有 $x \in A$、$r \in (0,\infty)$，都有 $\kappa(B(x,r), \varepsilon r) \le \rho(\varepsilon)$。

(ii) 对所有 $r \in (0,1)$ 和所有 $D \subset A$，我们都可以找到 $\mathscr{L} \subset D$，其中 $|\mathscr{L}| \le \kappa(D, r/5)$，使得 $D \subset \cup_{x\in\mathscr{L}} B(x, r)$；此外，球 $B(x, r/5)$（$x \in \mathscr{L}$）两两不相交。

证明。为证明 (i)，令 $x \in A$，$r > 0$。根据维塔利覆盖引理，我们可以找到一个集合 $\mathscr{U} \subset B(x, r)$，使得球 $B(y, \varepsilon r/5)$（$y \in \mathscr{U}$）两两不相交，且 $B(x, r) \subset \cup_{y\in\mathscr{U}} B(y, \varepsilon r)$。设 $\rho(\varepsilon) := \lceil c_*^{\lceil \log_2 15/\varepsilon \rceil} \rceil()$。然后反复利用 μ_* 的倍增性质，可得 $\mu_*(B(y, 3r)) \le \rho(\varepsilon)\mu_*(B(y, r/5))$，对所有 $y \in A$ 均成立。此外，对所有 $y \in \mathscr{U}$，$B(x, 2r) \subset B(y, 3r)$。又有 $\cup_{y\in\mathscr{U}} B(y, \varepsilon r/5) \subset B(x, 2r)$，且这些球的并互不相交。因此

$$|\mathscr{U}|\mu_*(B(x,2r)) \le \sum_{y\in\mathscr{U}} \mu_*(B(y,3r)) \le \rho(\varepsilon) \sum_{y\in\mathscr{U}} \mu_*(B(y,\varepsilon r/5)) \le \rho(\varepsilon)\mu_*(B(x,2r)),$$

因此 $|\mathscr{U}| \le \rho(\varepsilon)$；关于 $\kappa(B(x,r), \varepsilon r)$ 的结论随之得出。

现在证明 (ii)。设 $\mathscr{L}^0 \subset D$，满足 $|\mathscr{L}^0| = \kappa(D, r/5)$，且 $B \subset \cup_{x\in\mathscr{L}^0} B(x, r/5)$。由维塔利覆盖引理，可找到 $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}^0$，使得 $D \subset \cup_{x\in\mathscr{L}} B(x, r)$，并且球 $B(x, r/5)$（$x \in \mathscr{L}$）互不相交，于是 (ii) 得证。 □

给定可数 $\sigma \subset A$、$r > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，若几何图 $G(\sigma, r)$ 是 k-连通的，则称 σ 是 (r,k)-连通的。假设条件（B）成立，则当且仅当 $\sigma_{r/2}$ 是 A 的连通子集时，σ 是 (r, 1)-连通的。

引理 3.8（佩尔斯论证）。假设 (O)。设 $\ell \in \mathbb{N}$，$a \in [1,\infty)$。令 $r \in (0, 1/a)$，且 $n \in \mathbb{N}$。设 $\mathscr{L} \subset A$ 满足以下性质：对所有 $x \in A$，均有 $|\mathscr{L} \cap B(x, r)| \le \ell$，并令 $x_0 \in \mathscr{L}_r$。那么，包含 x_0 且基数为 n 的 $\mathscr{L}$ 中，(ar, 1)-连通子集的数量至多为 c^n，其中 c 仅取决于 ℓ、a 和 c_*。

证明。首先我们断言，对所有 $x \in A$，均有 $|\mathscr{L} \cap B(x,ar)| \le \ell\rho(1/a)$，其中 $\rho(1/a)$ 如引理 3.7-(i) 所述。事实上，我们可以用 $\rho(1/a)$ 个半径为 r 的球覆盖 B(x,ar)，且这些球中每个都至多包含 ℓ 个 $\mathscr{L}$ 点。

有一种用于统计 $\mathbb{Z}^d$ 的连通集的标准算法（通过构造一个非递减列表序列）；算法的细节见 [5, 引理 9.3]。

在这一一般情形下，该算法仍然有效，只需将字典序替换为 A 的全序（使用假设 (O)）。该算法必须在第 n 步停止（n 为集合的基数）；在每一步中，可添加元素所构成集合的可能性数量至多为 $2^{\ell\rho(1/a)}$（以某个固定点为中心、距离不超过 ar 的点集的所有可能子集）；因此，基数为 n 的 ar-连通集数量至多为 $2^{\ell\rho(1/a)n}$。 □

为证明命题 3.6 做准备，我们回顾一个与图 G 的 k-连通性等价的条件。我们称图 G 中的非空集合 U、W $\subset$V 构成一个 k-分离对，若满足：(i) G 中由 U 诱导的子图是连通的，W 亦然；(ii) U 中没有任何元素与 W 中的任何元素相邻；(iii) $V \setminus (U \cup W)$ 中与 $U \cup W$ 相邻的顶点数至多为 k。若满足：(i) G 中由 U 诱导的子图是连通的；(ii) $V \setminus U$ 中至多有 k 个顶点与 U 相邻，则称 U 是 G 的一个 k-分离集。这些定义的重要性将在以下引理中说明。

引理 3.9. *[5, 引理 13.1]* 设 G 是一个含有多于 k 个 $+1$ 顶点的图。那么 G 要么是 (k $+1$)-连通的，要么有 k 个分离对，但不会同时满足两者。

由引理 3.9 可知，要证明命题 3.6，只需证明：对于任意 $u > \max_j a_j^{-1} H_\beta(b_j/d)$，当 $n \to \infty$ 时，$G(\mathscr{X}_n, r_n)$ 中不存在 $(k(n)-1)$-分离对，其中 $r_n = (u \log n/n)^{1/d}$。注意，对于任意固定的 $K \in \mathbb{N}$，若 (U,W) 是一个 $(k-1)$-分离对，则 U 和 W 的直径要么都至少为 Kr_n，要么其中一个（不妨设为 U）是直径至多为 Kr_n 的 $(k-1)$-分离集。这里，非空集合 $U \subset A$ 的直径定义为 $\mathrm{diam}(U) := \sup_{u,v\in U} \mathrm{dist}(u, v)$。

目标是证明，当 $n \to \infty$ 时，两种结果都不可能发生。我们先排除存在小型分离集的情况。

引理 3.10。假设命题 3.6 的条件成立。若 $\beta = \infty$，令 $u > \max_j a_j^{-1}$，并对 $n \in \mathbb{N}$，设 $r_n = (uk(n)/n)^{1/d}$。若 $\beta < \infty$，令 $u > \max_{j\in[\ell]} a_j^{-1} H_\beta(b_j/d)$，并对 $n \in \mathbb{N}$ 设 $r_n = (u(\log n)/n)^{1/d}$。对于 $K \in \mathbb{N}$，令 $E_n(K, u)$ 表示事件：存在一个直径至多为 Kr_n 的 $(k(n)-1)$-分离集，它是 $G(\mathscr{X}_n, r_n)$ 的分离集。那么，对于任意 $K \in \mathbb{N}$，几乎必然只有有限多个 n 会使 $E_n(K, u)$ 发生。

证明。首先假设 $\beta < \infty$。关于 u 的条件意味着，对于每个 $j \in [\ell]$，$ua_j > \beta$ 以及 $ua_j H(\beta/(ua_j)) > b_j/d$。于是我们可以且确实选择 $\beta' > \beta$ and $\varepsilon \in (0, 1/4)$，使得

对于每个 $j \in [\ell]$，$(1-3\varepsilon)^d u a_j > \beta'$ and

$$(1-3\varepsilon)^d u a_j H\Big(\frac{\beta'}{(1-3\varepsilon)^d u a_j}\Big) > \frac{b_j}{d} + \varepsilon.$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，定义 $k'(n) = \lceil \beta' \log n \rceil$。

令 $K \in \mathbb{N}$，对于 $r \in (0, r_0(K))$，令 $T(j, K, r)$ 如命题 3.6 的假设中所述。对于 $j \in [\ell]$，我们断言 $\kappa(T(j, K, r_n), \varepsilon r_n/5) = O(r_n^{-b_j})$，当 $n \to \infty$ 时成立。事实上，

$$\kappa(T(j,K,r_n),\varepsilon r_n/5) \le \kappa(T(j,K,r_n),r_n) \sup_{x\in A} \kappa(B(x,r_n),\varepsilon r_n/5) \le \rho\,\kappa(T(j,K,r_n),r_n),$$

其中 $\rho = \rho(\varepsilon/5)$ 是引理 3.7-(i) 中的常数。由假设 (3.11) 可得此断言。

选取 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有满足 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \ge n_0$ 的 n，都有 $r_n < r_0(k)$。根据引理 3.7-(i)，对于每个 $j \in [\ell]$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们可以找到一个集合 $\mathscr{L}_{jn} \subset T(j, K, r_n)$，满足 $|\mathscr{L}_{jn}| \le \kappa(T(j, K, r_n), \varepsilon r_n/5) = O(r_n^{-b_j})$，且 $T(j, K, r_n) \subset \cup_{x\in\mathscr{L}_{jn}} B(x, \varepsilon r_n)$，并且球 $B(x, r_n\varepsilon/5)$（其中 $x \in \mathscr{L}_{jn}$）两两不相交。令

$$\mathscr{L}_n := \cup_{i=1}^{\ell} \mathscr{L}_n^j. \tag{3.13}$$

对于 $n \ge n_0, j \in [\ell]$，令 $\mathscr{T}_{jn} = \{\sigma \subset \mathscr{L}_n : \operatorname{diam}(\sigma) \le 2Kr_n, \sigma \cap T(j, K, r_n) \ne \varnothing\}$。我们声称，$\mathscr{T}_{jn}$ 的基数为 $O(|\mathscr{L}_{jn}|) = O(r_n^{-b_j})$。事实上，$\sigma \cap T(j, K, r_n) \ne \varnothing$ 表示 $\sigma \cap \mathscr{L}_{jn} \ne \varnothing$。此外，正如下文所解释的，

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathscr{L}_n} |B(x, 2Kr_n) \cap \mathscr{L}_n| < \infty, \tag{3.14}$$

且 $\operatorname{diam}(\sigma) \le 2Kr_n$。基数的断言由此得出。

现在我们证明 (3.14)。根据引理 3.7-(i)，当 n 足够大时，对所有 $x \in A$，我们可以用半径为 $r_n\varepsilon/5$ 的 $\rho(\varepsilon/(10K))$ 个球覆盖 $B(x, 2Kr_n)$，且这些球中的每一个最多包含 ℓ 个 $\mathscr{L}_n$ 的点。

对于 $n \ge n_0$ 和 $\sigma \subset \mathscr{L}_n$，令

$$D_{\sigma,n} := \sigma_{(1-2\varepsilon)r_n} \setminus \sigma_{\varepsilon r_n}. \tag{3.15}$$

设 $J \in \mathbb{N}$ 且 $J > 1/\varepsilon$。对于 $m \in \mathbb{N}$，定义 $z(m) := m^J$。对于 $\sigma \subset \mathscr{L}_{z(m)}$，定义

$$F_m(\sigma) = \{\mathscr{X}_{z(m)}(D_{\sigma,z(m)}) < k'(z(m))\}.$$

现令 $n \in \mathbb{N}$，并选择 $m = m(n)$，使得 $z(m) \le n < z(m+1)$。假设 $z(m) \ge n_0$。设 $E_n(K, u)$ 发生，并令 U 为 $G(\mathscr{X}_n, r_n)$ 的一个 $(k(n)-1)$-分离集，且 $\operatorname{diam}(U) \le Kr_n$。我们将其定义为“像素版本” $\sigma(U) := \mathscr{L}_{z(m(n))} \cap U^{\varepsilon r_{z(m(n))}}$。

由于 $\sigma(U)\subset A$，存在 $j\in[\ell]$ 使得 $\sigma(U)\cap T(j,K,r_{z(m(n))})\neq\varnothing$。根据我们对 ε 的选择，只要 n 足够大，就有 $\operatorname{diam}(\sigma(U))\le 2Kr_{z(m(n))}$。因此 $\sigma(U)\in\cup_{j=1}^{[\ell]}\mathscr{T}_{j\,z(m(n))}$。

由于 U 对于 $G(\mathscr{X}_n,r_n)$ 是 $(k(n)-1)$-分离的，因此我们有 $\mathscr{X}_n(U_{r_n}\setminus U)<k(n)$。我们声称，只要 n 足够大，就有 $\mathscr{X}_n(D_{\sigma(U),\,z(m(n))})<k(n)$。事实上，根据三角不等式，$\sigma(U)^{(1-2\varepsilon)r_{z(m(n))}}\subset U^{(1-\varepsilon)r_{z(m(n))}}\subset U_{r_n}$（当 n 足够大时），而 $U\subset\sigma(U)^{\varepsilon r_{z(n(m))}}$。因此 $D_{\sigma(U),\,z(m(n))}\subset U_{r_n}\setminus U$，结论得证。此外，只要 n 足够大，就有 $k(n)\le k'(z(m(n)))$。于是我们得到以下事件包含关系

$$\begin{aligned}E_n(K,u)&\subset\cup_{j=1}^{\ell}\cup_{\sigma\in\mathscr{T}^j_{z(m(n))}}\{\mathscr{X}_n(D_{\sigma,z(m(n))})<k(n)\}\\&\subset\cup_{j=1}^{\ell}\cup_{\sigma\in\mathscr{T}^j_{z(m(n))}}F_{m(n)}(\sigma).\end{aligned}$$

根据 (3.15)，对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\sigma\subset\mathscr{L}_n$，我们有 $D_{\sigma,\,n}\supset(\sigma_{\varepsilon r_n})_{(1-3\varepsilon)r_n}\setminus\sigma_{\varepsilon r_n}$。因此，根据 (3.12)，对于所有足够大的 n 以及所有 $\sigma\in\cup_{j\in[\ell]}\mathscr{T}_{jn}$，我们有 $\mu(D_{\sigma,\,n})\ge a_j(1-3\varepsilon)^d r_n^d$。简单的耦合表明，只要 m 足够大，就有

$$\mathbb{P}[\cup_{j\in[\ell]}\cup_{\sigma\in\mathscr{T}^j_{z(m)}}F_m(\sigma)]=\sum_{j=1}^{\ell}O(r_{z(m)}^{-b_j})\mathbb{P}[\mathrm{Bin}(z(m),(1-3\varepsilon)^d a_j r_{z(m)}^d)<k'(z(m))].$$

根据引理 3.1(b)以及我们对 r_n 和 ε的选择，只要 m 足够大，就有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[\cup_{j\in[\ell]}\cup_{\sigma\in\mathscr{T}^j_{z(m)}}F_m(\sigma)]\\&=O(1)\sum_{j=1}^{\ell}\exp\Big((b_j/d)\log z(m)-(1-3\varepsilon)^d u a_j H\big(\frac{\beta'}{(1-3\varepsilon)^d u a_j}\big)\log z(m)\Big)=O(m^{-J\varepsilon}),\end{aligned}$$

该式关于 m 可求和。

由博雷尔-坎泰利引理可知，几乎必然地，$\cup_{j\in[\ell]}\cup_{\sigma\in\mathscr{T}^{j\,z\,(m)}}F_m(\sigma)$ 只会对有限多个 m 发生，这意味着 $E_n(K,u)$ 只会对有限多个 n 发生。这就完成了情形 $\beta<\infty$的证明。

现在假设 $\beta=\infty$。在证明的其余部分，我们还假设 $\varepsilon\in(0,1)$ 满足：对于所有 $j\in[\ell]$，$ua_j(1-\varepsilon)^d>1$。由于 $k(n)$ 的增长是超对数级的，我们不必像之前那样处理子序列论证。现在重新定义 $F_n(\sigma):=\{\mathscr{X}_n(D_{\sigma,\,n})<k(n)\}$。如果 $E_n(K,u)$ 发生，那么我们现在将分离集 U 的像素版本重新定义为

$$\sigma(U):=\mathscr{L}_n\cap U_{\varepsilon r_n},$$

并枚举像素版本的可能形状 σ。因此我们有

$$E_n(K,u)\subset\cup_{j=1}^{\ell}\cup_{\sigma\in\mathscr{T}_n^j}F_n(\sigma).$$

利用$|\mathscr{T}_{jn}|$的估计，我们有

$$\mathbb{P}[E_n(K,u)] = \sum_{j=1}^{\ell} O(r_n^{-b_j})\mathbb{P}[\mathrm{Bin}(n,(1-3\varepsilon)^d a_j r_n^d) < k(n)].$$

注意到 $r_n^{-1} = O(n^{1/d})$，并应用引理 3.1-(b)，得到

$$\mathbb{P}[E_n(K,u)] = O(n^{b_j/d}) \sum_{j=1}^{\ell} \exp\Big(-(1-3\varepsilon)^d a_j u k(n) H\big(\frac{k(n)}{(1-3\varepsilon)^d a_j u k(n)}\big)\Big)$$

该级数关于 n 可求和，因此由博雷尔-坎泰利引理可得结论。 □

下面的引理排除了存在一个 (k(n) − 1)-分离对，且其两边的直径都大于 Kr_n 的可能性。

引理 3.11. 设命题 3.6 的假设成立。若 $\beta = \infty$，令 $u > \max_j a_j^{-1}$，并对 $n \in \mathbb{N}$，设 $r_n = (uk(n)/n)^{1/d}$。若 $\beta < \infty$，令 $u > \max_{j\in[\ell]} a_j^{-1} H_\beta(b_j/d)$，并对 $n \in \mathbb{N}$ 设 $r_n = (u(\log n)/n)^{1/d}$。对于 $K \in \mathbb{N}$，令 $H_n(K, u)$ 表示如下事件：在 $G(\mathscr{X}_n, r_n)$ 中存在一个 (k(n) − 1)-分离对 (U,W)，使得 $\min(\mathrm{diam}(U), \mathrm{diam}(W)) \geq Kr_n$。那么存在 $K_1 \in \mathbb{N}$，使得几乎必然只有有限多个 n 满足 $H_n(K_1,u)$。

证明。假设 $H_n(K, u)$ 成立。则 $U^{r_n/2}$ 和 $W^{r_n/2}$ 在 A 中互不相交且连通。$A \setminus U^{r_n/2}$ 的某个连通分支包含 W，记作 W ′。令 $U' = \underline{A} \setminus \underline{W}'$。则 $U \subset U'$，$W \subset W'$，且 $A = W' \cup U'$。令 $\partial_W U := W' \cap U'$。由 A 的单连通性可知 $\partial_W U$ 连通。此外，A 中任何连接 U 和 W 的连续路径都必须经过 $\partial_W U$。

回顾假设 (G) 中的 δ_1 和 K_0。我们声称（并将在接下来的几段中证明）：

$$\mathrm{diam}(\partial_W U) \geq \frac{1}{2K_0+2} \min(\delta_1/3, \mathrm{diam}(W)/3, \mathrm{diam}(U)/3). \tag{3.16}$$

反设不然。令 $b = \mathrm{diam}(\partial_W U)$，则可找到 $x \in A$，使得 $\partial_W U \subset B(x, b)$；并且可找到 $X \in U \setminus B(x, b)$、$Y \in W \setminus B(x, b)$。由于 $b < \delta_1/3$，$A \setminus B(x, b)$ 的连通分支至多有两个。必定有两个连通分支；否则，X 和 Y 就能在 A 中通过一条避开 ∂U 的路径连接起来，这就产生了矛盾。

假设 X 位于 $A \setminus B(x, b)$ 的一个连通分支中，该连通分支的直径至多为 $K_0 b$，记作 Q_X；Y 位于另一个连通分支中，记作 Q_Y（如果情况相反，则在本论证的其余部分中交换 X 和 Y 的角色）。我们声称，存在 $X' \in U$，使得 $\mathrm{dist}(X, X') > (2K_0 + 2)b$。否则，对于任意 $X_1, X_2 \in U$，

根据三角不等式，我们有 $\mathrm{dist}(X_1, X_2) \le 2(2K_0+2)b$，从而 $\mathrm{diam}(U) \le 2(2K_0+2)b$。由 (3.16) 的否定可知，这与 $\mathrm{diam}(U) > 3(2K_0+2)b$ 矛盾。

我们断言，$\mathrm{dist}(X, B(x, b)) \le K_0 b$。为此，利用假设的 A 的连通性，取一条从 X 到 Y、位于 A 中的连续路径。该路径离开 Q_X 的第一个点属于 B(x, b)（否则它就不是离开 Q_X的点），但也属于 Q_X的闭包，因此位于 $B(X, K_0 b)$ 中。这就得到了上述结论。

我们证明，X′和 Y 必须属于 $A \setminus B(x, b)$ 的同一个连通分支。为此，首先注意到 X′不可能属于 Q_X，因为对于任意 $z \in Q_X$，

$$\mathrm{dist}(X, z) \le K_0 b < (2K_0+2)b.$$

其次，X′也不可能属于 B(x, b)，因为对于任意 $z \in B(x, b)$，我们有

$$\mathrm{dist}(z, X) \le \mathrm{dist}(X, B(x, b)) + 2b \le (K_0+2)b < (2K_0+2)b.$$

因此，X′必属于 Q_Y，于是再次得到矛盾：X′和 Y 可以通过一条位于 A 中且与 ∂U 不相交的路径连通。由此我们证明了 (3.16)。

设 $\varepsilon \in (0, 1/9)$，并令 $\mathscr{L}_n$ 如 (3.13) 中所定义（ε 不必与那里相同）。回顾一下，$\mathscr{L}_n$ 具有覆盖性质：对于每个 $x \in A$，都有 $\mathscr{L}_n \cap B(x, r_n\varepsilon) \neq \varnothing$；并具有间距性质：对于所有此类 x，$|\mathscr{L}_n \cap B(x, r_n\varepsilon/3)| \le \ell$。

定义 $D_W U = \{x \in \mathscr{L}_n : B(x, \varepsilon r_n) \cap \partial_W U \neq \varnothing\}$。那么，根据$\mathscr{L}_n$的覆盖性质，$(D_W U)^{\varepsilon r_n}$ 是连通的，并覆盖 $\partial_W U$。也就是说，作为度量空间 A 的子集，$D_W U$ 是 $(2\varepsilon r_n, 1)$-连通的。

由 (3.16) 以及 $H_n(K, u)$ 的发生可得

$$2\varepsilon r_n |D_W U| \ge \mathrm{diam}(\partial_W U) \ge \min(\delta_1/3, K r_n/3)/(2K_0+2)$$

因此，只要 n 足够大，就有 $|D_W U| \ge K/(6\varepsilon(2K_0+2))$。

我们声称，存在一个常数 $c \in (0, \infty)$，它与 n 独立，使得对所有 $q \in \mathbb{N}$，若 $|D_W U| = q$，则 $D_W U$ 至多有 $O(r^{-\max(b_j)_n} c^q)$ 种可能的“形状”。事实上，给定 $x_0 \in \mathscr{L}_n$，令

$$\mathscr{U}_{n,q}(x_0) := \{\sigma \subset \mathscr{L}_n : |\sigma| = q, \sigma \text{ is } (2\varepsilon r_n, 1)\text{-connected}, x_0 \in \sigma\}.$$

于是 $D_W U \in \cup_{j \in [\ell]} \cup_{x_0 \in T(j, K, r_n) \cap \mathscr{L}_n} \mathscr{U}_{n,}(x_0)$。由引理 3.8 可知，$|\mathscr{U}_{n,q}(x_0)| \le c^q$，其中 c 为某个有限常数。回顾引理 3.10 的证明可知，$|T(j, K, r_n) \cap \mathscr{L}_n| = O(r^{-b_j}{}_n)$。结论得证。

对所有 $n \in \mathbb{N}$，若 $x \in \partial_W U$，则 $\mathrm{dist}(x, U) = r_n/2$。因此，由三角不等式可得 $(D_W U)^{\varepsilon r_n/5} \subset U_r$，而 $U \cap (D_W U)^{\varepsilon r_n/5} = \varnothing$；故 $\mathscr{X}_n \cap (D_W U)^{\varepsilon r_n/5} = \varnothing$。结合并集界可得

$$\mathbb{P}[H_n(K, u)] \le \sum_{q \ge K/(6\varepsilon(2K_0+2))} \sum_{\sigma} \mathbb{P}[\mathscr{X}_n(\sigma_{\varepsilon r_n/5}) < k(n)], \tag{3.17}$$

其中第二个求和是对所有基数为 q 且 $(2\varepsilon r_n, 1)$-连通的可能形状 $\sigma \subset \mathscr{L}_n$ 进行的。由于 A 中的每个点至多被覆盖 ℓ 次，根据 (3.12)（其中 $G = \{z\}$），存在 $\varepsilon_1 \in (0,1)$，使得

$$\mu(\sigma_{\varepsilon r_n/5}) \geq (1/\ell) \sum_{z \in \sigma} \mu(B(z, \varepsilon r_n/5)) \geq (q/\ell)\varepsilon_1 (\varepsilon r_n/5)^d.$$

假设 $\beta < \infty$。令 $\varepsilon_2 := (\varepsilon_1/\ell)(\varepsilon/5)^d$。由 (3.17) 和引理 3.1(b)，当 n 充分大时，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[H_n(K,u)] &\leq \sum_{q \geq K/(6\varepsilon(2K_0+2))} O(r_n^{-\max(b_j)} c^q)\mathbb{P}[\mathrm{Bin}(n, \varepsilon_2 q r_n^d) < (\beta+1)\log n] \\ &= O(1) \sum_{q \geq K/(6\varepsilon(2K_0+2))} c^q \exp\Big((\max(b_j)/d)\log n - \varepsilon_2 quH\big(\frac{\beta+1}{\varepsilon_2 qu}\big)\log n \Big).\end{aligned}$$

由 H(·) 的连续性以及 $H(0) = 1$，存在 $q_0 > 16/(\varepsilon_2 u)$，使得对于任意 $q > q_0$,，都有 $H\big(\frac{\beta+1}{q\varepsilon_2 u}\big) > 1/2$，并且 $qu\varepsilon_2 > 4\max(b_j)/d$。取 $K = 6\varepsilon(2K_0+2)q_0$，使得在求和中 $q \geq q_0$，我们看到指数函数的指数有如下上界：

$$(\max(b_j)/d)\log n - q\varepsilon_2(u/2)\log n \leq -(qu\varepsilon_2/4)\log n.$$

因此，当 n 充分大时，有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[H_n(K,u)] &= O(1) \sum_{q \geq q_0} c^q \exp(-qu(\varepsilon_2/4)\log n) \\ &= O(1) \sum_{q \geq q_0} \exp(-qu(\varepsilon_2/8)\log n) = O(\exp(-q_0 u(\varepsilon_2/8)\log n)) = O(n^{-2}).\end{aligned}$$

在此情形下，应用博雷尔-坎泰利引理即可得到该结果。

若 $\beta = \infty$，则由 (3.17) 以及如前所述对 $|\cup_j \cup_{x_0} \mathscr{U}_{n,q}(x_0)|$ 的估计，可得

$$\mathbb{P}[H_n(K,u)] \leq \sum_{q \geq K/(6\varepsilon(2K_0+2))} O(r_n^{-\max(b_j)} c^q)\mathbb{P}[\mathrm{Bin}(n, (q/\ell)\varepsilon_1(\varepsilon r_n/5)^d) < k(n)].$$

我们有 $r^{-\max(b_j)_n} = O(n^{\max(b_j)/d})$，并且根据引理 3.1-(b)，

$$\mathbb{P}[H_n(K,u)] \leq \sum_{q \geq K/(6\varepsilon(2K_0+2))} c^q \exp\Big((\max(b_j)/d)\log n - q\varepsilon_2 uk(n) H\big(\frac{k(n)}{q\varepsilon_2 uk(n)}\big)\Big).$$

和之前一样，我们可以选择 $K = K_1$（较大），使得每个求和项中的 H(·) 项都有下界 1/2。由 k(n) 的超对数增长性，我们得出，当 n 足够大时，$\mathbb{P}[H_n(K,u)] \leq n^{-2}$，因此博雷尔-坎泰利引理也给出了此情形下的结论。 □

命题 3.6 的证明。如果 $\beta=\infty$，则令 $u>\max_{j\in[\ell]}(a_j^{-1})$，并设 $r(n):=u(k(n)/n)^{1/d}$。如果 $\beta<\infty$，则令 $u>\max_{j\in[\ell]}(a_j^{-1}\wedge H_\beta(b_j/d))$，并设 $r_n:=(u(\log n)/n)^{1/d}$。由引理 3.10 和引理 3.11，存在 $K\in\mathbb{N}$，使得几乎必然地，$E_n(K,u)\cup H_n(K,u)$ 至多对有限多个 n 成立。由引理 3.9，如果 $M_{n,k}>r_n$，则 $E_n(K,u)\cup H_n(K,u)$ 成立。因此，几乎必然地，对于所有充分大的 n，都有 $M_{n,k(n)}\le r_n$，结论得证。 □

3.4 定理 2.5 的证明

在本小节中，我们回到第 2 节的数学框架；也就是说，我们采用定理 2.5 陈述中的假设。特别地，我们重新假设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中具有 $d\ge 2$ 的凸多胞体，且概率测度 μ 具有密度 f。我们将检验应用命题 3.6 所需的条件。

为检验这些条件，我们将使用以下引理和记号。

引理 3.12. *[8, 引理 6.12]* 设 φ、φ' 是 A 的面，满足 $D(\varphi)>0$ 且 $D(\varphi')=d-1$，并且满足 $\varphi\setminus\varphi'\neq\varnothing$。则 $\varphi^o\cap\varphi'=\varnothing$ 且 $K(\varphi,\varphi')<\infty$，其中定义

$$K(\varphi,\varphi'):=\sup_{x\in\varphi^o}\frac{\operatorname{dist}(x,\partial\varphi)}{\operatorname{dist}(x,\varphi')}. \tag{3.18}$$

现在定义

$$K(A):=\max\{K(\varphi,\varphi'):\varphi,\varphi'\in\Phi(A),D(\varphi)>0,D(\varphi')=d-1,\varphi\setminus\varphi'\neq\varnothing\}. \tag{3.19}$$

由于 A 是有限多胞体，因此 $K(A)<\infty$。

对于 $j\in\{0,1,\dots,d\}$，令 $\Phi_j(A)$ 表示 A 的 j 维面集。对于任意 $D\subset A$ 和 $r>0$，令 $D_r=\{x\in A:B(x,r)\cap D\neq\varnothing\}$。

引理 3.13. 勒贝格测度在 A 上的限制具有倍增性质。此外，条件 (O)、(B)、(T) 和 (G) 均满足。

证明. 首先验证倍增性质。由引理 3.3 的证明可知，存在 $b>0$，使得 $\inf_{x\in A,r\in(0,b]}r^{-d}\operatorname{Vol}(B(x,r)\cap A)>0$。由于当 $r\le b$ 时，$\operatorname{Vol}(B(x,2r)\cap A)$ 至多为 $2^d\theta_d r^d$，而对所有 r 均至多为 $\operatorname{Vol}(A)$，故倍增性质得证。

A 中的点可以按照从 $\mathbb{R}^d$ 继承的字典序排列，因此满足 (O)。由于 A 是凸的，对于所有 $x\in A$ 和 $r>0$，集合 $B(x,r)\cap A$ 是凸的，因而也是连通的，这意味着满足 (B)。所有凸多胞体都是单连通的，因此根据引理 9.1], 可知它们是单连通的，从而满足 (T)。条件 (G) 由命题 3.14 立即得出，我们将在下文证明该命题。 □

命题 3.14. 设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的凸有限多面体。令 $N(\cdot)$ 表示一个集合的连通分支数。存在 $\delta_1>0$，使得对于任意 $x\in A$ 以及任意 $r\in(0,\delta_1)$，都有 $N(A\setminus B(x,r))\le 2$。此外，当 $N(A\setminus B(x,r))=2$ 时，较小连通分支的直径至多为 cr，其中 c 是一个仅依赖于 A 的常数。

命题 3.14 的证明。记 B 为 B(x, r)。首先观察，若 $y \in A \setminus B$，则至少存在一个顶点 $v \in \Phi_0(A)$，使得线段 $[y, v]$ 包含于 $A \setminus B$。事实上，若不然，则对每个 $v \in \Phi_0(A)$，都存在一点 $u(v) \in [y, v] \cap B$。但由于 A 是凸的，y 将属于 $\{v : v \in \Phi_0(A)\}$ 的凸包，因此也属于 $\{u(v) : v \in \Phi_0(A)\}$ 的凸包。事实上，存在 $\alpha_v \geq 0$ 满足 $\sum_{v \in \Phi_0(A)} \alpha_v = 1$，使得 $y = \sum_{v \in \Phi_0(A)} \alpha_v v$；并且存在 $\beta_v \in [0, 1]$，使得 $u(v) = \beta_v y + (1 - \beta_v)v$。将 v 替换为 u(v) 并重新整理各项可知，$y = \sum_v \alpha'_v u(v)$，其中某些 α'_v 和 $\sum_v \alpha'_v = 1$ 非负，因此得证。但由于 B 是凸的，这将意味着 $y \in B$，矛盾。

我们将一维面 $\varphi \in \Phi_1(A)$ 称为 A 的边。第二个观察是，如果 A 中与 B 相交的边数至多为 1，那么 $A \setminus B$ 是连通的。事实上，在这种情形下，对于任意不同的 v、$v' \in \Phi_0(A)$，都存在一条沿 A 的边从 v 到 v' 且避开 B 的路径。例如，如果 v、v' 位于 A 的同一个二维面 φ 中，那么由于 B 至多与多边形φ的一条边相交，沿着φ 的边就存在一条从 v 到 v' 且避开 B 的路径。因此，所有 $v \in \Phi_0(A)$ 都位于 $A \setminus B$ 的同一个连通分支中，所以利用第一个观察可得，$A \setminus B$ 是连通的。

回顾 (3.19) 中 K(A) 的定义。第三个观察是，如果对所有 $v \in \Phi_0(A)$，都有 $\mathrm{dist}(v, B) \geq 3rK(A)$，那么 $A \setminus B$ 是连通的。事实上，假设对所有 $v \in \Phi_0(A)$，都有 $\mathrm{dist}(v, B) \geq 3rK(A)$。设 φ、$\varphi'$ 是 A 中两条不同的边，且 $B \cap \varphi \neq \varnothing$，并取 $y \in B \cap \varphi$。那么 $\mathrm{dist}(y\, \partial\varphi) \geq 3rK(A)$，因此由 (3.18) 可得，$\mathrm{dist}(y\, \varphi') \geq 3rK(A)/K(\varphi, \varphi') \geq 3r$。于是由三角不等式，$\mathrm{dist}(B\, \varphi') \geq 3r - 2r = r$，因此 $B \cap \varphi' = \varnothing$。所以 B 至多与 A 的一条边相交，根据第二个观察，$A \setminus B$ 是连通的。

假设对于某个 $v \in \Phi_0(A)$，有 $\mathrm{dist}(v, B) \leq 3rK(A)$。只要 r 足够小，这种情况至多对一个 $v \in \Phi_0(A)$ 成立。若 $u, u' \in \Phi_0(A) \setminus \{v\}$，则 $v \notin [u, u']$，所以 $\mathrm{dist}(v, [u, u']) > 0$。因此，只要 r 足够小，$[u, u'] \subset A \setminus B$。于是，只要 r 足够小，所有 $u \in \Phi_0(A) \setminus \{v\}$ 都位于 $A \setminus B$ 的同一个连通分支中。如果 v 也位于这个连通分支中，那么（根据我们的第一个观察）$A \setminus B$ 是连通的。

因此，只有当 v 位于 $A \setminus B$ 的一个不同于所有其他顶点所在连通分支的连通分支中时，$A \setminus B$ 才是不连通的。在这种情况下，对于 $y \in A \setminus B$，若 $[y, v] \subset A \setminus B$，则 y 与 v 位于同一个连通分支中；否则（根据我们的第一个观察），y 与所有其他顶点位于同一个连通分支中，因此 $A \setminus B$ 恰有两个连通分支。

如果 $A \setminus B$ 有两个连通分支，且 $y \in A \setminus B$ 并满足 $\|y - v\| > (3K(A) + 2)r$，那么我们断言 $[y, v] \cap B \neq \varnothing$。事实上，对每个 $u \in \Phi_0(A) \setminus \{v\}$，从 v 沿 u 的方向发出的射线都会经过 B。但根据 A 和 B 都是凸集这一事实，可以得出从 v 沿 y 的方向发出的射线也必定经过 B。由于 $\mathrm{dist}(v, B) \leq 3rK(A)$，且 $\mathrm{diam}(B) = 2r$，这条射线经过 B 时距 v 至多为 $(3K(A) + 2)r$，即在到达 y 之前，因此断言成立。因此，y 位于 $A \setminus B$ 中不包含 v 的连通分支内，从而包含 v 的连通分支的直径至多为 $(3K(A) + 2)r$。

□

为了应用命题 3.6，我们需要对每个足够小的 $r > 0$ 定义 A 的一个划分，然后估计式 (3.12) 中相应的覆盖数和 μ-测度。

考虑到 ∂A 附近的各种边界效应，应分别考察 A 的不同面的邻近区域。然而，要构造这样的划分，使我们能够在 (3.12) 中得到紧致的 μ-测度估计，并非易事。复杂之处在于，(3.12) 中与 φ 附近某个区域相交的集合 G，可能靠近位于 ∂φ 内部的某个低维面。我们可以通过归纳构造来避免边界带来的复杂情况：从最高维面附近的区域开始，逐步构造到最低维面附近的区域，并让区域的“厚度”递增。下文定义的由 T (φ, r) 构成的划分，以及剩余的内部区域，正是为此而设。

令 $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 为一个递增序列，其中 $K_1 = 1$，且对每个 $j \in \mathbb{N}$，都有 $K_{j+1} > (2K(A) + 1)K_j$。例如，我们可以取 $K_j = (2K(A) + 2)^{j-1}$。

现在，对每个 $r > 0$ 和 $\varphi \in \Phi(A)$，定义集合

$$T(\varphi, r) := \varphi_{rK_{d-D(\varphi)}} \setminus \cup_{\varphi' \in \Phi(A):\varphi' \subsetneq \varphi} (\varphi')_{rK_{d-D(\varphi')}},$$

其中，T 代表“领地”。另外定义 $T(A,r) := A \setminus \cup_{\varphi\in\Phi(A)} \varphi_{rK_{d-D(\varphi)}}$ 对于每个 $\varphi \in \Phi^*(A)$，当 r 充分小时，$T(\varphi, r) \neq \varnothing$。因此，存在 $r_0 > 0$，使得对于所有 φ 以及所有满足 $r < r_0$, 的 r，都有 $T(\varphi,r) \neq \varnothing$。此外，不同面的领地互不相交，正如下一个引理所示。

引理 3.15. 存在 $r_0 > 0$，使得对于所有 $r \in (0, r_0)$，以及任意不同的 $\varphi, \varphi' \in \Phi^*(A)$，均有 $T(\varphi, r) \cap T(\varphi', r) = \varnothing$。此外，若 $\varphi, \varphi' \in \Phi(A)$ 满足 $\varphi \setminus \varphi' \neq \varnothing$，且 $y \in T(\varphi,r)$，则 B(y,r) 与 φ′不相交。

证明。我们可以（并且确实）不失一般性地假设 $\varphi \setminus \varphi' \neq \varnothing$ 和 $\varphi' \setminus \varphi \neq \varnothing$。事实上，若 $\varphi \subset \varphi'$，则根据构造，$T(\varphi', r) \cap T(\varphi, r) = \varnothing$。

若 φ 是一个顶点，则 $\mathrm{dist}(\varphi,\varphi') > 0$，因此当 r 足够小时，$T(\varphi, r) \cap T(\varphi', r) = \varnothing$。所以只需考虑 $D(\varphi) > 0$ 且 $D(\varphi') > 0$的情形。

令 $j := d - D(\varphi)$，且 $j' := d - D(\varphi')$。我们可以并且确实假设 $j' \leq j \leq d - 1$.

若存在 $x \in T(\varphi, r) \cap T(\varphi', r)$，则可以找到 $z \in \varphi$、$z' \in \varphi'$，使得 $\|x - z\| \leq rK_j$ 且 $\|x - z'\| \leq rK_{j'}$。因此 $\mathrm{dist}(z\ \varphi') \leq r(K_j + K_{j'}) \leq 2rK_j$。

另一方面，由于 $x \in T(\varphi, r)$，$\mathrm{dist}(x\ \partial\varphi) \geq rK_{j+1}$，因此根据三角不等式，$rK_{j+1} - rK_j \leq \mathrm{dist}(z\ \partial\varphi) \leq K(A)\,\mathrm{dist}(z\ \varphi')$，其中最后一个不等式来自 (3.18)。结合这些估计可得 $K_{j+1} \leq (2K(A) + 1)K_j$，这就产生了矛盾。第一个结论得证。

Mov关于第二个结论，设 $\varphi, \varphi' \in \Phi(A)$，且 $\varphi \setminus \varphi' \neq \varnothing$。假设 $y \in \varphi'_r$。Se t

$$\tilde{\Phi} := \{\psi \in \Phi(A) : \psi \subsetneq \varphi', y \in \psi_{K_{D-d(\psi)}}\}.$$

若 $\tilde{\Phi} = \varnothing$，则 $y \in T(\varphi', r)$。否则，选择最小维数的 $\psi \in \tilde{\Phi}$。那么 $y \in T(\psi, r)$。无论哪种情况，根据第一个断言，$y \notin T(\varphi, r)$。因此 $T(\varphi,r) \cap \varphi'_r = \varnothing$。 □

作为应用命题 3.6 的最后一个要素，对于每个 $J > 1$ 和 $r \in (0,1)$，我们构造 A 的一个划分，并证明对于所有直径至多为 Jr 的 G，式 (3.12) 均成立。系数 a_i 取决于 G 相对于 A 的各个面的所在位置。

引理 3.16. 令 $J \in \mathbb{N}$ and $\varepsilon > 0$. 则有以下结论：

(i) 对每个 $\varphi \in \Phi(A)$，有 $\kappa(T(\varphi, 2Jr), r) = O(r^{-D(\varphi)})$，当 $r \downarrow 0$ 时成立。此外，当 $r \downarrow 0$ 时，还有 $\kappa(A \setminus \cup_{\varphi \in \Phi(A)} T(\varphi, 2Jr), r) = O(r^{-d})$。

(ii) 对所有充分小的 $r > 0$ and 任意满足 $\operatorname{diam}(G) \leq Jr$ 的 $G \subset A$，若 G 与 $T(\varphi, 2Jr)$ 相交，其中某个 $\varphi \in \Phi^*(A$ 满足

$$\mu(G_r \setminus G) \geq (1-\varepsilon) f_\varphi \rho_\varphi r^d. \tag{3.20}$$

证明. (i) 由 $T(\varphi, r)$ 的定义可得。事实上，φ 包含于一个 $D(\varphi)$ 维仿射空间中的有界区域内，因此可用 $O(r^{-D(\varphi)})$ 个半径为 r 的球覆盖。若随后以相同的中心点取半径为 $r(1+2JK^{d-D(\varphi)})$ 的球，它们将覆盖 $T(\varphi, 2Jr)$，进而可用固定数量的半径为 r 的球覆盖每个较大的球。

对于 (ii)，令 $G \subset A$，且 $\operatorname{diam}(G) \leq Jr$。首先假设 $G \cap T(\varphi, 2Jr) \neq \varnothing$ for some$\varphi \in \Phi(A)$。取 $x_0 \in G \cap T(\varphi, 2Jr)$。则 $G_r \subset B(x_0, 2Jr)$。由引理 3.15 可知，$B(x_0, 2Jr)$ 不与任何满足 $\varphi \setminus \varphi' \neq \varnothing$ 的 $\varphi' \in \Phi(A)$ 相交。因此

$$B(x_0, 2Jr) \cap A = B(x_0, 2Jr) \cap (z_0 + \mathscr{K}_\varphi) \tag{3.21}$$

其中，$\mathscr{K}_\varphi$ 是由 φ 确定的锥，而 z_0 是 φ 中离 x_0 最近的点。

令 $D(x, r) := B(x, r) \cap (x + \mathscr{K}_\varphi)$。我们声称，对任意 $x \in G$，都有 $D(x, r) \subset A$。事实上，给定 $y \in D(x, r)$，可将 y 写为 $y = z_0 + (x - z_0) + (y - x) =: z_0 + \theta_1 + \theta_2$。这里 $\theta_1, \theta_2 \in \mathscr{K}_\varphi$。由 $\mathscr{K}_\varphi$ 的凸性和尺度不变性可得 $\theta_1 + \theta_2 \in \mathscr{K}_\varphi$，因此 $y \in z_0 + \mathscr{K}_\varphi$。此外，$\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| \leq 2Jr$，所以由 (3.21) 可知 $y \in A$，证毕。

由此可得（其中 $\oplus$ 表示闵可夫斯基加法）

$$\mu(G_r \setminus G) \geq \mu((G \oplus D(o,r)) \setminus G) \geq \operatorname{Vol}((G \oplus D(o,r)) \setminus G) \inf_{x \in G \oplus D(o,r)} f(x).$$

根据布伦-闵可夫斯基不等式 [5, 第 5 节，3], 我们有 $\operatorname{Vol}(G \oplus D(o, r)) \geq \operatorname{Vol}(G) + \operatorname{Vol}(D(o, r)) = \operatorname{Vol}(G) + \rho_\varphi r^d$。由于 f 在 ∂A 上连续，命题 (3.20) 得证。

对于情形 $\varphi = A$，现假设 $G \cap T(A, 2Jr) \neq \varnothing$. 取 $x \in G \cap T(A, 2Jr)$，则有 $\operatorname{dist}(x\ \partial A) \geq 2Jr$，因此 $\operatorname{dist}(G\ \partial A) \geq 2Jr - Jr = Jr$。因此 $G_r \subset A$，故根据布伦-闵可夫斯基不等式

$$\mu(G_r \setminus G) \geq f_0 \operatorname{Vol}((G \oplus B(o,r)) \setminus G) \geq f_0 \theta_d r^d.$$

在这种情形下，$f_\varphi = f_0$ 和 $\rho_\varphi = \theta_d$，因此断言 (3.20) 在这种情形下也成立，从而完成了 (ii) 的证明。 □

定理 2.5 的证明。由 (2.9) 和定理 2.1，只需证明上界。我们将通过在定理 2.5 的情形下应用命题 3.6 来完成这一证明。

根据引理 3.13，勒贝格测度在 A 上的限制具有倍增性质，并且条件 (O)、(B)、(T) 和 (G) 均成立

为了应用命题 3.6，我们需要定义（对每个 $K \in \mathbb{N}$ 及每个 $r \in (0, r_0(K))$）一个有限划分 $\{T(j, K, r)\}$。为此，我们取集合 $T(\varphi, 2Kr)\ \varphi \in \Phi^*(A)$。根据引理 3.15 以及 T (A, r) 的定义，对每个 $K \in \mathbb{N}$，都存在 $r_0(K) > 0$，使得当 $r \in (0, r_0(K))$ 时，集合 $T(\varphi, 2Kr)\ \varphi \in \Phi^*(A)$ 确实构成 A 的一个划分。

对每个 $\varphi \in \Phi^*(A)$，利用引理 3.16-(i)，我们得到命题 3.6 中的条件 (3.11)，其中该处记作 b_j 的常数等于 $D(\varphi)$。此外，利用引理 3.16-(ii)，我们得到命题 3.6 中的条件 (3.12)，其中该处记作 a_j 的常数等于 $(1-\varepsilon) f_\varphi \rho_\varphi$。

假设 $\beta < \infty$。按照上述方式应用命题 3.6，我们可知，对于 $\varepsilon > 0$，有

$$\limsup_{n\to\infty} n(M_{n,k(n)})^d / \log n \le \max_{\varphi\in\Phi^*(A)} \left(\frac{\hat{H}_\beta(D(\varphi)/d)}{(1-\varepsilon) f_\varphi \rho_\varphi} \right),$$

由此即可得到结论。若 $\beta = \infty$，则利用命题 3.6 中相应的部分，也可得到此情形下的结论。

□

参考文献

[1] Baccelli, F. 和 Błaszczyszyn, B. (2009). 随机几何与无线网络 I：理论。Foundations and Trends in Networking 4, 1–312。ˇ[2]Bobrowski, O. (2022). 随机 Čech 复形中的同调连通性。Probab. Theory Relat. Fields 183, 715–788。[3] Bobrowski, O. 和 Kahle, M. (2018) 随机几何复形的拓扑：综述。J. Appl. Comput. Topol. 1, 331–364。[4] Last, G. 和 Penrose, M. (2018). 泊松过程讲义。剑桥大学出版社，剑桥。[5] Penrose, M. (2003) 随机几何图。牛津大学出版社。[6] Penrose, M. D. (1999). 随机点之间最大最近邻连边的强律。J. London Math. Soc. (2) 60, 951–960。[7] Penrose, M. D. (1999) 最小生成树最长边的强律。Ann. Probab. 27, 246–260。

[8] Penrose, M.D.（2022+）从内部进行随机欧几里得覆盖。arXiv:2101.06306，即将在 Probab. Theory Relat. Fields 发表。