arXiv:2301.02509v1 [math.RA] 6 Jan 2023

由4个元素生成的 Jordan 型轴代数

Tom Demedts LOUIS ROWEN YOAV SEG

Abstract. 我们证明，Jordan 型本原 4-生成轴代数的维数至多为 81。

1. Introduction

轴代数由 Jonathan Hall、Felix Rehren 和 Sergey Shpectorov 于 2015年 引入 [HRS15b]。它们是由轴生成的非结合交换代数；轴即满足以下条件的幂等元：其左乘算子是半单的，且由此得到的特征子空间按照给定的融合律相乘（精确定义见§2）。

在最简单的有趣情形下，这些乘法算子恰有 3 个特征值：0、1 和 η。约当代数是一个典型例子，其中每个幂等元都会给出代数的 Peirce 分解。在这种情况下，我们有 $\eta = \frac{1}{2}$，融合律如下。

$*$	1	0	η
1	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{\eta\}$
0	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{\eta\}$
η	$\{\eta\}$	$\{\eta\}$	$\{1,0\}$

Table 1. Jordan 融合律 $\Phi(\eta)$

我们称具有融合律 $\Phi(\eta)$ 的轴代数为 Jordan 型轴代数 η。除了约当代数本身之外，还有其他有趣的 Jordan 型轴代数例子（对任意 $\eta \neq 0, 1$），即由 3-换位群导出的 Matsuo 代数。在这种情况下，代数的维数等于该群的 3-换位元正规生成集的大小。（详情见下文例 2.5。）

3-换位群的分类历史悠久（参见 [CH95、Hal22] 及其中的参考文献）。有限生成的 3-换位群是有限群，这一事实并非显而易见。事实上，这是

Date: 2023年1月9日。

有限单群分类的推论，若能直接证明这一事实，将极具价值。（参见 [CH95，定理（1.3），第 153] 页。）

这种直接证明的一种可能方法，正是通过相应的 Matsuo 代数。更一般地，我们提出以下问题。（确切含义请参见下文定义 2.3。）

问题：设 A 是一个约当型本原轴代数。假设 A 由有限个轴生成。我们能否得出 A 是有限维的?

注意，根据下文的推论 2.8，若此问题的答案为肯定，则特别可以说明有限生成的 3-换位群是有限群。事实上，对于 $\eta \neq \frac{1}{2}$，两者等价。

自然可以尝试针对轴数逐渐增加的情形回答这个问题。对于由 2 个生成元生成的约当型本原轴代数，这几乎是显而易见的：这类代数的维数至多为 3。（事实上，还可以得出更多结论： [HRS15a 的定理 1.1] 给出了这类代数的完整分类。）

对于由 3 个元素生成的代数，近期论文 [GS20]对此问题给出了肯定的回答：这类代数的维数至多为 9。

我们的主要结果如下。

主定理。对于任意 $\eta.$，由4个元素生成的 Jordan 型本原轴代数 η 的维数至多为 81。此外，这一结果是最佳的。

从由 3 个元素生成的约当型本原轴代数推广到由 4 个元素生成的约当型本原轴代数，是一大步，需要大量新思路。事实上，在我们新的框架下，几乎可以不费吹灰之力地重新得到 [GS20] 中的早期结果，即这类由 3 个元素生成的代数的维数至多为 9。一个关键思路是，我们几乎不会使用代数中的实际乘法，而是使用 Miyamoto 对合序列（见下文定义 3.3）。这些序列使我们能够提出许多“重写规则”，从而系统地处理越来越长的表达式，直到最终将问题“收尾”，把所有长度大于 6 的表达式逐一化简。其确切含义将在下文解释，详见定理 5.1；该定理是主定理的更详细版本。

值得指出的是，接下来的研究——本原 5 生成 Jordan 型轴代数——预计会越来越困难，因为维数上界至少为 $3^{12} = 531441$。（事实上，这是我们猜想的上界。）此外，其中一个例子（维数为 306936）源自最大的零星 Fischer 群 Fi_{24}。

2. 本原 Jordan 型轴代数

在本文中，$\mathbb{F}$ 将是一个特征为 $\mathbb{F} \neq 2$的交换域。我们所讨论的代数都是交换但非结合的[1] $\mathbb{F}$代数。

[1]与通常一样，非结合的意思是“未必结合”。

关于融合律和轴代数的定义，我们参考 [DMPSVC20]。

定义 2.1. (i) 融合律是一个二元组 $(X,*)$，其中 X 是一个集合，$*$ 是一个从 $X\times X$ 到 2^X 的映射，这里 2^X 表示 X 的幂集。若对于所有 $x,y\in X$，都有 $x*y=y*x$，则称融合律 $(X,*)$ 是对称的。

(ii) Jordan 融合律是指满足 $X=\{0,1,\eta\}$（其中 η 只是一个符号）且 $*$ 由上面的表 1 给出的融合律。

定义 2.2. 设 $\Phi=(X,*)$ 是一个融合律。

(i) 代数 A 的 Φ-分解是一个直和分解 $A=\bigoplus_{x\in X}A_x$（作为向量空间），使得对于所有 $x,y\in X$，都有 $A_xA_y\subseteq A_{x*y}$，其中对于所有 $Y\subseteq X$，$A_Y:=\bigoplus_{y\in Y}A_y$。(ii) 一个 Φ-分解代数是一个三元组 $(A,\mathcal{I},\Omega)$，其中 A 是一个 $\mathbb{F}$-代数，$\mathcal{I}$ 是指标集，Ω 是由 $\mathcal{I}$ 索引的 A 的 Φ-分解组成的元组。换言之，对于每个 $i\in\mathcal{I}$，都有代数 A 的一个对应的 Φ-分解 $A=\bigoplus_{x\in X}A_x^{(i)}$。

定义 2.3. 设 $\Phi=(X,*)$ 是一个带有 $1\in X\subseteq\mathbb{F}$ 的融合律。

(i) 对每个 $a\in A$，我们将由 a 进行左乘记作 ad_a，即 $\mathrm{ad}_a\colon A\to A$: $x\mapsto ax$。(ii) 若元素 $a\in A$ 是幂等元（即 $a^2=a$），且 A 按 ad_a 的特征子空间分解为一个 Φ-分解，则称其为 Φ-轴。(iii) 如果代数 A 由一组 Φ-轴生成，则称其为 Φ-轴代数。因此，A 成为一个 Φ-分解代数（其中 $\mathcal{I}$ 与给定的轴集相对应）。(iv) 若对生成 A 的 Φ-轴中的每个轴 a，其 1-特征子空间 $A_1^{(a)}$ 都是一维的，即等于 $\mathbb{F}a$，则称 Φ-轴代数 A 为本原的。(v) Jordan 型 η 的轴代数是融合律 $\Phi=\Phi(\eta)$ 所对应的 Φ-轴代数，如表 1 所示。

正如我们在引言中提到的，Jordan 型轴代数的两个主要例子来源是：(1) 约当代数；(2) Matsuo 代数。下面给出一些细节。

例 2.4. 设 J 是 $\mathbb{F}$ 上的约当代数，即 J 是一个含幺交换非结合代数，满足 $a^2(ab)=a(a^2b)$，对所有 a、$b\in J$ 均成立。若 $e\in J$ 是一个幂等元，则它是 Jordan 融合律 $\Phi(\frac{1}{2})$ 的一个轴；这就是约当代数著名的 Peirce 分解（例如参见 [Jac68, 第 III 章]）。特别地，若 J 由幂等元生成，则它是一个 Jordan 型 $_1{}_2$ 轴代数。 –

例 2.5. 设 (G,D) 是一个 3-换位群，也就是说，G 是一个群，且 $D\subseteq G$ 是一个由对合构成的生成集，在 G 中对共轭封闭，并且 D 中任意两个元素的乘积的阶至多为 3。设

$\eta \in \mathbb{F}\setminus\{0,1\}$ 任意。则 Matsuo 代数 $M_\eta(G,D)$ 是一个以 D 为基的代数，其乘法定义如下：

$$de := \begin{cases} e & \text{if } d = e \\ 0 & \text{if } o(de) = 2 \\ \frac{\eta}{2}(d+e-f) & \text{if } o(de) = 3, \text{ where } f = d^e = e^d \text{ in } G. \end{cases}$$

根据 [HRS15a，定理 6.5]，$M_\eta(G,D)$ 是一个 Jordan 型 η 的本原轴代数。

Jordan 型轴代数，以及更一般地，任何融合律允许 $\mathbb{Z}/2$-分次的分解代数，都有许多对合自同构，即所谓的 Miyamoto 对合。

定义 2.6。（i）融合律 $(X,*)$ 的 $\mathbb{Z}/2$-分次是一个映射 $\theta\colon X \to \mathbb{Z}/2$，满足 $x*y \subseteq \theta^{-1}(\theta(x)+\theta(y))$，对所有 $x,y \in X$ 均成立。例如，表 1 中的 Jordan 融合律是 $\mathbb{Z}/2$-分次的，其中 $\theta(0) = \theta(1) = 0$，且 $\theta(\eta) = 1$。

（ii）若 $(A,\mathcal{I},\Omega)$ 是一个关于 $\mathbb{Z}/2$-分次融合律 $(X,*)$ 的 Φ-分解代数，则对每个 $i \in \mathcal{I}$，我们定义一个 Miyamoto 对合

$$\tau_i\colon A \to A\colon a_x \mapsto (-1)^{\theta(x)}a_x, \quad \text{when } a_x \in A_x^{(i)}.$$

换言之，τ_i 相对于 A的 i次分解，固定 0-分次元素，并将 1-分次元素取负。

下面的推论 2.8 是本文主要结果的重要动机。

命题 2.7. 设 (G,D) 是一个 3-换位群。以下条件等价：

(a) G 是有限的。(b) D 是有限的。
(c) $M_\eta(G,D)$ 是有限维的。

证明. 显然，(a) 蕴含 (b)，而 (b) 与 (c) 等价，因为$M_\eta(G,D)$ 的维数为 $|D|$。特别地，$M_\eta(G,D)$ 的维数与基域 $\mathbb{F}$ 和 $\eta \in \mathbb{F}$的选取无关，因此为证明 (c) 蕴含 (a)，我们可以假设 $\mathbb{F}$ 是一个有限域。

于是 $A := M_\eta(G,D)$ 是有限的。根据 [DMR17，第 325] 页（其依据是[Asc97，第 92 页，例 (4)]），$G/Z(G)$ 嵌入 Aut(A)，因此 $G/Z(G)$ 是一个有限群。根据 Schur 定理，[Asc00，(33.9)，第 168]，页，导出子群 G' 是有限的。由于 G/G' 是由有限个对合生成的阿贝尔群，它是有限的，因此我们得出 G 是有限的。□

推论 2.8。以下各项等价：
(a) 每个有限生成的 3-换位群 (G,D) 都是有限群。(b) 每个由有限个轴 X 生成的 Jordan 型 $\eta \neq \frac{1}{2}$ 本原轴代数 A 都是有限维的。

证明。(a) ⇒(b) 设 A 和 X 如 (b) 所述。对于 $x \in X$，设 τ_x 是与 x. 相关联的 Miyamoto 对合。根据 [HRS15a，定理 (5.4)，第 105], 页，群 $G = \langle \tau_x \mid x \in X \rangle$ 是一个 3-换位群。根据假设， G 是有限的。根据 [HRS15a，推论 (1.2)，第 81] 页， A 由 $\{x^g \mid x \in X, g \in G\}$ 张成，因此 A 是有限维的。

(b) ⇒ (a) 设 (G, D) 是一个有限生成的 3-换位群。那么， G由 D中的有限多个元素生成，因此代数$M_\eta(G, D)$是有限生成的。于是，根据假设，它是有限维的。命题 2.7 随即表明， G 是有限的。□

为了了解 Jordan 型本原 4-生成轴代数的复杂程度，先考察 4-生成 3-换位群的列表是很有用的。特别是，这将为我们提供一个此类代数的例子，其维数为 81，恰好是我们将在主要结果中得到的上界。

定理 2.9. 设 (G, D) 是一个由 D 中的 4 个元素生成（但不能由少于 4 个元素生成）的 3-换位群。那么，它的中心类型属于以下几种之一：

(i) $W(A_4)$， A_4 型的魏尔群（含 $|D| = 10$）；(ii) $W(D_4)$， D_4 型的魏尔群（含 $|D| = 12$）；(iii) 3^3: Sym(4)（含 $|D| = 18$）；(iv) 2^{1+6}: $SU_3(2)'$（含 $|D| = 36$）；(v) Hall 的 3-换位群 $[3^{10}]$: 2（含 $|D| = 81$），或其仿射商群 3^{3+3}: 2（含 $|D| = 27$）。

证明。中心类型的定义以及这一事实的证明（连同各情形下 D 的大小）可见于 [HS95，命题 (4.2)]„ 作者在其中指出，这一分类已由 Zara、Hall 和 Moori 独立证明；目前所见最早的书面来源似乎是 Zara 于 1984 年撰写的（未发表）学位论文。□

这个列表中唯一达到上界$|D| = 81$的 3-换位群尤为有趣，因为它是散在 Fischer 群 Fi_{23} 和 Fi_{24}的一个 3-换位子群。我们基于 [LB83, §4.1]，给出了由此得到的 Matsuo 代数的一个显式构造。事实上，我们曾在计算机上实现这个例子，以便试验恒等式；我们的一些想法正是由此产生的。

例 2.10. 设 D 是域 $\mathbb{F}_3$上的 4维向量空间（因此 $|D| = 81$）。我们首先定义

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \bullet (y_1, y_2, y_3, y_4)$$
$$:= \big(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3,\ x_4 + y_4 + (x_1y_2 - x_2y_1)(x_3 - y_3)\big)$$

对所有 x_i、 $y_i \in \mathbb{F}_3$。接下来，我们设

$$d * e := (d \bullet e) \bullet (d \bullet e)$$

对所有 d、$e \in D$。对于任意 $\eta \in \mathbb{F} \setminus \{0,1\}$——回想一下，$\mathbb{F}$ 仍然是我们任意选取的、特征不为 2 的基域——现在我们定义一个以 D 为基的 $\mathbb{F}$-代数，其乘法由下式给出

$$de := \begin{cases} e & \text{if } d = e \\ \frac{\eta}{2}(d + e - d * e) & \text{if } d \neq e. \end{cases}$$

于是结合 [LB83] 与例 2.5 可知，这恰好是与 Hall 的 3-换位群 $[3^{10}]$: 2 对应的 Matsuo 代数。

3. 方法

从现在起，我们假设 A 是由一组有限的轴 S 生成的 Jordan 型 η 本原轴代数。

定义 3.1. 对每个 $i \geq 0$，我们定义

$$S[i] := \langle \tau_{a_1}\tau_{a_2}\cdots\tau_{a_\ell}(b) \mid \ell \leq i, a_1, \ldots, a_\ell, b \in S \rangle.$$

特别地，$S[0] = \langle S \rangle$，而 $S[i]$ 构成 A 的一个递增子空间链。

我们的目标是证明，对于某个 n，$S[n] = A$。下面的命题告诉我们，只需证明 $S[i]$ 的递增链稳定下来即可。

命题 3.2。假设对于某个 n，$S[n] = S[n+1]$。则 $A = S[n]$。

证明。按照 [HRS15a，第 81], 页，我们将轴集合 S 的闭包定义为包含 S 的最小轴集合 C，其中轴属于 A，并且对每个 $a \in C$，都有 $\tau_a(C) \subseteq C$。事实上，$C = \{\tau_{a_1}\tau_{a_2}\cdots\tau_{a_\ell}(b) \mid \ell \geq 0$、$a_1$、.....、$a_\ell$、$b \in S\}$；例如参见 [KMS20，引理 3.5]。现在只需注意，如果 $S[n] = S[n+1]$，那么对于所有 $\ell \geq n$ 都有 $S[n] = S[\ell]$，因此 $S[n] = \langle C \rangle$。然而，根据 [HRS15a，推论 (1.2)，第 81], 页，A 由 C 张成，结论得证。□

从现在起，当我们提到 A 的任意一个轴时，始终指 S 的闭包 C 中的元素（它确实始终是同一融合律下的一个轴）。

以下两个定义将发挥关键作用。

定义 3.3. (i) 令

$$[\![a_1, a_2, \ldots, a_\ell]\!] := \tau_{a_1}\tau_{a_2}\cdots\tau_{a_\ell}$$

对所有轴 $a_1, \ldots, a_\ell \in A$,

(ii) 对所有 $x, y \in A$，定义

$$x \equiv_{(i)} y \iff x - y \in S[i].$$

注意，$x \equiv_{(i)} y$ 蕴含对于所有 $j \geq i$都有 $x \equiv_{(j)} y$，并且还蕴含对于所有 a_1，...，$a_\ell \in S$都有 $[\![a_1,\ldots,a_\ell]\!]x \equiv_{(i+\ell)} [\![a_1, \ldots, a_\ell]\!]y$。

注记 3.4. 当 a_i 是未必包含在 S中的轴时，也会使用记号 $[\![a_1,\dots,a_\ell]\!]$。在这种情况下，使用等价关系 $\equiv_{(i)}$ 时需要格外谨慎，因为这些关系始终是相对于给定的生成集 S而言的。

根据 [HSS18 定理4.1], ，约当型本原轴代数总是存在一个（必然唯一的）归一化对称 Frobenius 形式。

定义 3.5. (i) 双线性形式 $(\cdot,\cdot)$: $A\times A\to\mathbb{F}$称为 A上的（归一化）Frobenius 形式，若对所有 $x,y,z\in A$，都有 $(xy,z)=(x,yz)$，并且对每个轴 $a\in A$，还有 $(a,a)=1$。

(ii) 引入以下记号将会很有用

$$\epsilon_{x,y}:=1-\tfrac{2}{\eta}(x,y)$$

对所有 $x,y\in A$。

命题 3.6. 设 $a\in A$ 是一个轴， $x\in A$ 是任意元素。则

$$\tau_a(x)=x+\tfrac{2}{\eta}(a,x)a-\tfrac{2}{\eta}ax.$$

证明. 这是将 [HSS18, 引理 3.3] 与 [HSS18, 定理 4.1] 中的陈述结合起来得到的，即 $(a,x)=\varphi_a(x)$。□

备注 3.7. 在 [HSS18], 中，他们的引理 3.3 实际上用于证明他们的定理 4.1（Frobenius 形式的存在性）。另一方面，如果我们一开始就假设 Frobenius 形式存在，那么只需将 x 按轴 a对应的特征子空间分解，就可以直接而轻松地证明命题 3.6。

命题 3.6 有以下显而易见但有用的推论。

推论 3.8. 设 $a,b\in A$ 是轴。则：

(i) $[\![a]\!]b-[\![b]\!]a=\epsilon_{a,b}(b-a)$。（ii）如果 $a\in S$且 $x\in S[i]$，那么 $(-\frac{2}{\eta})ax\equiv_{(0)}[\![a]\!]x-x\equiv_{(i)}[\![a]\!]x$。

证明。（i）由命题 3.6，我们有

$$\tau_a(b)-\tau_b(a)=\big(1-\tfrac{2}{\eta}(a,b)\big)(b-a).$$

（ii）这直接由命题 3.6 得出。□

我们回顾以下重要事实，后文将反复使用，且通常不再明确提及。

命题 3.9。对于所有的轴 $a,b\in A$，我们有 $[\![a,b,a]\!]=[\![\tau_a(b)]\!]$。

证明。这由 [HRS15a，引理 5.1，第 103] 页以及如下事实得出：$\tau_a\in$Aut(A)。□

下面的结果首次体现了它的实用价值。

命题 3.10. 设 a、 $b\in S$ 和 $x\in A$。则：

(i) $[\![a,b,a]\!]x\equiv_{(1)}x-\frac{2}{\eta}\tau_a(b)x.$

(ii) $[\![a、\ b、\ a]\!]x - [\![b、\ a、\ b]\!]x \equiv_{(1)} \epsilon_{a,\ b}([\![b]\!]x - [\![a]\!]x)$。特别地，若对某个 $i \geq 0$ 有 $x \in S[i]$，则 $[\![a、\ b、\ a]\!]x \equiv_{(i+1)} [\![b、\ a、\ b]\!]x$。(iii) $[\![b、\ a、\ b、\ a]\!]x \equiv_{(2)} [\![a、\ b]\!]x + \epsilon_{a,\ b}(x - [\![b、\ a]\!]x)$。特别地，若对某个 $i \geq 2$ 有 $x \in S[i]$，则 $[\![b、\ a、\ b、\ a]\!]x \equiv_{(i)} [\![a、\ b]\!]x - \epsilon_{a,\ b}[\![b、\ a]\!]x$。

证明。(i) 我们对 x 应用命题 3.9，并在右侧使用命题 3.6，得到

$$[\![a,b,a]\!]x = x + \tfrac{2}{\eta}(\tau_a(b),x)[\![a]\!]b - \tfrac{2}{\eta}\tau_a(b)x. \tag{3.1}$$

由于 $[\![a]\!]b \in S[1]$，结论得证。

(ii) 在 (i) 中交换 a 和 b 并相减，利用推论 3.8(i)，得到

$$[\![a,b,a]\!]x - [\![b,a,b]\!]x \equiv_{(1)} (-\tfrac{2}{\eta})\epsilon_{a,b}(b-a)x.$$

然而，由推论 3.8(ii) 可得，

$$(-\tfrac{2}{\eta})(bx - ax) \equiv_{(0)} ([\![b]\!]x - x) - ([\![a]\!]x - x) = [\![b]\!]x - [\![a]\!]x,$$

结论得证。

(iii) 由将 τ_b 应用于 (ii) 可立即得到。 □

引理 3.11. 设 a、b、$c \in S$。则：

(i) $[\![a、\ b]\!]a = \epsilon_{a,\ b}a + b - \epsilon_{a,\ b}[\![a]\!]b \equiv_{(0)} -\epsilon_{a,\ b}[\![a]\!]b$。(ii) $[\![a、\ b、\ a]\!]c = \alpha c - \alpha[\![a]\!]b + [\![c、\ a]\!]b$，其中 $\alpha = \epsilon_{\tau_a(b)\ c} \in F$。(iii) $[\![a、\ b、\ c]\!]a \equiv_{(0)} \delta[\![a]\!]b - \epsilon_{a,\ c}[\![a、\ b]\!]c + [\![c、\ a]\!]b$，其中某个 $\delta \in F$。

证明。(i) 根据推论 3.8(i)，

$$[\![a,b]\!]a = [\![a]\!]([\![b]\!]a - [\![a]\!]b + [\![a]\!]b) = \epsilon_{a,b}[\![a]\!](a-b) + b.$$

(ii) 设 $\alpha = \epsilon_{\tau_a(b)\ c}$。将 $\tau_a(b)$ 代入 a，并将 c 代入 b，由推论 3.8(i) 可得

$$[\![\tau_a(b)]\!]c - [\![c,a]\!]b = \alpha(c - [\![a]\!]b).$$

结论现在由命题 3.9 得出。

(iii) 根据推论 3.8(i)，我们有

$$\begin{aligned}[\![a,b,c]\!]a &= [\![a,b,a]\!]c + [\![a,b]\!]\big([\![c]\!]a - [\![a]\!]c\big)\\ &= [\![a,b,a]\!]c + \epsilon_{a,c}[\![a,b]\!](a-c),\end{aligned}$$

因此 (iii) 由 (i) 和 (ii) 得出。 □

4. Rewriting rules

本节中，我们将逐步建立“重写规则”，以便简化某些表达式。随着表达式长度增加，证明也会变得越来越复杂。

命题 4.1. 设 $a,b,c,d \in S$。则：

(i) $[\![a]\!]b \equiv_{(0)} [\![b]\!]a$。

(ii) $[\![a,b]\!]a \in S[1]$。

(iii) $[\![a,b,a]\!]c \equiv_{(1)} [\![c,a]\!]b$。 (iv) $[\![a,b,c]\!]a \equiv_{(1)} [\![c,b]\!]a - \epsilon_a{}_c[\![a,b]\!]c$(v) $[\![a,b,a,c]\!]d \equiv_{(1)} [\![c,d,c,a]\!]b$。 (vi) $[\![a,b,c,d,b]\!]a \equiv_{(2)} [\![b,d,c,b]\!]a - \epsilon_{a,\tau_b(d)}[\![a,b,c]\!]d \equiv_{(3)} [\![b,d,c,b]\!]a$。 (vii) $[\![a,b,c,a,b]\!]d \equiv_{(3)} [\![b,a,d,b,a]\!]c$。

证明。(i) 这由推论 3.8(i) 得出。

(ii) 由 (i)，我们有 $[\![a,b]\!]a \equiv_{(1)} [\![a,a]\!]b = b$。（当然，这也可由引理 3.11(i) 得出。）

(iii) 这由引理 3.11(ii) 得出。

(iv) 由引理 3.11(iii) 和 (i) 得出。

(v) 我们有

$$[\![a,b,a,c]\!]d - [\![c,d,c,a]\!]b = [\![\tau_a(b)]\!]\tau_c(d) - [\![\tau_c(d)]\!]\tau_a(b),$$

根据推论 3.8(i)，它包含于 $\langle \tau_a(b) - \tau_c(d)\rangle \leq S[1]$。

(vi) 我们有

$$[\![a,b,c,d,b]\!]a = [\![a,\tau_b(c),\tau_b(d)]\!]a.$$

现在令 $S' = \{a, \tau_b(c)\ \tau_b(d)\}$，并将 (iv) 应用于这个集合$S'$，以代替 S。注意，$S'[1] \leq S[2]$，因为

$$[\![\tau_b(c)]\!]a = [\![b,c,b]\!]a \in S[2] \quad (\text{by (iii)}),$$
$$[\![\tau_b(c)]\!]\tau_b(d) = [\![b,c,b,b]\!]d = [\![b,c]\!]d \in S[2],$$

因此我们看到，对所有 $x, y \in S'$，确实有 $[\![x]\!]y \in S[2]$。于是

$$\begin{aligned}[\![a,\tau_b(c),\tau_b(d)]\!]a &\equiv_{(2)} [\![\tau_b(d),\tau_b(c)]\!]a - \epsilon_{a,\tau_b(d)}[\![a,\tau_b(c)]\!]\tau_b(d)\\ &= [\![b,d,c,b]\!]a - \epsilon_{a,\tau_b(d)}[\![a,b,c]\!]d\end{aligned}$$

因此我们得出结论，确实

$$[\![a,b,c,d,b]\!]a \equiv_{(2)} [\![b,d,c,b]\!]a - \epsilon_{a,\tau_b(d)}[\![a,b,c]\!]d \equiv_{(3)} [\![b,d,c,b]\!]a.$$

(vii) 我们从

$$\begin{aligned}[\![b,a,c,a,b]\!]d &= [\![\tau_b\tau_a(c)]\!]d\\ &= [\![d]\!]\tau_b\tau_a(c) + \epsilon_{d,\tau_b\tau_a(c)}(d - \tau_b\tau_a(c))\\ &= [\![d,b,a]\!]c + \epsilon_{d,\tau_b\tau_a(c)}(d - [\![b,a]\!]c)\\ &\equiv_{(0)} [\![d,b,a]\!]c - \epsilon_{d,\tau_b\tau_a(c)}[\![b,a]\!]c.\end{aligned}$$

特别地，$[\![b、\ a、\ c、\ a、\ b]\!]d \in S[3]$。此外，将 $[\![b、\ a]\!]$ 应用于这一等价关系，可得

$$\begin{aligned}[\![b,a,b,a,c,a,b]\!]d &\equiv_{(2)} [\![b,a,d,b,a]\!]c - \epsilon_{d,\tau_b\tau_a(c)}[\![b,a,b,a]\!]c\\ &\equiv_{(2)} [\![b,a,d,b,a]\!]c, \qquad (4.1)\end{aligned}$$

其中，最后一个等价成立是因为根据 (iii) 和 (iv)，我们有

$$[\![b,a,b,a]\!]c \equiv_{(2)} [\![b,c,a]\!]b \in S[2].$$

现在我们将命题 3.10(iii) 应用于 $x = [\![c、\ a、\ b]\!]d \in S[3]$，得到

$$\begin{aligned}[\![b,a,b,a,c,a,b]\!]d &\equiv_{(3)} [\![a,b,c,a,b]\!]d - \epsilon_{a,b}[\![b,a,c,a,b]\!]d \\ &\equiv_{(3)} [\![a,b,c,a,b]\!]d.\end{aligned}$$

将此与 (4.1) 结合即可得出该结论。 □

为了得到命题 4.4 中的下一条改写规则，我们首先需要以下引理。

引理 4.2. 设 $a,b,c,d \in S$，且 $S' = \{a,b,c,\tau_a(d)\}$。则 $S'[3] \subseteq S[4]$。

证明. 任取满足 $x,y,z,w \in S'$ 的元素 $[\![x,y,z]\!]w$。显然，如果这四个元素中没有一个等于 $\tau_a(d)$，那么 $[\![x,y,z]\!]w \in S[3] \subseteq S[4]$；如果这四个元素全都等于 $\tau_a(d)$，那么 $[\![x,y,z]\!]w = \tau_a(d) \in S[1] \subseteq S[4]$。

情况 1. 假设这四个元素中只有一个等于 $\tau_a(d)$。

若 $w = \tau_a(d)$，则 $[\![x,y,z]\!]w = [\![x,y,z,a]\!]d \in S[4]$。若 $z = \tau_a(d)$，则由命题 4.1(iii)，

$$[\![x,y,z]\!]w = [\![x,y,a,d,a]\!]w \in S[4].$$

若 $y = \tau_a(d)$，则由命题 4.1(v)，

$$[\![x,y,z]\!]w = [\![x,a,d,a,z]\!]w \equiv_{(2)} [\![x,z,w,z,a]\!]d.$$

若 $x = a$ 或 $z = a$，则 $[\![x,y,z]\!]w \in S[4]$。若 $w = a$，则由命题 4.1(ii)，$[\![x,y,z]\!]w \in S[4]$。因此我们可以假设 $z = b$ 和 $w = c$。若 $x = b$，则可见 $[\![x,y,z]\!]w \in S[4]$。若 $x = c$，则

$$[\![x,y,z]\!]w \equiv_{(2)} [\![c,b,c,b,a]\!]d \in S[3],$$

由命题 3.10(iii)。

若 $x = \tau_a(d)$，则不失一般性，假设 $y = b$，

$$[\![x,y,z]\!]w = [\![a,d,a,b,z]\!]w.$$

若 $z = a$，则由命题 4.1(iii)，$[\![x,y,z]\!]w \in S[4]$。因此我们可以假设 $z = c$，并且由命题 4.1(ii)可假设 $w = a$。在这种情况下，命题 4.1(iv)表明 $[\![x,y,z]\!]w \in S[4]$。

情况 2. 假设四个元素 x、y、z、w 中有三个等于 $\tau_a(d)$。

如果 $x = y = z = \tau_a(d)$，那么显然 $[\![x、\ y、\ z]\!]w = [\![\tau_a(d)]\!]w = [\![a、\ d、\ a]\!]w \in S[2]$。对于其他情况，我们只需观察到

$$\begin{aligned}&[\![\tau_a(d),x,\tau_a(d)]\!]\tau_a(d) = [\![\tau_a(d),x]\!]\tau_a(d) = [\![a,d,a,x,a]\!]d \in S[4],\\ &[\![\tau_a(d),\tau_a(d),x]\!]\tau_a(d) = [\![x,a]\!]d \in S[2],\\ &[\![x,\tau_a(d),\tau_a(d)]\!]\tau_a(d) = [\![x,a]\!]d \in S[2].\end{aligned}$$

情况 3。四个元素 x、y、z、w 中恰有两个等于 $\tau_a(d)$。

我们有

$$\begin{aligned}&[\![\tau_a(d),\tau_a(d),z]\!]w=[\![z]\!]w\in S[1],\\&[\![x,\tau_a(d),\tau_a(d)]\!]w=[\![x]\!]w\in S[1],\text{ and}\\&[\![x,y,\tau_a(d)]\!]\tau_a(d)=[\![x,y,a]\!]d\in S[3].\end{aligned}$$

如果 $x=w=\tau_a(d)$ 且 y、$z\in\{a,b,c\}$，那么根据 (vi),

$$[\![\tau_a(d),y,z]\!]\tau_a(d)=[\![a,d,a,y,z,a]\!]d\ \equiv_{(4)}\ [\![a,a,z,y,a]\!]d\in S[3].$$

接下来，如果 $x=w=\tau_a(d)$ 且 y、$z\in\{a,b,c\}$，那么根据引理 3.11(ii)（以 $\tau_a(d)$ 代替 a），$[\![\tau_a(d)\ y\ ,\ \tau_a(d)]\!]w\in S[4]$。

最后，如果 $y=w=\tau_a(d)$ 且 x、$z\in\{a,b,c\}$，那么根据引理 3.11(i)

$$[\![x,\tau_a(d),z]\!]\tau_a(d)\in S[4].\qquad\square$$

下面的推论将在命题 4.5 的证明中发挥重要作用。

推论 4.3. 设 $a,b,c,d\in S$，并设 $T=\{a,\tau_a(b)\ \tau_a(c)\ d\}$。则$T[4]\subseteq S[6]$。

证明. 设 $S'=\{a,b,c,\tau_a(d)\}$ 如引理 4.2 中所述，并注意到 $T=\tau_a(S')$，即 T 是通过对每个元素应用 τ_a 从 S' 得到的。由命题 3.9，对于所有 $x_1,\dots,x_k,y\in S'$，我们有

$$[\![\tau_a(x_1),\dots,\tau_a(x_k)]\!]\tau_a(y)=[\![a,x_1,\dots,x_k,a]\!]\tau_a(y)=\tau_a([\![x_1,\dots,x_k]\!]y),$$

因此，对于所有 i，$T[i]=\tau_a(S'[i])$。

由引理 4.2，我们有 $S'[3]\subseteq S[4]$。现在

$$\begin{aligned}S'[4]&=[\![a]\!]S'[3]\cup[\![b]\!]S'[3]\cup[\![c]\!]S'[3]\cup[\![\tau_a(d)]\!]S'[3]\\&\subseteq S[5]\cup[\![a,d,a]\!]S[4],\end{aligned}$$

因此

$$T[4]=[\![a]\!]S'[4]\subseteq[\![a]\!]S[5]\cup[\![d,a]\!]S[4]\subseteq S[6].\qquad\square$$

命题 4.4. 设 $a,b,c,d\in S$. 则

$$[\![a,b,c,a,b,c]\!]d\ \equiv_{(4)}\ [\![b,c,a,b,c,a]\!]d\ \equiv_{(4)}\ [\![c,a,b,c,a,b]\!]d.$$

证明. 设 $S'=\{a,b,c,\tau_a(d)\}$. 根据引理 4.2，我们有 $S'[3]\subseteq S[4]$. 因此，我们可以对 S' 应用命题 4.1(vii)，得到

$$[\![c,b,\tau_a(d),c,b]\!]a\ \equiv_{(4)}\ [\![b,c,a,b,c]\!]\tau_a(d),$$

因此

$$[\![c,b,a,d,a,c,b]\!]a\ \equiv_{(4)}\ [\![b,c,a,b,c,a]\!]d.\tag{4.2}$$

另一方面，我们将 $[\![c,b,a,d]\!]$ 应用于引理 3.11(iii)中的等价关系（交换 b和 c），得到

$$\begin{aligned}&[\![c,b,a,d,a,c,b]\!]a\\&\quad\equiv_{(4)}\ \delta[\![c,b,a,d,a]\!]c-\epsilon_{a,b}[\![c,b,a,d,a,c]\!]b+[\![c,b,a,d,b,a]\!]c\end{aligned}$$

对于某个 $\delta \in F$。现在，根据命题 4.1(iii)，$[\![c,b,a,d,a]\!]c \in S[4]$。此外，根据命题 4.1(v)和命题 3.10(iii)，我们有

$$[\![c,b,a,d,a,c]\!]b \equiv_{(3)} [\![c,b,c,b,c,a]\!]d \in S[4].$$

因此，根据命题 4.1(vii)，

$$[\![c,b,a,d,a,c,b]\!]a \equiv_{(4)} [\![c,b,a,d,b,a]\!]c \equiv_{(4)} [\![c,a,b,c,a,b]\!]d. \tag{4.3}$$

结合 (4.2) 和 (4.3)，我们得到

$$[\![b,c,a,b,c,a]\!]d \equiv_{(4)} [\![c,a,b,c,a,b]\!]d.$$

现在只需对 a、b、c 作循环置换，即可得到另一个等价关系。

□

现在我们来讨论最后一条、也是最具挑战性的改写规则，它将有效地限制 4生成的 Jordan 型本原轴代数的维数。

命题 4.5. 设 a、b、c、$d \in S$。那么 $[\![d$、a、b、c、a、b、$c]\!]d \in S[6]$。

证明。令

$$T = \{\tau_d(a), \tau_d(b), c, d\}.$$

由推论 4.3，得到 $T[4] \subseteq S[6]$。将命题 4.4 应用于 T，可得

$$[\![\tau_d(a),\tau_d(b),c,\tau_d(a),\tau_d(b),c]\!]d \equiv_{(6)} [\![c,\tau_d(a),\tau_d(b),c,\tau_d(a),\tau_d(b)]\!]d. \tag{4.4}$$

我们分两步进行：首先证明

$$[\![\tau_d(a),\tau_d(b),c,\tau_d(a),\tau_d(b),c]\!]d \equiv_{(6)} [\![d,a,c,b,a,c,b]\!]d, \tag{4.5}$$

然后证明

$$[\![c,\tau_d(a),\tau_d(b),c,\tau_d(a),\tau_d(b)]\!]d \in S[6]. \tag{4.6}$$

交换 b 和 c 的角色，由 (4.4)、(4.5) 和 (4.6) 即可推出 $[\![d,a,b,c,a,b,c]\!]d \in S[6]$。

步骤 1。(4.5) 的证明。

将引理 3.11(i) 应用于 $[\![d$、$c]\!]d$，可得

$$\begin{aligned}[\![\tau_d(a),\tau_d(b),c,\tau_d(a),\tau_d(b),c]\!]d&\\ &= [\![d,a,b,d,c,d,a,b,d,c]\!]d\\ &= [\![d,a,b,d,c,d,a,b]\!]c + \epsilon_{c,d}[\![d,a,b,d,c,d,a,b]\!]d\\ &\qquad - \epsilon_{c,d}[\![d,a,b,d,c,d,a,b,d]\!]c.\end{aligned}$$

现在令 $\gamma = -\epsilon_{c,\ \tau_d\ (b)}$；由命题 4.1(vi) 和命题 4.1(v)，可得

$$\begin{aligned}[\![d,a,b,d,c,d,a,b,d]\!]c &\equiv_{(6)} [\![d,a,b,d,d,b,a,d]\!]c + \gamma[\![d,a,b,d,c,d,a]\!]b\\ &\equiv_{(0)} \gamma[\![d,a,b,d,c,d,a]\!]b\\ &\equiv_{(4)} \gamma[\![d,a,b,a,b,a,d]\!]c \in S[6],\end{aligned}$$

由命题 3.10(iii) 得。

此外，根据命题 4.1(iv)，我们有

$$\begin{aligned}
&[\![d,a,b,d,c,d,a,b]\!]d\\
&\equiv_{(6)} [\![d,a,b,d,c,b,a]\!]d - \epsilon_{b,d}[\![d,a,b,d,c,d,a]\!]b\\
&\equiv_{(6)} [\![d,a,b,d,c,b,d]\!]a - \epsilon_{b,d}[\![d,a,b,a,b,a,d]\!]c \quad \text{(by 4.1(i) and 4.1(v))}\\
&\equiv_{(6)} [\![d,a,d,b,a,d,b]\!]c - \epsilon_{b,d}[\![d,a,b,a,b,a,c]\!]d \quad \text{(by 4.1(vii) and 4.1(i))}\\
&\in S[6],
\end{aligned}$$

根据命题 4.4 和命题 3.10(iii)。

最后，根据命题 3.10(ii),

$$\begin{aligned}
&[\![d,a,b,d,c,d,a,b]\!]c\\
&\quad\equiv_{(6)} [\![d,a,b,c,d,c,a,b]\!]c\\
&\quad\equiv_{(6)} [\![d,a,b,c,d,b,a]\!]c - \epsilon_{b,c}[\![d,a,b,c,d,c,a]\!]b \quad \text{(by 4.1(iv))}\\
&\quad\equiv_{(6)} [\![d,a,b,c,d,b,c]\!]a - \epsilon_{b,c}[\![d,a,b,a,b,a,c]\!]d \quad \text{(by 4.1(i) and 4.1(v))}\\
&\quad\equiv_{(5)} [\![d,a,c,b,a,c,b]\!]d \quad \text{(by 4.1(vii) and 3.10(iii)).}
\end{aligned}$$

这就证明了 (4.5)。

步骤 2。(4.6) 的证明。

由引理 3.11(iii)，存在 $\delta \in F$，使得

$$\begin{aligned}
&[\![c,\tau_d(a),\tau_d(b),c,\tau_d(a),\tau_d(b)]\!]d\\
&\qquad = [\![c,d,a,b,d,c,d,a,b]\!]d\\
&\qquad\equiv_{(6)} \delta[\![c,d,a,b,d,c,d]\!]a - \epsilon_{b,d}[\![c,d,a,b,d,c,d,a]\!]b\\
&\qquad\qquad + [\![c,d,a,b,d,c,b,d]\!]a.
\end{aligned}$$

现在由命题 4.1(iii)，$[\![c,d,a,b,d,c,d]\!]a \in S[6]$。由命题 4.1(v) 和命题 3.10(iii)，我们有

$$[\![c,d,a,b,d,c,d,a]\!]b \equiv_{(5)} [\![c,d,a,b,a,b,a,d]\!]c \in S[6].$$

最后，由命题 4.1(vii) 和命题 4.4，我们还有

$$\begin{aligned}
[\![c,d,a,b,d,c,b,d]\!]a &\equiv_{(6)} [\![c,d,a,d,b,a,d,b]\!]c\\
&\equiv_{(6)} [\![c,d,d,b,a,d,b,a]\!]c = [\![c,b,a,d,b,a]\!]c \in S[6].
\end{aligned}$$

这就证明了 (4.6)，从而完成了该命题的证明。 □

5. 4-generated primitive axial algebras of Jordan type

现在我们可以证明主要结果了。虽然写出证明时需要仔细推敲，但核心工作已在命题 4.1、4.4 和 4.5 中完成。

定理 5.1. 假设 A 由一组 $S = \{a, b, c, d\}$ 的 4 个轴生成。那么 $A = S[6]$ 和 A 的维数至多为 81。

更确切地说，令 G 为由 S的所有置换组成的群 Sym(S)。定义[2]

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \{a\}^G,\\
\Gamma_1 &= \{[\![a]\!]b\}^G,\\
\Gamma_2 &= \{[\![a, b]\!]c\}^G,\\
\Gamma_3 &= \{[\![a, b, c]\!]d\}^G,\\
\Gamma_4 &= \{[\![a, b, a, c]\!]d,\ [\![a, b, c, a]\!]d\}^G,\\
\Gamma_5 &= \{[\![a, b, c, a, b]\!]d\}^G,\\
\Gamma_6 &= \{[\![a, b, c, a, b, c]\!]d\}^G.
\end{aligned}$$

那么，对每个 $i \in \{1, \dots, 6\}$，我们有 $S[i] = \langle \Gamma_0, \dots, \Gamma_i \rangle$。特别地，$A = \langle \Gamma_0, \dots, \Gamma_6 \rangle$。

此外，这些张成集存在一定冗余：每个 $S[i]$ 的维数分别至多为 4、10、22、34、61、73 和 81。

证明。对于每个 $i \le 6$，令 $T[i]$ 为由 $\Gamma_0, \dots, \Gamma_i$ 张成的 A 的子空间。显然，对于每个 i，我们有 $T[i] \le S[i]$ 。我们将递归地证明，对于每个 $i \le 6$，$S[i] = T[i]$，且 $S[7] = S[6]$。同时，我们将计算每个 $T[i]$ 的最大可能维数。注意，对于每个 i，子空间 $S[i+1]$ 由 $S[i]$ 以及对 $S[i]$ 中的元素应用四种运算 $[\![a]\!]$、$[\![b]\!]$、$[\![c]\!]$ 和 $[\![d]\!]$ 所得到的所有元素张成。为了从 $S[i] = T[i]$ 进入下一步 $S[i+1]$，利用G对称性，只需对集合 Γ_i 的给定代表应用这四种运算。

$i = 0$。显然，$T[0] = \langle a、\ b、\ c、\ d \rangle = S[0]$，且 $\dim S[0] \le 4$。$i = 1$。我们有 $[\![a]\!]a = a \in S[0]$，而对代表元 $a \in \Gamma_0$ 施行另外三种运算 $[\![b]\!]$、$[\![c]\!]$、$[\![d]\!]$ 中的任意一种，所得元素都属于 Γ_1，所以 $S[1] \le T[1]$。由命题 4.1(i)，我们有 $[\![b]\!]a \equiv_{(0)} [\![a]\!]b$，因此 Γ_1 的 12 个可能元素两两成对，且模 $S[0]$线性相关。因此 $\dim S[1] \le 4 + 12/2 = 10$。$i = 2$。由命题 4.1(ii)，我们有 $[\![a、\ a]\!]b = b \in S[0]$ 以及 $[\![b、\ a]\!]b \in S[1]$。另一方面，$[\![c、\ a]\!]b$ 以及 $[\![d、\ a]\!]b$属于 Γ_2，因而也属于$T[2]$。所以 $S[2] \le T[2]$。由命题 4.1(i)，我们有 $[\![a、\ b]\!]c \equiv_{(1)} [\![a、\ c]\!]b$，因此 Γ_2 的 24 个可能元素两两成对，且模 $S[1]$线性相关。因此 $\dim S[2] \le 10 + 24/2 = 22$。

[2]这里存在一些明显的符号滥用：先验地，群 G并不作用于 A，因此当我们写下形如 $\{[\![a, b, c]\!]d\}^G$ 的表达式时，实际指的是 $\{[\![a^\rho, b^\rho, c^\rho]\!](d^\rho) \mid \rho \in G\}$。

$i=3$。我们有 $[\![a、\ a、\ b]\!]c = [\![b]\!]c \in S[1]$；由命题 4.1(iii)，我们有 $[\![b、\ a、\ b]\!]c \in S[2]$；由命题 4.1(iv)，我们有 $[\![c、\ a、\ b]\!]c \in S[2]$。另一方面，$[\![d、\ a、\ b]\!]c$ 属于 Γ_3，因而也属于 $T[3]$。所以 $S[3] \leq T[3]$。

由命题 4.1(i)，我们有 $[\![a,b,c]\!]d \equiv_{(2)} [\![a,b,d]\!]c$，因此 Γ_3 的 24 个可能元素成对出现，且模 $S[2]$ 线性相关。因此 $\dim S[3] \leq 22 + 24/2 = 34$。

$i=4$。我们有 $[\![a,a,b,c]\!]d = [\![b,c]\!]d \in S[2]$。另一方面，$[\![b,a,b,c]\!]d$ 和 $[\![c,a,b,c]\!]d$ 属于 Γ_4，因此也属于 $T[4]$。最后，$[\![d,a,b,c]\!]d \equiv_{(3)} [\![d,a,b,d]\!]c \in \Gamma_4$，所以 $[\![d,a,b,c]\!]d$ 属于 $\langle S[3], \Gamma_4 \rangle \leq T[4]$。因此 $S[4] \leq T[4]$。

根据命题 4.1(v)，$\{[\![a,b,a,c]\!]d\}^G$ 的 24 个可能元素分成若干个 8 元组，其中每组内的元素模 $S[3]$ 两两线性相关：

$$[\![a,b,a,c]\!]d \equiv_{(1)} [\![c,d,c,a]\!]b \equiv_{(3)} [\![c,d,c,b]\!]a \equiv_{(1)} [\![b,a,b,c]\!]d$$
$$\equiv_{(3)} [\![b,a,b,d]\!]c \equiv_{(1)} [\![d,c,d,b]\!]a \equiv_{(3)} [\![d,c,d,a]\!]b \equiv_{(1)} [\![a,b,a,d]\!]c.$$

另一方面，$\{[\![a,b,c,a]\!]d\}^G$ 的 24 个可能元素之间不存在此类等价关系。因此 $\dim S[4] \leq 34 + 24/8 + 24 = 61$。

$i=5$。首先，由于 $[\![a,b,a,c]\!]d$ 与一个以任意生成元 a,b,c,d 开头的元素 3-等价，我们可以看出，对该元素应用四个算子 $[\![a]\!]$, $[\![b]\!]$, $[\![c]\!]$, $[\![d]\!]$ 中的任意一个，所得元素都已包含在 $S[3]$ 中。

接下来，我们将这些算子应用于 $[\![a,b,c,a]\!]d$。当然，我们仍有 $[\![a,a,b,c,a]\!]d \in S[3]$。然后，由命题 3.10(ii) 和命题 4.1(iii)，我们有 $[\![b,a,b,c,a]\!]d \equiv_{(3)} [\![a,b,a,c,a]\!]d \in S[4]$；由命题 4.1(vi)，我们有 $[\![d,a,b,c,a]\!]d \in S[4]$。最后，$[\![c,a,b,c,a]\!]d \in \Gamma_5$。因此 $S[5] \leq T[5]$。

根据命题 4.1(vii)，Γ_5 的 24 个可能元素两两成对，且模 $S[4]$ 线性相关。因此 $\dim S[5] \leq 61 + 24/2 = 73$。

$i=6$。我们有 $[\![a,a,b,c,a,b]\!]d = [\![b,c,a,b]\!]d \in S[4]$。根据命题 3.10(ii) 和命题 4.1(v)，我们得到

$$[\![b,a,b,c,a,b]\!]d \equiv_{(4)} [\![a,b,a,c,a,b]\!]d \equiv_{(3)} [\![a,b,b,d,b,a]\!]c \in S[4].$$

接下来，$[\![c,a,b,c,a,b]\!]d \in \Gamma_6$；最后，根据命题 4.1(vii)，我们还有 $[\![d,a,b,c,a,b]\!]d \equiv_{(4)} [\![d,b,a,d,b,a]\!]c \in \Gamma_6$。因此 $S[6] \leq T[6]$。

根据命题 4.4，Γ_6 的 24 个可能元素每三个成组，且模 $S[5]$ 两两线性相关。因此 $\dim S[6] \leq 73 + 24/3 = 81$。

$i=7$。我们有 $[\![a,a,b,c,a,b,c]\!]d \in S[5]$，由命题 4.4 可知，$[\![b,a,b,c,a,b,c]\!]d$ 以及 $[\![c,a,b,c,a,b,c]\!]d$ 也属于 $S[5]$。最后，由命题 4.5，我们还得到 $[\![d,a,b,c,a,b,c]\!]d \in S[6]$。因此可得 $S[7] = S[6]$，进而 $A = S[6]$。□

References

[Asc97] M. Aschbacher。 *3-transposition groups* 124 *Cambridge Tracts in*，第 卷。剑桥 *Mathematics* 1997 大学出版社，剑桥，。[Asc00] M. Aschbacher。 *Finite group theory* 10 *Cambridge Studies in*，第 卷。剑桥 *Advanced Mathematics* 大学出版社，剑桥，第二版，2000年。[CH95] H. Cuypers 和 J. I. Hall。具有平凡中心的 3-换位群。*J. Algebra*，178(1):149–193，1995年。[DMPSVC20] T. De Medts、S. F. Peacock、S. Shpectorov 和 M. Van Couwenberghe。分解代数与轴代数。 *J. Algebra*，556:287–314，2020年。[DMR17] T. De Medts 和 F. Rehren。约当代数与 3-换位群。*J. Algebra*，478:318–340，2017年。[GS20] I. Gorshkov 和 A. Staroletov。关于约当型本原三生成轴代数。 *J. Algebra*，563:74–99，2020年。[Hal22] J. I. Hall。生成有限 3 371，2022 607 338 -换位群。 *J. Algebra*，: – 。[HRS15a] J. I. Hall、F. Rehren 和 S. Shpectorov。约当型本原轴代数。 *J. Algebra*，437:79–115，2015年。[HRS15b] J. I. Hall、F. Rehren 和 S. Shpectorov。泛轴代数与 Sakuma 定理。 *J. Algebra*，421:394–424，2015年。[HS95] J. I. Hall 和 L. H. Soicher。若干 3-换位群的表示。*Comm. Algebra*，23(7):2517–2559，1995年。[HSS18] J. I. Hall、Y. Segev 和 S. Shpectorov。关于约当型本原轴代数。 *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*，13(4):397–409，2018年。[Jac68] N. Jacobson。 *Structure and representations of Jordan algebras*。美国数学会丛书，卷 XXXIX。美国数学会，普罗维登斯，R.I.，1968年。[KMS20] S. M. S. Khasraw、J. McInroy 和 S. Shpectorov。关于轴代数的结构。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，373(3):2135–2156，2020年。[LB83] J. Lacaze 和 L. B´en´eteau。最小非仿射 Hall 三元系的自同构群。载于 *Combinatorial mathematics (Marseille-Luminy, 1981)* 75 *North-Holland Math. Stud.* 387 391 ，第 卷，页码 –。 北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1983年。

Tom De Medts Department of Mathematics: Algebra and Geometry Ghent , , University Krijgslaan 281 – S25 9000 Gent Belgium , , ,*Email address*: tom.demedts@ugent.beLouis Rowen, Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat Gan,Israel *Email address*: rowen@math.biu.ac.il

Yoav Segev, Department of Mathematics, Ben-Gurion University, Beer-Sheva 84105, Israel*Email address*: yoavs@math.bgu.ac.il