arXiv:2301.02516v1 [math.OC] 6 Jan 2023

采用保结构有限体积格式对智能体控制的行人动力学进行数值研究

Jan-Frederik Pietschmann* Ailyn Stötzner† Max Winkler†

本文给出了一个针对智能体参与的行人运动最优控制问题的数值实现，该问题已由 Herzog, Pietschmann, Winkler, 2020 进行分析。该模型由行人动力学 Hughes模型的一个正则化变体与常微分方程耦合而成，常微分方程描述了能够通过吸引力影响人群运动的智能体的运动。我们设计了一种有限体积格式，该格式保留了模型固有的盒约束，并讨论了其若干性质。我们将该格式应用于针对疏散场景设计的目标泛函。最后，对若干具有实际意义的几何形状进行了数值模拟。

关键词。人群运动，非线性输运，程函方程，常微分方程-偏微分方程耦合，最优控制，有限体积，投影梯度下降

AMS学科分类（MSC2010）。49K20，35Q91，35M33，65M08

1 引言

随着越来越多的人居住在人口密集地区，（大型）行人人群的建模、仿真与控制已成为一个重要的研究领域。本文研究了 Hughes 行人运动模型正则化版本的最优控制问题，Hughes, 2002年。在我们的方法中，连续的人群可由数量固定且较少的智能体进行控制，这些智能体能够吸引其附近的人。从模型角度看，这相当于在智能体所在位置添加一个附加势项。在此前的研究中，Herzog、Pietschmann、Winkler，2020年，我们已研究了该问题的适定性与最优性条件；本文则重点关注其数值

*开姆尼茨工业大学，数学系，逆问题研究组，09107 开姆尼茨，德-国（jan.pietschmann@mathematik.tu-chemnitz.de，https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/invpde/prof.php，OR- CID0000-0003-0383-8696）。

†开姆尼茨工业大学，数学系，09107 开姆尼茨，德国（ailyn@stoetzner.de，http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/partdgl/people/stoetzner/，ORCID 0000-0002-8287-9738，max.winkler@mathematik.tu-chemnitz.de，https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/partdgl/people/winkler/，ORCID 0000-0002-5292-2280）。 -

实现及大量数值算例。具体而言，我们给出并分析了一种有限体积格式，该格式能够保持问题中固有的盒约束。

为介绍该模型，我们令 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为具有 C^4-边界 $\partial\Omega$ 的有界区域。此外，$T > 0$ 是任意时间范围，而 $Q_T := (0,T) \times \Omega$ 以及 $\Sigma_T = (0,T) \times \partial\Omega$ 分别表示时空柱及其侧边界。边界分为两部分：$\partial\Omega_D$ 表示出口，$\partial\Omega_W$ 表示区域受墙壁约束的部分。出于理论考虑（解的正则性），我们假设 $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_W = \emptyset$，即这两个边界部分彼此分离，见图 4.1。类似地，我们定义 $\Sigma_D = (0,T) \times \partial\Omega_D$ 和 $\Sigma_W = (0,T) \times \partial\Omega_W$。

方程组中的未知变量为人群密度 $\rho\colon Q_T \to \mathbb{R}_+$，以及指定当前逃离时间的势函数 $\phi\colon Q_T \to \mathbb{R}$。此外，还有 M 个智能体，它们可通过吸引力影响人群的运动。其位置表示为 $x_i\colon (0,T) \to \mathbb{R}^2$，$i = 1,\dots,M$。此外，每个智能体都能够调节其对人群施加的作用强度。该强度由强度 $c_i\colon (0,T) \to \mathbb{R}_+$, $i = 1,\dots,M$表示。主体轨迹和相互作用强度分别汇总为向量 $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)^\top$ 和 $\boldsymbol{c} = (c_1,\dots,c_n)^\top$。

受智能体影响的行人人群运动可由以下数学方程描述。给定行人运动方向 $\boldsymbol{u} = (u_1,\dots,u_M)^\top$，其中 $u_i \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^2)$，未知量 $\rho, \phi, \boldsymbol{x}$ 之间通过以下关系相联系：

$$\partial_t \rho - \nabla \cdot \big(\rho\, \beta(\rho,\phi,\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})\big) = \varepsilon \Delta\rho \qquad \text{in } Q_T, \tag{1.1a}$$

$$-\delta_1 \Delta\phi + |\nabla\phi|^2 = \frac{1}{f(\rho)^2 + \delta_2} \qquad \text{in } Q_T, \tag{1.1b}$$

$$\dot{x}_i(t) = f\big(\rho(t,x_i(t))\big)\, u_i(t) \quad \text{for } t \in (0,T), \quad i = 1,\dots,M. \tag{1.1c}$$

此外，我们施加边界条件

$$\begin{aligned} -\big(\varepsilon\nabla\rho + \rho\,\beta(\rho,\phi,\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})\big)\cdot n &= \gamma\rho, & \phi &= 0 \quad \text{on } \Sigma_D, \\ \big(\varepsilon\nabla\rho + \rho\,\beta(\rho,\phi,\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})\big)\cdot n &= 0, & \nabla\phi\cdot n &= 0 \quad \text{on } \Sigma_W, \end{aligned} \tag{1.2}$$

以及初始条件

$$\rho(0,\cdot) = \rho_0 \quad \text{in } \Omega, \qquad x_i(0) = x_{i,0} \quad \text{for } i = 1,\dots,M. \tag{1.3}$$

这里，ε，δ_1，$\delta_2 > 0$ 是正则化参数，系统中的相应项是保证解具有一定正则性所必需的，参见定理 2.1。区域 Ω 足够大，因此 $x_i(t) \in \Omega$ 在 $[0,T]$ 上，对于 $i = 1, \dots, M$ 以及 $t \in [0,T]$ 如果 $|u_i(t)| \le 1$。

我们简要讨论各项的含义：方程（1.1a）表明，行人按照速度场 β（见下文的2.1）进行输运，同时还进行由 ρ 的拉普拉斯算子所表示的（微小）随机运动。第二个方程（1.1b）是经过修改和正则化的程函方程，其解是到最近出口的距离，并通过右端项减弱高密度区域的影响。这里，额外的扩散反映了行人无法完全准确地了解周围环境这一事实。接着，方程（1.1c）描述智能体的运动，其速度还会受到周围行人密度的影响。函数 $f\colon [0,1] \to [0,1]$ 是一个密度-速度规则，其选取方式使得 $f(\rho)$ 确定了当个体当前位置的密度为 ρ 时，该个体能够移动的最大速度。我们选择 f 为单调递减函数，这意味着密度越高，

运动速度越慢。速度场 β 将反映这样一个事实：一方面，行人试图将其离开时间降至最低，这相当于沿$\nabla\phi$ 方向的漂移项；另一方面，他们会被智能体吸引，这通过额外的吸引势来实现，其中心取决于智能体的位置 x。由此得到的速度是两个项之和。此外，为考虑速度在高密度区域会降低这一影响，还将其乘以一个额外的因子 $f(\rho)$进行修正。与智能体运动方程中的情形一样， f是单调递减的，并会在给定的最大密度处变为零。

边界条件 (1.2) 允许边界的部分区域出现速度为 γ的流出 (Σ_D)，而其余部分的无通量条件则应解释为墙壁 (Σ_W)。 下一节将详细描述其中涉及的非线性项；有关模型和正则化项的更多细节，另请参阅 Herzog, Pietschmann,Winkler, 2020 。

对于未正则化的 Hughes 模型，其解析性质Hughes, 2002 (即 $\varepsilon = \delta_1 = \delta_2 = 0$在 (1.1) 中所示的模型)，在无控制的情况下难以研究，因为 $\nabla\phi$ 的正则性较低，并且它出现于一个依赖于第一条方程的解 ρ 的集合上；不过，可参见 Amadori, Goatin, Rosini, 2014； Amadori,Di Francesco, 2012； El-Khatib, Goatin, Rosini, 2013。因此，人们考虑了正则化变体；例如，参见 Di Francesco, Markowich, et al., 2011 ，其中 $\varepsilon = 0$ 但 δ_1, $\delta_2 \neq 0$。事实上，该文中的结果是通过消失黏性极限 $\varepsilon \to 0$得到的。该模型还有许多扩展和变体，旨在理解其其他性质、使模型更加贴近现实，或考虑图等不同情形，参见 Burger, Di Francesco, et al., 2014； Carrillo, Martin, Wolfram, 2016； Carlini et al., 2016； Di Francesco, Fagioli, et al., 2017； Colombo, Gokieli, Rosini, 2018。

近年来，通过少量智能体实现系统控制受到了广泛关注，既包括离散层面（即考虑描述个体运动的大型常微分方程系统，并将其与少量描述智能体的方程耦合），参见Caponigro 等人，2013年；Himakalasa、Wongkaew，2021年，也包括耦合的偏微分方程-常微分方程系统，Albi、Bongini 等人，2016年；Albi、Fornasier、Kalise，2017年。需要强调的是，当偏微分方程以这样的方式与常微分方程耦合，以致需要在常微分方程的解处求取偏微分方程的解（如式（1.1c）所示）时，就需要正则性。在我们的情形中，这由式（1.1a）中的额外扩散项提供；而在考虑用于行人输运的双曲型模型时，则需要在常微分方程中加入额外的正则化，参见例如Borsche、Colombo 等人，2015年；Borsche、Klar 等人，2014年；Borsche、Meurer，2019年。最后还要指出，随着智能体数量趋于无穷，常微分方程-常微分方程和偏微分方程-常微分方程两种视角通过所谓的平均场极限密切相关，参见Burger、Pinnau 等人，2016年；Pinnau、Totzeck，2018年，以及近期关于人群控制的综述：Banda、Herty、Trimborn，2020年。

对于方程（1.1a）的数值离散，考虑到参数 ε 较小，我们采用有限体积格式进行空间离散，该格式也可以解释为间断伽辽金格式。结合拉克斯-弗里德里希斯数值通量，该格式稳定，并能保持 $0 \le \rho \le 1$ 模型固有的界限。此类偏微分方程的保结构离散近年来备受关注，例如在趋化问题中Epshteyn、Kurganov，2009年；Li、Shu、Yang，2017年；Strehl 等，2010年；Guo、Li、Yang，2018年；Ibrahim、Saad，2014年；Filbet，2006年。前述文献在时间推进格式的选择上也各有不同。对于方程（1.1），我们将采用隐显式有限差分格式，其中扩散相关项采用隐式处理，对流相关项采用显式处理。方程（1.1b）采用标准线性有限元离散，而对于方程（1.1c），我们采用后向欧拉格式。

本文的组织结构如下：在第2节中，我们将精确定义问题，并回顾Herzog, Pietschmann, Winkler, 2020年中的分析结果。在第3节中，我们将给出一种数值

时空离散格式，并分析其若干性质；特别地，我们将证明该格式能够保持行人密度的物理界限。在第3.5节中讨论相应的优化算法，第4节最后给出数值实验的结果。

2 连续最优控制问题

我们来说明方程组中其余各个量的含义。函数 $f\colon [0,\rho_{\max}] \to \mathbb{R}$ 是一个密度—速度关系，并假设满足 $W^{3,\infty}(\mathbb{R}) \cap C_c(\mathbb{R})$，其中 $f(0) = 1$ 且 $f(\rho_{\max}) = 0$，这里 $\rho_{\max}$ 表示最大密度。一个常见的选择是

$$f(\rho) = \xi\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$$

其中，截断函数 $\xi \in C_c^\infty(-1,2)$ 满足 $\xi \equiv 1$ 在 $(0,1)$ 上显然，密度越高，速度越低。全文中我们取 $\rho_{\max} = 1$。由函数 $-\beta(\rho,\phi,\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})$ 描述的人群运动方向建模如下。人群主要倾向于朝最近的紧急出口移动，即方向 $-\nabla\phi$。附近智能体的吸引作用会对此产生影响，该作用对应方向 $-\nabla\phi_K$，其中个体势函数定义为

$$\phi_K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c};t,x) \coloneqq \sum_{i=1}^{M} c_i(t)\,K\big(x - x_i(t)\big).$$

这里，$K(x) = k(|x|)$，$k \in W^{3,\infty}(\mathbb{R})$是径向对称函数，而 $c_i \in H^1(0,T)$，$i = 1,\ldots,M$是时变强度函数。吸引性个体势函数的典型选择是凸起函数

$$k(r) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right), & \text{if } r < R, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其吸引半径为 $R > 0$，或莫尔斯势

$$k(r) = \mathrm{e}^{-2a(r - r_a)} - 2\,\mathrm{e}^{-a(r - r_a)}$$

其中参数 a，$r_a > 0$，使智能体在近距离内相互排斥，在远距离内相互吸引。这有助于避免智能体附近出现过高的密度。关于群集问题中势函数的更详细讨论，请参阅Carillo、Huang、Martin，2014年。

这些考量得出了如下定义的速度场

$$\beta(\rho,\phi,\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) = v_0 f(\rho)\,h(\nabla(\phi + \phi_K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}))) \quad \text{with} \quad h(x) = \min\nolimits_{\varepsilon}\{1,|x|\}\frac{x}{|x|}, \tag{2.1}$$

其中 h 是向 $\mathbb{R}^2$ 中的单位球进行平滑投影，而因子 $f(\rho)$再次将允许运动速度与当前密度关联起来，即 $|\beta(\rho,\ \phi,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{c})| \le v_0 f(\rho)$属于 Q_T。

我们简要介绍下文将用到的函数空间，另见Denk、Hieber、Prüss，2007年。对于区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，我们用 $W^{k,p}(\Omega)$，$k \in \mathbb{N}_0, p \in [1,\infty]$表示通常的索博列夫空间，用 $W^{k-1/p,p}(\Gamma)$（$k \ge 1$）表示相应的迹空间，这些空间可配备索博列夫-斯洛博杰茨基范数。

此外，我们记 $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$。包含边界条件的特殊空间为 $H^1_D(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega_D} \equiv 0\}$ 和 $W^{2,p}_{,\mathrm{DN}}(\Omega) := \{v \in W^{2,p}(\Omega) : v|_{\partial\Omega_D} = 0,\ \partial_n v|_{\partial\Omega_W} = 0\}$。对于时间相关函数 $v\colon [0,T] \to X$，给定某个巴拿赫空间 X，我们定义

$$L^p(0,T;X) := \{v\colon (0,T) \to X \mid \int_0^T \|v(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t < \infty\}, \quad p \in [1,\infty),$$

以及

$$W^{s,p}(0,T;X) := \{v\colon (0,T) \to X \mid \partial_t^\ell v \in L^p(0,T;X), 0 \le \ell \le s\}, \quad s \in \mathbb{N}_0,\ p \in [1,\infty).$$

对于我们所考虑的应用，以下空间

$$W_p^{r,s}(Q_T) := L^p(0,T;W^{r,p}(\Omega)) \cap W^{s,p}(0,T;L^p(\Omega)), \quad p \in [1,\infty), \quad r,s \in \mathbb{N}_0,$$

值得关注，并且这些空间都赋予了自然范数

$$\|v\|_{W_p^{r,s}(Q_T)} := \left(\|v\|^p_{L^p(0,T;W^{r,p}(\Omega))} + \|v\|^p_{W^{s,p}(0,T;L^p(\Omega))}\right)^{1/p}.$$

具有非整数 r 和 s 的空间被定义为插值空间。

在之前的一项研究中，Herzog、Pietschmann、Winkler，2020年，针对(1.1)–(1.3)建立了一个全局（时间上）的适定性与正则性结果。此外，还推导了相关最优控制问题的最优性条件，其中该系统作为约束条件出现。为方便读者，我们简要概述本文所需的最重要结果。

首先，以下存在性与正则性结果成立：

定理 *2.1.* 假设 $\rho_0 \in W^{3/2,4}(\Omega)$ 且 $x\ T > 0$. 给定任意的行人运动方向$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_M)^\mathrm{T} \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^2)^M$ 和强度 $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_M) \in H^1(0,T)^M$，存在唯一的强解 $($

$\rho\ \phi\ \boldsymbol{x}$ 11 13 $2 < p < \infty\ \rho \in W_p^{2\,1}\ Q_T$ $\phi \in , ,)$,
$L^\infty\ 0\ T\ W^{2\,p}\ \Omega$ $x_i\ i = 1 \dots M$
满足$(.)$–$(.)$，且对任意 , , $( )$ 和 $(, ; , ( ))$ 均成立。主体轨迹 , , , 绝对连续。此外，先验估计

$$\|\rho\|_{W_p^{2,1}(Q_T)} + \|\phi\|_{L^\infty(0,T;W^{2,p}(\Omega))} \le C\|\rho_0\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

成立，其中 $C > 0$ 仅取决于区域、系数的界以及相应的核 *l.*

前述结果允许定义一个算子，即所谓的控制到状态算子 r,

$$S\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Y}, \qquad \boldsymbol{q} := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c}) \mapsto S(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{y} := (\rho, \phi, \boldsymbol{x})$$

其控制空间和状态空间为

$$\mathcal{Q} := \mathcal{U} \times C := L^\infty(0,T;\mathbb{R}^2)^M \times H^1(0,T)^M,$$
$$\mathcal{Y} := W_p^{2,1}(Q_T) \times \left(L^\infty(0,T;W^{2,p}_{\mathrm{DN}}(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,T;W^{1,p}(\Omega))\right) \times W^{1,s}(0,T;\mathbb{R}^2)^M$$

针对 $s = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^{-1}$。此外，我们定义容许控制集

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{ad}} := \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c}) \in \mathcal{Q}\colon |u_i(t)| \le 1,\ 0 \le c_i(t) \le 1 \text{ f.a.a. } t \in (0,T) \text{ and all } i = 1, \dots, M\}.$$

本文研究的最优控制问题如下

$$\begin{aligned}\text{Minimize}\quad \mathcal{J}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{q}) \coloneqq &\int_{\widetilde{Q}_T} e^{\nu t}\,\rho(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \mu\sum_{i=1}^{M}\int_0^T \ln(\xi(x_i(t)))\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{\alpha_1}{2\,T}\sum_{i=1}^{M}\|u_i\|^2_{H^1(0,T;\mathbb{R}^2)} + \frac{\alpha_2}{2\,T}\sum_{i=1}^{M}\|c_i\|^2_{H^1(0,T)} \qquad (2.2a)\end{aligned}$$

主题 t to $$\boldsymbol{y} \coloneqq (\rho,\phi,\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{q}), \qquad (2.2b)$$

$$\boldsymbol{q} \coloneqq (\boldsymbol{u},\boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{Q}_{\mathrm{ad}}. \qquad (2.2c)$$

目标泛函 $\mathcal{J}$ 旨在实现人群快速疏散。通过因子 $e^{\nu t}$ 较高的密度~ ~ ~在较晚时刻受到更严厉的惩罚。我们观察子区域 $Q_T = I \times \Omega$ 其中 $\Omega \subset \Omega$ 是行人必须离开的子区域。我们使用行人运动方向和强度的时间 H^1-范数作为正则化，以保证 定理 2.1 中所要求的光滑性。正则化参数 $\alpha_1,\ \alpha_2 > 0$ 均为任意正数。

目标函数中的第四项是一个障碍项，用于避免智能体穿墙行走。障碍函数 $\xi \in H^1_D(\Omega)$ 是奇异摄动问题的弱解

$$-\delta_4\Delta\xi + \xi = 1 \qquad \text{in } \Omega, \qquad (2.3a)$$

$$\xi = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \qquad (2.3b)$$

障碍函数 $-\ln(\xi(x_i(t)))$ 在 $\mathrm{dist}(x_i(t)\ \partial\Omega) \to 0$ 对某个 $t \in [0,T]$ 成立时趋于无穷大。对于$x_i(t)$ $\in$int Ω，有 $\lim_{\mu\to 0}\mu\ln(\xi(x_i(t))) = 0$。这里我们选择 $\mu > 0$ 为一个固定但较小的值。

控制约束 $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{c}) \in \mathrm{Q}_{\mathrm{ad}}$ 确保智能体的移动速度不会超过其当前位置的密度所允许的速度，并且强度被限制在合理范围内。

我们得到以下适定性结果和必要最优性条件。

定理 2.2。 至少存在一个全局解 $(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{q}) \in \mathcal{Y} \times \boldsymbol{Q}_{\mathrm{ad}}$ 的 (2.2)。

此外，对于 *(2.2)* 的每个局部极小值 $\boldsymbol{(y,q)} \in Y \times \boldsymbol{Q}_{\mathrm{ad}}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{(\rho,\phi,x)}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{(u,c)}$，在 $\boldsymbol{(u,c)}$ 处切锥中的所有方向上均满足，即 $\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{(\delta u,\delta c)} \in T_{\boldsymbol{Q}_{\mathrm{ad}}}\boldsymbol{(u,c)}$,

$$\begin{aligned}&\int_{\widetilde{Q}_T} e^{\nu t}\,\delta\rho(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{\alpha_1}{T}\,(\boldsymbol{u},\,\delta\boldsymbol{u})_{H^1(0,T;\mathbb{R}^2)^M} + \frac{\alpha_2}{T}\,(\boldsymbol{c},\,\delta\boldsymbol{c})_{H^1(0,T)^M} \\ &\quad - \mu\sum_{i=1}^{M}\int_0^T \frac{\nabla\xi(x_i(t))^\top\,\delta x_i(t)}{\xi(x_i(t))}\,\mathrm{d}t \ge 0,\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{y} = S$（$\boldsymbol{u}$、 $\boldsymbol{c}$）以及 $\delta\boldsymbol{y}$ =（$\delta\rho$、 $\delta\phi$、 $\delta\boldsymbol{x}$） $= S'$（$\boldsymbol{u}$、 $\boldsymbol{c}$）（$\delta\boldsymbol{u}$、 $\delta\boldsymbol{c}$）刻画的系统

$$\partial_t\delta\rho - \varepsilon\Delta\delta\rho - \nabla\cdot\left(\delta\rho\,\beta(\rho,\phi,\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) + \rho\left(\frac{\partial\beta(\rho,\phi,\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})}{\partial(\rho,\phi,\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})}(\delta\rho,\delta\phi,\delta\boldsymbol{x},\delta\boldsymbol{c})\right)\right) = 0, \qquad (2.4a)$$

$$-\delta_1 \Delta\delta\phi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\delta\phi + \frac{2f(\rho)\,f'(\rho)}{(f^2(\rho)+\delta_2)^2}\delta\rho = 0, \tag{2.4b}$$

$$\dot{\delta x}_i - v_0\, f'(\rho(\cdot,x_i))\left(\nabla\rho(\cdot,x_i)^{\mathsf{T}}\delta x_i + \delta\rho(\cdot,x_i)\right) u_i = v_0\, f(\rho(\cdot,x_i))\,\delta u_i, \tag{2.4c}$$

对于 $i = 1, \ldots\ldots, M$，以及边界条件（1.2）和齐次初始条件 *ns*

$$\delta\rho(0,\cdot) = 0 \quad \textit{and} \quad \delta x_i(0) = 0, \quad i = 1,\ldots,M. \tag{2.5}$$

上述定理的证明与定理 3.8 和定理 4.4 Herzog,Pietschmann, Winkler,2020中的证明非常相近。主要区别在于，Herzog,Pietschmann, Winkler,2020 中的模型仅允许控制 $\boldsymbol{u}$ 智能体的速度，而不能控制其强度 $\boldsymbol{c}$。对于存在性证明而言，这不会由于一致 L^∞有界性 $\boldsymbol{c}$ 而带来任何额外困难，这是嵌入 $H^1 \hookrightarrow L^\infty$ 在一维空间中的结果。对于可微性结果，还需加入关于 $\boldsymbol{c}$的导数，从而在（2.4a）中产生一个额外项；不过，该项可以用与其余各项类似的方式进行估计。

3 状态方程的离散化

本节介绍用于计算正向系统（1.1）–（1.3）近似解的数值格式。为此，我们引入半隐式时间步进格式，并对密度函数 ρ 采用有限体积离散化，对势函数采用连续拉格朗日有限元。

3.1 空间离散

对于系统（1.1）–（1.3）的空间离散，我们定义一个几何相容三角网格族 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$。对于每个 $T \in \mathcal{T}_h$，我们用 $h_T = \operatorname{diam}(T)$ 表示单元直径，用 ρ_T表示 T中最大内接球的直径。于是，网格参数为 $h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$。假设该网格族是形状正则的，即存在常数 $\kappa > 0$，使得对于所有 $T \in \mathcal{T}_h$和所有 $h > 0$，均有$h_T/\rho_T \le \kappa$。我们用 Fi_h表示内部单元边的集合，用 Fbd_h表示边界边，并记 $\mathrm{F}_h := \mathrm{Fi}_h \cup \mathrm{F}_h^{\mathrm{bd}}$。此外，对于每条边 $F \in \mathrm{F}_h$，我们关联一个法向量 n_F：若为边界边，则该法向量指向外侧；若为内部边，则其方向固定。

我们为输运方程提出了一种有限体积格式。由于实现时使用了有限元软件包FEniCS，我们采用了不连续伽辽金离散中较为常见的记号，概述参见 Di Pietro, Ern, 2012年 。有限维函数空间定义如下：

$$V_h = \{v \in L^\infty(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}^0(T) \text{ for all } T \in \mathcal{T}_h,\},$$
$$W_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) :\ v|_T \in \mathcal{P}^1(T) \text{ for all } T \in \mathcal{T}_h\}, \quad W_{h,\mathrm{D}} := W_h \cap H^1_D(\Omega),$$

其中，$\mathrm{P}^k(T)$表示定义在 T上的次数不超过 $k \in \mathbb{N}_0$的多项式空间。对于函数$v\colon \Omega \to \mathbb{R}$，界面平均值和跳跃量定义如下：

$$\{v\}_F := \frac{1}{2}(v|_{T_1} + v|_{T_2}), \qquad [\![v]\!]_F := v|_{T_1} - v|_{T_2}, \qquad \forall F \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{i}},$$

其中 T_1， $T_2 \in \mathcal{T}_h$的选取方式满足 $n_F = n_{\partial T_1|F} = -n_{\partial T_2|F}$。

为了对系统（1.1）进行离散化，我们对 ρ 采用间断近似，对 ϕ采用连续近似。半离散格式中的未知量为

$$\rho_h(t) \in V_h, \quad \phi_h(t) \in W_{h,\mathrm{D}}, \quad x_1(t), \dots, x_M(t) \in \mathbb{R}^2, \quad c_1(t), \dots, c_M(t) \in \mathbb{R}$$

对所有 $t \in [0,T]$，近似输运方向定义为

$$\beta_h(\rho_h, \phi_h, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) := f(\rho_h)\, h(\nabla\phi_h + \phi_K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}))$$

with

$$\phi_K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}; t, x) := \sum_{j=1}^{M} c_j(t)\, K(x - x_i(t)).$$

对（1.1a）进行半离散化后可得

求解 $\rho_h\colon\ [0,T] \to V_h$，其中 $\rho_h(0) = \mathrm{proj}_{V_h}(\rho_0)$，并且

$$(\partial_t \rho_h(t), v_h)_\Omega + a(\rho_h(t), v_h) + b(\beta_h)(\rho_h(t), v_h) = 0 \qquad \forall v_h \in V_h, t \in (0,T). \tag{3.1}$$

这里，$\mathrm{proj}_{V_h}\colon\ L^2(\Omega) \to V_h$ 是某个投影算子，$(\cdot,\cdot)_\Omega$ 是标准的 $L^2(\Omega)$-内积，双线性型定义为

$$a(\rho_h, v_h) = \varepsilon \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{i}}} \int_F \tau_F\, [\![\rho_h]\!][\![v_h]\!]\, \mathrm{d}s + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{bd}}} \chi_{\partial\Omega_D} \gamma \int_F \rho_h\, v_h\, \mathrm{d}s \tag{3.2a}$$

$$b(\beta_h)(\rho_h, v_h) = -\sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{i}}} \int_F (\rho_h\, \beta_h)_F^*\, [\![v_h]\!]\, \mathrm{d}s. \tag{3.2b}$$

参数 τ_F 定义为

$$\tau_F := \frac{1}{|x_{T_1} - x_{T_2}|},$$

其中 x_T 是 $T \in \mathcal{T}_h$的边的垂直平分线的交点。项 $\tau_F [\![\rho_h]\!][\![v_h]\!]$ 与$v_h = \chi_T$（其中 $T \in \mathcal{T}_h$近似于边 $\nabla\rho_h \cdot n_{\partial T}$上的扩散通量 $F \subset T$。双线性型 b 确定了对流通量 $\beta\,\rho \cdot n_{\partial_T}$。作为数值通量函数$(\cdot)^*$，我们选用拉克斯-弗里德里希斯通量，参见Rider,Lowrie,2002，其定义为

$$(\rho_h\, \beta)_F^* = \{\rho_h\, \beta\}_F \cdot n_F - \frac{\eta}{2} [\![\rho_h]\!]_F. \tag{3.3}$$

稳定化参数 $\eta \in \mathbb{R}$ 将在后文给出。对于密切相关的趋化模型，这种方法已成功应用于Li、Shu、Yang, 2017年；Guo、Li、Yang, 2018年。当然，也可以采用其他通量函数，例如中心迎风通量，参见Epshteyn、Kurganov, 2009年。

程函方程（1.1b）采用标准线性拉格朗日元进行空间离散，得到

$$\delta_1 \left(\nabla\phi_h(t), \nabla w_h\right)_\Omega + \left(|\nabla\phi_h(t)|^2, w_h\right)_\Omega = \left(\frac{1}{f(\rho_h(t))^2 + \delta_2}, w_h\right)_\Omega \qquad \forall w_h \in W_{h,\mathrm{D}}. \tag{3.4}$$

在数值实验中，我们使用了 FEniCS 集成的牛顿求解器。雅可比矩阵通过自动微分构建。

主体轨迹的常微分方程（1.1c）依赖于对一个函数的点值求值，该函数在离散情形下是不连续的。尤其是，这一项关于$\rho(t, x_i(t))$不可微。作为补救措施，我们采用以下正则化来替代点值求值，另见Borsche、Colombo 等人，2015年：

$$\rho_h(t, x_i(t)) \approx \eta_{x_i(t)} * \rho_h(t), \quad \text{with} \quad \eta_{x_i(t)} := \frac{\delta_{x_i(t)}}{\delta_{x_i(t)} * 1},$$

其中，$*$表示函数 $v \in L^1(\Omega)$与某个核函数 $\delta_{x_0} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$的卷积积分 $\delta_{x_0} * v = \int_\Omega \delta_{x_0}\, v \mathrm{d}x$。一个显而易见的选择是正则化狄拉克δ函数

$$\delta_{x_0}(x) := \frac{1}{2\,\pi\,\zeta}\, \mathrm{e}^{-\frac{\|x - x_0\|^2}{2\,\zeta}}$$

其局部性参数 $\zeta > 0$较小。注意，对于 $\zeta \to 0$，任意 $v \in C(\Omega)$均有 $\delta_{x_0} * v \to v(x_0)$。此外，对于任意 $x_0 \in \mathbb{R}^2$，正则化狄拉克δ函数满足$\int_{\mathbb{R}^2} \delta_{x_0}\, \mathrm{d}x = 1$。于是，离散化后的常微分方程为

$$\dot{x}_i(t) = v_0\, f\left(\eta_{x_i(t)} * \rho_h(t)\right)\, u_i(t), \quad n = 1, \ldots, N \tag{3.5}$$

以及初始条件 $x_i(0) = x_{i,\,0}$。

3.2 时间离散化

对于时间离散化，我们用等距网格 $I_\tau := \{t_n\}_{n=0}^N$覆盖时间区间 $[0, T]$，其网格点为 $t_n := n\,\tau$，网格尺寸为 $\tau := T/N$。空间和时间离散化参数汇总于 $\sigma = (h,\ \tau)$。此外，我们定义网格函数空间

$$H_\tau(V) = \{v : I_\tau \to V\},$$

其中 V是任意线性空间。如果 V又是一个包含函数 v的函数空间：$\Omega \to \mathbb{R}$我们记作 $v(t_n) = v(t_n,\ \cdot)$。半离散方程（3.1）、（3.4）和（3.5）中出现的函数 ρ_h、ϕ_h、x_i、u_i和 c_i由网格函数近似表示

$$\rho_\sigma \in H_\tau(V_h), \quad \phi_\sigma \in H_\tau(W_{h,\mathrm{D}}), \quad u_{i,\sigma}, x_{i,\sigma} \in H_\tau(\mathbb{R}^2), \quad c_{i,\sigma} \in H_\tau(\mathbb{R})$$

对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ M$。为简洁起见，我们将其写作 $n = 0,\ \ldots\ldots,\ N$

$$\rho_h^n := \rho_\sigma(t_n, \cdot), \quad \phi_h^n := \phi_\sigma(t_n, \cdot), \quad x_i^n := x_{i,\sigma}(t_n), \quad u_i^n := u_{i,\sigma}(t_n)$$

对于输运向量，我们采用

$$\beta_h^n = \beta_h(\rho_h^n, \phi_h^n, \boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{c}^n).$$

我们用差商替代时间导数，并采用半隐式时间步进格式；具体而言，扩散相关项采用隐式计算，对流相关项则采用显式计算。由此得到全离散系统

$$(\rho_h^{n+1}, v_h)_\Omega + \tau\, a(\rho_h^{n+1}, v_h) = (\rho_h^n, v_h)_\Omega - \tau\, b(\beta_h^n)(\rho_h^n, v_h), \tag{3.6a}$$

$$\delta_1 \big(\nabla\phi_h^n, \nabla w_h\big)_\Omega + \big(|\nabla\phi_h^n|^2, w_h\big)_\Omega = \left(\frac{1}{f(\rho_h^n)^2 + \delta_2}, w_h\right)_\Omega, \tag{3.6b}$$

$$x_i^{n+1} - x_i^n = \tau\, v_0\, f\Big(\eta_{x_i^{n+1}} * \rho_h^{n+1}\Big)\, u_i^{n+1}, \tag{3.6c}$$

对于所有检验函数 $v_h \in V_h$、$w_h \in W_{h,\,\mathrm{D}}$ 以及指标 $i = 1, \ldots\ldots, M$、$n = 0, \ldots\ldots, N-1$。此外，初始条件通过以下方式确定：

$$\rho_h^0 = \mathrm{proj}_{V_h}(\rho_0), \qquad x_i^0 = x_{i,0},\ i = 1, \ldots, M.$$

注意，方程组 (3.6) 完全解耦，因此我们可以按以下顺序依次计算各个变量

$$\rho_h^0, \boldsymbol{x}^0 \mapsto \phi_h^0 \mapsto \rho_h^1 \mapsto \boldsymbol{x}^1 \mapsto \phi_h^1 \mapsto \ldots \mapsto \rho_h^{N-1} \mapsto \boldsymbol{x}^{N-1} \mapsto \phi_h^{N-1} \mapsto \rho_h^N \mapsto \boldsymbol{x}^N. \tag{3.7}$$

3.3 离散解的质量

本节研究（3.6）的解的一些基本性质。特别值得关注的是，连续系统（1.1）–（1.3）解所体现的物理界限是否也适用于离散情形。

有限元空间 V_h 的基函数记为 $\{\chi_T\}_{T\in\mathcal{T}_h}$，由 $\chi_T|_{T'} \equiv \delta_{T,T'}$ 对所有 $T, T' \in \mathcal{T}_h$ 定义。注意，这里略微滥用了记号，将 $\mathcal{T}_h$ 中的元素用作指标。引入矩阵 $M = (m_{T,T'})_{T,T'\in\mathcal{T}_h}$、$A = (a_{T,T'})_{T,T'\in\mathcal{T}_h}$ 和 $B^n = (b_{T,T'}^n)_{T,T'\in\mathcal{T}_h}$，其元素为

$$m_{T,T'} = \begin{cases} |T|, & \text{if } T = T', \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3.8a}$$

$$a_{T,T'} = \begin{cases} \varepsilon \displaystyle\sum_{F\in\mathcal{F}_T\cap\mathcal{F}_h^{\mathrm{i}}} \tau_F\, |F| + \gamma \sum_{F\in\mathcal{F}_T\cap\mathcal{F}_h^{\mathrm{bd}}} |F|, & \text{if } T = T', \\ -\varepsilon\, \tau_F\, |F|, & \text{if } T \neq T' \text{ and } F := \partial T \cap \partial T' \neq \emptyset, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3.8b}$$

$$b_{T,T'}^n = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{F\in\mathcal{F}_T\cap\mathcal{F}_h^{\mathrm{i}}} \left(\int_F \beta_h^n|_T \cdot n_{\partial T}\, \mathrm{d}s - \eta\, |F| \right), & \text{if } T = T', \\ -\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_F \beta_h^n|_{T'} \cdot n_{\partial T}\, \mathrm{d}s + \eta\, |F| \right), & \text{if } T \neq T' \text{ and } F = \partial T \cap \partial T' \neq \emptyset, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3.8c}$$

可将方程组（3.6a）改写为

$$(M + \tau A)\,\vec{\rho}^{n+1} = (M - \tau B^n)\,\vec{\rho}^{n}. \tag{3.9}$$

这里， $\vec{\rho}^n, n = 0, \ldots, N$ 是相对于基 $\{\chi_T\}_{T\in\mathcal{T}_h}$ 的 ρ_h^n 的向量表示。注意，矩阵 B^n 也取决于 $\vec{\rho}^n$。

定理 3.1。 数值格式 (3.6a) 在以下意义下是质量守恒的。假设$\gamma = 0$ 成立，即所有边界部分 $\partial\Omega_D$ 和 $\partial\Omega_W$上均满足无通量边界条件，解 ρ_σ 满足

$$\int_\Omega \rho_h^n \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{proj}_{V_h}(\rho_0)\,\mathrm{d}x \quad \forall n = 0, 1, \ldots, N.$$

证明。 当 $n = 0$ 时，该断言显然成立，因为初始条件由 ρ_h^0 =proj$_{V_h}(\rho_0)$给出。用矩阵-向量表示法，该断言等价于 $\vec{1}^\top M\vec{\rho}^{n+1} = \vec{1}^\top M\vec{\rho}^n$。由（3.9）可知，使用

$$\vec{1}^\top A\vec{\rho}^{n+1} = \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\sum_{T'\in\mathcal{T}_h} a_{T,T'}\rho_{T'}^{n+1} = 0$$

and

$$\vec{1}^\top B^n\vec{\rho}^{n} = \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\sum_{T'\in\mathcal{T}_h} b_{T,T'}\rho_{T'}^{n}.$$

在此表达式中，稳定化项（即乘以 η的项）相互抵消。此外，将求和中的各项按边 $F \in \mathrm{Fi}_h$排序，并用$T_{F,1}$、$T_{F,2}$表示在 F相交的两个三角形后，我们得到以下各项

$$\begin{aligned}\vec{1}^\top B^n\vec{\rho}^{n} = -\frac{1}{2}\sum_{F\in\mathcal{F}_h^i}\int_F \Big(&\beta_h|_{T_{F,1}}\, n_{\partial T_{F,1}}\,\rho_{T_{F,1}} + \beta_h|_{T_{F,2}}\, n_{\partial T_{F,1}}\,\rho_{T_{F,2}} \\ &+\beta_h|_{T_{F,2}}\, n_{\partial T_{F,2}}\,\rho_{T_{F,2}} + \beta_h|_{T_{F,1}}\, n_{\partial T_{F,2}}\,\rho_{T_{F,1}}\Big)\,\mathrm{d}s = 0.\end{aligned}$$

最后一步由$n_{\partial T_{F,2}} = -n_{\partial T_{F,2}}$推出，这意味着 $\vec{1}^\top B^n\vec{\rho}^{n} = 0$。 □

定理 3.2. 取 $\eta = 1$ 属于 (3.3)，并记 $\kappa > 0$ 为网格族的最大长宽比$\mathcal{T}_h$，见 第 3.1 节。令 τ 取值满足 *CFL* 条件

$$\tau \le \frac{\pi}{3\,\kappa^2}\min_{T\in\mathcal{T}_h} h_T. \tag{3.10}$$

此外，若有 proj$_{V_h}(\rho_0) \in [0,1]$几乎处处成立于 Ω，且 $\beta_h^n = (1-\rho_h^n)\,\Phi^n$其中 $|\Phi^n| \le 1$， $n = 0$，……， N，则 （(3.6) 的解对所有 $n = 0$，……， N

$$\rho_h^n(x) \in [0,1] \quad f.a.a.\ x \in \Omega.$$

证明。 $(M + \tau A)$ 的对角元均为正，非对角元均为负。此外，容易得出其严格对角占优，即：

$$\sum_{\substack{T'\in\mathcal{T}_h\\ T'\neq T}} |m_{T,T'} + \tau\, a_{T,T'}| < m_{T,T} + \tau\, a_{T,T}.$$

这表明 $(M+\tau A)$ 是一个 M-矩阵，因此逆矩阵 $(M+\tau A)^{-1}$ 存在，并满足 $(M+\tau A)^{-1} \geq 0$。

令 $n \in \mathbb{N}_0$ 为固定值，并假设 $\rho_h^n(x) \in [0,1]$ 对几乎所有的 $x \in \Omega$都成立。我们通过确认式 (3.9) 右端仅含非负项，证明 $\rho_h^{n+1} \geq 0$。 $\rho_T^n \geq 0 \mathcal{T}_h$，我们证明 $(M-\tau B^n)$ 的各项也均为非负数。对角线上的各项具有如下形式

$$|T| + \frac{\tau}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta_h^n|_T \cdot n_{\partial T} - 1)\, \mathrm{d}s \geq |T| - \tau\, |\partial T|,$$

其中，第一步由假设 (2.1) 得出，该假设意味着 $|\beta_h^n| \leq 1$。为进一步估计，我们考虑几何网格量和形状正则性 $h_T \leq \kappa\, \rho_T$，从而得到

$$\frac{|T|}{|\partial T|} \geq \frac{\pi\, \rho_T^2}{3\, h_T} \geq \frac{\pi\, h_T}{3\, \kappa^2} \geq \tau,$$

其中最后一步是 CFL 条件（3.10）。前两个估计确认了（$m_{T,\,T} - \tau\, b_{T,\,T}^n$） ≥ 0对所有 $T \in \mathbb{T}_h$均成立。矩阵中的其余项，即（$m_{T,\,T'} - \tau\, b_{T,\,T'}^n$），其中 $F = \partial T \cap \partial T' \neq \emptyset$，具有如下形式

$$\frac{\tau}{2} \int_F (\beta_h^n|_{T'} \cdot n_{\partial T} + 1)\, \mathrm{d}s \geq 0.$$

非负性再次由 $|\beta_h^n| \leq 1$ 得出。结合前面的论证可得到下界 $\rho_h^{n+1} \geq 0$。

为证明上界，我们将方程组（3.9）重新整理为

$$(M+\tau A)\,(\vec{1} - \vec{\rho}^{\,n+1}) = M\,(\vec{1} - \vec{\rho}^{\,n}) + \tau\, B^n\, \vec{\rho}^{\,n} + \tau\, A\, \vec{1}. \tag{3.11}$$

~ ~我们可以利用 $\rho_h^n\, \beta_h^n = (1-\rho_h^n)\, \beta_h^n$，其中 $\beta_h^n = \rho_h^n\, \Phi$。在（3.11）中，我们通过 B^n 将涉及的表达式重新表述为

$$\begin{aligned}
[B^n\, \vec{\rho}^{\,n}]_T &= -\sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^i} \int_F \left(\{(1-\rho_T^n)\, \widetilde{\beta}_h^n\}_F \cdot n_F + \frac{1}{2} [\![1 - \rho_h^n]\!] \right)_F [\![\chi_T]\!]_F \, \mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^i} \int_F (\widetilde{\beta}_h^n|_T \cdot n_{\partial T} + 1)\, \mathrm{d}s \cdot (1 - \rho_T^n) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^i} \int_F (\widetilde{\beta}_h^n|_{T_F} \cdot n_{\partial T} - 1)\, \mathrm{d}s \cdot (1 - \rho_{T_F}^n) \\
&=: [\widetilde{B}^n (1 - \vec{\rho}^{\,n})]_T.
\end{aligned}$$

其中 $T_F \in \mathbb{T}_h \setminus \{T\}$， $T_F \cap T = F$。采用与上述相同的论证，可以证明 $M + \tau\, \widetilde{B}^n$ 的各个元素均为非负，并结合 $1 - \vec{\rho}^{\,n} \geq 0$、 $A\vec{1} \geq 0$ 以及 $M + \tau A$ 的 M-矩阵性质，我们得到所需的上界 $1 - \vec{\rho}^{\,n+1} \geq 0$。□

3.4 离散最优控制问题

接下来，我们研究最优控制问题（2.2）的离散版本。控制和状态变量是时间上的网格函数，因此，我们引入离散的 H^1（0， T）-内积

u_τ， v_τ：$\{t_n\}_{n=0}^N \to V$，其中 V是某个希尔伯特空间，

$$(u_\tau, v_\tau)_{H^1(0,T;V),\tau} := \tau \sum_{n=0}^{N} (u^n, v^n)_{V\times V} + \tau^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(u^{n+1} - u^n, v^{n+1} - v^n\right)_{V\times V}.$$

这便得到范数 $\|u_\tau\|^2_{H^1(0,T;V)\ h} := (u_\tau, u_\tau)_{H^1(0,T;V)\ h}$。对于离散控制空间，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_\sigma &:= \{\boldsymbol{u}_\sigma = (u_{1,\sigma}, \dots, u_{M,\sigma}) \colon\ u_{i,\sigma} \in H_\tau(\mathbb{R}^2) \text{ for } i = 1, \dots, M\}\} \\
C_\sigma &:= \{\boldsymbol{c}_\sigma = (c_{1,\sigma}, \dots, c_{M,\sigma}) \colon\ c_{i,\sigma} \in H_\tau(\mathbb{R}) \text{ for } i = 1, \dots, M\}, \\
\mathcal{Q}_\sigma &:= \mathcal{U}_\sigma \times C_\sigma,
\end{aligned}$$

而可容许集为

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\sigma,\mathrm{ad}} &:= \{\boldsymbol{u}_\sigma \in \mathcal{U}_\sigma \colon |u_i^n| \le 1,\ i = 1, \dots, M,\ n = 0, \dots, N\}, \\
C_{\sigma,\mathrm{ad}} &:= \{\boldsymbol{c}_\sigma \in C_\sigma \colon 0 \le c_i^n \le 1, i = 1, \dots, M, n = 0, \dots, N\}, \\
\mathcal{Q}_{\sigma,\mathrm{ad}} &:= \mathcal{U}_{\sigma,\mathrm{ad}} \times C_{\sigma,\mathrm{ad}}.
\end{aligned}$$

离散状态空间定义为

$$\mathcal{Y}_\sigma := H_\tau(V_h) \times H_\tau(W_{h,\mathrm{D}}) \times H_\tau(\mathbb{R}^2)^M.$$

基于这些定义，与（2.2）相关的离散最优控制问题可写为

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad \mathcal{J}_\sigma(\boldsymbol{y}_\sigma, \boldsymbol{q}_\sigma) &= \tau \sum_{n=1}^{N} e^{\nu t_n} \int_\Omega \rho_h^n(x)\,\mathrm{d}x - \mu\,\tau \sum_{i=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \ln(\eta_{x_i^n} * \xi_h) \\
&\quad + \frac{\alpha_1}{2\,T} \sum_{i=1}^{M} \|u_{i,\sigma}\|^2_{H^1(0,T),\tau} + \frac{\alpha_2}{2\,T} \sum_{i=1}^{M} \|c_{i,\sigma}\|^2_{H^1(0,T),\tau} \qquad (3.12a) \\
\text{满足} \quad \boldsymbol{y}_\sigma &:= (\rho_\sigma, \phi_\sigma, \boldsymbol{x}_\sigma) = S_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma), \qquad (3.12b) \\
\boldsymbol{q}_\sigma &:= (\boldsymbol{u}_\sigma, \boldsymbol{c}_\sigma) \in \mathcal{Q}_{\sigma,\mathrm{ad}}, \qquad (3.12c)
\end{aligned}$$

其中 $\xi_h \in W_h$ 是（2.3）的一阶拉格朗日有限元近似。此外， S_σ 是（3.6）的解算子。注意，为了保持障碍项关于 x_i^n的可微性，我们对非光滑函数 ξ_h的点值求值进行正则化，另见（3.6c）。

我们可以将控制问题（3.12）写成更紧凑的约化形式

$$j_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma) := \mathcal{J}_\sigma(S_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma), \boldsymbol{q}_\sigma) \to \min! \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{q}_\sigma \in \mathcal{Q}_{\sigma,\mathrm{ad}}. \qquad (3.13)$$

为定义为导出必要最优性条件，我们采用拉格朗日形式。拉格朗日函数 n

$$\mathcal{L}_\sigma \colon \mathcal{Y}_\sigma \times \mathcal{Q}_\sigma \times \mathcal{Y}_\sigma \to \mathbb{R}$$

耦合离散状态方程（3.6）为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\sigma(\rho_\sigma,\phi_\sigma,\boldsymbol{x}_\sigma;\boldsymbol{u}_\sigma,\boldsymbol{c}_\sigma;\lambda_{\rho,\sigma},\lambda_{\phi,\sigma},\lambda_{\boldsymbol{x},\sigma}) &= \mathcal{J}_\sigma(\rho_\sigma,\phi_\sigma,\boldsymbol{x}_\sigma;\boldsymbol{u}_\sigma,\boldsymbol{c}_\sigma)\\ &- \int_\Omega (\rho_h^0 - \operatorname{proj}_{V_h}(\rho_0))\,\lambda_{\rho,h}^0\,\mathrm{d}x - \sum_{n=0}^{N-1}\left(\int_\Omega (\rho_h^{n+1}-\rho_h^n)\,\lambda_{\rho,h}^{n+1}\,\mathrm{d}x + \tau\, a(\rho_h^{n+1},\lambda_{\rho,h}^{n+1}) - \tau\, b(\beta_h^n)(\rho_h^n,\lambda_{\rho,h}^{n+1})\right)\\ &- \sum_{n=0}^{N-1}\tau\left(\delta_1\int_\Omega \nabla\phi_h^n\cdot\nabla\lambda_{\phi,h}^n\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla\phi_h^n|^2\,\lambda_{\phi,h}^n\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{f(\rho_h^n)^2+\delta_2}\,\lambda_{\phi,h}^n\,\mathrm{d}x\right)\\ &- \sum_{i=1}^{M}\left((x_i^0 - x_{i,0})^\top\lambda_{\boldsymbol{x},i}^0 + \sum_{n=0}^{N-1}\left(x_i^{n+1}-x_i^n-\tau\, f(\eta_{x_i^{n+1}}*\rho_h^{n+1})\,u_i^{n+1}\right)^\top\lambda_{\boldsymbol{x},i}^{n+1}\right).\end{aligned}$$

为简化记号，我们记 $\boldsymbol{\lambda}_\sigma := (\lambda_{\rho,\sigma},\ \lambda_{\phi,\sigma},\ \lambda_{\boldsymbol{x},\sigma})$。对于给定的控制和状态，确定这些变量的伴随方程组为

$$\lambda_{\rho,h}^n \in V_h: \quad \frac{\partial\mathcal{L}_\sigma}{\partial\rho_h^n}(\boldsymbol{y}_\sigma,\boldsymbol{q}_\sigma,\boldsymbol{\lambda}_\sigma)\delta\rho_h = 0 \quad \forall\delta\rho_h\in V_h,\ n=0,\dots,N, \tag{3.14a}$$

$$\lambda_{\phi,h}^n \in W_{h,\mathrm{D}}: \quad \frac{\partial\mathcal{L}_\sigma}{\partial\phi_h^n}(\boldsymbol{y}_\sigma,\boldsymbol{q}_\sigma,\boldsymbol{\lambda}_\sigma)\delta\phi_h = 0 \quad \forall\delta\phi_h\in W_h,\ n=0,\dots,N-1, \tag{3.14b}$$

$$\lambda_{\boldsymbol{x}_i}^n \in \mathbb{R}^2: \quad \frac{\partial\mathcal{L}_\sigma}{\partial x_i^n}(\boldsymbol{y}_\sigma,\boldsymbol{q}_\sigma,\boldsymbol{\lambda}_\sigma)\delta x_i = 0 \quad \forall\delta x_i\in\mathbb{R}^2,\ n=0,\dots,N \tag{3.14c}$$

对于 $i=1,\ \dots\dots,\ M$。请注意，这可以解释为一个耦合系统，其中包含一个抛物型偏微分方程和一个常微分方程，并且二者都沿时间反向求解。我们的实现使用了 FEniCS 中的自动微分功能。由于正向系统在每个时间步完全解耦，伴随系统也是如此，因此我们可以逐步计算：

$$\lambda_{\boldsymbol{x},h}^N \mapsto \lambda_{\rho,h}^N \mapsto (\lambda_{\phi,h}^N) \mapsto \dots \mapsto \lambda_{\boldsymbol{x},h}^0 \mapsto \lambda_{\rho,h}^0 \mapsto \lambda_{\phi,h}^0.$$

有了伴随状态，我们便可组装约化目标函数（3.13）的导数，并得到（3.12）的以下最优性条件：

定理 3.3（必要最优性条件）。设 $(\boldsymbol{y}_\sigma,\ \boldsymbol{q}_\sigma)\in\mathcal{Y}_\sigma\times\mathcal{Q}_{\sigma,\,\mathrm{ad}}$ 是（(3.12)）的一个局部解。那么，存在 $\boldsymbol{\lambda}_\sigma\in\mathcal{Y}_\sigma$ 满足 (3.14) 以及

$$\begin{aligned}&\alpha_1\,(u_{\sigma,i},v_{\sigma,i}-u_{\sigma,i})_{H^1(0,T;\mathbb{R}^2),\tau} + \alpha_2\,(c_{\sigma,i},d_{\sigma,i}-c_{\sigma,i})_{H^1(0,T),\tau}\\ &\quad+\tau\sum_{n=1}^{N}\left(f(\eta_{x_i^n}*\rho_h^n)\,\lambda_{\boldsymbol{x}_i}^n, v_i^n-{u_i}^n\right)_{\mathbb{R}^2} + \tau\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\partial\left(b(\beta_h^n)(\rho_h^n,\lambda_{\rho,h}^{n+1})\right)}{\partial c_i^n}(d_i^n-c_i^n)\ge 0\end{aligned} \tag{3.15}$$

对于所有检验函数 $\boldsymbol{r}_\sigma := (\boldsymbol{v}_\sigma,\boldsymbol{d}_\sigma)\in\mathcal{Q}_{\sigma,\mathrm{ad}}$ 以及所有 $i=1,\dots,M$。

证明。众所周知，对于 $j'_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma)(\boldsymbol{r}_\sigma-\boldsymbol{q}_\sigma)\ge 0$ 若 $\boldsymbol{r}_\sigma\in\mathcal{Q}_{\sigma,\mathrm{ad}}$，变分不等式是 $\boldsymbol{q}_\sigma$ 成为（3.13）的局部极小值的必要条件。考虑到等价关系

$$j'_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma)\delta\boldsymbol{q}_\sigma = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{q}_\sigma}(\boldsymbol{y}_\sigma,\boldsymbol{q}_\sigma,\boldsymbol{\lambda}_\sigma)\delta\boldsymbol{q}_\sigma \quad \text{if}\boldsymbol{\lambda}_\sigma \text{ solves (3.14)}$$

得到变分不等式（3.15）。 □

我们的求解算法基于投影梯度算法，接下来需要建立 j_σ 的梯度表示。

目标函数（3.12a）沿某个方向 $\delta \boldsymbol{q}_\sigma = (\delta \boldsymbol{u}_\sigma, \delta \boldsymbol{c}_\sigma) \in \boldsymbol{Q}$ 的导数为

$$j'_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma)\delta\boldsymbol{q}_\sigma = \sum_{i=1}^{M} \Big(\alpha_1 (u_{i,\sigma}, \delta u_{i,\sigma})_{H^1(0,T),\tau} + \alpha_2 (c_{i,\sigma}, \delta c_{i,\sigma})_{H^1(0,T),\tau} + \tau \sum_{n=1}^{N} f(\eta_{x_i^n} * \rho_h^n)\, \delta u_i^{n\top} \lambda_{\boldsymbol{x}_i}^n + \tau \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial \Big(b(\beta_h^n)(\rho_h^n, \lambda_{\rho,h}^{n+1}) \Big)}{\partial c_i^n} \delta c_i^n \Big).$$

为了得到 $H^1(0,T)$ τ-梯度关于 $\boldsymbol{u}_\sigma$和 $\boldsymbol{c}_\sigma$的表示，我们引入网格函数 $z_{i,\sigma}\colon \{t_n\}_{n=0}^N \to \mathbb{R}^2$ 以及 $d_{i,\sigma}\colon \{t_k\}_{n=0}^N \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, M$，它们满足

$$\left(\frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} + I_{N+1\times N+1} \right) \begin{pmatrix} z_i^0 \\ z_i^1 \\ z_i^2 \\ \vdots \\ z_i^{N-1} \\ z_i^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(\rho_h^1(\boldsymbol{x}_i^1))\lambda_{x_i}^0 \\ -f(\rho_h^2(\boldsymbol{x}_i^2))\lambda_{x_i}^1 \\ \vdots \\ -f(\rho_h^{N-1}(\boldsymbol{x}_i^{N-1}))\lambda_{x_i}^{N-2} \\ -f(\rho_h^N(\boldsymbol{x}_i^N))\lambda_{x_i}^{N-1} \end{pmatrix} \tag{3.16a}$$

and

$$\left(\frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} + I_{N+1\times N+1} \right) \begin{pmatrix} d_i^0 \\ d_i^1 \\ d_i^2 \\ \vdots \\ d_i^{N-1} \\ d_i^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_{c_i^0} b(\beta_h^0)(\rho_h^0, \lambda_{\rho,h}^1) \\ -\partial_{c_i^1} b(\beta_h^1)(\rho_h^1, \lambda_{\rho,h}^2) \\ -\partial_{c_i^2} b(\beta_h^2)(\rho_h^2, \lambda_{\rho,h}^3) \\ \vdots \\ -\partial_{c_i^{N-2}} b(\beta_h^{N-2})(\rho_h^{N-2}, \lambda_{\rho,h}^{N-1}) \\ -\partial_{c_i^{N-1}} b(\beta_h^{N-1})(\rho_h^{N-1}, \lambda_{\rho,h}^N) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.16b}$$

对于 $i = 1, \dots, M$。通过简单计算，我们便可确认

$$(z_{i,\sigma}, \delta u_{i,\sigma})_{H^1(0,T;\mathbb{R}^2),\tau} = \sum_{n=1}^{N} f(\eta_{x_i^n} * \rho_h^n)\, \delta u_i^{n\top} \lambda_{\boldsymbol{x}_i}^n,$$

$$(d_{i,\sigma}, \delta c_{i,\sigma})_{H^1(0,T),\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial \Big(b(\beta_h^n)(\rho_h^n, \lambda_{\rho,h}^{n+1}) \Big)}{\partial c_i^n} \delta c_i^n$$

记 $\boldsymbol{z}_\sigma = (z_{1,\sigma}, \dots, z_{M,\sigma}) \in \mathsf{U}$，且 $\boldsymbol{d}_\sigma = (d_{1,\sigma}, \dots, d_{M,\sigma}) \in \mathsf{C}$，则得到 j_σ的梯度的如下表示:

$$\nabla_{\boldsymbol{u}_\sigma} j_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma) = \alpha_1 \boldsymbol{u}_\sigma + \boldsymbol{z}_\sigma, \tag{3.17a}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{c}_\sigma} j_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma) = \alpha_2 \boldsymbol{c}_\sigma + \boldsymbol{d}_\sigma. \tag{3.17b}$$

这使得我们能够实现投影梯度法，下一节将对此进行讨论。

3.5 离散化问题的优化算法

为求解离散化的最优控制问题3.12，我们提出了一种投影梯度算法。在此过程中，对于给定的初始控制 $\boldsymbol{q}^{(0)} = (\boldsymbol{u}^{(0)}\, \boldsymbol{c}^{(0)}) \in \mathrm{Q}$，通过以下方式依次计算新的迭代值

$$\boldsymbol{u}_\sigma^{(k+1)} = \Pi_{\mathrm{ad}}^u\Big(\boldsymbol{u}_\sigma^{(k)} - s_{(k)}\, \nabla_{\boldsymbol{u}_\sigma} j_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)})\Big), \tag{3.18a}$$

$$\boldsymbol{c}_\sigma^{(k+1)} = \Pi_{\mathrm{ad}}^c\Big(\boldsymbol{c}_\sigma^{(k)} - s_{(k)}\, \nabla_{\boldsymbol{c}_\sigma} j_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)})\Big), \tag{3.18b}$$

其中 $\Pi_{\mathrm{ad}}^u\colon \mathrm{U}_\sigma \to \mathrm{U}_{\sigma,\,\mathrm{ad}}$ 且 $\Pi_{\mathrm{ad}}^c\colon \mathrm{C}_\sigma \to \mathrm{C}_{\sigma,\,\mathrm{ad}}$ 分别表示到可容许集 $\mathrm{U}_{\sigma,\,\mathrm{ad}}$ 和 $\mathrm{C}_{\sigma,\,\mathrm{ad}}$ 上的 $H^1(0,\ T)$ τ 投影，即，

$$\Pi_{\mathrm{ad}}^u(\boldsymbol{u}_\sigma) := \operatorname*{arg\,min}_{\boldsymbol{v}_\sigma \in \mathcal{U}_{\sigma,\mathrm{ad}}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}_\sigma - \boldsymbol{v}_\sigma\|^2_{H^1(0,T;\mathbb{R}^2),\tau}, \tag{3.19a}$$

$$\Pi_{\mathrm{ad}}^c(\boldsymbol{c}_\sigma) := \operatorname*{arg\,min}_{\boldsymbol{d}_\sigma \in C_{\sigma,\mathrm{ad}}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{c}_\sigma - \boldsymbol{d}_\sigma\|^2_{H^1(0,T),\tau}. \tag{3.19b}$$

上一节已经推导出 j_σ 的梯度公式，参见（3.17）。步长参数 $s^{(k)} > 0$ 通过 Armijo 线搜索获得，并且必须满足充分下降条件

$$j_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)} - s_{(k)}\, \nabla j_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)})) \le j_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)}) - \frac{d}{s^{(k)}} \|\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)} - \Big(\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)} - s^{(k)}\, \nabla j_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)})\Big)\|^2_{Q_\sigma} \tag{3.20}$$

其中下降参数为 $d \in (0,\ 1)$，通常取较小值（例如 10^{-4}）。投影梯度算法的一个合理停止准则是

$$\|\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)} - \Pi_{\mathrm{ad}}\Big(\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)} - \nabla j_\sigma(\boldsymbol{q}_\sigma^{(k)})\Big)\|_{Q_\sigma} \le 10^{-3}.$$

接下来讨论投影算子的实现，我们提出一种原始-对偶活跃集策略，也可视为半光滑牛顿法。注意，算子 Π_{ad} 是半光滑的，参见Christof, Wachsmuth, 2021年。投影算子 $\Pi_{\mathrm{ad}}^u\colon \mathcal{U}_\sigma \to \mathcal{U}_{\sigma,\,\mathrm{ad}}$ 的计算需要求解优化问题（3.19a）。未知量（假设 $M = 1$ 并暂时省略智能体的指标 i）是函数 $\mathrm{U}_\sigma \ni \Pi_{\mathrm{ad}}(u_\sigma) = w_\sigma \simeq \vec{w} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times 2}$ 的系数，其中给定了某个 $\mathrm{U}_\sigma \ni u_\sigma \simeq \vec{u} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times 2}$。我们改用矩阵-向量表示法，并定义

$$w^n := \begin{pmatrix} w_1^n \\ w_2^n \end{pmatrix} := w_\sigma(t_n), \qquad \vec{w}_j := (w_j^0, \dots, w_j^N)^\top,\ j = 1, 2,$$

以及矩阵 $A \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ 它位于线性系统（3.16）的左侧，并诱导出离散的 $H^1(0, T)$ τ-范数。（3.19）的拉格朗日函数为

$$L(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{\lambda}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} (\vec{w}_i - \vec{u}_i)^\top A (\vec{w}_i - \vec{u}_i) - \frac{1}{2} \lambda^\top \Big(|\vec{w}|_*^2 - \vec{1}\Big),$$

其中 $|\vec{w}|_*^2 = (|w^0|^2, \ldots\ldots, |w^N|^2)^\top$。（3.19）对应的 Karush-Kuhn-Tucker 系统为

$$A(\vec{w}_i - \vec{u}_i) - \vec{\lambda} \cdot \vec{w}_i = 0 \qquad i = 1, 2,$$
$$\frac{1}{2}\left(|\vec{w}|_*^2 - \vec{1}\right) \le 0, \qquad \vec{\lambda} \ge 0, \qquad \frac{1}{2}\vec{\lambda} \cdot \left(|\vec{w}|_*^2 - 1\right) = 0,$$

其中，$\cdot$ 表示两个向量的逐分量乘法。我们借助一个非光滑方程重新表述互补条件，从而得到 KKT 系统的以下等价形式

$$F(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{\lambda}) := \begin{bmatrix} A(\vec{w}_1 - \vec{u}_1) - \vec{\lambda} \cdot \vec{w}_1 \\ A(\vec{w}_2 - \vec{u}_2) - \vec{\lambda} \cdot \vec{w}_2 \\ \vec{\lambda} - \max\{0, -\frac{1}{2}(|\vec{w}|_*^2 - \vec{1}) + \vec{\lambda}\} \end{bmatrix} = 0. \tag{3.21}$$

该非线性系统可通过半光滑牛顿法迭代求解。给定一个初始对 $(\vec{u}^{(0)}, \vec{\lambda}^{(0)})$。随后，依次计算活跃集和非活跃集

$$\mathcal{A}^{(k)} := \{n \in \{0, \ldots, N\} : -\frac{1}{2}(|w^n|_2^2 - 1) + \lambda^n > 0\},$$
$$\mathcal{I}^{(k)} := \{0, \ldots, N\} \setminus \mathcal{A}^{(k)},$$

求解牛顿系统

$$\begin{bmatrix} A - D_{\vec{\lambda}^{(k)}} & 0 & -D_{\vec{w}_1^{(k)}} \\ 0 & A - D_{\vec{\lambda}^{(k)}} & -D_{\vec{w}_2^{(k)}} \\ D_{\mathcal{A}^{(k)}} D_{\vec{w}_1^{(k)}} & D_{\mathcal{A}^{(k)}} D_{\vec{w}_2^{(k)}} & D_{\mathcal{I}^{(k)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\vec{w}_1 \\ \delta\vec{w}_2 \\ \delta\vec{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A(\vec{w}_1^{(k)} - \vec{u}_1) - \vec{\lambda}^{(k)} \cdot \vec{w}_1^{(k)} \\ A(\vec{w}_2^{(k)} - \vec{u}_2) - \vec{\lambda}^{(k)} \cdot \vec{w}_2^{(k)} \\ \vec{\lambda}^{(k)} - \max\{0, -\frac{1}{2}(|\vec{w}^{(k)}|_*^2 - \vec{1}) + \vec{\lambda}^{(k)}\}, \end{bmatrix}$$

其中，对角矩阵 $D_{\vec{v}} = \mathrm{diag}(\vec{v})$ 对应于 $\vec{v} \in \mathbb{R}^{N+1}$，而 $D_{\mathcal{M}} = \mathrm{diag}(\chi_{\mathcal{M}})$ 对应于 $\mathcal{M} \subset \{0、\ldots\ldots、N\}$，并执行牛顿更新

$$\vec{w}^{(k+1)} = \vec{w}^{(k)} + \delta\vec{w}, \qquad \vec{\lambda}^{(k+1)} = \vec{\lambda}^{(k)} + \delta\vec{\lambda}.$$

重复此过程，直至满足某个终止准则，例如 $\|F(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \lambda)\| < \mathrm{tol}$。

4 数值实验

本节致力于数值实验。为建立离散系统（3.12），我们使用了有限元库 FEniCS，并通过 Python 实现了方程（3.18）中的投影梯度法，以及（3.20）中的 Armijo 步长规则。计算网格由集成于 FEniCS 中的网格生成器 `mshr`创建。

4.1 示例 1

在第一个数值测试中，我们求解区域 方程 (2.2)，该区域 Ω 如图 4.1所示，参数如下。

$$T = 9 \qquad n_T = 300 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 5 \cdot 10^{-2} \qquad \gamma = 10 \qquad \zeta = 10^{-2} \qquad \mu = 5 \cdot 10^{-2}$$
$$\varepsilon = 10^{-5} \qquad \delta_1 = 0.2 \qquad \delta_2 = 0.1 \qquad \delta_3 = 10^{-2} \qquad \delta_4 = 0.1.$$

~初始密度 ρ_0 由 6 个高斯钟形曲线相加得到，另见图 4.1a。选择子域 Ω 作为密度惩罚区域，覆盖墙壁围成的范围。没有任何受控智能体时，大多数人会挤过南侧和北侧较小的两个紧急出口，而东侧的大出口很少有人使用。为改善疏散过程，引入了 3 个智能体。初始控制$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c})$的设定使智能体以恒定强度径直向右移动至房间外。

4.2 例 2

在第二个示例中，我们考虑图 4.2所示的区域。初始密度集中在左侧墙壁的狭缝附近。在不受控制的疏散场景中，大多数人会通过该狭缝离开区域，从而造成严重拥堵，导致人群疏散速度非常缓慢。本示例所采用的模型和算法参数如下：

$$T = 12 \qquad n_T = 300 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 5 \cdot 10^{-2} \qquad \gamma = 10 \qquad \zeta = 10^{-2} \qquad \mu = 5 \cdot 10^{-2}$$
$$\varepsilon = 10^{-5} \qquad \delta_1 = 0.2 \qquad \delta_2 = 0.1 \qquad \delta_3 = 10^{-2} \qquad \delta_4 = 0.1.$$

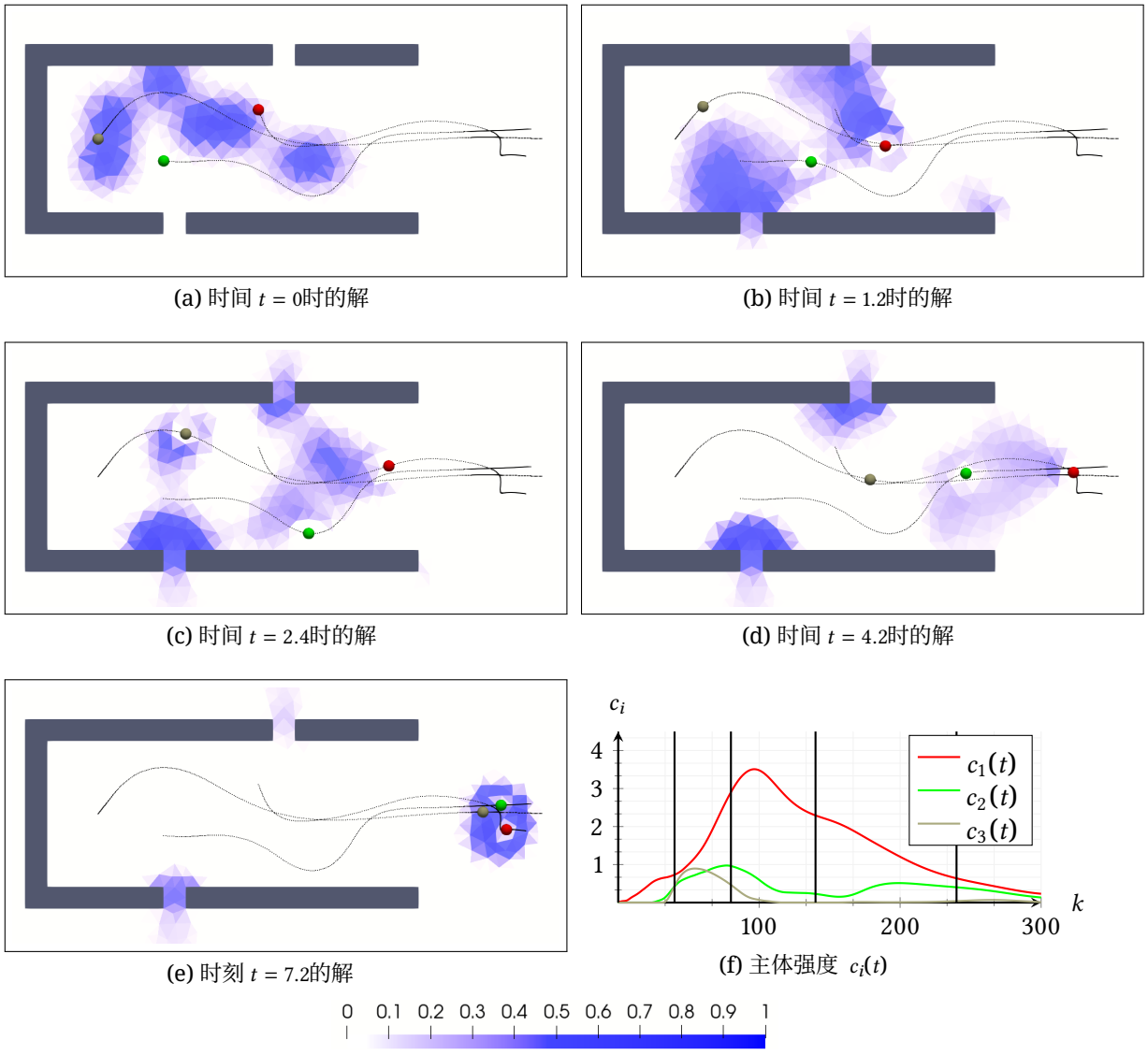
本示例表明，使用两个具有优化轨迹和强度的智能体，可以显著改善疏散效果。有趣的是，强度仅在时间区间$t \in (0, 3)$内非零。智能体吸引人群，使其远离西侧的狭缝，达到足够距离后便停止影响人群。当人们距离狭缝足够远时，他们会利用势函数 ϕ确定的运动方向，自行找到通往北侧和南侧较大出口的路径。

4.3 例 3

在第三个示例中，我们考虑一间南侧、东侧和北侧均设有出口的方形房间。这些出口的宽度各不相同。模型和算法参数如下所示：

$$T = 10 \qquad n_T = 300 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 5 \cdot 10^{-2} \qquad \gamma = 10 \qquad \zeta = 10^{-2} \qquad \mu = 5 \cdot 10^{-2}$$
$$\varepsilon = 10^{-5} \qquad \delta_1 = 0.2 \qquad \delta_2 = 0.1 \qquad \delta_3 = 10^{-2} \qquad \delta_4 = 0.1.$$

初始密度集中在较小的出口附近。若不对人群运动进行控制，大多数人会在挤过这个小出口时互相阻挡。在这一场景中加入了两个智能体，目的是吸引人群，使更多人找到北侧和东侧的另外两个出口。计算得到的主体轨迹相当短。值得注意的是，在时间区间 $t \in (0, 2)$ 内，智能体只是前往一个靠近人群的最优位置；在时间区间 $t \in (2, 5)$ 内，它们吸引人群，从而引导部分人前往房间中央。此时，智能体将其强度降至零，也就是说，它们不再影响人群。然而，当人们远离拥挤的出口后，便会依据势函数 ϕ所决定的运动规则，自行找到通往较少使用的出口的路线。



(a) 时间 $t = 0$时的解

(b) 时间 $t = 1.2$时的解

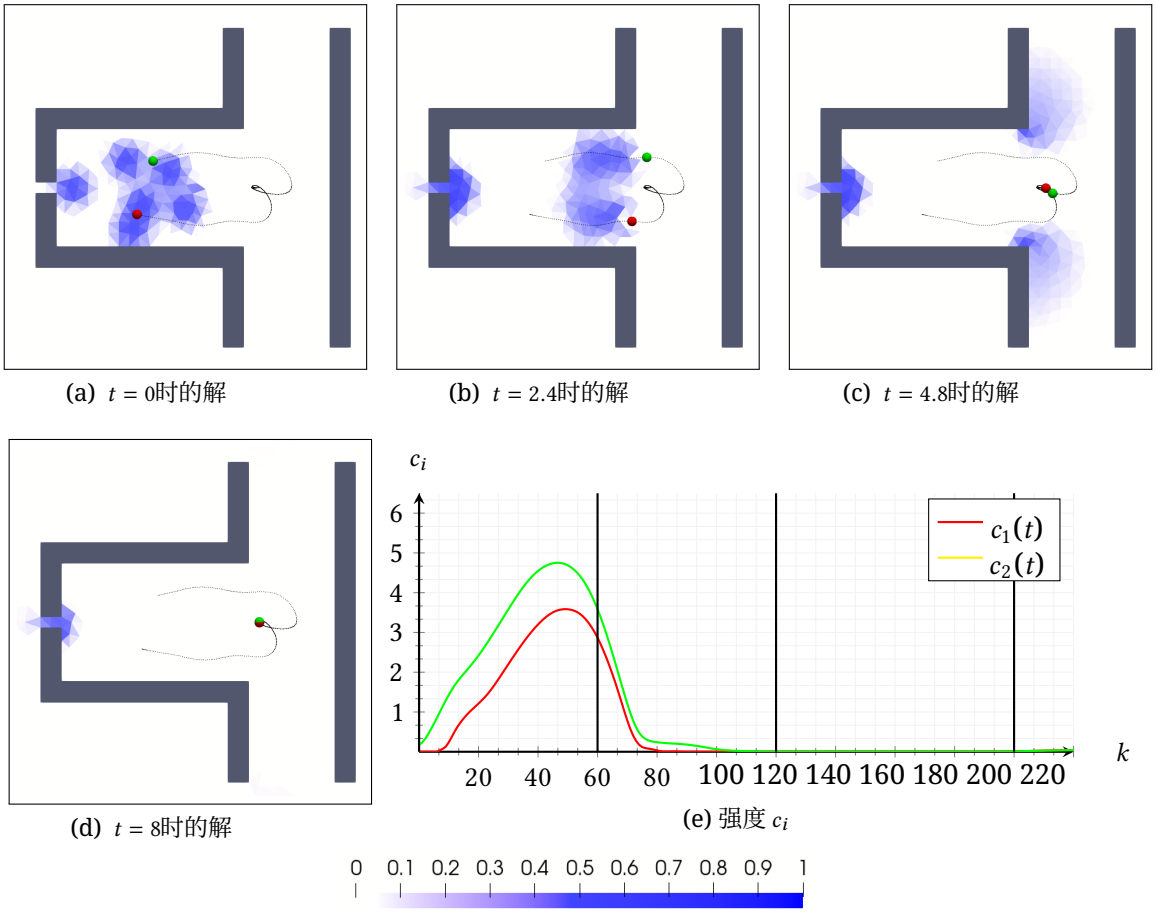
(c) 时间 $t = 2.4$时的解

(d) 时间 $t = 4.2$时的解

(e) 时刻 $t = 7.2$的解

(f) 主体强度 $c_i(t)$

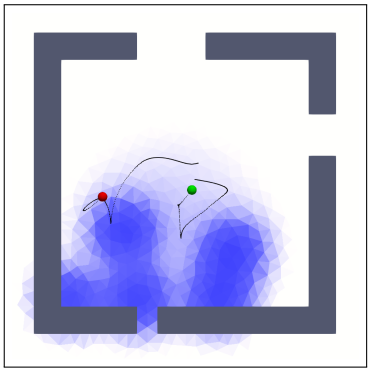
图 4.1： 第 4.1 节中的问题的解。彩色背景表示密度 ρ；圆点表示主体位置；黑色曲线表示主体轨迹。



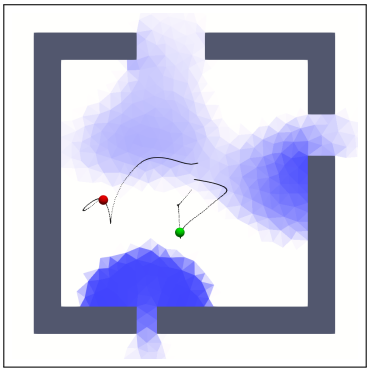
(a) $t = 0$时的解 (b) $t = 2.4$时的解 (c) $t = 4.8$时的解

(d) $t = 8$时的解 (e) 强度 c_i

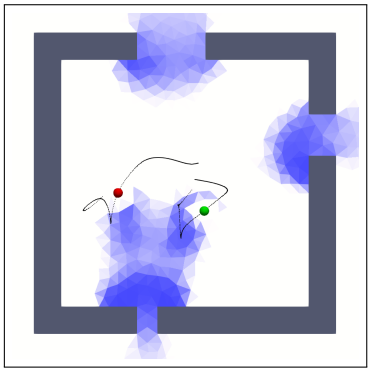
图 4.2：第 4.2 节 中问题在不同时间步的解 t_k 以及智能体的强度。



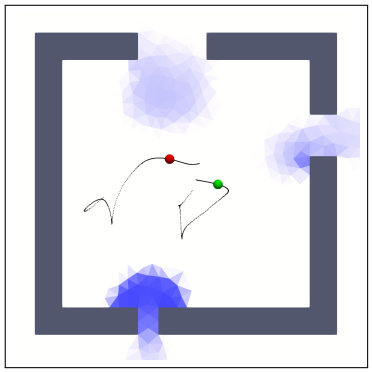
(a) 时间 $t = 0$的解



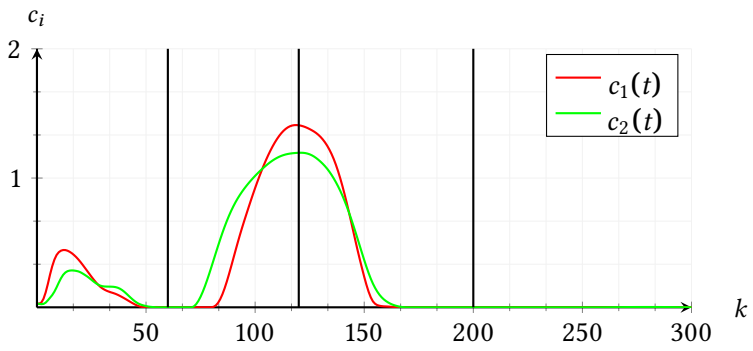
(b) 时间 $t = 2$的解



(c) 时间 $t = 4$的解



(d) 时间 $t = 6.7$的解



(e) 强度 c_i

图 4.3：问题的解，来自 第 4.3 节 在不同时间步 t_k 以及智能体的强度。

参考文献

Albi, G.; M. Bongini; E. Cristiani; D. Kalise（2016年）。“离开未知环境的自组织智能体的隐形控制”。SIAM应用数学杂志 76.4，页码 1683–1710。doi：10.1137/15M1017016。电子版：https://doi.org/10.1137/15M1017016。网址：https://doi.org/10.1137/15M1017016。Albi, G.; M. Fornasier; D. Kalise（2017年）。“基于玻尔兹曼方法的均值场稀疏反馈控制”。IFAC-PapersOnLine 50.1，页码 2898–2903。Amadori, D.; M. Di Francesco（2012年）。“行人流的一维休斯模型：黎曼型解”。数学科学学报 32.1，页码 259–280。doi：10.1016/s0252-9602(12)60016-2。Amadori, D.; P. Goatin; M. D. Rosini（2014年）。“休斯行人流模型的存在性结果”。数学分析与应用杂志 420.1，页码 387–406。doi：10.1016/j.jmaa.2014.05.072。Banda, M. K.; M. Herty; T. Trimborn（2020年）。“受控人群动力学的最新进展”。《人群动力学》第2卷。施普林格国际出版，页码 133–157。doi：10.1007/978-3-030-50450-2 7。Borsche, R.; A. Klar; S. Kühn; A. Meurer（2014年）。“将交通流网络与行人运动耦合”。应用科学中的数学模型与方法 24.2，页码 359–380。doi：10.1142/S0218202513400113。Borsche, R.; A. Meurer（2019年）。“汽车交通与行人流耦合的微观和宏观模型”。计算与应用数学杂志 348，页码 356–382。doi：10.1016/j.cam.2018.08.037。Borsche, R.; R. M. Colombo; M. Garavello; A. Meurer（2015年）。“人群相互作用的微分方程建模”。非线性科学杂志 25.4，页码 827–859。doi：10.1007/s00332-015-9242-0。Burger, M.; M. Di Francesco; P. A. Markowich; M.-T. Wolfram（2014年）。“行人动力学中具有非线性迁移率的均值场博弈”。离散与连续动力系统B辑 19.5，页码 1311–1333。doi：10.3934/dcdsb.2014.19.1311。Burger, M.; R. Pinnau; A. Roth; C. Totzeck; O. Tse（2016年）。《少数外部智能体引导的自组织个体系统控制——粒子描述与均值场极限》。arXiv：1610.01325。Caponigro, M.; M. Fornasier; B. Piccoli; E. Trélat（2013年）。“Cucker-Smale模型的稀疏稳定化与最优控制”。数学控制与相关领域 3.4，页码 447–466。doi：10.3934/mcrf.2013.3.447。Carillo, J. A.; Y. Huang; S. Martin（2014年）。“准莫尔斯势的显式群集解”。欧洲应用数学杂志 25.5，页码 553–578。doi：10.1017/s0956792514000126。Carlini, E.; A. Festa; F. J. Silva; M.-T. Wolfram（2016年）。“改进版休斯行人流模型的半拉格朗日格式”。动态博弈与应用 7.4，页码 683–705。doi：10.1007/s13235-016-0202-6。Carrillo, J. A.; S. Martin; M.-T. Wolfram（2016年）。“改进版休斯模型”。应用科学中的数学模型与方法 26.04，页码 671–697。doi：10.1142/s0218202516500147。Christof, C.; G. Wachsmuth（2021年）。《障碍型变分不等式解算子的半光滑性及其在最优控制中的应用》。arXiv：2112.12018。Colombo, R. M.; M. Gokieli; M. D. Rosini（2018年）。“通过双曲-椭圆方程对人群动力学建模”。《非线性偏微分方程、数学物理与随机分析》。EMS会议报告系列。欧洲数学会，苏黎世，页码 111–128。doi：10.4171/186-1/6。

Denk, R.; M. Hieber; J. Prüss（2007年）。“非齐次数据抛物型边值问题的最优 L^p-L^q 估计”。Mathematische Zeitschrift 257.1，页码 193–224。doi：10.1007/s00209-007-0120-9。Di Francesco, M.; S. Fagioli; M. D. Rosini; G. Russo（2017年）。“单空间维度下休斯模型的确定性粒子近似”。Kinetic & Related Models 10.1，页码 215–237。doi：10.3934/krm.2017009。Di Francesco, M.; P. A. Markowich; J.-F. Pietschmann; M.-T. Wolfram（2011年）。“关于行人流的休斯模型：一维情形”。Journal of Differential Equations 250.3，页码 1334–1362。doi：10.1016/j.jde.2010.10.015。Di Pietro, D. A.; A. Ern（2012年）。《不连续伽辽金方法的数学方面》。Springer Berlin Heidelberg。doi：10.1007/978-3-642-22980-0。Epshteyn, Y.; A. Kurganov（2009年）。“凯勒-塞格尔趋化模型的新型内罚不连续伽辽金方法”。SIAM Journal on Numerical Analysis 47.1，页码 386–408。doi：10.1137/07070423x。Filbet, F.（2006年）。“帕特拉克-凯勒-塞格尔趋化模型的有限体积格式”。Numerische Mathematik 104.4，页码 457–488。doi：10.1007/s00211-006-0024-3。Guo, L.; X. H. Li; Y. Yang（2018年）。“凯勒-塞格尔趋化模型的能量耗散局部不连续伽辽金方法”。Journal of Scientific Computing 78.3，页码 1387–1404。doi：10.1007/s10915-018-0813-8。Herzog, R.; J.-F. Pietschmann; M. Winkler（2020年）。《基于局部吸引的行人流休斯模型最优控制》。arXiv：2011.03580。Himakalasa, A.; S. Wongkaew（2021年）。“具有时滞的 Cucker-Smale 群集模型的领导式最优控制”。Complexity 2021。编者：M. Wang，页码 1–14。doi：10.1155/2021/5545551。Hughes, R. L.（2002年）。“行人流的连续介质理论”。Transportation Research Part B: Methodological 36.6，页码 507–535。doi：10.1016/s0191-2615(01)00015-7。Ibrahim, M.; M. Saad（2014年）。“关于控制体积有限元方法在捕捉体积填充型趋化模型模式方面的效能”。Computers & Mathematics with Applications 68.9，页码 1032–1051。doi：10.1016/j.camwa.2014.03.010。El-Khatib, N.; P. Goatin; M. D. Rosini（2013年）。“关于行人运动休斯模型的熵弱解”。Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik。ZAMP。Journal of Applied Mathematics and Physics。Journal de Mathématiques et de Physique Appliquées 64.2，页码 223–251。doi：10.1007/s00033-012-0232-x。Li, X. H.; C.-W. Shu; Y. Yang（2017年）。“凯勒-塞格尔趋化模型的局部不连续伽辽金方法”。Journal of Scientific Computing 73.2-3，页码 943–967。doi：10.1007/s10915-016-0354-y。Pinnau, R.; C. Totzeck（2018年）。“相互作用粒子与优化”。PAMM 18.1。doi：10.1002/pamm.201800182。Rider, W. J.; R. B. Lowrie（2002年）。“经典拉克斯-弗里德里希斯黎曼求解器在不连续伽辽金方法中的应用”。第40卷，第3-4期。ICFD流体动力学数值方法会议，第二部分（牛津，2001年），页码 479–486。doi：10.1002/fld.334。Strehl, R.; A. Sokolov; D. Kuzmin; S. Turek（2010年）。“用于趋化问题的通量校正有限元法”。Computational Methods in Applied Mathematics 10.2，页码 219–232。doi：10.2478/cmam-2010-0013。