arXiv:2301.02517v1 [math.CO] 6 Jan 2023

凯莱图的 2-秩范围内的 Adinkra 临界群

CHI HO YUEN

Abstract. Adinkra 是物理学家为研究超对称而引入的图形工具，可以将其视为超对称代数的凯莱图。我们改进了 Iga 等人的结果，根据底层凯莱图的拉普拉斯矩阵的 2-秩，确定了一个 Adinkra 的临界群。作为推论，我们证明临界群与 Adinkra 的符号无关。证明使用了这些临界群上的单值化配对。

1. 引言

计算整数矩阵的余核，或等价地计算其史密斯标准形（SNF），是代数组合学中的一个常见课题 [20]。尽管其定义很基础，但人们已采用复杂的工具来解决这一问题，而许多看似简单的矩阵，其答案仍然未知。该课题中的一个重要概念是图 G 的临界群 $\mathcal{K}(G)$，它是图拉普拉斯矩阵 $L(G)$ [7, 18] 的余核的（挠子部分）。一个更具体的研究方向是计算由代数产生的图的临界群；为此，人们运用了表示论、格¨布纳理论和 p-进数论中的思想 [4, 6, 12, 14]。

本文研究 Adinkra 的临界群。Adinkra 是物理学家引入的带有装饰（着色、虚线）的图，用于编码特殊的超对称代数 [13]。粗略地说，顶点代表粒子，不同颜色的边对应于代数中不同基元素对这些粒子的作用；如果该作用会翻转粒子的符号，则相应的边用虚线表示。因此，Adinkra 可以被视为超对称代数的凯莱图的一种带符号类比。在 [17], 中，作者提出了这一问题，并利用“变形为 $\mathbb{Z}[x]$-模”论证证明了以下结果：

定理 1.1. [17] 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有 v 个顶点的 N-着色 Adinkra。则 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 的奇数部分与 $(\mathbb{Z}/(N^2-N)\mathbb{Z})^{v/2}$ 的奇数部分同构。

然而， $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 的 2-西罗子群问题仍未解决，这似乎因其与另一个问题的联系而颇为棘手。Adinkra 的底层图是 $\mathbb{F}_2^n$ 的凯莱图 G ，而 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 的偶数不变因子个数等于 $L(G)$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上的余秩，但这一量本身也鲜为人知：甚至超立方体这一最简单的情形，在得到解决之前也只是 Reiner 提出的一个猜想，后来由

Bai [1], 解决；尽管近期已有一些进展[14]，但目前仍没有令人满意的一般性描述。尽管如此，我们还是能够绕过表面上的第一道难关，并证明：

定理 1.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有 N种颜色、具有 v 个顶点的 Adinkra。设底层凯莱图的拉普拉斯矩阵的 2-秩为 $v/2-m$；由 $m \geq 0$ 可得 [14]。那么 $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m \oplus (\mathbb{Z}/\frac{N^2-N}{2}\mathbb{Z})^m \oplus (\mathbb{Z}/(N^2-N)\mathbb{Z})^{v/2-m}$。

我们的证明不同于 [17], 中的主要策略，并使用单值化配对[19]。虽然该配对对任意临界群都有定义，但 Adinkra 的正则性使其具有简单的描述 [15]。我们找到了 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 的一个大型“正交归一”子集，这意味着 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 包含一个结构简单的大型子群。然后我们论证剩余部分仅取决于 2-秩。据我们所知，这是首次使用单值化配对来研究特定临界群的结构。

作为推论，我们肯定地回答了 [17, 猜想 1]:

推论 1.3。 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 与 Adinkra 的符号无关。

值得注意的是，尽管定义 $\mathcal{A}$ 时只用到了带符号（虚线）的图结构，但要定义 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$，存在相容的边染色却至关重要。在数学中，这又是一个颇为有趣的例子：引入额外结构会对对象看似无关的不变量施加约束。

2. Preliminaries

Unle除非另有说明，所有（带符号的）图都是有限的、简单的且连通的。

2.1. Adinkra。

定义 2.1. 符号图 G_σ 是一个图 G ，并附带一个赋值σ ： $E(G) \to \{\pm\}$ （即 G 的一个符号）。切换一个顶点会翻转与其关联的边的符号。

定义 2.2. 对于 $N \geq 2$， N-着色 Adinkra $\mathcal{A}$ 是一个符号图，其每条边都以 N 种颜色之一着色[1], ，并满足以下条件：

（1）该图是二分图；（2）每个顶点恰好关联一条各颜色的边；（3）对于每一对不同的颜色，由这两种颜色的边构成的子图是若干个互不相交的 4-圈；（4）每个双色 4-圈都包含奇数条负边。

例 2.3。在图 1 中，左侧是一个支撑于 Q_3 上的 3色 Adinkra，右侧是一个支撑于 $K_{4,\ 4}$ 上的 4色 Adinkra。负边用虚线边表示。

[1]严格来说，这里的数据只定义了一个 Cliffordinkra，因为还需要为底层图选择一个无环定向，才能定义 Adinkra。不过，这一选择与其余数据之间没有兼容性条件，因此我们在此省略该定向。

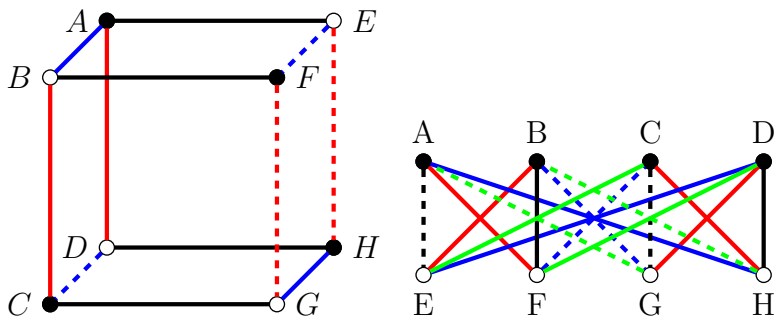

FIGURE 1. 两个 Adinkra 示例。

关于 Adinkra 的底层图，我们有如下定理。

定理2.4。 [8] 一个图具有 Adinkra 结构，当且仅当它是超立方体 Q_t 对双偶码的商（该码是 $\mathbb{F}_2^t$ 的一个子空间 $\mathcal{C}$，其中每个元素的支撑大小均可被 4 整除）；该图必然是 $\mathbb{F}_2^n$ 的凯莱图，其中 $n = t -$ 维数为 $\mathcal{C}$。

2.2. 临界群及其单值化配对。

定义2.5。 G_σ 的拉普拉斯矩阵为 $L(G_\sigma) = D - A_\sigma$，其中 D 是其对角元素为顶点度的对角矩阵，而 A_σ 是带符号邻接矩阵，其中正边（负边） xy 表示为 $A_{xy} = A_{yx} = 1$ （ -1）。普通图 G 的拉普拉斯矩阵可视为/定义为 $L(G_\sigma)$，其中 $\sigma \equiv +$。

临界群 $\mathcal{K}(G_\sigma)$ 是 $\mathbb{Z}$ 上 $L(G_\sigma)$ 余核的挠子部分。对于 Adinkra（事实上，对于任何非平衡带符号图），余核本身是有限的；而对于普通图，余核的秩始终为 1。

这里有两个简单的观察：(1) 切换顶点不会改变 $\mathcal{K}(G_\sigma)$，也不会改变该符号图是否为 Adinkra；(2) $L(G_\sigma)$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上的秩（2-秩）与 σ 无关。特别地，它等于 $L(G)$ 的秩，并且 $\mathcal{K}(G_\sigma)$ 的偶数不变因子个数等于 v 减去（2-秩与 coker $L(G_\sigma)$ 的秩之差）。

Adinkra 的临界群（或者更一般地，任意对称整数矩阵的余核的挠子部分）带有一个典范配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，其取值于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，称为单值化配对。它与算术几何和离散势理论中的其他几种配对有关 [3, 5]。

定义 2.6. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^v$ 是表示 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中两个元素的两个向量。取正整数 m，使得 $L(\mathcal{A})\mathbf{f} = m\mathbf{x}$ 对某个 $\mathbf{f} \in \mathbb{Z}^v$成立。则 $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}]$ 之间的单值化配对为 $\langle [\mathbf{x}], [\mathbf{y}] \rangle := \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{y}}{m} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

命题 2.7. [5, 引理 1.1] 该配对定义良好、双线性且对称。

3. Proof of the Main Theorem

将 $L(\mathcal{A})$ 的行和列分别按 $V(\mathcal{A}) \cong \mathbb{F}_2^n$ 编号，并将 $\{\mathbf{e}_u : u \in V(\mathcal{A})\}$ 记为 $\mathbb{Z}^{V(\mathcal{A})}$ 的标准基。

我们先汇集一些关于 Adinkra 的拉普拉斯矩阵和临界群的结果，这些结果可以用更初等的方法从 [17] 得到。

定理 3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有 v 个顶点的 N色 Adinkra。那么 $L(\mathcal{A})$ 恰有两个不同的特征值 $N \pm \sqrt{N}$，且其重数相等，均为 $v/2$；并且 $|\mathcal{K}(\mathcal{A})| = \det(L(\mathcal{A})) = (N^2 - N)^{v/2}$。

$L(\mathcal{A})$ 的不变因子 $f_1 \mid f_2 \mid \ldots \mid f_v$ 满足关系 $f_i f_{v-i+1} = N^2 - N, \forall i$。此外，对于 $i > v/2$，$(N-1) \mid f_i$。

一个关键且巧妙的观察是，一族单色边的带符号边界相对于 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是“正交归一”的。

命题3.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有 $N \geq 3$ 种颜色的 Adinkra，且 uv 是 $\mathcal{A}$ 中符号为 ϵ的一条边。那么 $\langle \mathbf{e}_u - \epsilon \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_u - \epsilon \mathbf{e}_v \rangle = \frac{2}{N} \neq 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。设 xy 是另一条颜色相同、符号为 ϵ' 的边。那么 $\langle \mathbf{e}_u - \epsilon \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_x - \epsilon' \mathbf{e}_y \rangle = 0$。

证明。不失一般性，经过切换，我们可以假设 $\epsilon = \epsilon' = +$。根据定理 3.1 的前半部分，$L(\mathcal{A})$ 有两个不同的特征值，因此满足 [15, 方程 (3.3)], 中的条件，我们可以通过以下方式求解 $m(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v) = L_{\mathcal{A}} \mathbf{f}$:

(3.1)
$$(N^2-N)(\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v) = L_{\mathcal{A}}[(N-1)\mathbf{e}_u - (N-1)\mathbf{e}_v + \sum_{w \in N(u) \setminus v} \sigma(uw)\mathbf{e}_w - \sum_{w \in N(v) \setminus u} \sigma(vw)\mathbf{e}_w],$$

这里，$N(x)$ 是顶点 x 的邻域，而 $\sigma(e)$ 是边 e的符号。

根据定义 2.6 和 (3.1)，$\langle \mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v \rangle = \frac{2(N-1)}{N^2-N} = \frac{2}{N}$，这在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中是非零的，因为 $N \geq 3$。

对于第二个结论，根据定义 2.2 的 (2)，$\{x, y\}$ 和 $\{u, v\}$ 必然不相交。若 x 与 u 沿着颜色为 c的正边相邻，则定义 2.2 的 (1) 保证 x 与 v不相邻，而定义 2.2 的 (3) 和 (4) 确保 y 与 v 沿着同色的负边相邻，但不与 u相邻。现在 (3.1) 推出 $\langle \mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \rangle = \frac{1-1}{N^2-N} = 0$； x与v 相邻和／或边为负的情形本质上相同。若 x 既不与 u 相邻，也不与 v 相邻，则情形更简单，因为 y 也不与 u、v 相邻，而且配对就是$\frac{0-0}{N^2-N} = 0$。□

接下来，我们陈述 [15] 中的结果，该结果说明正交归一子集如何蕴含一个“矩形”子群。

定理 3.3（[15, 定理 4.5]）。设 G 是一个配有单值化配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的有限阿贝尔群。假设存在 $g_1, \ldots, g_l \in G$，它们的两两

配对均为零，并且对每个 i, $\langle g_i, g_i \rangle = \frac{\mu}{\eta}$，当 $\mu, \eta \in \mathbb{Z}_{>0}$ 互素时都成立。那么 G 含有一个与 $(\mathbb{Z}/\eta\mathbb{Z})^l$ 同构的子群。

定理 1.2 的证明。参数为 $N = 2$ 的唯一 Adinkra 是具有 1 条（或 3 条）负边的 4-圈，很容易验证该图满足定理。

对于 $N \geq 3$，固定 Adinkra 的一种颜色。如有必要，可以通过切换假设该颜色的 $v/2$ 条边全为正边。将命题3.2中的计算应用于定理 3.3，并取 $\eta = N/\gcd(2, N)$，可知 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 包含一个与 $(\mathbb{Z}/^{N}_{\gcd(2,N)}\mathbb{Z})^{v/2}$ 同构的子群。

因此，根据关于不变因子和子群的一个初等事实（参见 [15, 引理 4.4]），对于每个 $i > v/2$, $^{N}_{\gcd(2,N)} \mid f_i$。结合 $(N-1) \mid f_i, \forall i > v/2$，可得 $^{N^2-N}_{\gcd(2,N)} \mid f_i$；由此，根据定理 3.1 的后半部分，每个满足 $i \leq v/2$ 的 f_i 都只能是 1 或 2。前半部分中偶数不变因子（必为 2）的数量是 m，因此后半部分等于 $\frac{N^2-N}{2}$ 的不变因子数量也为 m，其余非平凡不变因子必为 $N^2 - N$，由此得到 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 的所述结构。□

4. Non-generic Adinkras

推论 1.3 可由主定理直接得出。

推论 1.3 的证明。根据上述观察，符号不会影响拉普拉斯矩阵的 2-秩，而 2-秩决定了临界群。□

回顾一下该推论的背景：定理2.4对哪些图具有 Adinkra 结构进行了分类，但对于给定的这类图，其 Adinkra 结构可能不止一种（即使按自然的同构概念来区分亦然）。特别是，尽管 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 在顶点切换和保颜色的图自同构下保持不变，但图 $G = Q_t/\mathcal{C}$ 上可能存在不同的 Adinkra符号，且它们无法通过这两种操作等价，因此原猜想并非一个空洞的问题。

事实上，当且仅当 $\mathcal{C}$ 包含全 1 码字 $\mathbf{1} \in \mathbb{F}_2^t$ [11]时， G 才具有不等价的符号；用凯莱图的术语来说，这等价于生成元之和为零。这些凯莱图按照[14], 的定义属于非一般情形，并且恰好是底层为 $\mathbb{F}_2^n$ 、其 2-秩低于2^{n-1}的凯莱图，也就是主定理中的 $m > 0$ 。因此，在符号和临界群方面表现出非平凡性质的 Adinkra 类（或其底层图类）恰好相同。

我们借此机会再提及一个可能的例子，说明 Adinkra 这一类本身具有特殊性。正如引言中所述，定理 1.1 是通过将临界群变形为一个 $\mathbb{Z}[x]$-模而证明的。这可以通过考虑下列定义在 $\mathbb{Z}[x]$ 上的矩阵 $L(\mathcal{A})$ 来实现：固定任意一种颜色 c，将 $L(\mathcal{A})$ 的对角元替换为 $x + (N-1)$，并将非对角元

± 1 中对应于颜色 c 的边的元素替换为 $\pm x$。由于 $\mathbb{Z}[x]$ 不是主理想整环，$L(\mathcal{A})$ 的史密斯标准形是否存在并非显而易见；文献 [17] 曾猜想，史密斯标准形存在当且仅当 $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \cong (\mathbb{Z}/(N^2-N)\mathbb{Z})^{v/2}$，而我们现在知道，后者成立当且仅当 $\mathcal{A}$ 是一般的。文献 [17] 仅将正向结论作为事实陈述，未给出证明，因此我们在下文补上论证：

ˆ 命题 4.1. 当 $\mathcal{A}$ 不是一般情形时，$L(\mathcal{A})$ 的史密斯标准形不存在。

ˆ 证明。根据 [17,推论 29], ，$L(\mathcal{A})$ 的行列式等于

$$(2(N-1)x+(N-1)(N-2))^{v/2}.$$

由于 $\mathcal{A}$ 不是一般情形，N 必为偶数：例如，若 $\gcd(2,N)=1$，则对于证明主定理中所有的 $i>v/2$，$f_i=(N-1)N$。

ˆˆˆ 假设 $L(\mathcal{A})$ 的史密斯标准形存在，且不变因子为 $f_1 \mid \ldots \mid f_v$。那么，只要 2 或 $x+\frac{N-2}{2}$ 整除某个 $i \le v/2$ 的 ˆ f_i，同样也可以说 ˆ f_j 对于 $j \ge i$ 也成立，这与 $\prod_{i=1}^{v}$ ˆ$f_i = \pm 2^{v/2}(N-1)^{v/2}(x+\frac{N-2}{2})^{v/2}$ 这一事实矛盾；此外，$\mathbb{Z}[x]$ 是一个唯一分解整环，且 $2, x+\frac{N-2}{2}$ 不整除 $N-1$。因此，对于 $i \le v/2$，ˆ $f_i \mid (N-1)$。

$L(\mathcal{A})$ 的史密斯标准形可以由以下对象的史密斯标准形得到：

$L(\mathcal{A})$，令 $x=1$（例如参见 [17, 引理 27]）；因此 $L(\mathcal{A})$ 的前一半不变因子必定全为奇数，这就矛盾了。□

5. Concluding Remarks

从某种意义上说，除非能够在凯莱图的 2-秩问题上取得进展（这不是一个简单的问题，而且可以说与 Adinkra 的组合学正交），否则定理 1.2 已经是关于 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 的最佳可能结果。[2]然而，Adinkra 与多个数学领域相关，[16, 21], 因此，将我们的结果置于这些领域的背景下进行讨论将大有裨益。

研究凯莱图或许多其他代数图的临界群时，研究结果和／或其证明往往直接关联到这些图的代数起源。相反，迄今为止关于 Adinkra 临界群的研究大多利用组合公理，为这一问题建立替代性的代数框架。因此，直接借助超对称代数来阐释这里的结果颇有意义。例如，与非泛型Adinkra图对应的超对称代数是否也具有某种特殊性质?

从几何角度来看，根据格罗滕迪克的儿童画理论，每个 Adinkra 都可以典范地嵌入到一个黎曼曲面中，而这些黎曼曲面的某些性质与 Adinkra 的性质有着深刻的联系 [9, 10]。与此同时，临界群理论是除子理论和代数曲线雅可比簇理论的一种离散／热带

[2]乐观地看，作者并未排除利用 Adinkra 研究凯莱图问题的可能性。

类比 [2]。通过嵌入比较这两个领域，是另一个值得探索的方向。例如，在命题3.2的证明中所考虑的元素 $\mathbf{e}_u - \mathbf{e}_v$' 现在是黎曼曲面上的除子，那么 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 上的单值化配对是否与那里的某种概念相关?

最后，也可以探讨是否存在其他图或符号图族，其临界群也能以类似方式加以研究。更一般地，能否通过展示相对于 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的"正交基"来确定每个临界群的结构？如果不能，这种方法能提供多少信息?

Acknowledgements

作者受到奥斯陆大学 Trond Mohn Foundation 项目"复几何与热带几何中的代数与拓扑循环"的资助。他还感谢 Kevin Iga 阅读论文早期草稿。

References

[1] Hua Bai. 关于 n立方体的临界群。Linear Algebra Appl., 369:251–261, 2003.[2] Matthew Baker. 从曲线到图的线性系的特化。Algebra Number Theory, 2(6):613–653, 2008。附录由 Brian Conrad 撰写。[3] Matthew Baker 和 Farbod Shokrieh. 芯片发射博弈、图上的势论与生成树。J. Combin. Theory Ser. A, 120(1):164–182, 2013.[4] Georgia Benkart、Caroline Klivans 和 Victor Reiner. Dynkin图和 McKay箭图上的芯片发射。Math. Z., 290(1-2):615–648, 2018.[5] Siegfried Bosch 和 Dino Lorenzini. 雅可比簇分支群上的格罗滕迪克配对。Invent. Math., 148(2):353–396, 2002.[6] David B. Chandler、Peter Sin 和 Qing Xiang. Paley图的史密斯标准形与临界群。J. Algebraic Combin., 41(4):1013–1022, 2015.[7] Scott Corry 和 David Perkinson. 除子与沙堆模型。美国数学会，美国罗得岛州普罗维登斯，2018.[8] C. F. Doran、M. G. Faux、S. J. Gates Jr.、T. H¨ubsch、K. M. Iga、G. D. Landweber 和 R. L. Miller. 一维中的编码与超对称。Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 15(6):1909–1970, 2011.[9] Charles Doran、Kevin Iga、JordanKostiuk、Greg Landweber 和 Stefan M´endez-Diez. N扩展的一维超对称代数的几何化，I。Adv. Theor. Math. Phys., 19(5):1043–1113, 2015.[10] Charles Doran、Kevin I ga、Jordan Kostiuk 和 Stefan M´endez-Diez. N扩展的一维超对称代数的几何化，II。Adv. Theor. Math. Phys., 22(3):565–613, 2018.[11] Charles F. Doran、Kevin M. Iga 和 Gregory D. Landweber. 立方上同调在 Adinkra 与超对称表示中的应用。Ann. Inst. Henri Poincar´e D, 4(3):387–415, 2017.[12] Joshua E. Ducey 和 Deelan M. Jalil. 阿贝尔Cayley图的整数不变量。Linear Algebra Appl., 445:316–325, 2014.

[13] Michael Faux 和 S. James Gates, Jr. Adinkra：超对称表示论的一种图形化技术。Phys. Rev. D (3), 71:065002, 2005.[14] Jiyang Gao、Jared Marx-Kuo、Vaughan McDonald 和 Chi Ho Yuen. $\mathbb{F}_2$的凯莱图的沙堆群，2022。https://arxiv.org/abs/1912.06919.[15] Kenneth Hung 和 Chi Ho Yuen. 强正则图及其推广的临界群。Innov. Incidence Geom., 19(3):95–109, 2022.[16] Kevin Iga. Adinkra：克利福德代数表示、超对称与编码的图。Adv. Appl. Clifford Algebr., 31(5):Paper No. 76, 2021.[17] Kevin Iga、Caroline Klivans、Jordan Kostiuk 和 Chi Ho Yuen. Adinkra 的特征值与临界群。Adv. in Appl. Math., 143:Paper No. 102450, 2023.[18] Caroline J. Klivans. 芯片发射的数学。Discrete Mathematics and its Applications（博卡拉顿）。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2019.[19] Farbod Shokrieh. 有限图的雅可比簇上的单值化配对与离散对数。J. Math. Cryptol., 4(1):43–56, 2010.[20] Richard P. Stanley. 组合学中的史密斯标准形。Journal of Combinatorial Theory, Series A, 144:476–495, 2016。Journal of Combinatorial Theory 创刊五十周年专辑。[21] Yan X Zhang. 面向数学家的 Adinkra。Transactions of the American Mathematical Society, 366(6):3325–3355, 2014.

Chi Ho Yuen: Department of Mathematics, University of Oslo, Oslo, Norway
Email 地址：chihy@math.uio.no