IIA型反德西特背景的 TCFH 与隐藏对称性

G. Papadopoulos 和 J.Phillips

伦敦国王学院数学系，斯特兰德，
伦敦 WC2R 2LS，英国
george.papadopoulos
@kcl.ac.uk
jake.phillips@kcl.ac.uk

arXiv:2301.02533v1 [hep-th] 6 Jan 2023

摘要

我们给出了翘曲（有质量）IIA反德西特背景的扭曲协变形式层次（TCFH）。由此，我们证明所有Killing旋量形式双线性量都满足一个广义共形 Killing-Yano 方程，其中的联络为TCFH联络。我们还探讨了TCFH的一些性质，包括一般背景下最小TCFH联络的约化全纯群。此外，我们研究了TCFH与在IIA反德西特背景中传播的探针的隐藏对称性之间的相互作用。我们发现，某类IIA相交膜构型的近视界几何中的一些Killing旋量形式双线性量是Killing-Yano 形式，因此能为自旋粒子探针产生隐藏对称性。

1 引言

近期，文献 [1]，在更早期工作的基础上，文献 [2]，证明了，任意超引力理论（可能包含高曲率修正）的引力微子 Killing 旋量方程（KSE）对（Killing 旋量）形式双线性量所施加的条件，都可以组织成一个TCFH。这意味着存在一个联络 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$，它依赖于该理论的通量，$\mathcal{F}$，使得

$$\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_X \Omega = i_X \mathcal{P} + X \wedge \mathcal{Q} \ , \tag{1.1}$$

对于时空上的任意向量场 X，其中 Ω 由形式双线性量张成，而 $\mathcal{P}$ 和$\mathcal{Q}$ 是依赖于 Ω 和 $\mathcal{F}$的多形式。TCFH联络 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 可能不保持形式的阶数。式（1.1）的一个结果是，Ω 满足共形 Killing–Yano（CKY）方程的推广形式[1]，其中所涉及的联络为 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$。Killing–Yano（KY）形式在若干黑洞时空测地线流的可积性中发挥了关键作用，这一研究始于 [3, 4, 5]，中的克尔黑洞；此外，它们对于弯曲背景上的其他经典场方程也具有重要意义；部分相关文献见[6, 7, 8, 9, 10, 11]，综述见 [12, 13]。关于 CKY、KY 和 CCKY形式的其他应用，例如可参见 [14, 15, 16, 17, 18]。此外，文献[19] 已证明，在配备 KY形式的背景上传播的自旋粒子探针 [20] 具有由该形式生成的（隐藏）对称性。这提示我们，作为 TCFH 的结果，超对称背景的形式双线性量可能与某些探针的（隐藏）对称性相关，而这些探针的作用量可能包含与超引力场相关的耦合。因此，TCFH 与探针守恒定律之间可能存在相互作用。

关于一般超对称背景下 11 维、IIA 和 IIB 超引力的 TCFH 构造，可参见 [21, 22]。在一些低维超引力理论中也得到了类似结果 [23]。在所有这些情形中，研究均表明，存在这样的超对称背景：其形式双线性能够为恰当选取的探针作用量生成对称性；也就是说，探针作用量的不变性条件与形式双线性所对应的 TCFH 条件相吻合。此外，[24, 25] 给出了所有 11 维和 IIB 反德西特背景的 TCFH。对于反德西特背景，也有研究考察了 TCFH 与探针不变性条件之间的关系，并得到了类似结果。

本文旨在给出（有质量）IIA 超引力所有翘曲反德西特背景内部空间上的 TCFH [26]。此外，本文还探讨了其中的一些性质，包括一般超对称背景下极小联络的约化全纯群。接下来，我们考察某些形式双线性是否会为在此类背景中传播的自旋粒子生成对称性。研究表明，对于一类利用拟设构造的反德西特背景，这一结论成立；这些拟设包括某些 IIA 相交膜构型的近视界几何。本文由此完成了 10 维和 11 维 II 型超引力所有反德西特背景的 TCFH 构造。

本文安排如下。第 2、3 和 4 节介绍翘曲 IIA 反德西特$_k$, $k = 2$、3、4 背景的 TCFH，并研究 TCFH 联络的一些性质，例如其整体性。第 5 节给出翘曲 IIA 反德西特$_k$, $k = 5$、6、7 背景的 TCFH。第 6 节展示一些具体示例，其中 TCFH 为在反德西特$_2$ 和反德西特$_3$ 背景的内部空间中传播的自旋粒子生成对称性；第 7 节则给出结论。

[1]标准的共形 Killing–Yano 方程写作 $\nabla_X \omega = i_X d\omega - \frac{1}{n-k+1} X \wedge \delta\omega$，其中 ∇ 是 Levi-Civita 联络，ω 是一个 k-形式。若 ω 是余闭的，即 $\delta\omega = 0$，则 ω 是一个 Killing–Yano 形式。若 ω 是闭的，即 $d\omega = 0$，则 ω 是一个闭共形 Killing–Yano（CCKY）形式。Killing–Yano 形式的 Hodge 对偶是 CCKY 形式，反之亦然。

2 扭曲反德西特$_2$ 背景的 TCFH

下文构造大质量 IIA 超引力所有翘曲反德西特背景内部空间上的 TCFH 时，将采用基于该理论 Killing 自旋子方程解的方法，相关解见 [27, 28]。在这些工作中，研究者在不对 Killing 自旋子的形式作任何额外假设的情况下，对翘曲反德西特背景的 AdS 子空间上的该理论 Killing 自旋子方程进行了积分，随后确定了反德西特背景内部空间上其余独立的 Killing 自旋子方程。该理论的场方程也采用了类似的处理过程。这种方法的主要优点在于无需作出额外假设，例如假设 Killing 自旋子具有某种特定的因子分解，因此具有普遍性。有关求解翘曲反德西特背景 Killing 自旋子方程的不同方法，参见 [29]。

2.1 场与Killing自旋子

令 Φ 为膨胀子， G、 H、 F 分别为（大质量）IIA 超引力的 4-、3- 和 2-形式场强。具有内部空间 M^8 的扭曲反德西特$_2$ 背景 AdS$_2 \times_w M^8$ 的玻色场可表示如下

$$\begin{aligned} &g = 2\,\mathbf{e}^+\mathbf{e}^- + g(M^8)\,, \quad G = \mathbf{e}^+\wedge\mathbf{e}^-\wedge X + Y\,, \quad H = \mathbf{e}^+\wedge\mathbf{e}^-\wedge W + Z\,,\\ &F = N\,\mathbf{e}^+\wedge\mathbf{e}^- + P\,, \qquad S = me^{\Phi}\,, \qquad \Phi = \Phi\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中，膨胀子场 $\Phi \in C^\infty(M^8)$， $g(M^8)$ 是内部空间 M^8 上的度量，且 $N \in C^\infty(M^8)$、 $W \in \Omega^1(M^8)$、 X、 $P \in \Omega^2(M^8)$ 和 $Z \in \Omega^3(M^8)$。此外， m 是一个常数，在大质量 IIA 中非零，在标准 IIA 超引力中为零。我们还引入了伪正交（余）标架

$$\mathbf{e}^+ = du\,, \quad \mathbf{e}^- = dr - 2rA^{-1}dA - \frac{1}{2}r^2\ell^{-2}A^{-2}du\,, \quad \mathbf{e}^i = e^i{}_J dy^J\,, \tag{2.2}$$

在反德西特$_2 \times_w M^8$上，其中 $A \in C^\infty(M^8)$ 是翘曲因子，$\mathbf{e}^i$是 M^8上的正交归一标架，仅依赖于 M^8的坐标 y， $g(M^8) = \delta_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$，而 ℓ是反德西特$_2$的半径。此外，(u, r) 是时空的其余坐标。经过坐标变换后，可以看出时空度规 g 可写成标准扭曲形式 $g = A^2 g_\ell(AdS_2) + g(M^8)$，其中 $g_\ell(AdS_2)$ 是半径为 ℓ的反德西特$_2$ 上的标准度规。

大质量 IIA 超引力在翘曲反德西特$_2$ 背景下的Killing自旋子方程，已在文献[27, 28]中沿(u, r)坐标积分。在这种情况下，Killing 自旋子可表示为$\epsilon = \epsilon(u, r, \eta_\pm)$，其中 $\eta_\pm$是仅依赖于 M^8坐标的自旋子，并满足$\Gamma_\pm\eta_\pm = 0$；其中伽马矩阵$(\Gamma_+, \Gamma_-, \Gamma_i)$取自标架(2.2)。 ϵ 关于 u、 r 和 $\eta_\pm$的精确表达式可见文献[28], ，但对下文并不重要，因此此处不予列出。此外，引力微子KSE沿 M^8 对 $\eta_\pm$ 施加的条件为

$$\mathcal{D}^{(\pm)}_m\eta_\pm = 0\,, \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\pm)}_m\eta_\pm = \nabla_m\eta_\pm \pm\frac{1}{2}A^{-1}\partial_m A\,\eta_\pm \mp \frac{1}{16}\not{X}\Gamma_m\eta_\pm + \frac{1}{8\cdot 4!}\not{Y}\Gamma_m\eta_\pm + \frac{1}{8}S\Gamma_m\eta_\pm\\ + \Gamma_{11}\left(\mp\frac{1}{4}W_m\eta_\pm + \frac{1}{8}\not{Z}_m\eta_\pm \pm \frac{1}{8}N\Gamma_m\eta_\pm - \frac{1}{16}\not{P}\Gamma_m\eta_\pm\right)\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

是超协变联络[2]，作用于 M^8、 $m = 1$、……、8，而 ∇ 是与度量 $g(M^8)$ 相应的自旋联络。这些显然是关于 $\eta_\pm$的平行输运方程。Killing 自旋子

[2]我们采用 [27, 28] 中的约定。特别地，如果 α 是 M^8 上的 k 形式，那么 $\not{\alpha} = \alpha_{j_1\ldots j_k}\Gamma^{j_i\ldots j_k}$ 和 $\not{\alpha}_i = \alpha_{ij_1\ldots j_{k-1}}\Gamma^{j_i\ldots j_{k-1}}$。

$\eta_\pm$ 还满足其他条件 [28] 这些条件源自大质量 IIA 超引力的膨胀子KSE。不过，下面讨论 TCFH 时并不需要这些附加条件，因此这里不作描述。但稍后讨论示例时会用到这些条件，并会在那里概述其中的一些方面。

2.2 M^8上的 TCFH

已有研究表明 [1] ，任何超引力理论的引力微子KSE 对 Killing旋量双线性施加的条件都可以组织成一个 TCFH。在此我们将关注由满足 KSE（2.3）的 Killing 自旋子 $\eta_\pm$构造的 M^8 上的形式双线性所对应的 TCFH。给定两个这样的 Killing 自旋子 $\eta^r_\pm$ 和 $\eta^s_\pm$，可以定义 k-形式双线性量

$$\phi^{rs}_\pm = \frac{1}{k!}\left\langle \eta^r_\pm, \Gamma_{i_1\dots i_k}\eta^s_\pm\right\rangle \mathbf{e}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}^{i_k}\ , \qquad \tilde{\phi}^{rs}_\pm = \frac{1}{k!}\left\langle \eta^r_\pm, \Gamma_{i_1\dots i_k}\Gamma_{11}\eta^s_\pm\right\rangle \mathbf{e}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}^{i_k}\ , \tag{2.5}$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示定义在 M^8 上的旋量不变内积；对于该内积，类空伽马矩阵是厄米的，而类时伽马矩阵是反厄米的。

由于 $\eta_\pm$的实条件（该条件源自 IIA Killing旋量的实条件），形式双线性在交换 η^r 和 η^s 时，要么是对称的，要么是反对称的。在形式双线性[3] 的空间中，在 Hodge 对偶性[4], 意义下取独立者，在交换 Killing 自旋子时为对称的一组基为

$$\begin{gathered} f^{rs}_\pm = \left\langle \eta^r_\pm, \eta^s_\pm\right\rangle, \quad \tilde{f}^{rs}_\pm = \left\langle \eta^r_\pm, \Gamma_{11}\eta^s_\pm\right\rangle, \quad k^{rs}_\pm = \left\langle \eta^r_\pm, \Gamma_i\eta^s_\pm\right\rangle \mathbf{e}^i\ , \\ \tilde{\pi}^{rs}_\pm = \frac{1}{3!}\left\langle \eta^r_\pm, \Gamma_{ijk}\Gamma_{11}\eta^s_\pm\right\rangle \mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j\wedge\mathbf{e}^k, \quad \zeta^{rs}_\pm = \frac{1}{4!}\left\langle \eta^r_\pm, \Gamma_{i_1\dots i_4}\eta^s_\pm\right\rangle \mathbf{e}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}^{i_4}\ . \end{gathered} \tag{2.6}$$

为求得与上述形式双线性相关联的 TCFH，注意到

$$\nabla_m \phi_\pm{}^{rs}_{i_1\dots i_k} = \left\langle \nabla_m\eta^r_\pm, \Gamma_{i_1\dots i_k}\eta^s_\pm\right\rangle + \left\langle \eta^r_\pm, \Gamma_{i_1\dots i_k}\nabla_m\eta^s_\pm\right\rangle\ , \tag{2.7}$$

$\tilde{}$，类似地，对于 $\phi_\pm{}^{rs}$。接着利用 Killing自旋子方程（2.3），可以将上述方程右端的自旋子导数替换为由该理论的通量构造的克利福德代数元素。经过大量克利福德代数计算，可以证明右端始终能够整理成一个 TCFH。

特别是，形式双线性量的 TCFH（2.6）相对于极小联络[5]$\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m f_\pm :=& \nabla_m f_\pm \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, f_\pm \mp \frac{1}{4}X_{mp}k_\pm{}^p \pm \frac{1}{4!}{}^\star Y_{mpqr}\tilde{\pi}_\pm{}^{pqr} \\ & - \frac{1}{4}Sk_{\pm m} \pm \frac{1}{2}W_m\tilde{f}_\pm - \frac{1}{8}P_{pq}\tilde{\pi}_\pm{}^{pq}{}_m\ , \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{f}_\pm :=& \nabla_m \tilde{f}_\pm \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{f}_\pm \mp \frac{1}{8}X_{pq}\tilde{\pi}_\pm{}^{pq}{}_m - \frac{1}{4!}Y_{mpqr}\tilde{\pi}_\pm{}^{pqr} \\ & \pm \frac{1}{2}W_m f_\pm \mp \frac{1}{4}Nk_{\pm m} - \frac{1}{4}P_{mp}k_\pm{}^p\ , \end{aligned} \tag{2.9}$$

[3]注意，由 η_+ 和 η_- 自旋子构造的形式双线性均为零。[4]我们的霍奇对偶约定为 ${}^\star\omega_{m_1\dots m_{n-p}} = \frac{1}{p!}\omega_{q_1\dots q_p}\epsilon^{q_1\dots q_p}{}_{m_1\dots m_{n-p}}$，其中 ω 是一个 p 形式，定义在一个定向选为 $\epsilon_{12\dots n}=1$ 的 n 维黎曼流形 M^n 上。[5]定义见 [1] 。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m k_{\pm i} :=& \nabla_m k_{\pm i} + \frac{1}{12} Y_{mpqr} \zeta_{\pm}{}^{pqr}{}_i + \frac{1}{4} Z_{mpq} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_i \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, k_{\pm i} \mp \frac{1}{8} X_{pq} \zeta_{\pm}{}^{pq}{}_{mi} \mp \frac{1}{4} X_{mi} f_{\pm} - \frac{1}{4 \cdot 4!} \delta_{mi} Y_{p_1 \ldots p_4} \zeta_{\pm}{}^{p_1 \ldots p_4} \\
&+ \frac{1}{12} Y_{[m|pqr|} \zeta_{\pm}{}^{pqr}{}_{i]} - \frac{1}{4} \delta_{mi} S f_{\pm} \pm \frac{1}{4} \delta_{mi} N \tilde{f}_{\pm} \mp \frac{1}{4 \cdot 4!} {}^{\star} P_{mip_1 \ldots p_4} \zeta_{\pm}{}^{p_1 \ldots p_4} \\
&+ \frac{1}{4} P_{mi} \tilde{f}_{\pm} \ ,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{\pi}_{\pm ijk} :=& \nabla_m \tilde{\pi}_{\pm ijk} + \frac{1}{4} {}^{\star} X_{m[ij|pqr|} \zeta_{\pm}{}^{pqr}{}_{k]} \pm \frac{3}{4} {}^{\star} Y_{m[i|pq|} \zeta_{\pm}{}^{pq}{}_{jk]} \pm \frac{3}{4} {}^{\star} Z_{m[ij|pq|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{k]} \\
&- \frac{3}{2} Z_{m[ij} k_{\pm k]} - \frac{1}{2} P_{mp} \zeta_{\pm}{}^{p}{}_{ijk} \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \tilde{\pi}_{\pm ijk} \pm \frac{3}{4} \delta_{m[i} X_{jk]} \tilde{f}_{\pm} - \frac{1}{32} \delta_{m[i} {}^{\star} X_{jk]p_1 \ldots p_4} \zeta_{\pm}{}^{p_1 \ldots p_4} \\
&+ \frac{1}{6} {}^{\star} X_{[mij|pqr|} \zeta_{\pm}{}^{pqr}{}_{k]} \pm \frac{1}{4} {}^{\star} Y_{mijk} f_{\pm} + \frac{1}{4} Y_{mijk} \tilde{f}_{\pm} \pm \frac{1}{4} \delta_{m[i} {}^{\star} Y_{j|pqr|} \zeta_{\pm}{}^{pqr}{}_{k]} \\
&\pm \frac{3}{4} {}^{\star} Y_{[mi|pq|} \zeta_{\pm}{}^{pq}{}_{jk]} \pm \frac{1}{4 \cdot 4!} {}^{\star} S_{mijkp_1 \ldots p_4} \zeta_{\pm}{}^{p_1 \ldots p_4} \pm \frac{1}{4} \delta_{m[i} {}^{\star} Z_{jk]pqr} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pqr} \\
&\pm {}^{\star} Z_{[mij|pqr|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{k]} \pm \frac{1}{4} N \zeta_{\pm mijk} + \frac{3}{8} \delta_{m[i|} P_{pq|} \zeta_{\pm}{}^{pq}{}_{jk]} - P_{[m|p|} \zeta_{\pm}{}^{p}{}_{ijk]} \\
&- \frac{3}{4} \delta_{m[i} P_{jk]} f_{\pm} \ ,
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \zeta_{\pm i_1 \ldots i_4} :=& \nabla_m \zeta_{\pm i_1 \ldots i_4} - {}^{\star} X_{m[i_1 i_2 i_3 |pq|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{i_4]} - 2 Y_{m[i_1 i_2 i_3} k_{\pm i_4]} \pm 3 {}^{\star} Y_{m[i_1 i_2 |p|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{i_3 i_4]} \\
&+ \frac{1}{2 \cdot 4!} W_m \epsilon_{i_1 \ldots i_4}{}^{j_1 \ldots j_4} \zeta_{\pm j_1 \ldots j_4} \pm \frac{3}{2} {}^{\star} Z_{m[i_1 i_2 |pq|} \zeta_{\pm}{}^{pq}{}_{i_3 i_4]} + 2 P_{m[i_1} \tilde{\pi}_{\pm i_2 i_3 i_4]} \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \zeta_{\pm i_1 \ldots i_4} \pm 3 \delta_{m[i_1} X_{i_2 i_3} k_{\pm i_4]} - \frac{1}{6} \delta_{m[i_1} {}^{\star} X_{i_2 i_3 i_4] pqr} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pqr} \\
&- \frac{5}{8} {}^{\star} X_{[mi_1 i_2 i_3 |pq|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{i_4]} - \delta_{m[i_1} Y_{i_2 i_3 i_4] p} k_{\pm}{}^{p} - \frac{5}{4} Y_{[mi_1 i_2 i_3} k_{\pm i_4]} \\
&\pm \frac{5}{2} {}^{\star} Y_{[mi_1 i_2 |p|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{i_3 i_4]} \mp \frac{3}{2} \delta_{m[i_1} {}^{\star} Y_{i_2 i_3 |pq|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{i_4]} \pm \frac{1}{24} {}^{\star} S_{mi_1 \ldots i_4 pqr} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pqr} \\
&\pm \delta_{m[i_1} {}^{\star} Z_{i_2 i_3 |pqr|} \zeta_{\pm}{}^{pqr}{}_{i_4]} \pm \frac{5}{2} {}^{\star} Z_{[mi_1 i_2 |pq|} \zeta_{\pm}{}^{pq}{}_{i_3 i_4]} \mp N \delta_{m[i_1} \tilde{\pi}_{\pm i_2 i_3 i_4]} \\
&\mp \frac{1}{4} {}^{\star} P_{mi_1 \ldots i_4 p} k_{\pm}{}^{p} + 3 \delta_{m[i_1} P_{i_2 |p|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{i_3 i_4]} + \frac{5}{2} P_{[mi_1} \tilde{\pi}_{\pm i_2 i_3 i_4]} \ ,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

为简洁起见，我们省略了形式双线性量中用于标记不同 Killing 自旋子的 r， s 指标。显然，上述关于形式双线性量的条件具有（1.1）中 TCFH 的形式。

在 M^8 上形式双线性量空间中，除去霍奇对偶等价的情形后，在交换 η^r 和 η^s 时反对称的一组基如下：

$$
\begin{aligned}
\tilde{k}^{rs}_{\pm} &= \left\langle \eta^r_{\pm}, \Gamma_i \Gamma_{11} \eta^s_{\pm} \right\rangle \mathbf{e}^i \ , \quad \omega^{rs}_{\pm} = \frac{1}{2} \left\langle \eta^r_{\pm}, \Gamma_{ij} \eta^s_{\pm} \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \ , \\
\tilde{\omega}^{rs}_{\pm} &= \frac{1}{2} \left\langle \eta^r_{\pm}, \Gamma_{ij} \Gamma_{11} \eta^s_{\pm} \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \ , \quad \pi^{rs}_{\pm} = \frac{1}{3!} \left\langle \eta^r_{\pm}, \Gamma_{ijk} \eta^s_{\pm} \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \wedge \mathbf{e}^k \ .
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

关于极小联络 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 的关联 TCFH 为:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\tilde{k}_{\pm i} :=&\nabla_m\tilde{k}_{\pm i} \pm \frac{1}{2}X_{mp}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{i} + \frac{1}{4}Z_{mpq}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{i} - \frac{1}{2}P_{mp}\omega_{\pm}{}^{p}{}_{i}\\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\,\tilde{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{8}\delta_{mi}X_{pq}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{pq} \pm \frac{1}{2}X_{[m|p|}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{i]}\\ &\mp \frac{1}{8}{}^{\star}Y_{mipq}\omega_{\pm}{}^{pq} - \frac{1}{8}Y_{mipq}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{pq} - \frac{1}{4}S\tilde{\omega}_{\pm mi}\\ &\pm \frac{1}{4}N\omega_{\pm mi} + \frac{1}{8}\delta_{mi}P_{pq}\omega_{\pm}{}^{pq} - \frac{1}{2}P_{[m|p|}\omega_{\pm}{}^{p}{}_{i]}\ ,\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\omega_{\pm ij} :=&\nabla_m\omega_{\pm ij} \pm \frac{1}{2}X_{mp}\pi_{\pm}{}^{p}{}_{ij} + \frac{1}{2}Y_{m[i|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{j]} \mp \frac{1}{2}W_m\tilde{\omega}_{\pm ij}\\ &+ Z_{m[i|p|}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{j]} + P_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]}\\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\,\omega_{\pm ij} \mp \frac{1}{4}\delta_{m[i}X_{|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{j]} \pm \frac{3}{4}X_{[m|p|}\pi_{\pm}{}^{p}{}_{ij]}\\ &\mp \frac{1}{4}{}^{\star}Y_{mijp}\tilde{k}_{\pm}{}^{p} + \frac{1}{12}\delta_{m[i}Y_{j]pqr}\pi_{\pm}{}^{pqr} + \frac{3}{8}Y_{[mi|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{j]}\\ &- \frac{1}{4}S\pi_{\pm mij} \mp \frac{1}{2}N\delta_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]} \pm \frac{1}{4!}{}^{\star}P_{mijpqr}\pi_{\pm}{}^{pqr}\\ &+ \frac{1}{2}\delta_{m[i}P_{j]p}\tilde{k}_{\pm}{}^{p} + \frac{3}{4}P_{[mi}\tilde{k}_{\pm j]}\ ,\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\tilde{\omega}_{\pm ij} :=&\nabla_m\tilde{\omega}_{\pm ij} \pm X_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]} \mp \frac{1}{2}{}^{\star}Y_{m[i|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{j]} \mp \frac{1}{2}W_m\omega_{\pm ij}\\ &+ Z_{m[i|p|}\omega_{\pm}{}^{p}{}_{j]} + \frac{1}{2}P_{mp}\pi_{\pm}{}^{p}{}_{ij}\\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\,\tilde{\omega}_{\pm ij} + \frac{1}{4!}{}^{\star}X_{mijpqr}\pi_{\pm}{}^{pqr} \pm \frac{1}{2}\delta_{m[i}X_{j]p}\tilde{k}_{\pm}{}^{p} \pm \frac{3}{4}X_{[mi}\tilde{k}_{\pm j]}\\ &\mp \frac{1}{12}\delta_{m[i}{}^{\star}Y_{j]pqr}\pi_{\pm}{}^{pqr} \mp \frac{3}{8}{}^{\star}Y_{[mi|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{j]} + \frac{1}{4}Y_{mijp}\tilde{k}_{\pm}{}^{p}\\ &- \frac{1}{2}S\delta_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]} \mp \frac{1}{4}N\pi_{\pm mij} - \frac{1}{4}\delta_{m[i}P_{|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{j]} + \frac{3}{4}P_{[m|p|}\pi_{\pm}{}^{p}{}_{ij]}\ ,\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\pi_{\pm ijk} :=&\nabla_m\pi_{\pm ijk} \pm \frac{3}{2}X_{m[i}\omega_{\pm jk]} - \frac{3}{2}Y_{m[ij|p|}\omega_{\pm}{}^{p}{}_{k]} \mp \frac{3}{2}{}^{\star}Y_{m[ij|p|}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{k]}\\ &\pm \frac{3}{4}{}^{\star}Z_{m[ij|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{k]} - \frac{3}{2}Z_{m[ij}\tilde{k}_{\pm k]} - \frac{3}{2}P_{m[i}\tilde{\omega}_{\pm jk]}\\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\,\pi_{\pm ijk} - \frac{1}{8}{}^{\star}X_{mijkpq}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{pq} \pm \frac{3}{2}\delta_{m[i}X_{j|p|}\omega_{\pm}{}^{p}{}_{k]} \pm \frac{3}{2}X_{[mi}\omega_{\pm jk]}\\ &+ \frac{3}{8}\delta_{m[i}Y_{jk]pq}\omega_{\pm}{}^{pq} - Y_{[mij|p|}\omega_{\pm}{}^{p}{}_{k]} \pm \frac{3}{8}\delta_{m[i}{}^{\star}Y_{jk]pq}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{pq} \mp {}^{\star}Y_{[mij|p|}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{k]}\\ &- \frac{3}{4}S\delta_{m[i}\omega_{\pm jk]} \pm \frac{1}{4}\delta_{m[i}{}^{\star}Z_{jk]pqr}\pi_{\pm}{}^{pqr} \pm {}^{\star}Z_{[mij|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{k]} \pm \frac{3}{4}N\delta_{m[i}\tilde{\omega}_{\pm jk]}\\ &\pm \frac{1}{8}{}^{\star}P_{mijkpq}\omega_{\pm}{}^{pq} - \frac{3}{2}\delta_{m[i}P_{j|p|}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{k]} - \frac{3}{2}P_{[mi}\tilde{\omega}_{\pm jk]}\ ,\end{aligned} \tag{2.17}$$

为简洁起见，我们省略了 r、s 形式双线性量上用于标记不同 Killing 自旋子的指标。同样，上述关于形式双线性量的条件已按照式（1.1）中的 TCFH 进行了组织。

如上文分析所示，最小张量协变形式层次结构联络的定义域 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$可识别为 $\Omega^*(M^8)$。它由 ϕ 以及 $\tilde{\phi}$ 形式双线性量的 Hodge 对偶张成[6]。

[6]注意，ζ 和 $\tilde{\zeta}$ 是 Hodge 对偶，因此只选择 ζ 作为基中的元素。

该定义域可分解为对称形式双线性量空间（2.6）和反对称形式双线性量空间（2.13）。这可以这样理解：自旋子 $\eta_\pm$ 可视为 Majorana $\mathfrak{spin}(8)$ 自旋子。两个 Majorana $\mathfrak{spin}(8)$ 表示的乘积 Δ_{16} 可分解为

$$\otimes^2\Delta_{16} = \Lambda^*(\mathbb{R}^8)\ , \tag{2.18}$$

因此，形式双线性量张成了 M^8 上的所有形式空间，其中 $\oplus_{k=0}^4\Lambda^k(\mathbb{R}^8)$ 与 ϕ 形式双线性量张成的空间相关，而 $\oplus_{k=5}^8\Lambda^k(\mathbb{R}^8)$ 则与 $\tilde{\phi}$ 形式双线性量的 Hodge 对偶所张成的空间相关。事实上，我们注意到 $\dim(\otimes^2\Delta_{16}) = 2^4\cdot 2^4 = \dim(\Lambda^*(\mathbb{R}^8))$。因此，$\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 作用于 M^8 上的所有形式空间。然而，我们看到，最小 TCFH 联络分别保持关于两个 Killing 自旋子交换对称和反对称的形式双线性量子空间，即它保持 $\otimes^2\Delta_{16}$ 的对称化 $S^2(\Delta_{16})$ 子空间和反对称化 $\Lambda^2(\Delta_{16})$ 子空间。因此，$\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 的约化整体性将包含于 $GL(136)\times GL(120)$ 的连通分支[7] 内。然而，最小 TCFH 联络的约化整体性进一步约化为 $GL(134)\times GL(120)$，因为它以偏导数作用于标量 f 和 f，因此它们对整体性的贡献为平凡。

3 翘曲反德西特$_3$ 背景的 TCFH

3.1 场与Killing自旋子

大质量 IIA 超引力中，内部空间为 M^7 的翘曲反德西特$_3$背景的玻色场 $AdS_3\times_w M^7$ 可表示为

$$\begin{aligned} &g = 2\,\mathbf{e}^+\mathbf{e}^- + (\mathbf{e}^z)^2 + g(M^7)\ ,\quad G = \mathbf{e}^+\wedge\mathbf{e}^-\wedge\mathbf{e}^z\wedge X + Y\ ,\\ &H = W\,\mathbf{e}^+\wedge\mathbf{e}^-\wedge\mathbf{e}^z + Z\ ,\quad F = F\ ,\quad S = me^{\Phi}\ ,\quad \Phi = \Phi\ , \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，m 为常数，$g(M^7)$ 是 M^7 上的度量，Φ、$W\in C^\infty(M^7)$、$X\in\Omega^1(M^7)$、$F\in\Omega^2(M^7)$、$Z\in\Omega^3(M^7)$ 和 $Y\in\Omega^4(M^7)$。注意，Bianchi 恒等式意味着 $S=0$ 或 $W=0$。此外，

$$\mathbf{e}^+ = du,\quad \mathbf{e}^- = dr - \frac{2}{\ell}rdz - 2rA^{-1}dA,\quad \mathbf{e}^z = Adz\ ,\quad \mathbf{e}^i = e^i{}_J dy^J\ , \tag{3.2}$$

是 $AdS_3\times_w M^7$ 上的伪正交标架，其中 $g(M^7) = \delta_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$，$y$ 是内部空间的坐标，而 (u,r,z) 是时空的其余坐标。经过坐标变换后，时空度规呈标准扭曲形式 $g = A^2 g_\ell(AdS_3) + g(M^7)$，翘曲因子为 A, $A\in C^\infty(M^7)$，其中 $g_\ell(AdS_3)$ 是半径为 ℓ 的反德西特$_3$ 标准度规。

与前一种情形一样，翘曲反德西特$_3$ 背景的Killing自旋子方程可以沿坐标（u、r、z）积分，见 [28]。Killing 自旋子可以示意性地写为 $\epsilon = \epsilon(u,r,z,\sigma_\pm,\tau_\pm)$，其中自旋子 $\sigma_\pm$ 和 $\tau_\pm$ 仅依赖于 M^7 的坐标，并满足 $\Gamma_\pm\sigma_\pm = \Gamma_\pm\tau_\pm = 0$。此外，引力微子KSE意味着 $\mathcal{D}_m^{(\pm)}\chi_\pm = 0$，其中

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m^{(\pm)} = \nabla_m \pm\frac{1}{2}A^{-1}\partial_m A + \frac{1}{8}\not{Z}_m\Gamma_{11} + \frac{1}{8}S\Gamma_m\\ + \frac{1}{16}\not{F}\Gamma_m\Gamma_{11} + \frac{1}{192}\not{Y}\Gamma_m \pm\frac{1}{8}\not{X}\Gamma_{zm}\ , \end{aligned} \tag{3.3}$$

是沿内部空间的超协变导数 M^7, $m=1,\ldots,7$，∇ 是与度量 $g(M^7)$相关联的自旋联络，而 $\chi_\pm$ 表示 $\sigma_\pm$ 或 $\tau_\pm$。

[7]按照定义，联络的约化全纯群是连通的。因此，从现在起，在约化全纯群的语境下提及某个群时，即使未明确说明，我们也只考虑它的连通分支。

Killing 自旋子 $\chi_\pm$ 除了满足引力微子KSE外，还满足两个代数KSE [28] 沿着M^7。其中一个由大质量 IIA 超引力的膨胀子KSE导出。另一个则是在对大质量 IIA 超引力的引力微子KSE 沿 z 时空坐标积分时产生的。由于这些内容并非描述 M^7上的 TCFH 所必需，因此我们不在此赘述。不过，为了在下文的例子中正确计算 Killing 自旋子的数量，这些条件是必不可少的；必要时我们会简要提及。

对于翘曲反德西特$_3$ 背景， $\sigma_\pm$ 和 $\tau_\pm$ 自旋子彼此独立，即不存在先验的克利福德代数运算能够将Killing自旋子方程的 $\sigma_\pm$ 解与 $\tau_\pm$ 解联系起来。由此产生的一个著名结果是，翘曲反德西特$_3$ 背景的对称超代数分解为彼此对易的左扇区和右扇区。正如我们稍后将提到的，对于翘曲反德西特$_k$、 $k>3$背景，情况不再如此，因为 $\sigma_\pm$ 和 $\tau_\pm$ Killing 自旋子之间可以通过克利福德代数运算建立联系。

3.2 M7上的TCFH

给定Killing 自旋子 $\chi^r_\pm$ 和 $\chi^s_\pm$，可以按照反德西特 M^7 背景中（2.5）的方式构造$_2$上的形式双线性，其中将 $\eta_\pm$ 替换为 $\chi_\pm$。不过，两者存在差异。其一，现在$\mathbf{e}^i$是 M^7上的正交归一标架，而非 M^8，这与反德西特$_2$背景中的情况相同。其二，除了 Γ_{11} 形式双线性中的伽马矩阵 Γ_z 之外，还可以插入 $\chi_\pm$。同样，$\chi^r_\pm$ 上的实条件意味着，交换$\chi^s_\pm$和 $\chi_\pm$ 时，形式双线性要么对称，要么反对称。

在 M^7 上的形式双线性空间中，交换 Killing 自旋子 $\chi^r_\pm$ 和 $\chi^s_\pm$ 时保持对称的一个基（忽略霍奇对偶）为 [8]

$$\begin{aligned}
f^{rs}_\pm &= \langle \chi^r_\pm, \chi^s_\pm\rangle, \quad \tilde{f}^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_{11}\chi^s_\pm\rangle, \quad \hat{f}^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_z\chi^s_\pm\rangle,\\
k^{rs}_\pm &= \langle \chi^r_\pm, \Gamma_i\chi^s_\pm\rangle\, \mathbf{e}^i, \quad \mathring{\omega}^{rs}_\pm = \frac{1}{2}\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ijz}\Gamma_{11}\chi^s_\pm\rangle\, \mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j,\\
\tilde{\pi}^{rs}_\pm &= \frac{1}{3!}\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ijk}\Gamma_{11}\chi^s_\pm\rangle\, \mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j\wedge\mathbf{e}^k, \quad \hat{\pi}^{rs}_\pm = \frac{1}{3!}\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ijkz}\chi^s_\pm\rangle\, \mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j\wedge\mathbf{e}^k,\\
\mathring{\pi}^{rs}_\pm &= \frac{1}{3!}\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ijkz}\Gamma_{11}\chi^s_\pm\rangle\, \mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j\wedge\mathbf{e}^k\ .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

TCFH 的计算遵循第 2.2 节所述的步骤。特别地，用极小联络 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 表示的 TCFH 为

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m f_\pm :=& \nabla_m f_\pm\\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, f_\pm - \frac{1}{4}Sk_{\pm m} - \frac{1}{8}F_{pq}\tilde{\pi}_\pm{}^{pq}{}_m \pm \frac{1}{8}{}^\star Y_{mpq}\mathring{\omega}_\pm{}^{pq} \pm \frac{1}{4}X_m\hat{f}_\pm\ ,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{f}_\pm :=& \nabla_m \tilde{f}_\pm\\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{f}_\pm - \frac{1}{4}F_{mp}k_\pm{}^p - \frac{1}{4!}Y_{mpqr}\tilde{\pi}_\pm{}^{pqr} \mp \frac{1}{4}X_p\mathring{\omega}_\pm{}^p{}_m\ ,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{f}_\pm :=& \nabla_m \hat{f}_\pm\\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \hat{f}_\pm - \frac{1}{4}Z_{mpq}\mathring{\omega}_\pm{}^{pq} + \frac{1}{8}F_{pq}\mathring{\pi}_\pm{}^{pq}{}_m - \frac{1}{4!}Y_{mpqr}\hat{\pi}_\pm{}^{pqr} \pm \frac{1}{4}X_m f_\pm\ ,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

[8]由以下成对自旋子构造的形式双线性所对应的 TCFH：（σ_+,τ_+）和（σ_+,σ_+）（以及（σ_-,τ_-）和（σ_-,σ_-））， 彼此相同，因为 3.3 中的超协变联络在 $\sigma_\pm$ 上与在 $\tau_\pm$ 上相同。因此，只需考虑由以下成对自旋子构造的形式双线性所对应的 TCFH：（σ_+, σ_+）和（σ_-,σ_-）。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m k_{\pm i} :=& \nabla_m k_{\pm i} + \frac{1}{4} Z_{mpq} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_i \mp \frac{1}{4} {}^{\star}Y_{mpq} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_i \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, k_{\pm i} - \frac{1}{4} \delta_{mi} S f_{\pm} \mp \frac{1}{4!} {}^{\star}F_{mipqr} \hat{\pi}_{\pm}{}^{pqr} + \frac{1}{4} F_{mi} \tilde{f}_{\pm} \\
& \mp \frac{1}{4!} \delta_{mi} {}^{\star}Y_{pqr} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{pqr} \mp \frac{1}{4} {}^{\star}Y_{[m|pq|} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{i]} \pm \frac{1}{4} X_p \hat{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{mi} \ ,
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{\omega}_{\pm ij} :=& \nabla_m \mathring{\omega}_{\pm ij} \mp \frac{1}{2} {}^{\star}Z_{m[i|pq|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{j]} - \frac{1}{2} F_{mp} \hat{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{ij} + \frac{1}{2} Y_{m[i|pq|} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{j]} \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \mathring{\omega}_{\pm ij} \mp \frac{1}{6} \delta_{m[i} {}^{\star}Z_{j]pqr} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pqr} \mp \frac{3}{4} {}^{\star}Z_{[mi|pq|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{j]} \\
& + \frac{1}{2} Z_{mij} \hat{f}_{\pm} - \frac{1}{4} S \mathring{\pi}_{\pm mij} + \frac{1}{4} \delta_{m[i|} F_{pq|} \hat{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{j]} \\
& - \frac{3}{4} F_{[m|p|} \hat{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{ij]} + \frac{1}{12} \delta_{m[i} Y_{j]pqr} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{pqr} + \frac{3}{8} Y_{[mi|pq|} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{j]} \\
& \pm \frac{1}{4} {}^{\star}Y_{mij} f_{\pm} + \frac{1}{4!} {}^{\star}X_{mijpqr} \hat{\pi}_{\pm}{}^{pqr} \mp \frac{1}{2} \delta_{m[i} X_{j]} \tilde{f}_{\pm} \ ,
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{\pi}_{\pm ijk} :=& \nabla_m \tilde{\pi}_{\pm ijk} \mp \frac{3}{2} {}^{\star}Z_{m[ij|p|} \mathring{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{k]} - \frac{3}{2} Z_{m[ij} k_{\pm k]} \pm \frac{3}{4} {}^{\star}F_{m[ij|pq|} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{k]} \\
& \pm \frac{3}{2} {}^{\star}Y_{m[i|p|} \hat{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{jk]} \pm \frac{1}{2} X_m \mathring{\pi}_{\pm ijk} \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \tilde{\pi}_{\pm ijk} \mp 2 \, {}^{\star}Z_{[mij|p|} \mathring{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{k]} \pm \frac{3}{4} \delta_{m[i} {}^{\star}Z_{jk]pq} \mathring{\omega}_{\pm}{}^{pq} \\
& \pm \frac{1}{4!} {}^{\star}S_{mijkpqr} \hat{\pi}_{\pm}{}^{pqr} \pm \frac{1}{8} \delta_{m[i} {}^{\star}F_{jk]pqr} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{pqr} \pm \frac{1}{2} {}^{\star}F_{[mij|pq|} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{k]} \\
& - \frac{3}{4} \delta_{m[i} F_{jk]} f_{\pm} \mp \frac{3}{4} \delta_{m[i} {}^{\star}Y_{j|pq|} \hat{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{k]} \pm \frac{3}{2} {}^{\star}Y_{[mi|p|} \hat{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{jk]} \\
& + \frac{1}{4} Y_{mijk} \tilde{f}_{\pm} \pm X_{[m} \mathring{\pi}_{\pm ijk]} \pm \frac{3}{4} \delta_{m[i|} X_{p|} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{jk]} \ ,
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{\pi}_{\pm ijk} :=& \nabla_m \hat{\pi}_{\pm ijk} + \frac{3}{2} Z_{m[i|p|} \mathring{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{jk]} + \frac{3}{2} F_{m[i} \mathring{\omega}_{\pm jk]} \mp \frac{3}{2} {}^{\star}Y_{m[i|p|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{jk]} \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \hat{\pi}_{\pm ijk} \mp \frac{1}{4!} {}^{\star}S_{mijkpqr} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pqr} \pm \frac{1}{4} {}^{\star}F_{mijkp} k_{\pm}{}^{p} \\
& + \frac{3}{2} F_{[mi} \mathring{\omega}_{\pm jk]} + \frac{3}{2} \delta_{m[i} F_{j|p|} \mathring{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{k]} \pm \frac{3}{4} \delta_{m[i} {}^{\star}Y_{j|pq|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{k]} \mp \frac{3}{2} {}^{\star}Y_{[mi|p|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{jk]} \\
& + \frac{1}{4} Y_{mijk} \hat{f}_{\pm} - \frac{1}{8} {}^{\star}X_{mijkpq} \mathring{\omega}_{\pm}{}^{pq} \pm \frac{3}{2} \delta_{m[i} X_j k_{\pm k]} \ ,
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{\pi}_{\pm ijk} :=& \nabla_m \mathring{\pi}_{\pm ijk} + \frac{3}{2} Z_{m[i|p|} \hat{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{jk]} \pm \frac{3}{4} {}^{\star}F_{m[ij|pq|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{k]} - \frac{3}{2} Y_{m[ij|p|} \mathring{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{k]} \\
& \mp \frac{3}{2} {}^{\star}Y_{m[ij} k_{\pm k]} \pm \frac{1}{2} X_m \tilde{\pi}_{\pm ijk} \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \mathring{\pi}_{\pm ijk} - \frac{3}{4} S \delta_{m[i} \mathring{\omega}_{\pm jk]} + \frac{3}{4} \delta_{m[i} F_{jk]} \hat{f}_{\pm} \pm \frac{1}{8} \delta_{m[i} {}^{\star}F_{jk]pqr} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pqr} \\
& \pm \frac{1}{2} {}^{\star}F_{[mij|pq|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{pq}{}_{k]} + \frac{3}{8} \delta_{m[i} Y_{jk]pq} \mathring{\omega}_{\pm}{}^{pq} - Y_{[mij|p|} \mathring{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{k]} \mp \frac{3}{4} \delta_{m[i} {}^{\star}Y_{jk]p} k_{\pm}{}^{p} \\
& \mp {}^{\star}Y_{[mij} k_{\pm k]} \pm X_{[m} \tilde{\pi}_{\pm ijk]} \pm \frac{3}{4} \delta_{m[i|} X_{p|} \tilde{\pi}_{\pm}{}^{p}{}_{jk]} \ ,
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

为简单起见，我们省略了形式双线性量上的 r,s 指标，这些指标用于标记不同的 Killing 自旋子。

类似地，在 $AdS_3\times_w M^7$ 的 Killing旋量双线性空间中，忽略霍奇对偶后，在交换 Killing 自旋子时呈反对称的一个基为

$$\begin{gathered}\mathring{f}^{rs}_{\pm}=\left\langle\chi^r_{\pm},\Gamma_z\Gamma_{11}\chi^s_{\pm}\right\rangle\ ,\quad \tilde{k}^{rs}_{\pm}=\left\langle\chi^r_{\pm},\Gamma_i\Gamma_{11}\chi^s_{\pm}\right\rangle\mathbf{e}^i,\quad \hat{k}^{rs}_{\pm}=\left\langle\chi^r_{\pm},\Gamma_{iz}\chi^s_{\pm}\right\rangle\mathbf{e}^i\ ,\\ \mathring{k}^{rs}_{\pm}=\left\langle\chi^r_{\pm},\Gamma_{iz}\Gamma_{11}\chi^s_{\pm}\right\rangle\mathbf{e}^i\ ,\quad \omega^{rs}_{\pm}=\frac{1}{2}\left\langle\chi^r_{\pm},\Gamma_{ij}\chi^s_{\pm}\right\rangle\mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j\ ,\\ \tilde{\omega}^{rs}_{\pm}=\frac{1}{2}\left\langle\chi^r_{\pm},\Gamma_{ij}\Gamma_{11}\chi^s_{\pm}\right\rangle\mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j\ ,\quad \hat{\omega}^{rs}_{\pm}=\frac{1}{2}\left\langle\chi^r_{\pm},\Gamma_{ijz}\chi^s_{\pm}\right\rangle\mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j\ ,\\ \pi^{rs}_{\pm}=\frac{1}{3!}\left\langle\chi^r_{\pm},\Gamma_{ijk}\chi^s_{\pm}\right\rangle\mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j\wedge\mathbf{e}^k\ .\end{gathered}\tag{3.13}$$

相对于极小联络 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$，与 M^7 相关的 TCFH 为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\mathring{f}_{\pm}:=&\nabla_m\mathring{f}_{\pm}\\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\,\mathring{f}_{\pm}-\frac{1}{4}Z_{mpq}\hat{\omega}_{\pm}{}^{pq}-\frac{1}{4}S\mathring{k}_{\pm m}\\ &+\frac{1}{4}F_{mp}\hat{k}_{\pm}{}^{p}\mp\frac{1}{8}{}^{\star}Y_{mpq}\omega_{\pm}{}^{pq}\mp\frac{1}{4}X_p\tilde{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{m}\ ,\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\tilde{k}_{\pm i}:=&\nabla_m\tilde{k}_{\pm i}-\frac{1}{2}F_{mp}\omega_{\pm}{}^{p}{}_{i}\pm\frac{1}{2}X_m\mathring{k}_{\pm i}\\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\,\tilde{k}_{\pm i}\ -\frac{1}{4}Z_{mpq}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{i}-\frac{1}{4}S\tilde{\omega}_{\pm mi}+\frac{1}{8}\delta_{mi}F_{pq}\omega_{\pm}{}^{pq}\\ &-\frac{1}{2}F_{[m|p|}\omega_{\pm}{}^{p}{}_{i]}\mp\frac{1}{4}{}^{\star}Y_{mip}\hat{k}_{\pm}{}^{p}-\frac{1}{8}Y_{mipq}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{pq}\pm\frac{1}{4}\delta_{mi}X_p\mathring{k}_{\pm}{}^{p}\\ &\pm\frac{1}{2}X_{[m}\mathring{k}_{\pm i]}\ ,\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\hat{k}_{\pm i}:=&\nabla_m\hat{k}_{\pm i}\\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\,\hat{k}_{\pm i}\ -\frac{1}{2}Z_{mip}\mathring{k}_{\pm}{}^{p}-\frac{1}{4}S\hat{\omega}_{\pm mi}\mp\frac{1}{4!}{}^{\star}F_{mipqr}\pi_{\pm}{}^{pqr}-\frac{1}{4}F_{mi}\mathring{f}_{\pm}\\ &\pm\frac{1}{4}{}^{\star}Y_{mip}\tilde{k}_{\pm}{}^{p}-\frac{1}{8}Y_{mipq}\hat{\omega}_{\pm}{}^{pq}\pm\frac{1}{4}X_p\pi_{\pm}{}^{p}{}_{mi}\ ,\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\mathring{k}_{\pm i}:=&\nabla_m\mathring{k}_{\pm i}+\frac{1}{2}F_{mp}\hat{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{i}\pm\frac{1}{4}{}^{\star}Y_{mpq}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{i}\pm\frac{1}{2}X_m\tilde{k}_{\pm i}\\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\,\mathring{k}_{\pm i}\ -\frac{1}{2}Z_{mip}\hat{k}_{\pm}{}^{p}-\frac{1}{4}S\delta_{mi}\mathring{f}_{\pm}-\frac{1}{8}\delta_{mi}F_{pq}\hat{\omega}_{\pm}{}^{pq}\\ &+\frac{1}{2}F_{[m|p|}\hat{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{i]}\pm\frac{1}{4!}\delta_{mi}{}^{\star}Y_{pqr}\pi_{\pm}{}^{pqr}\pm\frac{1}{4}{}^{\star}Y_{[m|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{i]}\\ &\pm\frac{1}{4}\delta_{mi}X_p\tilde{k}_{\pm}{}^{p}\pm\frac{1}{2}X_{[m}\tilde{k}_{\pm i]}\ ,\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\omega_{\pm ij}:=&\nabla_m\omega_{\pm ij}+Z_{m[i|p|}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{j]}+F_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]}+\frac{1}{2}Y_{m[i|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{j]}\mp\frac{1}{2}X_m\hat{\omega}_{\pm ij}\\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\,\omega_{\pm ij}\ -\frac{1}{4}S\pi_{\pm mij}\pm\frac{1}{8}{}^{\star}F_{mijpq}\hat{\omega}_{\pm}{}^{pq}\\ &+\frac{1}{2}\delta_{m[i}F_{j]p}\tilde{k}_{\pm}{}^{p}+\frac{3}{4}F_{[mi}\tilde{k}_{\pm j]}+\frac{1}{12}\delta_{m[i}Y_{j]pqr}\pi_{\pm}{}^{pqr}\\ &+\frac{3}{8}Y_{[mi|pq|}\pi_{\pm}{}^{pq}{}_{j]}\mp\frac{1}{4}{}^{\star}Y_{mij}\mathring{f}_{\pm}\mp\frac{1}{2}\delta_{m[i}X_{|p|}\hat{\omega}_{\pm}{}^{p}{}_{j]}\\ &\mp\frac{3}{4}X_{[m}\hat{\omega}_{\pm ij]}\ ,\end{aligned}\tag{3.18}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\tilde{\omega}_{\pm ij} :=& \nabla_m\tilde{\omega}_{\pm ij} + Z_{m[i|p|}{\omega_{\pm}}^{p}{}_{j]} + \frac{1}{2}F_{mp}{\pi_{\pm}}^{p}{}_{ij} \pm {}^{\star}Y_{m[i|p|}{\hat{\omega}_{\pm}}^{p}{}_{j]} \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\,\tilde{\omega}_{\pm ij} - \frac{1}{2}S\delta_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]} - \frac{1}{4}\delta_{m[i}F_{|pq|}{\pi_{\pm}}^{pq}{}_{j]} \\
&+ \frac{3}{4}F_{[m|p|}{\pi_{\pm}}^{p}{}_{ij]} \mp \frac{1}{4}\delta_{m[i}\,{}^{\star}Y_{j]pq}\hat{\omega}_{\pm}{}^{pq} \pm \frac{3}{4}\,{}^{\star}Y_{[mi|p|}{\hat{\omega}_{\pm}}^{p}{}_{j]} + \frac{1}{4}Y_{mijp}\tilde{k}_{\pm}{}^{p} \\
&- \frac{1}{4!}\,{}^{\star}X_{mijpqr}{\pi_{\pm}}^{pqr} \mp \frac{1}{2}\delta_{m[i}X_{j]}\mathring{f}_{\pm}\ ,
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\hat{\omega}_{\pm ij} :=& \nabla_m\hat{\omega}_{\pm ij} \mp \frac{1}{2}\,{}^{\star}Z_{m[i|pq|}{\pi_{\pm}}^{pq}{}_{j]} - F_{m[i}\mathring{k}_{\pm j]} \mp {}^{\star}Y_{m[i|p|}{\tilde{\omega}_{\pm}}^{p}{}_{j]} \mp \frac{1}{2}X_m\omega_{\pm ij} \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\,\hat{\omega}_{\pm ij} \mp \frac{1}{6}\delta_{m[i}\,{}^{\star}Z_{j]pqr}{\pi_{\pm}}^{pqr} \mp \frac{3}{4}\,{}^{\star}Z_{[mi|pq|}{\pi_{\pm}}^{pq}{}_{j]} \\
&+ \frac{1}{2}Z_{mij}\mathring{f}_{\pm} - \frac{1}{2}S\delta_{m[i}\hat{k}_{\pm j]} \pm \frac{1}{8}\,{}^{\star}F_{mijpq}\omega_{\pm}{}^{pq} - \frac{1}{2}\delta_{m[i}F_{j]p}\mathring{k}_{\pm}{}^{p} \\
&- \frac{3}{4}F_{[mi}\mathring{k}_{\pm j]} + \frac{1}{4}Y_{mijp}\hat{k}_{\pm}{}^{p} \pm \frac{1}{4}\delta_{m[i}\,{}^{\star}Y_{j]pq}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{pq} \mp \frac{3}{4}\,{}^{\star}Y_{[mi|p|}{\tilde{\omega}_{\pm}}^{p}{}_{j]} \\
&\mp \frac{1}{2}\delta_{m[i}X_{|p|}{\omega_{\pm}}^{p}{}_{j]} \mp \frac{3}{4}X_{[m}\omega_{\pm ij]}\ ,
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\pi_{\pm ijk} :=& \nabla_m\pi_{\pm ijk} \mp \frac{3}{2}\,{}^{\star}Z_{m[ij|p|}{\hat{\omega}_{\pm}}^{p}{}_{k]} - \frac{3}{2}Z_{m[ij}\tilde{k}_{\pm k]} - \frac{3}{2}F_{m[i}\tilde{\omega}_{\pm jk]} \\
&- \frac{3}{2}Y_{m[ij|p|}{\omega_{\pm}}^{p}{}_{k]} \pm \frac{3}{2}\,{}^{\star}Y_{m[ij}\mathring{k}_{\pm k]} \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\,\pi_{\pm ijk} \pm \frac{3}{4}\delta_{m[i}\,{}^{\star}Z_{jk]pq}\hat{\omega}_{\pm}{}^{pq} \mp 2\,{}^{\star}Z_{[mij|p|}{\hat{\omega}_{\pm}}^{p}{}_{k]} \\
&- \frac{3}{4}S\delta_{m[i}\omega_{\pm jk]} \pm \frac{1}{4}\,{}^{\star}F_{mijkp}\hat{k}_{\pm}{}^{p} - \frac{3}{2}\delta_{m[i}F_{j|p|}{\tilde{\omega}_{\pm}}^{p}{}_{k]} - \frac{3}{2}F_{[mi}\tilde{\omega}_{\pm jk]} \\
&+ \frac{3}{8}\delta_{m[i}Y_{jk]pq}\omega_{\pm}{}^{pq} - Y_{[mij|p|}{\omega_{\pm}}^{p}{}_{k]} \pm \frac{3}{4}\delta_{m[i}\,{}^{\star}Y_{jk]p}\mathring{k}_{\pm}{}^{p} \pm {}^{\star}Y_{[mij}\mathring{k}_{\pm k]} \\
&+ \frac{1}{8}\,{}^{\star}X_{mijkpq}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{pq} \pm \frac{3}{2}\delta_{m[i}X_j\hat{k}_{\pm k]}\ ,
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

同样，为了简洁起见，我们省略了 r， s 形式双线性量上的指标[9]。

对 M^7应用霍奇对偶后， $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$的定义域可识别为 $\Omega^*(M^7)\oplus\Omega^*(M^7)$。此外，从上面的 TCFH 可清楚看出， $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 的定义域分解为对称形式双线性空间（3.4）和反对称形式双线性空间（3.13）。为理解这一点，请注意，16 维马约拉纳表示 Δ_{16}在 $\mathfrak{spin}(8)$ 下，限制到 $\mathfrak{spin}(7)$ 时分解为两个 8 维马约拉纳表示之和， Δ_8。进而，将两个 Δ_{16} 视为 $\mathfrak{spin}(7)$ 的表示，其乘积分解为

$$
\otimes^2\Delta_{16} = \Lambda^*(\mathbb{R}^7)\oplus\Lambda^*(\mathbb{R}^7)\ . \tag{3.22}
$$

事实上，我们注意到 $\dim(\otimes^2\Delta_{16}) = 2^4\cdot 2^4 = 2\dim(\Lambda^*(\mathbb{R}^7))$。然而，我们看到，最小张量协变形式层次结构联络保持了 $\otimes^2\Delta_{16}$ 的对称化 $S^2(\Delta_{16})$ 子空间和反对称化 $\Lambda^2(\Delta_{16})$ 子空间。因此， $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 的约化全纯群将包含于 $GL(136)\times GL(120)$ 之内。然而，最小张量协变形式层次结构联络的约化全纯群进一步约化为 $GL(133)\times SO(7)\times GL(112)$ 的一个子群~^ °，因为它对标量 f、 f、 f 和 f^ 作用时使用偏导数，并对 k 使用 Levi-Civita 联络。

[9]从现在起，在下文所有 TCFH 中，我们将始终省略形式双线性量上用于标记不同 Killing 自旋子的 r,s 指标。

4 翘曲反德西特$_4$ 背景的 TCFH

4.1 场与Killing自旋子

与前面的情况一样，具有内部空间 M^6 的大质量 IIA 超引力中的弯曲反德西特$_4$ 背景 $\mathrm{AdS}_4 \times_w M^6$ 的玻色场可表示为

$$\begin{aligned} &g = 2\,\mathbf{e}^+\mathbf{e}^- + (\mathbf{e}^z)^2 + (\mathbf{e}^x)^2 + g(M^6)\ , \quad G = X\,\mathbf{e}^+ \wedge \mathbf{e}^- \wedge \mathbf{e}^z \wedge \mathbf{e}^x + Y\ , \\ &H = H\ , \quad F = F\ , \quad S = me^{\Phi}\ , \quad \Phi = \Phi\ , \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中， $g(M^6)$ 是 M^6 上的度量， m 是一个常数， Φ、 $X \in C^\infty(M^6)$、 $F \in \Omega^2(M^6)$、 $H \in \Omega^3(M^6)$ 和 $Y \in \Omega^4(M^6)$。此外，

$$\mathbf{e}^+ = du, \quad \mathbf{e}^- = dr - r\frac{2}{\ell}dz - 2rA^{-1}dA\ , \quad \mathbf{e}^z = Adz\ , \quad \mathbf{e}^x = Ae^{z/\ell}dx\ , \quad \mathbf{e}^i = e^i{}_J dy^J\ , \tag{4.2}$$

是反德西特$_4 \times_w M^6$上的一个伪正交标架，其中 $g(M^6) = \delta_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$， y 是 M^6 的坐标，而 (u, r, z, x) 是时空的其余坐标。与前面的情况一样，经过坐标变换后，时空度规 g 可写成标准扭曲形式$g = A^2 g_\ell(AdS_4) + g(M^6)$，其中 A 是翘曲因子， $A \in C^\infty(M^6)$，而 $g_\ell(AdS_4)$ 是半径为 ℓ 的反德西特 $_4$ 上的标准度规。

沿坐标（u、 r、 z、 x）积分大质量 IIA 超引力的Killing自旋子方程，可得 Killing 自旋子可以表示为 $\epsilon = \epsilon(u、\ r、\ z、\ x、\ \sigma_\pm、\ \tau_\pm)$，其中 $\sigma_\pm$ 和 $\tau_\pm$ 是仅依赖于 M^6 和 $\Gamma_\pm\sigma_\pm = \Gamma_\pm\tau_\pm = 0$ [28]的坐标的自旋子。此外，引力微子KSE将 $\sigma_\pm$ 和 $\tau_\pm$ 沿 M^6 限制为 $\mathcal{D}^{(\pm)}_m\chi_\pm = 0$，其中 $\chi_\pm$ 表示 $\sigma_\pm$ 或$\tau_\pm$ ，并且

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\pm)}_m = \nabla_m &\pm \frac{1}{2}A^{-1}\partial_m A + \frac{1}{8}\not{H}_m\Gamma_{11} + \frac{1}{8}S\Gamma_m \\ &+ \frac{1}{16}\not{F}\Gamma_m\Gamma_{11} + \frac{1}{192}\not{Y}\Gamma_m \mp \frac{1}{8}X\Gamma_{zxm}\ , \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 ∇_m、 $m = 1$、.....6， $g(M^6)$的自旋联络。Killing 自旋子满足另外两个代数Killing自旋子方程。其中一个与大质量 IIA 超引力的膨胀子KSE相关，另一个源于对 z上的引力微子KSE进行积分。二者对于确定反德西特$_4$ 背景中的 Killing 自旋子都至关重要，但不会对 M^6上的 TCFH 计算产生贡献。因此，此处不再总结。

与翘曲的反德西特$_3$ 背景不同， $\sigma_\pm$ 和 $\tau_\pm$ Killing 自旋子之间通过克利福德代数运算相关。具体而言，若 $\sigma_\pm$ 是一个 Killing 自旋子，则 $\Gamma_{zx}\sigma_\pm$ 是一个 $\tau_\pm$ Killing 自旋子，也就是说，它满足 $\tau_\pm$ Killing 自旋子所满足的全部三个 Killing 自旋子方程 [28]。利用这一点，可以证明反德西特$_4$ 背景的 Killing 自旋子总是以四的倍数出现。

4.2 M M^6的 TCFH

弯曲反德西特$_4$ 背景的 TCFH 计算，与此前已经较为详细介绍过的弯曲反德西特$_2$和反德西特$_3$情形类似。因此，我们将简要说明。在 M^6 上 Killing 自旋子形式双线性[10] 空间中，对 Killing 自旋子 $\chi^r_\pm$ 和 $\chi^s_\pm$ 的交换呈对称的基（模霍奇对偶）为

$$\begin{aligned} &f^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \chi^s_\pm \rangle\ , \quad \tilde{f}^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_{11}\chi^s_\pm \rangle\ , \quad k^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_i\chi^s_\pm \rangle\, \mathbf{e}^i\ , \\ &\mathring{k}^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_{izx}\Gamma_{11}\chi^s_\pm \rangle\, \mathbf{e}^i\ , \quad \hat{\omega}^{rs}_\pm = \frac{1}{2}\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ijzx}\chi^s_\pm \rangle\, \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j\ , \\ &\mathring{\omega}^{rs}_\pm = \frac{1}{2}\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ijzx}\Gamma_{11}\chi^s_\pm \rangle\, \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j\ , \quad \tilde{\pi}^{rs}_\pm = \frac{1}{3!}\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ijk}\Gamma_{11}\chi^s_\pm \rangle\, \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \wedge \mathbf{e}^k\ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

[10]我们也可以考虑更一般的一类双线性量，例如那些只含有一次 Γ_z 插入或一次 Γ_x插入的双线性量，即标量 $\langle \chi^r_\pm、\ \Gamma_z\chi^s_\pm \rangle$ 以及 $\langle \chi^r_\pm、\ \Gamma_x\chi^s_\pm \rangle$ ，对高次形式也可作类似定义。不过，下面选取的形式双线性已经足够。

这里， $\chi_\pm$ 仍表示 $\sigma_\pm$ 或 $\tau_\pm$。经过一些计算，TCFH 为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m f_\pm :=&\nabla_m f_\pm \\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\, f_\pm - \frac{1}{4}Sk_{\pm m} - \frac{1}{8}F_{pq}\tilde{\pi}_\pm{}^{pq}{}_m \mp \frac{1}{4}\,{}^\star Y_{mp}\mathring{k}_\pm{}^p\ ,\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{f}_\pm :=&\nabla_m \tilde{f}_\pm \\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{f}_\pm - \frac{1}{4}F_{mp}k_\pm{}^p - \frac{1}{4!}Y_{mpqr}\tilde{\pi}_\pm{}^{pqr} \mp \frac{1}{4}X\mathring{k}_{\pm m}\ ,\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m k_{\pm i} :=&\nabla_m k_{\pm i} + \frac{1}{4}H_{mpq}\tilde{\pi}_\pm{}^{pq}{}_i \mp \frac{1}{2}\,{}^\star Y_{mp}\mathring{\omega}_\pm{}^p{}_i \\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\, k_{\pm i} - \frac{1}{4}\delta_{mi}Sf_\pm \pm \frac{1}{8}\,{}^\star F_{mipq}\hat{\omega}_\pm{}^{pq} + \frac{1}{4}F_{mi}\tilde{f}_\pm \\ &\pm \frac{1}{8}\delta_{mi}\,{}^\star Y_{pq}\mathring{\omega}_\pm{}^{pq} \mp \frac{1}{2}\,{}^\star Y_{[m|p|}\mathring{\omega}_\pm{}^p{}_{i]} \mp \frac{1}{4}X\hat{\omega}_{\pm mi}\ ,\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{k}_{\pm i} :=&\nabla_m \mathring{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{4}\,{}^\star H_{mpq}\tilde{\pi}_\pm{}^{pq}{}_i - \frac{1}{2}F_{mp}\hat{\omega}_\pm{}^p{}_i \\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\, \mathring{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{12}\delta_{mi}\,{}^\star H_{pqr}\tilde{\pi}_\pm{}^{pqr} \mp \frac{1}{2}\,{}^\star H_{[m|pq|}\tilde{\pi}_\pm{}^{pq}{}_{i]} \\ &-\frac{1}{4}S\mathring{\omega}_{\pm mi} + \frac{1}{8}\delta_{mi}F_{pq}\hat{\omega}_\pm{}^{pq} - \frac{1}{2}F_{[m|p|}\hat{\omega}_\pm{}^p{}_{i]} \\ &\mp \frac{1}{4}\,{}^\star Y_{mi}f_\pm - \frac{1}{8}Y_{mipq}\mathring{\omega}_\pm{}^{pq} \pm \frac{1}{4}X\delta_{mi}\tilde{f}_\pm\ ,\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{\omega}_{\pm ij} :=&\nabla_m \hat{\omega}_{\pm ij} + H_{m[i|p|}\hat{\omega}_\pm{}^p{}_{j]} + F_{m[i}\mathring{k}_{\pm j]} \mp \frac{1}{2}\,{}^\star Y_{mp}\tilde{\pi}_\pm{}^p{}_{ij} \\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\, \hat{\omega}_{\pm ij} \mp \frac{1}{24}\,{}^\star S_{mijpqr}\tilde{\pi}_\pm{}^{pqr} \pm \frac{1}{4}\,{}^\star F_{mijp}k_\pm{}^p \\ &+\frac{1}{2}\delta_{m[i}F_{j]p}\mathring{k}_\pm{}^p + \frac{3}{4}F_{[mi}\mathring{k}_{\pm j]} \mp \frac{3}{4}\,{}^\star Y_{[m|p|}\tilde{\pi}_\pm{}^p{}_{ij]} \\ &\pm \frac{1}{4}\delta_{m[i}\,{}^\star Y_{|pq|}\tilde{\pi}_\pm{}^{pq}{}_{j]} \pm \frac{1}{2}X\delta_{m[i}k_{\pm j]}\ ,\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{\omega}_{\pm ij} :=&\nabla_m \mathring{\omega}_{\pm ij} + H_{m[i|p|}\hat{\omega}_\pm{}^p{}_{j]} \pm \frac{1}{2}\,{}^\star F_{m[i|pq|}\tilde{\pi}_\pm{}^{pq}{}_{j]} \mp {}^\star Y_{m[i}k_{\pm j]} \\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\, \mathring{\omega}_{\pm ij} - \frac{1}{2}S\delta_{m[i}\mathring{k}_{\pm j]} \pm \frac{3}{8}\,{}^\star F_{[mi|pq|}\tilde{\pi}_\pm{}^{pq}{}_{j]} \\ &\pm \frac{1}{12}\delta_{m[i}\,{}^\star F_{j]pqr}\tilde{\pi}_\pm{}^{pqr} \mp \frac{1}{2}\delta_{m[i}\,{}^\star Y_{j]p}k_\pm{}^p \mp \frac{3}{4}\,{}^\star Y_{[mi}k_{\pm j]} \\ &+\frac{1}{4}Y_{mijp}\mathring{k}_\pm{}^p \pm \frac{1}{4}X\tilde{\pi}_{\pm mij}\ ,\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{\pi}_{\pm ijk} :=&\nabla_m \tilde{\pi}_{\pm ijk} \mp \frac{3}{2}\,{}^\star H_{m[ij}\mathring{k}_{\pm k]} - \frac{3}{2}H_{m[ij}k_{\pm k]} \pm \frac{3}{2}\,{}^\star F_{m[ij|p|}\mathring{\omega}_\pm{}^p{}_{k]} \\ &\mp \frac{3}{2}\,{}^\star Y_{m[i}\hat{\omega}_{\pm jk]} \\ =&\mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{\pi}_{\pm ijk} \mp \frac{3}{2}\delta_{m[i}\,{}^\star H_{jk]p}\mathring{k}_\pm{}^p \mp 2\,{}^\star H_{[mij}\mathring{k}_{\pm k]} \mp \frac{1}{8}\,{}^\star S_{mijkpq}\hat{\omega}_\pm{}^{pq} \\ &-\frac{3}{4}\delta_{m[i}F_{jk]}f_\pm \mp \frac{3}{8}\delta_{m[i}\,{}^\star F_{jk]pq}\mathring{\omega}_\pm{}^{pq} \pm {}^\star F_{[mij|p|}\mathring{\omega}_\pm{}^p{}_{k]} \mp \frac{3}{2}\delta_{m[i}\,{}^\star Y_{j|p|}\hat{\omega}_\pm{}^p{}_{k]} \\ &\mp \frac{3}{2}\,{}^\star Y_{[mi}\hat{\omega}_{\pm jk]} + \frac{1}{4}Y_{mijk}\tilde{f}_\pm \mp \frac{3}{4}X\delta_{m[i}\mathring{\omega}_{\pm jk]}\ ,\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 是极小联络。

类似地，在 M^6上形式双线性量空间中，忽略霍奇对偶后，在交换 Killing 自旋子 $\chi^r_\pm$ 和 $\chi^s_\pm$ 时呈反对称的一组基为

$$\begin{aligned}
\hat{f}^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{zx}\chi^s_\pm \right\rangle \ , \quad \mathring{f}^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{zx}\Gamma_{11}\chi^s_\pm \right\rangle \ , \\
\hat{k}^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{izx}\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \ , \quad \tilde{k}^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_i\Gamma_{11}\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \ , \\
\omega^{rs}_\pm = \frac{1}{2}\left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ij}\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \ , \quad \tilde{\omega}^{rs}_\pm = \frac{1}{2}\left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ij}\Gamma_{11}\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \ , \\
\pi^{rs}_\pm = \frac{1}{3!}\left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ijk}\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \wedge \mathbf{e}^k \ .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

相应的 TCFH 为

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{f}_\pm :=& \nabla_m \hat{f}_\pm \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \hat{f}_\pm - \frac{1}{4}S\hat{k}_{\pm m} \mp \frac{1}{4!}\,{}^\star F_{mpqr}\pi_\pm{}^{pqr} \pm \frac{1}{4}\,{}^\star Y_{mp}\tilde{k}_\pm{}^p \ ,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{f}_\pm :=& \nabla_m \mathring{f}_\pm \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \mathring{f}_\pm - \frac{1}{4}F_{mp}\hat{k}_\pm{}^p \pm \frac{1}{8}\,{}^\star Y_{pq}\pi_\pm{}^{pq}{}_m \pm \frac{1}{4}X\tilde{k}_{\pm m} \ ,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \tilde{k}_{\pm i} + \frac{1}{4}H_{mpq}\pi_\pm{}^{pq}{}_i - \frac{1}{2}F_{mp}\omega_\pm{}^p{}_i \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{k}_{\pm i} - \frac{1}{4}S\omega_{\pm mi} + \frac{1}{8}\delta_{mi}F_{pq}\omega_\pm{}^{pq} - \frac{1}{2}F_{[m|p|}\omega_\pm{}^p{}_{i]} \\
& \pm \frac{1}{4}\,{}^\star Y_{mi}\hat{f}_\pm - \frac{1}{8}Y_{mipq}\tilde{\omega}_\pm{}^{pq} \mp \frac{1}{4}X\delta_{mi}\mathring{f}_\pm \ ,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \hat{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{4}\,{}^\star H_{mpq}\pi_\pm{}^{pq}{}_i \pm \frac{1}{2}\,{}^\star Y_{mp}\tilde{\omega}_\pm{}^p{}_i \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \hat{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{12}\delta_{mi}\,{}^\star H_{pqr}\pi_\pm{}^{pqr} \mp \frac{1}{2}\,{}^\star H_{[m|pq|}\pi_\pm{}^{pq}{}_{i]} \\
& - \frac{1}{4}S\delta_{mi}\hat{f}_\pm \mp \frac{1}{8}\,{}^\star F_{mipq}\omega_\pm{}^{pq} + \frac{1}{4}F_{mi}\mathring{f}_\pm \mp \frac{1}{8}\delta_{mi}\,{}^\star Y_{pq}\tilde{\omega}_\pm{}^{pq} \\
& \pm \frac{1}{2}\,{}^\star Y_{[m|p|}\tilde{\omega}_\pm{}^p{}_{i]} \pm \frac{1}{4}X\omega_{\pm mi} \ ,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \omega_{\pm ij} :=& \nabla_m \omega_{\pm ij} + H_{m[i|p|}\tilde{\omega}_\pm{}^p{}_{j]} + F_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]} + \frac{1}{2}Y_{m[i|pq|}\pi_\pm{}^{pq}{}_{j]} \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \omega_{\pm ij} - \frac{1}{4}S\pi_{\pm mij} \mp \frac{1}{4}\,{}^\star F_{mijp}\hat{k}_\pm{}^p + \frac{1}{2}\delta_{m[i}F_{j]p}\tilde{k}_\pm{}^p \\
& + \frac{3}{4}F_{[mi}\tilde{k}_{\pm j]} + \frac{1}{12}\delta_{m[i}Y_{j]pqr}\pi_\pm{}^{pqr} + \frac{3}{8}Y_{[mi|pq|}\pi_\pm{}^{pq}{}_{j]} \mp \frac{1}{2}X\delta_{m[i}\hat{k}_{\pm j]} \ ,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{\omega}_{\pm ij} :=& \nabla_m \tilde{\omega}_{\pm ij} + H_{m[i|p|}\omega_\pm{}^p{}_{j]} + \frac{1}{2}F_{mp}\pi_\pm{}^p{}_{ij} \pm \,{}^\star Y_{m[i}\hat{k}_{\pm j]} \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{\omega}_{\pm ij} - \frac{1}{2}S\delta_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]} - \frac{1}{4}\delta_{m[i}F_{|pq|}\pi_\pm{}^{pq}{}_{j]} \\
& + \frac{3}{4}F_{[m|p|}\pi_\pm{}^p{}_{ij]} \pm \frac{1}{2}\delta_{m[i}\,{}^\star Y_{j]p}\hat{k}_\pm{}^p \pm \frac{3}{4}\,{}^\star Y_{[mi}\hat{k}_{\pm j]} \\
& + \frac{1}{4}Y_{mijp}\tilde{k}_\pm{}^p - \frac{1}{4!}\,{}^\star X_{mijpqr}\pi_\pm{}^{pqr} \ ,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m\pi_{\pm ijk} :=& \nabla_m\pi_{\pm ijk} \mp \frac{3}{2}\,{}^\star H_{m[ij}\hat{k}_{\pm k]} - \frac{3}{2}H_{m[ij}\tilde{k}_{\pm k]} - \frac{3}{2}F_{m[i}\tilde{\omega}_{\pm jk]} - \frac{3}{2}Y_{m[ij|p|}\omega_\pm{}^p{}_{k]} \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\,\pi_{\pm ijk} \mp \frac{3}{2}\delta_{m[i}\,{}^\star H_{jk]p}\hat{k}_\pm{}^p \mp 2\,{}^\star H_{[mij}\hat{k}_{\pm k]} - \frac{3}{4}S\delta_{m[i}\omega_{\pm jk]} \\
& \mp \frac{1}{4}\,{}^\star F_{mijk}\hat{f}_\pm - \frac{3}{2}\delta_{m[i}F_{j|p|}\tilde{\omega}_\pm{}^p{}_{k]} - \frac{3}{2}F_{[mi}\tilde{\omega}_{\pm jk]} + \frac{3}{8}\delta_{m[i}Y_{jk]pq}\omega_\pm{}^{pq} \\
& - Y_{[mij|p|}\omega_\pm{}^p{}_{k]} \mp \frac{3}{4}\delta_{m[i}\,{}^\star Y_{jk]}\mathring{f}_\pm + \frac{1}{8}\,{}^\star X_{mijkpq}\tilde{\omega}_\pm{}^{pq}\ ,
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

其中， $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 仍为极小联络。

最小张量协变形式层次结构联络 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 所作用的域可分解为交换两个 Killing 自旋子时的对称形式双线性空间（4.4）以及反对称形式双线性空间（4.12） $\chi^r_\pm$ 和 $\chi^s_\pm$。直接计算维数可知， $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$的约化全纯群必须包含于 $GL(64)\times GL(64)$ 中。但由于 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$在标量 $\tilde{}$ $\hat{}$ $\mathring{}$$f$、 f、 f和 f上平凡作用，其约化全纯群包含于 $GL(62)\times GL(62)$ 中。

5 扭曲反德西特$_n$， $n\geq 5$背景的 TCFH

5.1 场与Killing自旋子

具有内部空间M^{10-n} 的（有质量）IIA 背景的扭曲反德西特$_n$， $AdS_n\times_w M^{10-n}$， $n\geq 5$背景中的玻色场可写为如下形式

$$
\begin{aligned}
& g = 2\,\mathbf{e}^+\mathbf{e}^- + (\mathbf{e}^z)^2 + \sum_{a=1}^{n-3}(\mathbf{e}^a)^2 + g(M^{10-n})\ , \\
& G = G, \quad H = H, \quad F = F, \quad S = me^{\Phi}, \quad \Phi = \Phi\ ,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

其中 $g(M^{10-n})$ 是 M^{10-n} 上的度量， m 是一个常数， $\Phi\in C^\infty(M^{10-n})$、 $F\in\Omega^2(M^{10-n})$、$H\in\Omega^3(M^{10-n})$ 和 $G\in\Omega^4(M^{10-n})$。当 n 足够大时，某些通量可能消失；例如，当 $n\geq 7$ 时， G 消失。此外，

$$
\mathbf{e}^+ = du, \quad \mathbf{e}^- = dr - \frac{2}{\ell}r dz - 2rA^{-1}dA, \quad \mathbf{e}^z = A dz\ , \quad \mathbf{e}^a = Ae^{z/\ell}dx^a\ , \quad \mathbf{e}^i = e^i{}_J dy^J\ , \tag{5.2}
$$

是 $AdS_n\times_w M^{10-n}$ 上的伪正交标架，其中 $g(M^{10-n}) = \delta_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$，这里 y 是 M^{10-n} 上的坐标，而 (u,r,z,x^a) 是时空的其余坐标。与前面的情形一样， $A\in C^\infty(M^{10-n})$ 是翘曲因子，经过坐标变换后，时空度规 g 可写成通常的翘曲形式，其中包含半径为 ℓ 的反德西特$_n$ 上的标准度规。

同样，这些背景的 Killing 自旋子可表示为 $\epsilon=\epsilon(u,r,z,x^a,\sigma_\pm,\tau_\pm)$，其中 $\sigma_\pm$ 和 $\tau_\pm$ 仅依赖于 M^{10-n} 和 $\Gamma_\pm\sigma_\pm = \Gamma_\pm\tau_\pm = 0$ [28]的坐标。此外，沿 M^{10-n} 方向的引力微子KSE要求 $\mathcal{D}^{(\pm)}_m\chi_\pm = 0$，其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{(\pm)}_m = \nabla_m \pm \frac{1}{2}A^{-1}\partial_m A + \frac{1}{8}\not{H}_m\Gamma_{11} + \frac{1}{8}S\Gamma_m \\
+ \frac{1}{16}\not{F}\Gamma_m\Gamma_{11} + \frac{1}{192}\not{G}\Gamma_m\ ,
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

其中 ∇_m, $m=1,\ldots,10-n$ 是 $g(M^{10-n})$ 的自旋联络，而 $\chi_\pm$ 表示 $\sigma_\pm$或 $\tau_\pm$。

下面将针对每个 n、 $5\leq n\leq 7$给出翘曲反德西特$_n$ 背景的 TCFH。由于计算与先前各情形中已描述的计算类似，我们仅陈述结果。

5.2 扭曲反德西特$_5$ 背景的 TCFH

形式双线性量空间中的一组基[11] 在 M^5上，忽略霍奇对偶，其在交换 Killing 自旋子时保持对称 $\chi^r_\pm$ 并且 $\chi^s_\pm$ 是

$$\begin{gathered} f^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \chi^s_\pm \rangle \ , \quad \tilde{f}^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_{11}\chi^s_\pm \rangle \ , \quad \mathring{f}^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_{zx_1x_2}\Gamma_{11}\chi^s_\pm \rangle \ , \\ k^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_i\chi^s_\pm \rangle \, \mathbf{e}^i \ , \quad \hat{k}^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_{izx_1x_2}\chi^s_\pm \rangle \, \mathbf{e}^i \ , \\ \mathring{k}^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_{izx_1x_2}\Gamma_{11}\chi^s_\pm \rangle \, \mathbf{e}^i \ , \quad \hat{\omega}^{rs}_\pm = \frac{1}{2}\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ijzx_1x_2}\chi^s_\pm \rangle \, \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \ . \end{gathered} \tag{5.4}$$

TCFH 是

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m f_\pm :=& \nabla_m f_\pm \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A \, f_\pm - \frac{1}{4} S k_{\pm m} \pm \frac{1}{8} {}^\star F_{mpq}\hat{\omega}_\pm{}^{pq} \mp \frac{1}{4} {}^\star G_m \mathring{f}_\pm \ , \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{f}_\pm :=& \nabla_m \tilde{f}_\pm \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A \, \tilde{f}_\pm - \frac{1}{4} F_{mp} k_\pm{}^p \pm \frac{1}{4} {}^\star G_p \hat{\omega}_\pm{}^p{}_m \ , \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{f}_\pm :=& \nabla_m \mathring{f}_\pm \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A \, \mathring{f}_\pm - \frac{1}{4} H_{mpq}\hat{\omega}_\pm{}^{pq} - \frac{1}{4} S \mathring{k}_{\pm m} + \frac{1}{4} F_{mp}\hat{k}_\pm{}^p \mp \frac{1}{4} {}^\star G_m f_\pm \ , \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m k_{\pm i} :=& \nabla_m k_{\pm i} \mp \frac{1}{2} {}^\star H_{mp}\hat{\omega}_\pm{}^p{}_i \pm \frac{1}{2} {}^\star G_m \mathring{k}_{\pm i} \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A \, k_{\pm i} \mp {}^\star H_{[m|p|}\hat{\omega}_\pm{}^p{}_{i]} \pm \frac{1}{4}\delta_{mi} {}^\star H_{pq}\hat{\omega}_\pm{}^{pq} - \frac{1}{4}\delta_{mi} S f_\pm \\ & \pm \frac{1}{4} {}^\star F_{mip}\hat{k}_\pm{}^p + \frac{1}{4} F_{mi}\tilde{f}_\pm \pm \frac{1}{4}\delta_{mi} {}^\star G_p \mathring{k}_\pm{}^p \pm \frac{1}{2} {}^\star G_{[m}\mathring{k}_{\pm i]} \ , \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \hat{k}_{\pm i} \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A \, \hat{k}_{\pm i} - \frac{1}{2} H_{mip}\mathring{k}_\pm{}^p - \frac{1}{4} S\hat{\omega}_{\pm mi} \mp \frac{1}{4} {}^\star F_{mip} k_\pm{}^p \\ & - \frac{1}{4} F_{mi}\mathring{f}_\pm - \frac{1}{8} G_{mipq}\hat{\omega}_\pm{}^{pq} \ , \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \mathring{k}_{\pm i} + \frac{1}{2} F_{mp}\hat{\omega}_\pm{}^p{}_i \pm \frac{1}{2} {}^\star G_m k_{\pm i} \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A \, \mathring{k}_{\pm i} - \frac{1}{2} H_{mip}\hat{k}_\pm{}^p - \frac{1}{4}\delta_{mi} S\mathring{f}_\pm - \frac{1}{8}\delta_{mi} F_{pq}\hat{\omega}_\pm{}^{pq} \\ & + \frac{1}{2} F_{[m|p|}\hat{\omega}_\pm{}^p{}_{i]} \pm \frac{1}{4}\delta_{mi} {}^\star G_p k_\pm{}^p \pm \frac{1}{2} {}^\star G_{[m} k_{\pm i]} \ , \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{\omega}_{\pm ij} :=& \nabla_m \hat{\omega}_{\pm ij} \mp {}^\star H_{m[i}k_{\pm j]} - F_{m[i}\mathring{k}_{\pm j]} \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A \, \hat{\omega}_{\pm ij} \mp \delta_{m[i} {}^\star H_{j]p} k_\pm{}^p \mp \frac{3}{2} {}^\star H_{[mi}k_{\pm j]} \\ & + \frac{1}{2} H_{mij}\mathring{f}_\pm - \frac{1}{2} S\delta_{m[i}\hat{k}_{\pm j]} \pm \frac{1}{4} {}^\star F_{mij} f_\pm - \frac{1}{2}\delta_{m[i} F_{j]p}\mathring{k}_\pm{}^p \\ & - \frac{3}{4} F_{[mi}\mathring{k}_{\pm j]} \pm \frac{1}{2}\delta_{m[i} {}^\star G_{j]}\tilde{f}_\pm + \frac{1}{4} G_{mijp}\hat{k}_\pm{}^p \ , \end{aligned} \tag{5.11}$$

[11] 至于 扭曲反德西特$_4$ 背景，可以考虑更一般的一类形式双线性量，但选择 es 如下所述，适用于1 反德西特$_n$、 $n \geq 5$背景即可。 所有

其中， ∇ 是 $g(M^5)$的标架联络。

在 M^5 上的形式双线性空间中，忽略霍奇对偶后，在交换 χ^r 和 χ^s 时反对称的一个基为

$$\begin{aligned}
\hat{f}^{rs}_{\pm} &= \left\langle \chi^r_{\pm}, \Gamma_{zx_1x_2}\chi^s_{\pm} \right\rangle \ , \quad \tilde{k}^{rs}_{\pm} = \left\langle \chi^r_{\pm}, \Gamma_i\Gamma_{11}\chi^s_{\pm} \right\rangle \mathbf{e}^i \ , \\
\omega^{rs}_{\pm} &= \frac{1}{2}\left\langle \chi^r_{\pm}, \Gamma_{ij}\chi^s_{\pm} \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \ , \quad \tilde{\omega}^{rs}_{\pm} = \frac{1}{2}\left\langle \chi^r_{\pm}, \Gamma_{ij}\Gamma_{11}\chi^s_{\pm} \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \ , \\
\mathring{\omega}^{rs}_{\pm} &= \frac{1}{2}\left\langle \chi^r_{\pm}, \Gamma_{ijzx_1x_2}\Gamma_{11}\chi^s_{\pm} \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \ .
\end{aligned} \tag{5.12}$$

TCFH 为

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{f}_{\pm} :=& \nabla_m \hat{f}_{\pm} \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \hat{f}_{\pm} - \frac{1}{4}H_{mpq}\mathring{\omega}_{\pm}{}^{pq} \mp \frac{1}{8}{}^{\star}F_{mpq}\omega_{\pm}{}^{pq} \pm \frac{1}{4}{}^{\star}G_p\tilde{\omega}_{\pm}{}^p{}_m \ ,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \tilde{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{2}{}^{\star}H_{mp}\mathring{\omega}_{\pm}{}^p{}_i - \frac{1}{2}F_{mp}\omega_{\pm}{}^p{}_i \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{k}_{\pm i} \pm \frac{1}{4}\delta_{mi}{}^{\star}H_{pq}\mathring{\omega}_{\pm}{}^{pq} \mp {}^{\star}H_{[m|p|}\mathring{\omega}_{\pm}{}^p{}_{i]} \\
&- \frac{1}{4}S\tilde{\omega}_{\pm mi} + \frac{1}{8}\delta_{mi}F_{pq}\omega_{\pm}{}^{pq} - \frac{1}{2}F_{[m|p|}\omega_{\pm}{}^p{}_{i]} - \frac{1}{8}G_{mipq}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{pq} \ ,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \omega_{\pm ij} :=& \nabla_m \omega_{\pm ij} + H_{m[i|p|}\tilde{\omega}_{\pm}{}^p{}_{j]} + F_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]} \pm \frac{1}{2}{}^{\star}G_m\mathring{\omega}_{\pm ij} \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \omega_{\pm ij} \pm \frac{1}{8}{}^{\star}S_{mijpq}\mathring{\omega}_{\pm}{}^{pq} \mp \frac{1}{4}{}^{\star}F_{mij}\hat{f}_{\pm} + \frac{1}{2}\delta_{m[i}F_{j]p}\tilde{k}_{\pm}{}^p \\
&+ \frac{3}{4}F_{[mi}\tilde{k}_{\pm j]} \pm \frac{1}{2}\delta_{m[i}{}^{\star}G_{|p|}\mathring{\omega}_{\pm}{}^p{}_{j]} \pm \frac{3}{4}{}^{\star}G_{[m}\mathring{\omega}_{\pm ij]} \ ,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{\omega}_{\pm ij} :=& \nabla_m \tilde{\omega}_{\pm ij} + H_{m[i|p|}\omega_{\pm}{}^p{}_{j]} \pm {}^{\star}F_{m[i|p|}\mathring{\omega}_{\pm}{}^p{}_{j]} \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{\omega}_{\pm ij} - \frac{1}{2}S\delta_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]} \mp \frac{1}{4}\delta_{m[i}{}^{\star}F_{j]pq}\mathring{\omega}_{\pm}{}^{pq} \\
&\pm \frac{3}{4}{}^{\star}F_{[mi|p|}\mathring{\omega}_{\pm}{}^p{}_{j]} \pm \frac{1}{2}\delta_{m[i}{}^{\star}G_{j]}\mathring{f}_{\pm} + \frac{1}{4}G_{mijp}\tilde{k}_{\pm}{}^p \ ,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{\omega}_{\pm ij} :=& \nabla_m \mathring{\omega}_{\pm ij} \mp {}^{\star}H_{m[i}\tilde{k}_{\pm j]} \mp {}^{\star}F_{m[i|p|}\tilde{\omega}_{\pm}{}^p{}_{j]} \pm \frac{1}{2}{}^{\star}G_m\omega_{\pm ij} \\
=& \mp A^{-1}\partial_m A\, \mathring{\omega}_{\pm ij} \mp \delta_{m[i}{}^{\star}H_{j]p}\tilde{k}_{\pm}{}^p \mp \frac{3}{2}{}^{\star}H_{[mi}\tilde{k}_{\pm j]} + \frac{1}{2}H_{mij}\hat{f}_{\pm} \\
&\pm \frac{1}{8}{}^{\star}S_{mijpq}\omega_{\pm}{}^{pq} \pm \frac{1}{4}\delta_{m[i}{}^{\star}F_{j]pq}\tilde{\omega}_{\pm}{}^{pq} \mp \frac{3}{4}{}^{\star}F_{[mi|p|}\tilde{\omega}_{\pm}{}^p{}_{j]} \\
&\pm \frac{1}{2}\delta_{m[i}{}^{\star}G_{|p|}\omega_{\pm}{}^p{}_{j]} \pm \frac{3}{4}{}^{\star}G_{[m}\omega_{\pm ij]} \ .
\end{aligned} \tag{5.17}$$

由于 TCFH 极小联络的定义域 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 在交换 $\chi^r_{\pm}$ 和 $\chi^s_{\pm}$ 时，会分解为对称形式双线性量和反对称形式双线性量，并且考虑到 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 对这些形式作用的细节，可以得出结论： $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 的约化全纯群包含于 $GL(20) \times SO(5) \times GL(35)$。

5.3 扭曲反德西特$_6$ 背景的 TCFH

在 M^4 上形式双线性量空间中，模去霍奇对偶后，在交换 $\chi^r_\pm$ 和 $\chi^s_\pm$ 时对称的一组基为

$$\begin{aligned} f^{rs}_\pm &= \left\langle \chi^r_\pm, \chi^s_\pm \right\rangle \ , \quad \tilde{f}^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{11}\chi^s_\pm \right\rangle , \quad \hat{f}^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{zx_1x_2x_3}\chi^s_\pm \right\rangle \ , \\ \mathring{f}^{rs}_\pm &= \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{zx_1x_2x_3}\Gamma_{11}\chi^s_\pm \right\rangle , \quad k^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_i\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \ , \quad \hat{k}^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{izx_1x_2x_3}\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \ . \end{aligned} \tag{5.18}$$

TCFH 为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m f_\pm :=& \nabla_m f_\pm \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, f_\pm - \frac{1}{4}Sk_{\pm m} \mp \frac{1}{4}\,{}^\star F_{mp}\hat{k}_\pm{}^p \ , \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{f}_\pm :=& \nabla_m \tilde{f}_\pm \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{f}_\pm - \frac{1}{4}F_{mp}k_\pm{}^p \pm \frac{1}{4}\,{}^\star G\hat{k}_{\pm m} \ , \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{f}_\pm :=& \nabla_m \hat{f}_\pm \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, \hat{f}_\pm - \frac{1}{4}S\hat{k}_{\pm m} \mp \frac{1}{4}\,{}^\star F_{mp}k_\pm{}^p \ , \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{f}_\pm :=& \nabla_m \mathring{f}_\pm \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, \mathring{f}_\pm - \frac{1}{4}F_{mp}\hat{k}_\pm{}^p \pm \frac{1}{4}\,{}^\star Gk_{\pm m} \ , \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m k_{\pm i} :=& \nabla_m k_{\pm i} \mp \frac{1}{2}\,{}^\star H_m\hat{k}_{\pm i} \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, k_{\pm i} \mp \frac{1}{2}\delta_{mi}\,{}^\star H_p\hat{k}_\pm{}^p \mp {}^\star H_{[m}\hat{k}_{\pm i]} - \frac{1}{4}\delta_{mi}Sf_\pm \\ & \mp \frac{1}{4}\,{}^\star F_{mi}\hat{f}_\pm + \frac{1}{4}F_{mi}\tilde{f}_\pm \mp \frac{1}{4}\delta_{mi}\,{}^\star G\mathring{f}_\pm \ , \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \hat{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{2}\,{}^\star H_m k_{\pm i} \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, \hat{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{2}\delta_{mi}\,{}^\star H_p k_\pm{}^p \mp {}^\star H_{[m}k_{\pm i]} - \frac{1}{4}\delta_{mi}S\hat{f}_\pm \\ & \mp \frac{1}{4}\,{}^\star F_{mi}f_\pm + \frac{1}{4}F_{mi}\mathring{f}_\pm \mp \frac{1}{4}\delta_{mi}\,{}^\star G\tilde{f} \ , \end{aligned} \tag{5.24}$$

其中， ∇ 是 g（M^4）的自旋联络。

在 M^4上的形式双线性量空间中，模去霍奇对偶后，在交换 $\chi^r_\pm$ 和 $\chi^s_\pm$ 时呈反对称性的一个基为

$$\begin{aligned} \tilde{k}^{rs}_\pm &= \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_i\Gamma_{11}\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \ , \quad \mathring{k}^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{izx_1x_2x_3}\Gamma_{11}\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \ , \\ \omega^{rs}_\pm &= \frac{1}{2}\left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ij}\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \ , \quad \tilde{\omega}^{rs}_\pm = \frac{1}{2}\left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{ij}\Gamma_{11}\chi^s_\pm \right\rangle \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \ . \end{aligned} \tag{5.25}$$

TCFH为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \tilde{k}_{\pm i} \pm \frac{1}{2}\,{}^\star H_m\mathring{k}_{\pm i} - \frac{1}{2}F_{mp}\omega_\pm{}^p{}_i \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{k}_{\pm i} \pm \frac{1}{2}\delta_{mi}\,{}^\star H_p\mathring{k}_\pm{}^p \pm {}^\star H_{[m}\mathring{k}_{\pm i]} - \frac{1}{4}S\omega_{\pm mi} \\ & + \frac{1}{8}\delta_{mi}F_{pq}\omega_\pm{}^{pq} - \frac{1}{2}F_{[m|p|}\omega_\pm{}^p{}_{i]} - \frac{1}{8}G_{mipq}\tilde{\omega}_\pm{}^{pq} \ , \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \mathring{k}_{\pm i} \pm \frac{1}{2} {}^\star H_m \tilde{k}_{\pm i} \pm \frac{1}{2} {}^\star F_{mp} \tilde{\omega}_\pm{}^p{}_i \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \mathring{k}_{\pm i} \pm \frac{1}{2} \delta_{mi} {}^\star H_p \tilde{k}_\pm{}^p \pm {}^\star H_{[m} \tilde{k}_{\pm i]} \mp \frac{1}{8} {}^\star S_{mipq} \omega_\pm{}^{pq} \\
& \mp \frac{1}{8} \delta_{mi} {}^\star F_{pq} \tilde{\omega}_\pm{}^{pq} \pm \frac{1}{2} {}^\star F_{[m|p|} \tilde{\omega}_\pm{}^p{}_{i]} \mp \frac{1}{4} {}^\star G \omega_{\pm mi} \ ,
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \omega_{\pm ij} :=& \nabla_m \omega_{\pm ij} + H_{m[i|p|} \tilde{\omega}_\pm{}^p{}_{j]} + F_{m[i} \tilde{k}_{\pm j]} \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \omega_{\pm ij} \mp \frac{1}{4} {}^\star S_{mijp} \mathring{k}_\pm{}^p + \frac{1}{2} \delta_{m[i} F_{j]p} \tilde{k}_\pm{}^p \\
& + \frac{3}{4} F_{[mi} \tilde{k}_{\pm j]} \pm \frac{1}{2} {}^\star G \delta_{m[i} \mathring{k}_{\pm j]} \ ,
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{\omega}_{\pm ij} :=& \nabla_m \tilde{\omega}_{\pm ij} + H_{m[i|p|} \omega_\pm{}^p{}_{j]} \pm {}^\star F_{m[i} \mathring{k}_{\pm j]} \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \tilde{\omega}_{\pm ij} - \frac{1}{2} S \delta_{m[i} \tilde{k}_{\pm j]} \pm \frac{1}{2} \delta_{m[i} {}^\star F_{j]p} \mathring{k}_\pm{}^p \\
& \pm \frac{3}{4} {}^\star F_{[mi} \mathring{k}_{\pm j]} + \frac{1}{4} G_{mijp} \tilde{k}_\pm{}^p \ .
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

注意，最小张量协变形式层次结构联络 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 作用于形式双线性 $k_\pm \hat{+} k_\pm$ 和 $k_\pm \hat{-} k_\pm$，其作为一种联络，对类型为 $k \pm \hat{k} \to s^{\pm 1}(k \pm \hat{k})$ 的尺度对称性进行规范化，$s \in \mathbb{R} - \{0\}$。因此，最小张量协变形式层次结构联络 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ 的约化全纯群包含于 $SO(5) \times GL(1) \times GL(20)$ 中。

5.4 扭曲反德西特$_7$ 背景的 TCFH

M^3上形式双线性空间中，在 Hodge 对偶意义下且关于交换 $\chi^r_\pm$ 与$\chi^s_\pm$ 对称的一组基为

$$
\begin{gathered}
f^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \chi^s_\pm \rangle \ , \quad \tilde{f}^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_{11} \chi^s_\pm \rangle \ , \quad \hat{f}^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_{z x_1 \ldots x_4} \chi^s_\pm \rangle \ , \\
k^{rs}_\pm = \langle \chi^r_\pm, \Gamma_i \chi^s_\pm \rangle \, \mathbf{e}^i \ .
\end{gathered}
\tag{5.30}
$$

TCFH 为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m f_\pm :=& \nabla_m f_\pm \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, f_\pm - \frac{1}{4} S k_{\pm m} \mp \frac{1}{4} {}^\star F_m \hat{f}_\pm \ ,
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{f}_\pm :=& \nabla_m \tilde{f}_\pm \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \tilde{f}_\pm - \frac{1}{4} F_{mp} k_\pm{}^p \ ,
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{f}_\pm :=& \nabla_m \hat{f}_\pm \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, \hat{f}_\pm \pm \frac{1}{2} {}^\star H k_{\pm m} \mp \frac{1}{4} {}^\star F_m f_\pm \ ,
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m k_{\pm i} :=& \nabla_m k_{\pm i} \\
=& \mp A^{-1} \partial_m A \, k_{\pm i} \mp \frac{1}{2} \delta_{mi} {}^\star H \hat{f}_\pm - \frac{1}{4} \delta_{mi} S f_\pm + \frac{1}{4} F_{mi} \tilde{f}_\pm \ ,
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

其中， ∇ 是 g（M^3）的自旋联络。

M^3的形式双线性空间中，在 Hodge 对偶意义下，关于交换 $\chi^r_\pm$ 和 $\chi^s_\pm$ 反对称的一组基为

$$\begin{aligned}\mathring{f}^{rs}_\pm &= \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{zx_1\ldots x_4}\Gamma_{11}\chi^s_\pm\right\rangle, \quad \tilde{k}^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_i\Gamma_{11}\chi^s_\pm\right\rangle \mathbf{e}^i, \\ \hat{k}^{rs}_\pm &= \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{izx_1\ldots x_4}\chi^s_\pm\right\rangle \mathbf{e}^i, \quad \mathring{k}^{rs}_\pm = \left\langle \chi^r_\pm, \Gamma_{izx_1\ldots x_4}\Gamma_{11}\chi^s_\pm\right\rangle \mathbf{e}^i \ ,\end{aligned} \tag{5.35}$$

TCFH 为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{f}_\pm :=& \nabla_m \mathring{f}_\pm \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, \mathring{f}_\pm \pm \frac{1}{2}\,{}^\star H\tilde{k}_{\pm m} - \frac{1}{4}\mathring{k}_{\pm m} + \frac{1}{4}F_{mp}\hat{k}_\pm{}^p \ ,\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \tilde{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \tilde{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{2}\,{}^\star F_m \mathring{k}_{\pm i} \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, \tilde{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{2}\,{}^\star H\delta_{mi}\mathring{f}_\pm \mp \frac{1}{4}\,{}^\star S_{mip}\hat{k}_\pm{}^p \\ & \mp \frac{1}{4}\delta_{mi}\,{}^\star F_p \mathring{k}_\pm{}^p \mp \frac{1}{2}\,{}^\star F_{[m}\mathring{k}_{\pm i]} \ ,\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \hat{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \hat{k}_{\pm i} \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, \hat{k}_{\pm i} - \frac{1}{2}H_{mip}\mathring{k}_\pm{}^p \pm \frac{1}{4}\,{}^\star S_{mip}\tilde{k}_\pm{}^p - \frac{1}{4}F_{mi}\mathring{f}_\pm \ ,\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathcal{F}}_m \mathring{k}_{\pm i} :=& \nabla_m \mathring{k}_{\pm i} \mp \frac{1}{2}\,{}^\star F_m \tilde{k}_{\pm i} \\ =& \mp A^{-1}\partial_m A\, \mathring{k}_{\pm i} - \frac{1}{2}H_{mip}\hat{k}_\pm{}^p - \frac{1}{4}S\delta_{mi}\mathring{f}_\pm \\ & \mp \frac{1}{4}\delta_{mi}\,{}^\star F_p \tilde{k}_\pm{}^p \mp \frac{1}{2}\,{}^\star F_{[m}\tilde{k}_{\pm i]} \ .\end{aligned} \tag{5.39}$$

与前一个反德西特$_6$情形一样，注意到最小 TCFH联络 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$在 $\tilde{k}\pm\mathring{k}$上的作用类似于引入一个额外的规范对称性。因此，最小 TCFH联络 $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$的约化全纯群包含于 $SO(3)\times SO(3)\times GL(1)$ 中。

6 探针、反德西特背景与 TCFH 的对称性

6.1 探针与对称性

在翘曲反德西特背景、反德西特$_n\times_w M^{10-n}$上传播的相对论粒子和自旋粒子的动力学已得到详细研究，参见 [24]。这里我们将概述自旋粒子动力学的一些关键性质，这些性质与下文将要介绍的例子相关。由于我们考虑的例子中翘曲因子为常数，在时空上传播的自旋粒子的作用量可分解为反德西特$_n$ 上的作用量和内部空间 M^{10-n}上的作用量。后者可写为

$$A_M = -\frac{i}{2}\int dt\, d\theta\, \gamma_{IJ} Dy^I \partial_t y^J \ , \tag{6.1}$$

其中 $y = y(t,\theta)$ 是一个世界线超场，(t,θ) 是世界线坐标， γ 是内部空间度量，且 $D^2 = i\partial_t$。当然，如果 M^{10-n} 是两个或更多其他流形的乘积，那么作用量 A_M 会进一步分解为与乘积中各个流形相关的作用量。

结果表明，无穷小变分

$$\delta y^I = \epsilon \alpha^I{}_{J_1\dots J_{m-1}} Dy^{J_1}\cdots Dy^{J_{m-1}} \ , \tag{6.2}$$

与 m-形式 α on M^{10-n} 相关联的是 A_M的一个（隐藏）对称性，当且仅当 α 是一个（标准）KY形式，其中 ϵ 是无穷小参数。下文将介绍若干例子：在这些 IIA 反德西特背景中，KY形式是其内部空间上的 TCFH 所产生的结果。通过这种方式，我们将建立 TCFH 与在此类背景中传播的探针的守恒律之间的联系。

6.2 TCFH 和 KY形式的例子

我们可以考虑许多 IIA 反德西特背景，例如参见 [30, 26, 31, 32, 33, 34, 35,36, 37]。鉴于本文旨在举例说明 TCFH 如何为自旋粒子探针带来对称性，我们不求面面俱到，而是重点关注作为相交膜近视界几何的反德西特背景 [38, 39, 40],另请参见 [41]。在接下来的分析中，我们将提出一个拟设，其中包含所讨论的相交膜近视界几何，并进而证明，与之相关的 TCFH 会在内部空间上产生 KY形式。这些形式又会为自旋粒子探针生成对称性，从而揭示 TCFH 与探针对称性之间的联系。

我们将用来构造适合本研究目的的反德西特解的翘曲反德西特背景内部空间上的约化场方程和Killing自旋子方程，其公式见 [28]。如前所述，这些方程是在对该理论在反德西特子空间上的场方程和Killing自旋子方程作适当求解，并辨认出这些背景内部空间上的其余方程后得到的。这里我们通常只列出这些方程中相关的部分；关于这些方程的推导和完整表达式，请读者参阅原始文献。

6.2.1 NS5膜上基本弦产生的反德西特$_3$ 解

反德西特$_3$ 解的一个例子，是NS5膜背景上基本弦的近视界几何所产生的解。这种构型在极端黑洞熵的微观弦理论计数中发挥了重要作用[42, 43]。包含此类解的一个拟设为

$$g = g_\ell(AdS_3) + g(\mathbb{R}^4) + g(S^3) \ , \quad H = p\,\mathrm{dvol}_\ell(AdS_3) + q\,\mathrm{dvol}(S^3) \ , \tag{6.3}$$

膨胀子为常数， $\Phi = \text{const}$，其余场均设为零，其中 $g_\ell(AdS_3)$ ($g(S^3)$)和 $\mathrm{dvol}_\ell(AdS_3)$ ($\mathrm{dvol}(S^3)$)分别表示半径为 ℓ (单位半径)的反德西特$_3$(S^3)的标准度规及其相应的体积形式， $g(\mathbb{R}^4)$是 $\mathbb{R}^4$ 和 p上的欧氏度规， $q \in \mathbb{R}$。从这里开始，在下面的所有示例中，我们将对反德西特$_n$ (S^k)度规和体积形式采用相同的约定—— $g(\mathbb{R}^m)$始终表示 $\mathbb{R}^m$上的欧氏度规。注意， $\mathbb{R}^4$可以替换为任意Ricci平坦流形，例如 K_3，但就本例而言，选择 $\mathbb{R}^4$ 已足够。此外，由于翘曲因子 A 为常数，且反德西特$_3$ 的半径 ℓ 保持任意，因此不失一般性，我们设 $A = 1$。另外，在对时空度规和H 进行可能的整体重标度后， S^3 的半径被设为 1。

要找到基于拟设 (6.3) 的解，必须在求解 p、 q 和 ℓ 在 $\mathbb{R}^4 \times S^3$ 内部空间上的场方程和Killing自旋子方程后，确定这些量。由于 IIA 4-形式通量为零，因此有 $X = Y = 0$。此外，直接比较 (3.1) 与 (6.3) 可知 $p = W$ 且$Z = q\mathrm{dvol}(S^3)$。

要确定剩余的常数 q 和 ℓ，首先考虑膨胀子 Φ的场方程，

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{12}Z^2 + \frac{1}{2}W^2 \equiv 0 \ , \tag{6.4}$$

这意味着 $q^2 = W^2 = p^2$。接下来，沿 S^3 方向的爱因斯坦场方程以及翘曲因子的场方程

$$\begin{aligned} R^{S^3}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}Z_{\alpha\gamma\delta}Z^{\gamma\delta}{}_{\beta} \equiv 2\,\delta_{\alpha\beta} \ , \\ \nabla^2 \log A &= -\frac{2}{\ell^2} + \frac{1}{2}W^2 \equiv 0 \ , \end{aligned} \tag{6.5}$$

分别给出 $p^2 = W^2 = 4$ 和 $\ell = 1$，即反德西特$_3$ 和 S^3 子空间具有相同的半径，且 p、$q = \pm 2$。

转而考察Killing自旋子方程（KSEs），为简便起见，聚焦于 σ_+上的方程。膨胀子KSE，$\mathcal{A}^{(+)}\sigma_+ = 0$，其中

$$\mathcal{A}^{(+)} = \frac{1}{12}\not{Z}\Gamma_{11} - \frac{1}{2}W\Gamma_z\Gamma_{11} \ , \tag{6.6}$$

给出条件 $\Gamma_{(3)}\Gamma_z\sigma_+ = -\sigma_+$ 前提是我们选取[12] $p = q$，其中 $\Gamma_{(3)}$ 是沿三维球面切向正交归一方向的三个伽马矩阵之积。附加的代数Killing自旋子方程，， $\Xi_+\sigma_+ = 0$，可见 [28] 其中

$$\Xi_+ = -\frac{1}{2\ell} + \frac{1}{4}W\Gamma_{11} \ , \tag{6.7}$$

该条件源自沿 z 方向对引力微子KSE的积分，得到条件 $\Gamma_{11}\sigma_+ = \sigma_+$，其中我们取 $p = 2$。因此，我们发现 σ_+ 是一个时空手征自旋子。对于 $p = -2$ 的解，可以采用与 $p = 2$类似的方法进行研究。

引力微子KSE（3.3）沿 $\mathbb{R}^4$ 表明，Killing 自旋子 σ_+ 满足条件 $\nabla^{\mathbb{R}^4}_i\sigma_+ = 0$，因此不依赖于 $\mathbb{R}^4$的坐标。此外，沿 S^3 的引力微子KSE可写为：

$$\nabla^{S^3}_\alpha\sigma_+ + \frac{1}{2}\Gamma_\alpha\Gamma_z\sigma_+ = 0 \ , \tag{6.8}$$

这里我们用到了条件 $\Gamma_{(3)}\Gamma_z\sigma_+ = -\sigma_+$ 和 $\Gamma_{11}\sigma_+ = \sigma_+$。这不会对 σ_+施加额外约束。因此，对 σ_+ 的唯一约束是 $\Gamma_{(3)}\Gamma_z\sigma_+ = -\sigma_+$ 和$\Gamma_{11}\sigma_+ = \sigma_+$，所以 σ_+ 有 4 个独立分量。对 σ_-和 $\tau_\pm$ 自旋子上的Killing自旋子方程进行类似分析，可得到另外 12 个独立的 Killing 自旋子，因此该解如预期那样保留了 1/2 的超对称性。请注意，若将 $\mathbb{R}^4$ 替换为 K_3 或任何其他 4 维超 K¨ahler 流形 Q^4，并选择 Q^4 的定向使其与条件$\Gamma_{(3)}\Gamma_z\sigma_+ = -\sigma_+$ 和 $\Gamma_{11}\sigma_+ = \sigma_+$相容，则该解仍将保留 1/2 的超对称性。自旋子 $\sigma_\pm$ 和 $\tau_\pm$ 相对于 X^4上的超 K¨ahler 度量的自旋联络是协变常数的。

(6.8的一个推论是，双线性量

$$(k^\pm)^{rs}_\alpha = \langle \sigma^r_\pm, \Gamma_\alpha\sigma^s_\pm\rangle \ , \quad (\omega^\pm)^{rs}_{\alpha\beta} = \langle \sigma^r_\pm, \Gamma_{\alpha\beta}\sigma^s_\pm\rangle \ , \quad (\varphi^\pm)^{rs}_{\alpha\beta\gamma} = \langle \sigma^r_\pm, \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\sigma^s_\pm\rangle \ , \tag{6.9}$$

是 S^3上的 CCKY形式，而双线性量

$$(\tilde{k}^\pm)^{\alpha}_{rs} = \langle \sigma^r_\pm, \Gamma_\alpha\Gamma_z\sigma^s_\pm\rangle \ , \quad (\tilde{\omega}^\pm)^{rs}_{\alpha\beta} = \langle , \sigma^r_\pm, \Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_z\sigma^s_\pm\rangle \ , \quad (\tilde{\varphi}^\pm)^{rs}_{\alpha\beta\gamma} = \langle \sigma^r_\pm, \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\Gamma_z\sigma^s_\pm\rangle \ , \tag{6.10}$$

是 K S^3 上的 Y 形式。后者为 S 上的自旋粒子作用量生成对称性 [3].

[12] $p = -q$ 情形的处理可直接由 $p = q$ 情形的处理得出。

6.2.2 一个来自相交 D2-膜和 D4-膜的反德西特$_2$ 解

一种包含两个 D2-膜和两个 D4-膜在 0 膜上相交的近视界几何的拟设

$$\begin{aligned} g &= g_\ell(AdS_2) + g(S^2) + g(\mathbb{R}^2) + g(\mathbb{R}^4) \ , \\ G &= \mathrm{dvol}_\ell(AdS_2) \wedge \alpha + \mathrm{dvol}(S^2) \wedge \beta \ , \end{aligned} \tag{6.11}$$

膨胀子为常数 Φ，且所有其他剩余场均设为零，其中 ℓ 是反德西特$_2$的半径， α 和 β 是 $\mathbb{R}^4$上的常数 2-形式。

假设 $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\langle \mathsf{e}_3,\mathsf{e}_4,\mathsf{e}_5,\mathsf{e}_6\rangle$，则存在一个 $SO(4)$ 变换，使得形式α 可写为 $\alpha = p\mathsf{e}^3 \wedge \mathsf{e}^4 + q\,\mathsf{e}^5 \wedge \mathsf{e}^6$。随后可利用 α 的各向同性群 $SO(2) \times SO(2)$，在不失一般性的前提下选取 β 为

$$\beta = r\,\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4 + s\,\mathbf{e}^5 \wedge \mathbf{e}^6 + a\,\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^5 + b\,\mathbf{e}^4 \wedge \mathbf{e}^6 + c\,\mathbf{e}^4 \wedge \mathbf{e}^5 \ , \tag{6.12}$$

其中 α 和 β 的所有分量都是 $\mathbb{R}$中的常数。

沿 $\mathbb{R}^4$ （两个指标不同时）的爱因斯坦方程蕴含 $cr = cs = cb = ca = 0$。因此，若 $c \neq 0$, $r = s = b = a = 0$。接着，沿 $\mathbb{R}^4$ 的其余爱因斯坦方程给出 $p = q = 0$。最后，拟设（6.11）的膨胀子 KSE为

$$(-\frac{1}{8}\not{X} + \frac{1}{4\cdot 4!}\not{Y})\eta_+ = 0 \ , \tag{6.13}$$

a并得到 $c = 0$。因此，这种情况下所有通量都消失，所以接下来我们取 $c = 0$.

令 $c = 0$，膨胀子KSE以及沿 $\mathbb{R}^4$ 的引力微子KSE，可将通量（6.11）写为

$$\begin{aligned} &\big(-p + qI_1 + \Gamma_{(2)}(-r + sI_1) - aI_2 - bI_1I_2\big)\eta_+ = 0 \ , \\ &\big(-p + qI_1 + \Gamma_{(2)}(-r + sI_1) - aI_2 - bI_1I_2\big)\Gamma_\mu\eta_+ = 0 \ , \quad \mu = 3,4,5,6 \end{aligned} \tag{6.14}$$

其中 $I_1 = \Gamma_{3456}$, $I_2 = \Gamma_{(2)}\Gamma_{45}$, $\Gamma_{(2)}$ 是沿切于 S^2 的正交归一方向的两个伽马矩阵的乘积，并且我们取 η_+ 沿 $\mathbb{R}^4$为常数。将上述方程的厄米分量和反厄米分量分开，并利用 $I_1\Gamma_\mu = -\Gamma_\mu I_1$ 以及 Γ_μ 与 I_2的对易关系，可得 $r, s = 0$ 以及

$$(qI_1 + p)\eta_+ = 0 \ , \quad (bI_1 - a)\eta_+ = 0 \ , \quad (aI_2 + p)\eta_+ = 0 \ . \tag{6.15}$$

通过将 η_+ 限制在 I_1 和 I_2的特征子空间内即可解出这些方程。进而可得，p, q, a, b 彼此成比例，比例因子为一个符号。因此，在所有情况下， $a^2 = b^2 = p^2 = q^2$。对于 η_- Killing 自旋子，也可进行类似分析。由于 I_1 和 I_2 在 η_+ 或 η_- 上的每个特征子空间维数均为 4，因此有 8 个 Killing 自旋子满足上述KSE。

利用 S^2 半径为 1 这一条件后，沿 S^2 的爱因斯坦方程表明 $a^2 = 1$。继而，翘曲因子 A 的场方程给出 $\ell = 1$。因此，反德西特$_2$ 和 S^2 具有相同的半径。其余所有场方程均得到满足。

由于沿 $\mathbb{R}^2$ 的引力微子KSE 已得到满足，接下来只需考察沿 S^2的引力KSE。该式可写为

$$\nabla^{S^2}_\alpha\eta_+ + \frac{p}{2}\Gamma_{34}\Gamma_\alpha\eta_+ = 0 \ . \tag{6.16}$$

这不会对 η_+ 施加任何额外条件， η_- 上对应的方程也同样如此。因此，该解保留了 $1/4$ 的超对称性。由此可知，沿 S^2 的 1-形式和 2-形式双线性量及其对偶要么是 KY 形式，要么是共形 Killing–Yano 形式。存在若干 KY 形式。例如，可以很容易地证明 $(k^{(\pm)})^{rs}_\alpha = \langle \eta^r_\pm, \Gamma_\alpha\eta^s_\pm\rangle$

以及 $(\tilde{k}^{(\pm)})^{rs}_{\alpha} = \langle \eta^r_{\pm}, \Gamma_\alpha \Gamma_{12} \eta^s_{\pm} \rangle$ 都是 KY 形式。KY 形式为在这些背景的内部空间中传播的自旋粒子生成对称性。

通过将 $\mathbb{R}^4$ 替换为任意其他四维超K¨ahler流形 Q^4，可以对该背景作一定程度的推广。在这种情况下， X 和 Y 选为

$$X = p^r \lambda_r \ , \quad Y = \mathrm{dvol}(S^2) \wedge a^r \lambda_r \ , \tag{6.17}$$

其中， λ 是与超复结构相关联的 Q^4 的三个 K¨ahler 形式，而 p^r 和a^r 是常数三维向量。在标架 $SO(4)$ 旋转下， p^r 和 a^r 都按 $SO(3)$ 向量变换。此外，三形式场强的磁性分量所满足的场方程意味着 $\delta_{rs} p^r a^s = 0$，也就是说，它们彼此正交。在这种情况下，存在一个 $SO(4)$ 旋转，使得 $p^r \lambda_r = \alpha$ ，其中 $p^2 = q^2$ 和 $a^r \lambda_r = \beta$ 如 (6.12) 中所示，且 $r = s = c = 0$ 和 $a^2 = b^2$。此外，应选择等式 $p = \pm q$ 和 $a = \pm b$ 中的相对符号，使得 α和 β 在 Q^4上具有相同的自对偶性质。之后，可以重复此前对 $\mathbb{R}^4$ 的分析，以求解 Killing自旋子方程和场方程，从而再次得到一个保留 $1/4$超对称性的解。 S^2 上的 KY 形式可按处理 $Q^4 = \mathbb{R}^4$的方式确定。

6.2.3 来自相交 D2 膜和 D4-膜的反德西特$_3$ 解

包含 D2 膜与 D4-膜相交于一条 1膜时的近视界几何反德西特$_2$ 的拟设为

$$g = g_\ell(AdS_3) + g(S^3) + g(\mathbb{R}^4) \ , \quad G = \mathrm{dvol}_\ell(AdS_3) \wedge \alpha + \mathrm{dvol}(S^3) \wedge \beta \ , \tag{6.18}$$

其中膨　胀子为常数 Φ ，其余所有场均设为零，其中 ℓ 为反德西特的半径 [3]
且 α 还　有 β 是在 $\mathbb{R}^4$上的常数 1-形式。

首先注意到，NS三形式的磁性分量对应的场方程意味着 $\alpha \wedge \beta = 0$ ，因此 α 和 β 共线，即它们成比例，故可写为 $\beta = p\alpha$。接下来， σ_+ 上的膨胀子KSE和 $\Xi_+ \sigma_+ = 0$ 处的代数Killing自旋子方程意味着

$$\big(\Gamma_{(3)} \Gamma_z + \frac{1}{p}\big)\sigma_+ = 0 \ , \quad \big(\frac{1}{\ell} + \not{\phi}\big)\sigma_+ = 0 \ , \tag{6.19}$$

其中 $\Gamma_{(3)}$ 是沿 S^3 的正交归一切向方向的三个伽马矩阵的乘积，也就是与 $\mathrm{dvol}_\ell(AdS_3)$ 对应的克利福德代数元素。膨胀子场方程给出$p = \pm 1$ ，因此 $\alpha^2 = \beta^2$。此外，翘曲因子场方程给出 $\alpha^2 = 4\ell^{-2}$。

考察沿 S^3 的爱因斯坦方程，可得

$$R^{S^3}_{\alpha\beta} = \frac{2}{\ell^2} \delta_{\alpha\beta} \ . \tag{6.20}$$

由于 S^3 的半径为单位值，因此可得 $\ell = 1$ ，从而 $\alpha^2 = \beta^2 = 4$。因此，反德西特$_3$ 与 S^3具有相同的半径。此外，可以验证，除沿 S^3的引力微子KSE外，其余所有场方程和Killing自旋子方程均满足。利用（6.19），该方程可写为

$$\big(\nabla^{S^3}_\gamma + \frac{1}{4} \Gamma_z \not{\phi} \Gamma_\gamma\big)\sigma_+ = 0 \ , \tag{6.21}$$

且不会对 σ_+ 施加额外条件。对其余 Killing 自旋子 σ_- 和 $\tau_\pm$ 也有类似的分析结果。因此，该解保留了 1/2 的超对称性。

接下来，可以考虑式（6.10）和（6.9）中的双线性量，并证明这些双线性量及其在 S^3 上的 Hodge 对偶要么是 KY 形式，要么是 CCKY 形式。前者会在 S^3上为自旋探针生成对称性。具体而言，$k^{(\pm)}$、 $\star\omega^{(\pm)}$ 和 $\varphi^{(\pm)}$ 都是 S^3上的 KY 形式。

6.2.4 相交 D2 膜和基本弦产生的反德西特$_2$ 解 **s**

一个包含两张 D2 膜与一条基本弦相交于一张 0 膜处的近视界几何的拟设是

$$
\begin{aligned}
&g = g_\ell(AdS_2) + g(S^3) + g(\mathbb{R}^5) \ , \\
&G = \mathrm{dvol}_\ell(AdS_2) \wedge X \ , \quad H = \mathrm{dvol}_\ell(AdS_2) \wedge W \ ,
\end{aligned} \tag{6.22}
$$

膨胀子 Φ 为常数，且所有其他剩余场均设为零，其中 X 和 W 分别是 $\mathbb{R}^5$上的一个 2-形式和一个 1-形式。

2-形式场强的磁性部分的场方程意味着 $i_W X = 0$。膨胀子场方程给出 $W^2 = 1/4\ X^2$，而翘曲因子场方程可表示为 $W^2 = \ell^{-2}$。

取 $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}\langle(\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots, \mathsf{e}_5)\rangle$，则存在一个 $SO(5)$变换（基可能需要重新标记），使得 $X = \lambda_1\, \mathsf{e}^1 \wedge \mathsf{e}^2 + \lambda_2\, \mathsf{e}^3 \wedge \mathsf{e}^4$ 且 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$。接下来，如果 λ_1 或 λ_2与 $i_W X = 0$同时为零，可以证明沿 $\mathbb{R}^5$ 方向的 η_+ 上的引力微子KSE不相容。因此，从现在起，我们取 $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$，并且由于 $i_W X = 0$，有 $W = p\, \mathsf{e}^5$。利用这一点，膨胀子KSE得到

$$
\big(\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 \Gamma_{1234} + p\Gamma_{12}\Gamma_{11}\Gamma_5\big)\eta_+ = 0 \ . \tag{6.23}
$$

这与沿着 $\mathbb{R}^5$ 的引力微子KSE 一起意味着

$$
(\lambda_2 \Gamma_{1234} + \lambda_1)\eta_+ = 0 \ , \quad (p\Gamma_{12}\Gamma_{11}\Gamma_5 + \lambda_1)\eta_+ = 0 \ . \tag{6.24}
$$

因此 $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = p^2 = W^2$。

沿着 S^3（其半径为 1）约化爱因斯坦方程，得到 $\lambda_1^2 = 4$。翘曲因子场方程则给出 $\ell = 1/2$。因此，反德西特$_2$ 子空间的半径是内部空间 S^3 的一半。接下来还需考察沿着 S^3 的引力微子KSE。它可以改写为

$$
\big(\nabla^{S^3}_\alpha + \frac{1}{4}\lambda_1 \Gamma_{12}\Gamma_\alpha\big)\eta_+ = 0 \ . \tag{6.25}
$$

这不会对 η_+施加任何额外条件。对 η_- Killing 自旋子也可以进行类似分析。因此，由于对 η_+ 的条件（6.24）以及对 η_-的类似条件，该解保留了四分之一的超对称性。

在 S^3 上可以考虑若干形式双线性，例如式（6.10）和（6.9）中的形式及其在 S^3上的对偶。由式（6.25）可知，它们全都是 KY 或共形 Killing–Yano。特别是，$k^{(\pm)}$、$\star\omega^{(\pm)}$ 和 $\varphi^{(\pm)}$ 是KY形式，因此会为在 S^3上传播的自旋粒子生成对称性。

7 总结

我们给出了大质量 IIA 翘曲反德西特背景的所有 TCFH。特别是，我们证明了超对称反德西特背景的形式双线性量满足关于 TCFH联络的共形 Killing–Yano 方程推广形式。此外，我们还探究了最小张量协变形式层次结构联络的一些性质，例如其约化全纯群。我们还研究了 TCFH 是否会为在反德西特背景内部空间中传播的探针带来隐藏对称性。为此，我们给出了一些反德西特背景的例子，即由相交 IIA 膜的近视界几何产生的背景，并证明其中一些形式双线性量是KY形式。因此，它们为在这类背景内部空间中传播的自旋粒子产生对称性。这

项工作与 [24, 25], 共同完成了对 10 维和 11 维中所有 II 型翘曲反德西特背景的 TCFH 的研究。

TCFH 与在超对称背景上传播的探针之对称性之间相互作用的范围仍有待厘清。确实存在许多这样的背景：其中的 TCFH 条件与形式双线性生成的变换使探针作用量保持不变所需的条件相吻合。例如，在杂化弦和公共扇区的情形中，所有形式双线性都能为某些弦和粒子探针生成对称性。然而，对于一般的 II 型理论，TCFH 与探针对称性之间的关系只能在分别考察每个背景的几何性质后，逐个加以揭示。困难既在于尚未对 II 型理论中的超对称背景进行分类，也在于可供考虑的探针种类繁多 [44] 。若要开展更系统的研究，就需要加深对 II 型理论超对称背景的理解，并更好地掌握探针作用量及其对称性。

致谢

JP 获得英国工程与自然科学研究委员会博士生奖学金资助，资助编号为 EP/R513064/1。

参考文献

[1] G. Papadopoulos, “扭曲形式层级、Killing-Yano 方程与超对称背景”，JHEP 07 (2020), 025 doi:10.1007/JHEP07(2020)025 [arXiv:2001.07423 [hep- th]].[2] J. Gutowski and G. Papadopoulos, “多形式修正狄拉克算子的特征值估计”，J. Geom. Phys. 160 (2021), 103954 doi:10.1016/j.geomphys.2020.103954[arXiv:1911.02281 [math.DG]].[3] B. Carter, “引力场 Kerr 族的全局结构”，Phys. Rev. 174 (1968) 1559.[4] R. Penrose, Ann. N.Y. Acad. Sci. 224 (1973) 125.[5] R. Floyd, Kerr 场的动力学。博士论文，伦敦（1973）。[6] S. Chandrasekhar, “Kerr 几何中的狄拉克方程解”，Proc. Roy. Soc. Lond. A 349 (1976) 571. [7] B. Carter, “弯曲时空中的 Killing 张量量子数与守恒流”，Phys. Rev. D 16 (1977) 3395.[8] B. Carter and R. G. Mclenaghan, “弯曲时空中狄拉克方程的广义总角动量算子”，Phys. Rev. D 19 (1979) 1093.[9] P. Krtous, D. Kubiznak, D. N. Page and V. P. Frolov, “高维中的 Killing-Yano 张量、二阶 Killing 张量与守恒量”，JHEP 0702 (2007) 004 [arXiv:hep- th/0612029].[10] F. De Jonghe, K. Peeters and K. Sfetsos, “弦理论中的 Killing-Yano 超对称性”, Class. Quant. Grav. 14 (1997) 35 [arXiv:hep-th/9607203].[11] Y. Chervonyi and O. Lunin, “弦理论中的 Killing（-Yano）张量”，JHEP 1509 (2015) 182 doi:10.1007/JHEP09(2015) 182 [arXiv:1505.06154 [hep-th]].[12] M. Cariglia, “经典与量子物理中的动力学隐藏对称性”, Rev. Mod. Phys. 86 (2014) 1283 doi:10.1103/RevModPhys.86.1283 [arXiv:1411.1262 [math-ph]].[13]V. Frolov, P. Krtous and D. Kubiznak, “黑洞、隐藏对称性与完全可积性”, Living Rev. Rel. 20 (2017) no.1, 6 doi:10.1007/s41114-017-0009-9[arXiv:1705.05482 [gr-qc]].[14] D. Kastor and J. Traschen, “由 Yano 张量导出的守恒引力荷”，JHEP 08 (2004), 045 doi:10.1088/1126-6708/2004/08/045 [arXiv:hep-th/0406052 [hep-th]].[15]G. Papadopoulos, “Killing-Yano 方程与 G-结构”，Class. Quant. Grav. 25 (2008), 105016 doi:10.1088/0264-9381/25/10/105016 [arXiv:0712.0542 [hep-th]].[16] P. S. Howe and U. Lindstr¨om, “关于（超）共形 Killing-Yano 张量的几点说明”，JHEP 11 (2018), 049 doi:10.1007/JHEP11(2018)049 [arXiv:1808.00583 [hep-th]]..[17] U. Lindstr¨om and O. Sarıo˘glu, “由 Killing–Yano 张量产生的新流”，Class. Quant. Grav. 38 (2021) no.19, 195011 doi:10.1088/1361-6382/ac1871 [arXiv:2104.12451 [hep-th]]..[18] U. Lindstr¨om and O. Sarıo˘glu, “无张力弦与 Killing（-Yano）张量”，《物理快报 B》829 (2022), 137088 doi:10.1016/j.physletb.2022.137088 [arXiv:2202.06542 [hep-th]].

[19] G. W. Gibbons、R. H. Rietdijk 和 J. W. van Holten，“天空中的超对称”，Nucl. Phys. B 404 (1993) 42 [arXiv:hep-th/9303112].[20]L. Brink、P. Di Vecchia 和 P. S. Howe，“自旋粒子经典与量子动力学的拉格朗日表述”，Nucl. Phys. B 118 (1977), 76-94 doi:10.1016/0550-3213(77)90364-9[21] G. Papadopoulos 和 E. P´erez-Bola˜nos，“TCFH、隐藏对称性与 M 理论背景”，Class. Quant. Grav. 39 (2022) no.24, 245015 doi:10.1088/1361-6382/aca1a2[arXiv:2201.11563 [hep-th]].[22] L. Grimanellis、G. Papadopoulos 和 J. Phillips，“TCFH、隐藏对称性与 II 型理论”，JHEP 07 (2022), 097 doi:10.1007/JHEP07(2022)097 [arXiv:2111.15405 [hep-th]].[23]G. Papadopoulos 和 E. P´erez-Bola˜nos，“D=4,5 最小超引力的对称性、自旋粒子与 TCFH”，《物理快报 B》819 (2021), 136441 doi:10.1016/j.physletb.2021.136441 [arXiv:2101.10709 [hep-th]].[24] G. Papadopoulos 和 E. P´erez-Bola˜nos，“D=11 反德西特背景的 TCFH 与隐藏对称性”，[arXiv:2206.04369 [hep-th]].[25] L. Grimanellis 和 G. Papadopoulos，“TCFH、IIB 翘曲反德西特背景与隐藏对称性”，[arXiv:2207.04431 [hep-th]].[26] L. J. Romans，“十维大质量 N=2 a 超引力”，《物理快报 B》169 (1986), 374 doi:10.1016/0370-2693(86)90375-8[27]U. Gran、J. Gutowski、U. Kayani 和 G. Papadopoulos，“IIA 视界附近的动力学对称性增强”，JHEP 06 (2015), 139 doi:10.1007/JHEP06(2015)139[arXiv:1409.6303 [hep-th]].[28] S. Beck、J. B. Gutowski 和 G. Papadopoulos，“IIA 翘曲通量反德西特与平直背景的超对称性”，JHEP 09 (2015), 135 doi:10.1007/JHEP09(2015)135 [arXiv:1501.07620[hep-th]].[29] U. Gran、J. B. Gutowski 和 G. Papadopoulos，“论超对称反德西特、德西特与闵可夫斯基通量背景”，Class. Quant. Grav. 35 (2018) no.6, 065016 doi:10.1088/1361-6382/aaac8c [arXiv:1607.00191 [hep-th]].[30] P. G. O. Freund 和 M. A. Rubin，《降维动力学》，《物理快报 B》97 (1980) 233.[31] B. S. Acharya、J. M. Figueroa-O’Farrill、C. M. Hull 和 B. J. Spence，圆锥奇点处的膜与全息，Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1999) 1249 [hep-th/9808014].[32] M. Cvetic、H. Lu、C. N. Pope 和 J. F. Vazquez-Poritz，翘曲时空中的反德西特，Phys. Rev. D 62 (2000) 122003 [hep-th/0005246].[33] D. Lust 和 D. Tsimpis，IIA 超引力的超对称反德西特(4)紧致化，JHEP 0502 (2005) 027 [hep-th/0412250].[34] D. Lust 和 D. Tsimpis，新的超对称反德西特(4) II 型真空，JHEP 0909 (2009)098 [arXiv:0906.2561 [hep-th]].[35] F. Apruzzi、M. Fazzi、A. Passias、D. Rosa 和 A. Tomasiello，II 型超引力的 AdS_6 解，JHEP 1411 (2014) 099 [勘误见 JHEP 1505 (2015) 012] [arXiv:1406.0852[hep-th]]。

[36] F. Apruzzi、M. Fazzi、D. Rosa 和 A. Tomasiello，II 型超引力的所有 AdS_7 解，JHEP 1404 (2014) 064 [arXiv:1309.2949 [hep-th]].[37] J. Gutowski 和 G. Papadopoulos，“论十维和十一维中的超对称反德西特$_6$ 解”，JHEP 12 (2017), 009 doi:10.1007/JHEP12(2017)009 [arXiv:1702.06048 [hep-th]].[38] G. Papadopoulos 和 P. K. Townsend，“相交 M 膜”，《物理快报 B》380 (1996), 273-279 doi:10.1016/0370-2693(96)00506-0 [arXiv:hep-th/9603087 [hep-th]].[39] A. A. Tseytlin，“M 膜的调和叠加”，Nucl. Phys. B 475 (1996), 149-163 doi:10.1016/0550-3213(96)00328-8 [arXiv:hep-th/9604035 [hep-th]].[40] J. P. Gauntlett、D. A. Kastor 和 J. H. Traschen，“M 理论中的重叠膜”，Nucl. Phys. B 478 (1996), 544-560 doi:10.1016/0550-3213(96)00423-3 [arXiv:hep-th/9604179[hep-th]].[41] H. J. Boonstra、B. Peeters 和 K. Skenderis，“膜交叉、反德西特时空与对偶超共形理论”，Nucl. Phys. B 533 (1998), 127-162 doi:10.1016/S0550- 3213(98)00512-4 [arXiv:hep-th/9803231 [hep-th]].[42] A. Strominger 和 C. Vafa，“贝肯斯坦–霍金熵的微观起源”，《物理快报 B》379 (1996), 99-104 doi:10.1016/0370-2693(96)00345-0 [arXiv:hep-th/9601029 [hep- th]].[43] C. G. Callan 和 J. M. Maldacena，“黑洞量子力学的 D 膜方法”，Nucl. Phys. B 472 (1996), 591-610 doi:10.1016/0550-3213(96)00225-8 [arXiv:hep- th/9602043 [hep-th]].[44] R. A. Coles 和 G. Papadopoulos，“一维超对称非线性 σ 模型的几何”，Class. Quant. Grav. 7 (1990), 427-438 doi:10.1088/0264- 9381/7/3/016