arXiv:2301.02544v2 [math.AP] 6 Feb 2023

阱中的一维非线性薛定谔方程的不变吉布斯测度

Van Duong Dinh 和 Nicolas Rougerie

摘要。我们研究势在无穷远处表现为 $|x|^s$ $(s > 1)$ 的带囚禁势的一维三次非线性薛定谔方程。我们构造与该方程相关的吉布斯测度，并证明该柯西问题在其支撑集上几乎处处全局适定。因此，该吉布斯测度确实在方程的流下保持不变。我们还讨论正则吉布斯测度（在 L^2 质量条件下）的构造与不变性，并对高于三次的高阶非线性作出评论。

目录

1. 引言.2 2. 主要结果.3 2.1. 随机初值柯西理论.3 2.2. 巨正则测度.5 2.3. 正则测度.7 2.4. 主要结果的可能推广.8 2.5. 论文结构.9 3. 巨正则测度.9 3.1. 基本估计与散焦情形.9 3.2. 聚焦测度.14 3.3. 近似测度.22 4. 柯西问题与不变测度：超调和情形.26 4.1. 确定性局部适定性.26 4.2. 测度不变性与整体适定性.29 5. 柯西问题与不变测度：（次）调和情形.36 5.1. 概率局部适定性.36 5.2. 测度不变性与整体适定性.39 6. 正则测度.46 6.1. 具有固定重整化质量的高斯测度.46 6.2. 以质量为条件的吉布斯测度.55 6.3. 以质量为条件的吉布斯测度的不变性.59 附录 A. 协方差算子的界.63 附录B. 基本泛函分析估计.64 附录 C. 平滑化谱投影算子的L^p-有界性.65 附录D. 特征值个数的估计.66 参考文献.69

日期：2023年1月。2020 数学主题分类。35Q55。关键词和短语。非线性薛定谔方程；不变吉布斯测度；谐振子。

1. 引言

我们研究受阱约束的一维三次非线性薛定谔方程的统计力学

$$\mathrm{i}\,\partial_t u = hu \pm |u|^2 u \tag{1.1}$$

关于 $\mathbb{R}$ 及其薛定谔算子

$$h := -\partial_x^2 + V(x),$$

其中 $V(x) \underset{|x|\to\infty}{\to} +\infty$ 是一个囚禁势。具体而言，我们构造相应的吉布斯概率测度，其形式上由 给出:

$$d\mu_\nu^{\mathrm{gc}}(u) = z_\nu^{-1} \exp\left(- \langle u, (h+\nu)u \rangle_{L^2} \mp \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u|^4 \right) du \tag{1.2}$$

and

$$d\mu_m^{\mathrm{c}}(u) = z_m^{-1} \mathbb{1}_{\left\{\int_{\mathbb{R}} |u|^2 = m\right\}} \mu_0^{\mathrm{gc}}(du) \tag{1.3}$$

并证明它们在（1.1）的流下具有不变性。对于这一非线性模型，这些测度对应于统计力学中众所周知的巨正则系综（（1.2），化学势为 $\nu \in \mathbb{R}$）以及正则系综（（1.3），粒子数/质量为 $m > 0$）。我们的主要物理动机来自玻色气体和玻色–爱因斯坦凝聚态的平均场近似 [37, 47, 51], ，因此我们将讨论限定于立方方程，它对应于粒子间的短程对相互作用。在这一背景下，测度（1.2）已在 [33, 34, 24, 25, 48] 中从多体量子力学严格推导得出。

关于这类测度在相应哈密顿流下不变性的问题，已有丰富的研究历史，下面我们将回顾其中的一些内容。众所周知，主要难点在于：一旦对上述测度作出严格定义（尤其在聚焦情形下，必须对 L^2 质量作截断，见（1.2））， 它们便定义在某些函数空间上，而这些空间的正则性／可积性水平使得构造（1.1）的流颇具挑战，甚至不可能。人们通常不依赖这样的确定性流，而是构造概率柯西理论，利用吉布斯测度的形式不变性来替代守恒律。决定正则性／可积性水平的核心问题数据，在我们的情形下是势 V在无穷远处的增长情况。我们假设它是 $s > 1$ 阶多项式，这正是测度（1.2）有意义的临界阶数（见下文）。

假设 1.1。 设 $V \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ 满足以下条件，其中某个 $s > 1$:
(i) 存在 $C \geq 1$，使得对所有 $|x| \geq 1$, $\frac{1}{C}\langle x\rangle^s \leq V(x) \leq C\langle x\rangle^s$。

(ii) 对任意 $j \in \mathbb{N}$，存在 $C_j > 0$，使得 $|\partial^j V(x)| \leq C_j \langle x\rangle^{s-j}$。

读者在下文中可以始终认为

$$V(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{s/2}, \tag{1.4}$$

尽管我们并不需要如此精确的公式。对于任意处于散焦情形（1.2）的 $s > 1$ （+ 式（1.1）中的符号）以及任意处于聚焦情形（ $s > 8/5$ （− 式（1.1）中的符号）的，我们将在测度的支撑集上构造一个全局时间的柯西理论。在 $s = 2$（谐振子）处存在显著的二分现象。事实上，对于 $s > 2$，基本上可以在适当的正则性层次上确定性地构造流（主要基于 [63, 64, 65]中的工具）；而对于 $s \leq 2$，则必须依赖初值随机化。因此，我们尤其关注 $s \leq 2$的情形，此时测度不支撑在 L^2 上，因此特别是（1.3）必须在重整化意义下理解（粗略地说， $m = \infty - m'$ 满足 $m' \in \mathbb{R}$）。

我们的结果推广了已知定理，并简化了其中一些定理的证明。事实上，对于周期性非线性薛定谔方程（$s = +\infty$ 形式上，即限制在紧致情形）

柯西理论是在 [1], 中建立的，并由此推出了 (1.2) 的不变性。随后，典范测度 (1.3) 在 [44] 中得以构造，并证明其具有不变性（另见 [6]）。在 [8] 中（另见 [16]），针对 1.2，证明了 ($s = 2$的不变性。其他所有情形（尤其是 1.3上的典范测度 $\mathbb{R}$，无论阱的类型如何），我们的结果似乎都是新的。特别是，这些结果回答了 [8, 定理 11] 之后提出的一个问题：对于 1.4，是否存在比 ($s = 2$更一般且在无穷远处具有相同行为的势。

我们考虑更一般情形 $s \neq +\infty$、2 的动机之一是，据我们所知，目前关于这一主题的所有方法都依赖于线性算子 $h = -\partial_x^2 + V(x)$ 的谱问题具有精确解。对特征函数的详细显式了解，被用于构造测度和流。对于 $s = +\infty$ （平面波 [1, 44]）和 $s = 2$ （与厄米多项式的联系 [8, 18,46]），情况确实如此；文献中考虑的其他情形亦然，例如圆盘或球面上的径向非线性薛定谔方程（与贝塞尔函数的联系 [4, 5, 59, 60]）。高维中所有已知的（非径向）结果 [2, 3, 19, 20, 21] 似乎都依赖于平面波。

本文提出一种较为宽松的柯西理论研究方法（尤其是针对 $s \leq 2$ 的概率方法），它较少依赖精确公式，并允许将上述推广应用于 $s < 2$。为此付出的代价是，我们不证明多线性估计，因此结果仅适用于较小的非线性项。我们可以考虑比三次非线性更一般的非线性项（即其行为如 $|u|^{\kappa-2}u$，适用于更一般的、依赖于 s 的 $\kappa > 2$），但为简洁起见，也因为三次非线性在物理上最为重要，我们仅对此方向作简要说明。

考虑一般的 s 还有另一个动机：在冷碱金属气体实验中，囚禁势可以相当一般。这些实验的第一性原理多体描述与上述形式体系之间的联系，在平衡态的静态层面由 [33, 34, 35, 24, 27, 26, 55] 建立，在动力学方面则由 [25, 48] 建立。我们针对 $2 < s < +\infty$ 所考虑的（散焦非线性）测度支撑集上的柯西理论，在 [25], 中被用作一项工作假设；鉴于我们的结果以及 [8], 将其结果推广到 $s \leq 2$ 将颇为有趣。

下一节将准确陈述我们的结果及相关评述。本文其余部分用于给出证明。

致谢。 本研究得到欧盟地平线2020研究与创新计划资助（资助协议 CORFRONMAT 编号 758620）。在发布本文的第一个版本后，我们与 T. Robert、K. Seong、L. Tolomeo 和 Y. Wang 就本文与他们近期论文 [46]之间的联系进行了有益交流。这促使我们在当前版本的文本中加入了若干评述。

2. 主要结果

2.1. 随机初值柯西理论。 在有限维情形下，可以考虑一个常微分方程组

$$\begin{cases} \partial_t x_j &= \frac{\partial H}{\partial \xi_j}, \\ \partial_t \xi_j &= -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \end{cases} \qquad j = 1, \cdots, n$$

其哈密顿量为 $H(x, \xi) = H(x_1, \cdots \ x_n, \xi_1, \cdots \ \xi_n)$。与该系统相关联的吉布斯测度定义为

$$d\mu(x, \xi) = \frac{1}{Z} e^{-H(x,\xi)} dx d\xi,$$

其中 $Z > 0$ 是一个归一化常数。由于勒贝格测度 $dxd\xi = \prod_{j=1}^n dx_j d\xi_j$ 的不变性（这得益于刘维尔定理），以及哈密顿量 H的守恒性，吉布斯测度 μ 在系统的时间演化下保持不变。也就是说，对于任意可测集 $A \subset \mathbb{R}^{2n}$， $\mu(A) = \mu(\Phi(t)(A))$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$均成立，其中 $\Phi(t)$是解映射。

方程（1.1）也具有哈密顿结构，即

$$\partial_t u = -i\frac{\partial H}{\partial \overline{u}},$$

其中 $H = H(u)$ 是如下给出的哈密顿量

$$H(u) = \langle u, hu\rangle_{L^2} \pm \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u|^4. \tag{Hamiltonian}$$

该哈密顿量在 (1.1) 的动力学下守恒，质量

$$M(u) = \int_{\mathbb{R}} |u|^2. \tag{Mass}$$

Foll按照有限维情形的思路，人们预期吉布斯测度 o f the form

$$d\mu(u) = \frac{1}{Z}e^{-H(u)}du \tag{2.1}$$

在 (1.1) 的动力学下保持不变。然而，上述表达式只是形式上的，因为不存在无限维勒贝格测度。

在开创性工作 [32], 中，Lebowitz、Rose 和 Speer 运用构造性量子场论的技术，研究了 [52, 29], 一维周期非线性薛定谔方程的吉布斯测度的可归一化性与不可归一化性。更准确地说，通过将 (2.1) 改写为

$$d\mu(u) = \frac{1}{Z}e^{\mp\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u|^4}e^{-\langle u,hu\rangle_{L^2}}du, \tag{2.2}$$

他们将 μ 定义为相对于高斯测度绝对连续的概率测度

$$d\mu_0(u) = \frac{1}{Z_0}e^{-\langle u,hu\rangle_{L^2}}du.$$

这里应将 h 理解为 $\mathbb{T}$上的 $-\partial_x^2+1$。对于任意$\theta<\frac{1}{2}$，上述内容都可以定义为 $H^\theta(\mathbb{T})$上的概率测度，其中 $H^\theta(\mathbb{T})$是环面上的索об列夫空间。对于聚焦非线性，吉布斯测度通过质量截断构造，即

$$d\mu(u) = \frac{1}{Z}e^{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u|^4}\mathbb{1}_{\{\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\le m\}}d\mu_0(u).$$

文献[32] 声称，该测度是可归一化的（即配分函数 Z是有限正数），只要 $2<p<6$ 对任意质量截断 $m>0$成立，并且 $p=6$ 对任意 $m<\|Q\|_{L^2}^2$成立，其中 Q 是 Gagliardo–Nirenberg 不等式的唯一（在对称变换意义下）最优函数

$$\|u\|_{L^6(\mathbb{R})}^6 \le C_{\rm opt}\|\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^4.$$

然而， [32] 中关于可归一化性的概率论证明存在一个漏洞，正如[13] 中所指出的，并在 $p<6$ 中针对该问题进行了修正（详情见 [43, 引言] ）。后来，Bourgain [1] 采用解析的傅里叶方法给出了另一种证明：当 $2<p<6$ 且 $m>0$任意时，以及当 $p=6$ 且 $m>0$ 足够小时，可归一化性成立。最近，Oh、Sosoe 和 Tolomeo [43] 证明了当 $p=6$ 且 $m\le \|Q\|_{L^2}^2$ 时可归一化性成立，从而彻底弥补了 [32] 中的漏洞；更值得注意的是，他们将结果推广到了这样一个 L^2 质量取值：此时非线性薛定谔方程动力学会发生爆破解。

在 [1], Bourgain 的工作中，他研究了一维周期非线性薛定谔方程的吉布斯测度，并证明了 μ 在非线性薛定谔方程流下的不变性。这里，不变性是指，对于任意可测集 $A\subset H^\theta(\mathbb{T})$，存在某个 $\theta<\frac{1}{2}$，且对任意 $t\in\mathbb{R}$，都有 $\mu(A) = \mu(\Phi(t)(A))$。此外，存在一个具有满 μ-测度的集合，使得对属于该集合的所有初始数据，解都在时间上整体存在。此类结果通常称为几乎必然全局存在。在这一背景下，不变吉布斯测度可替代守恒量，用以控制解随时间的增长。这使得局部时间解几乎必然可以延拓为整体解。

还有许多其他研究致力于探讨其他色散方程的不变吉布斯测度，以及吉布斯测度支撑集上的几乎必然全局存在性（例如， [66, 2]关于周期性非线性薛定谔方程， [59, 60] 关于圆盘上的非线性薛定谔方程，[23, 67, 10, 9, 17, 4] 关于非线性波动方程，[42, 41] 关于KdV型系统，以及 [38, 58] 关于一维导数型非线性薛定谔方程，.....）。

在上述研究中，研究者在紧致情形（环面或球）下构造了不变吉布斯测度。针对非紧致框架中的不变吉布斯测度，相关研究则少得多（例如， [8, 18, 46] 研究了带调和势的非线性薛定谔方程，[11] 研究了乘以足够光滑且可积函数的一维三次非线性薛定谔方程，[57, 45] 则研究了具有（反）调和势时的几乎必然适定性）。

2.2. **巨正则测度**。 本文的首要目标是将 Burq、Thomann 和 Tzvetkov 的结果 [8] 推广到具有满足假设 1.1的势的一维三次非线性薛定谔方程。我们首先回顾测度的严格定义（1.2），并设 $\nu = 0$以简化记号。

我们从高斯测度的定义开始。在假设1.1下，线性算子 h 是厄米的，且具有紧预解式。其谱分解可写为

$$h = \sum_{j\geq 1} \lambda_j |u_j\rangle\langle u_j| \tag{2.3}$$

其中正特征值构成非递减序列 $\lambda_j \to \infty$，相应的特征函数为 u_j。对于 $\theta \in \mathbb{R}$，我们引入与 h 相关的索 об 列夫空间，定义如下：

$$\mathcal{H}^\theta := \left\{ u = \sum_{j\geq 1} \alpha_j u_j : \|u\|_{\mathcal{H}^\theta} := \Big(\sum_{j\geq 1} \lambda_j^\theta |\alpha_j|^2 \Big)^{1/2} < \infty \right\} \tag{2.4}$$

with

$$\alpha_j = \langle u_j, u \rangle_{L^2} . \tag{2.5}$$

对于 $\beta \geq 0$ 和 $1 \leq p \leq \infty$，我们定义

$$\mathcal{W}^{\beta,p} := \left\{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}) : h^{\beta/2} u \in L^p(\mathbb{R}) \right\} \tag{2.6}$$

其赋范为

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} := \|h^{\beta/2} u\|_{L^p}.$$

这里 $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上缓增分布的空间。当 $p = 2$ 时，实际上有 $\mathrm{W}^{\beta,2} \equiv \mathrm{H}^\beta$。

定义 2.1 (**高斯测度**)。
设 $\Lambda \geq \lambda_1$。在

$$E_{\leq \Lambda} := \operatorname{span} \{ u_j : \lambda_j \leq \Lambda \}, \tag{2.7}$$

我们定义有限维高斯测度

$$d\mu_0^{\leq \Lambda}(u) := \prod_{\lambda_j \leq \Lambda} \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j |\alpha_j|^2} d\alpha_j, \tag{2.8}$$

其中 α_j如 (2.5) 中所示，且 $d\alpha_j = d\mathrm{Re}(\alpha_j) d\mathrm{Im}(\alpha_j)$ 是 $\mathbb{C}$上的勒贝格测度 .

测度序列 $\{\mu_0^{\leq \Lambda}\}_{\Lambda \geq \lambda_1}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}^\theta$ 中对任意 $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$ （满足 $s > 1$，如假设 1.1所示）均具有紧性。因此，它在该空间上定义了概率测度 μ_0，其在 $\mu_0^{\leq \Lambda}$ 上的柱面投影为 $E_{\leq \Lambda}$。

紧性在 [33, 例 32]中得到证明。为方便读者，我们在下文附录 A 中回顾主要论证。随后，无穷维测度的存在性由 [54, 引理 1]得出。

对于相互作用测度，我们有以下结果。

命题 2.2（巨正则测度）。
设 $s>1$，V 满足假设 *1.1*，且 μ_0 如上所定义。*(1)* 散焦情形。对于任意 $s>1$，映射 $u\mapsto e^{-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u|^4}$ 属于 $L^1(d\mu_0)$。因此，

$$d\mu(u):=\frac{1}{Z}e^{-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u|^4}d\mu_0(u) \tag{2.9}$$

可作为概率测度成立。
（2） 聚焦情形，$s>2$。对于任意 $s>2$ 以及任意 $m>0$，映射 $u\mapsto e^{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u|^4}\mathbb{1}\{\int_{\mathbb{R}}|u|^2\leq m\}$ 属于 $L^1(d\mu_0)$。因此，

$$d\mu(u):=\frac{1}{Z}e^{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u|^4}\mathbb{1}_{\{\int_{\mathbb{R}}|u|^2\leq m\}}d\mu_0(u) \tag{2.10}$$

可作为概率测度成立。
(3) 聚焦情形，$\frac{8}{5}<s\leq 2$。对于任意 $1<s\leq 2$，序列 $\{\mathcal{M}^{\leq\Lambda}(u)\}^{\Lambda\geq\lambda_1}$，其满足

$$\mathcal{M}_{\leq\Lambda}(u):=\sum_{\lambda_j\leq\Lambda}\left(|\alpha_j|^2-\int|\alpha_j|^2d\mu_0(u)\right),$$

在 $L^2(d\mu_0)$ 中是柯西列。因此它有一个极限（即重整化质量），记作$\mathcal{M}(u)$。此外，对于任意$\frac{8}{5}<s\leq 2$和任意 $m>0$，映射 $u\mapsto e^{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u|^4}\mathbb{1}_{\{|\mathcal{M}(u)|\leq m\}}$ 属于$L^1(d\mu_0)$，因此

$$d\mu(u):=\frac{1}{Z}e^{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u|^4}\mathbb{1}_{\{|\mathcal{M}(u)|\leq m\}}d\mu_0(u) \tag{2.11}$$

作为概率测度是有意义的。

散焦情形针对 $s>2$ 的处理见[33, 第 5] 节，针对$s>1$的处理见 [34, 第 3] 节，这是对 $s=2$的 [8, 第 3] 节的推广。下面回顾相关论证。针对 $s\neq 2$、$+\infty$ 定义聚焦测度是新的。对于调和势 $V(x)=|x|^2$，测度的构造见[8, 第 3] 节，其中采用了连续截断$\zeta(\mathcal{M}(u))$，而非式（2.11）中的粗糙截断。我们将在下面的第 3 节证明上述定义是有意义的。

对于这些测度在适当定义的流下的演化，我们有如下结果。

定理 2.3(巨正则测度的不变性)。
设 $s>1$ 和 V满足假设 (1.1)。进一步假设，对于聚焦非线性，$s>\frac{8}{5}$。则存在 $\theta<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$ 以及一个集合 $\Sigma\subset\mathcal{H}^\theta$，使得：
(1) $\mu(\Sigma)=1$；*(2)* 方程（*1.1*）对于初始数据 $f\in\Sigma$ 是整体适定的，其流为 $\Phi(t)$：$\Sigma\mapsto\Sigma$；*(3)* μ 在方程（*1.1*）的流下保持不变，即对于所有可测集 $A\subset\Sigma$，$\mu(\Phi(t)A)=\mu(A)$；*(4)* 存在 $C>0$，使得对于任意 $f\in\Sigma$，

$$\|\Phi(t)f\|_{\mathcal{H}^\theta}\leq C\left(\omega(f)+\log^{\frac{1}{2}}(1+|t|)\right),\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

其中某个常数 $\omega(f)$取决于 f。

我们证明中的一个关键步骤是以下估计（例如参见 [33, 34, 35]），它涉及与 μ_0相关的粒子密度矩阵

$$\int|u^{\otimes k}\rangle\langle u^{\otimes k}|d\mu_0(u)\leq k!(h^{-1})^{\otimes k},\quad\forall k\geq 1. \tag{2.12}$$

另一个观察（见引理 3.3）是，对于 $0\leq\beta<\frac{1}{2}$，函数

$$x\mapsto h^{\beta-1}(x,x)\in L^p(\mathbb{R}) \tag{2.13}$$

对所有 $\max\left\{1, \frac{2}{(1-2\beta)}\right\} < p \leq \infty$，其中

$$h^{-1}(x,y) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j^{-1} u_j(x)\overline{u}_j(y) \tag{2.14}$$

是 h^{-1}的积分核。结合这一性质与（2.12），我们可以证明（见引理 3.4），高斯测度 μ_0 支撑在索博列夫空间 $\mathrm{W}^{\beta,p}$上。此外，存在 $C, c > 0$ 使得

$$\int e^{c\|u\|^2_{\mathcal{W}^{\beta,p}}} d\mu_0(u) \leq C$$

只要 $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$且 $p >$最大值 $\left\{2, \frac{4}{(1-2\beta)}\right\}$是一个偶整数。因此，我们能够对所有 $s > 1$定义散焦吉布斯测度。结合 [7], 中的 Gagliardo–Nirenberg 不等式，我们对 $s > \frac{8}{5}$ 定义聚焦测度（这一限制或许只是技术性的）。证明（2.13）时，我们采用 [22] 中的李布–思林型不等式，以及沙滕理想中算子的标准不等式（Hölder 和 Kato–Seiler–Simon 不等式 [53]），而不是对单个特征函数的 L^p界。这使得该方法适用于一般势。由于 μ_0 在与 h相关的线性薛定谔流下保持不变，因此对任意时刻 t,

$$\|e^{-\mathrm{i}\,th}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} < \infty \quad \mu_0 \text{ almost surely.}$$

结合分数阶链式法则，我们可以直接得到如下估计，例如：

$$\|(e^{-\mathrm{i}\,th}u)^2\|_{\mathcal{H}^\beta} < \infty \quad \mu_0 \text{ almost surely}$$

在 $s = 2$ 处，这一结果最初是通过对厄米函数使用双线性估计而得到的，见 [8, Equation (1.2)] 。上述概率斯特里卡茨估计是我们构建局部柯西理论的重要工具。

对于超调和势，即 $s > 2$，由于吉布斯测度支撑在基于 L^2、指标为正的索博列夫空间上，因此有望在其支撑集上获得确定性局部适定性。事实上，这是可行的：Yajima 和 Zhang 证明了带导数损失的斯特里卡茨估计 [64]。对于（次）调和势，即 $1 < s \leq 2$, 吉布斯测度定义在基于 L^2、指标为负的索博列夫空间上，因此很难在其支撑集上得到令人满意的确定性局部理论。在 [8], 中，已有工作利用精细的多线性估计证明了这样的确定性结果，而该估计高度依赖于 [31] 中得到的特征函数导数的 L^p 界。这里我们给出一种更简洁的论证，并证明该方程几乎必然局部适定。

2.3. **正则测度**。 接下来，我们讨论在固定质量条件下构造正则吉布斯测度及其不变性（1.3）。迄今为止，这类测度仅针对一维周期非线性薛定谔方程 [44, 13, 14] 和一维周期导数非线性薛定谔方程 [6]构造过。据我们所知，目前尚无在非紧情形下构造正则吉布斯测度的研究。

为了使（1.3）具有严格的数学意义，我们沿用 [44] 的基本策略。首先，我们构造一个在 L^2 质量条件下的高斯测度。对于 $s \leq 2$ ，其几乎必然为无穷大，因此我们需要使用命题 2.2第（3）项中定义的重整化质量。为统一表述，我们始终将高斯测度限制在重整化质量条件下，同时注意到，当 $s > 2$ 时， L^2 质量几乎必然有限，且等于重整化质量加上其相对于高斯测度的有限期望。

更确切地说，对于 $m \in \mathbb{R}$ 和 $m > -\mathrm{Tr}[h^{-1}]$ 若 $s > 2$，我们将取近似正则高斯测度的极限 $\varepsilon \to 0^+$

$$d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) = \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}} \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}} d\mu_0(u), \tag{2.15}$$

其中$\mathcal{M}(u)$ 与命题 2.2中的定义相同。由于我们的目标是对一个零概率事件进行条件化，因此归一化常数

$$Z_0^{m,\varepsilon} = \mu_0 \left(m - \varepsilon < \mathcal{M}(u) < m + \varepsilon \right)$$

当趋于零时 $\varepsilon \to 0^+$，因此直接将极限代入（2.15）并不简单。不过，我们证明了

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} Z_0^{m,\varepsilon} > 0$$

从而该定义

$$d\mu_0^m(u) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} d\mu_0^{m,\varepsilon}(u)$$

确实给出了一个概率测度。于是，相互作用正则 Gibbs 测度定义为

$$d\mu^m(u) = \frac{1}{Z^m} e^{\mp \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^4} d\mu_0^m(u).$$

其关于非线性薛定谔方程流的不变性直接源于定理 2.3 中标准 Gibbs 测度的不变性。我们将其总结为以下定理。

定理 2.4 （正则吉布斯测度）。
令 $s > 1$， V满足假设 *1.1*， $m \in \mathbb{R}$，并假设 $m > -$迹$[h^{-1}]$ 若 $s > 2$。此外，假设 $s > \frac{8}{5}$ 对于聚焦非线性成立。那么 μ^m 可定义为一个概率测度。此外，它在方程 (1.1)的流下保持不变（定义见定理 *2.3*）。

正则测度此前已在 [44, 6]中构造。在这些文献中，正则吉布斯测度的归一化是通过大偏差原理、基于 L^2 的 Sobolev 嵌入（例如，$\mathcal{H}^{1/4} \subset L^4(\mathbb{R})$）以及对二进制分块求和来证明的。将这一论证应用于我们的情形，会因为使用基于 $s > 4$ 的 Sobolev 嵌入而对 L^2 施加不必要的限制。我们采用不同的方法，主要依据定理 L^p2.3下方讨论中提及的几乎处处 正则性。这使我们能够在定义巨正则测度后立即定义正则吉布斯测度。

2.4. **主要结果的可能推广**。 在转向本文中较为技术性的部分之前，我们强调，本文提出的方法可以推广到具有非谐势（如假设 1.1 中所述）和更一般非线性项的一维非线性薛定谔方程，即

$$\mathrm{i}\,\partial_t u = hu \pm |u|^{\kappa-2}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{2.16}$$

其中 $\kappa > 2$。更具体地说，我们有以下观察：

1. 关于（大正则）吉布斯测度的构造（见注释 3.1 和6.2），通过对我们的论证作直接调整，可以涵盖以下情形：

- 散焦情形，其中 $\max\left\{2, \frac{4}{s}\right\} < \kappa < \infty$。
- 聚焦情形，其中 $s > 2$ 和 $2 < \kappa < 6, m > 0$，或其中 $\frac{14}{9} < s \leq 2$， $m > 0$ 和

$$\frac{4}{s} < \kappa < \frac{3s + 2 + \sqrt{9s^2 + 4s - 28}}{2}.$$

2. 假设（大正则）吉布斯测度可以构造（特别是在上述情形中），我们的方法证明，在以下情形下它在流作用下保持不变（见注释 4.1， 5.1和6.2）：

- 超调和势 $s > 2$ 满足 $2 < \kappa < 4 + s$。
- （次）调和势 $s \leq 2$ 且满足 $\frac{4}{s} < \kappa < 6$。

在近期的一项工作中，Robert 等人 [46] 研究了具有调和势的聚焦吉布斯测度 $V(x) = |x|^2$。他们证明，该测度可归一化当且仅当$2 < \kappa < 6$ 且 $m > 0$。文献 [46] 中关于可归一化性的证明基于 Boué-Dupuis 变分公式。当 $s = 2$时，我们的方法也能证明，对于任意 $2 < \kappa < 6$ 和 $m > 0$，聚焦吉布斯测度均可归一化，从而为文献[46]中的部分结果提供了另一种证明。反过来，若结合第3节中的一些估计，文献 [46] 中的论证[1] 允许 $s < 2$ 和$\frac{4}{s} < \kappa < 2s + 2$的情形下也能构造该测度。如上所述，我们构建的整体概率柯西理论也适用于这种情形。

对于非线性项的高次幂（$\kappa \geq 4 + s$ 当 $s > 2$，或 $\kappa \geq 6$ 当 $s \leq 2$），除 $s = 2$ 的情形外，散焦吉布斯测度的不变性仍是一个未解决问题，参见 [8] 。

2.5. **论文结构**。 第 3 节致力于构造与（1.1）相关的吉布斯测度。我们还定义并证明了一些近似测度的性质，这些性质是证明测度不变性所必需的。在第 4 节中，我们研究超调和势情形下的柯西问题， $s > 2$。对于（次）调和势， $s \leq 2$，更困难的柯西问题将在第 5 节讨论。第 6 节将讨论质量条件下典范测度的构造及其不变性。为方便读者，附录中回顾了全文所用的一些文献中的估计和不等式。

3. 巨正则测度

3.1. **基本估计与散焦情形**。 高斯测度的定义μ_0 已在定义 2.1中回顾。我们的若干估计将基于以下观察。我们引用自 [33] ，但这可能是众所周知的结论，另见例如 [24, 25] 及其中的参考文献。

引理 3.1 （**高斯测度的密度矩阵**）。
设 $s < 2$。则存在唯一测度μ_0 定义在 $\mathcal{H}^\theta$ 上，使得对于每个 $\Lambda \geq \lambda_1$， $\mu_0^{\leq\Lambda}$ 是 μ_0 在$E_{\leq\Lambda}$ 上的柱面投影。此外，对于每个整数 $k \geq 1$，

$$\int |u^{\otimes k}\rangle\langle u^{\otimes k}| d\mu_0(u) \leq k!(h^{-1})^{\otimes k} \tag{3.1}$$

作为算子。特别地，对于任意自伴算子 A，

$$\int |(Au)^{\otimes k}\rangle\langle (Au)^{\otimes k}| d\mu_0(u) \leq k!(Ah^{-1}A)^{\otimes k}. \tag{3.2}$$

如 [33, 引理 3.3], 维克定理对高斯测度给出

$$\int |u^{\otimes k}\rangle\langle u^{\otimes k}| d\mu_0(u) = k! P_s^k (h^{-1})^{\otimes k} P_s^k,$$

其中 P_s^k是到 k-对称函数上的正交投影，即

$$P_s^k v(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Pi(k)} v\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}\right)$$

$\Pi(k)$ 是所有 $\{1, \cdots \quad k\}$ 的置换构成的群。由于 P_s^k与 $(h^{-1})^{\otimes k}$ 对易，因此有

$$(h^{-1})^{\otimes k} = P_s^k (h^{-1})^{\otimes k} P_s^k + (1 - P_s^k)(h^{-1})^{\otimes k}(1 - P_s^k)$$

且（3.1）得证。

[1]这是我们从 Yuzhao Wang 和 Leonardo Tolomeo 那里了解到的。

作为密度矩阵的直接推论，我们得到相对于高斯测度 μ_0 的 H^θ 范数衰减。

引理 3.2 （L^2**-正则性（高斯测度的支撑集上）**）。
设 $s>1$， V 满足假设 *1.1*，且 $\theta<\frac{1}{2s}$。那么存在 $C,c>0$ 使得

$$\int e^{c\|u\|^2_{\mathcal{H}^\theta}}d\mu_0(u)\leq C. \tag{3.3}$$

特别地，对所有 $\lambda>0$

$$\mu_0\left(u\in\mathcal{H}^\theta:\|u\|_{\mathcal{H}^\theta}>\lambda\right)\leq Ce^{-c\lambda^2}. \tag{3.4}$$

证明。只需证明（3.3），因为（3.4）可由（3.3）和切比雪夫不等式推出。我们写作

$$\int e^{c\|u\|^2_{\mathcal{H}^\theta}}d\mu_0(u)=\sum_{k\geq 0}\frac{c^k}{k!}\int\|u\|^{2k}_{\mathcal{H}^\theta}d\mu_0(u)$$

并注意到

$$\begin{aligned}\int\|u\|^{2k}_{\mathcal{H}^\theta}d\mu_0(u)&=\int\underbrace{\|u\|^2_{\mathcal{H}^\theta}\cdots\|u\|^2_{\mathcal{H}^\theta}}_{k\text{ times}}d\mu_0(u)\\&=\int\cdots\int\Big(\int|h^{\theta/2}u(x_1)|^2\cdots|h^{\theta/2}u(x_k)|^2d\mu_0(u)\Big)dx_1\cdots dx_k.\end{aligned}$$

记 $\delta_x^{(\eta)}$ 为位于 x 处的狄拉克 δ 函数的光滑化，使得

$$\delta_x^{(\eta)}\underset{\eta\to 0}{\to}\delta_x$$

作为测度。将其视为相应的乘法算子，我们有

$$\begin{aligned}&\int|h^{\theta/2}u(x_1)|^2\cdots|h^{\theta/2}u(x_k)|^2d\mu_0(u)\\&\quad=\lim_{\eta\to 0}\mathrm{Tr}\left[\delta_{x_1}^{(\eta)}\otimes\cdots\otimes\delta_{x_k}^{(\eta)}\left(\int|(h^{\theta/2}u)^{\otimes k}\rangle\langle(h^{\theta/2}u)^{\otimes k}|d\mu_0(u)\right)\delta_{x_k}^{(\eta)}\otimes\cdots\otimes\delta_{x_1}^{(\eta)}\right].\end{aligned}$$

但（3.1）意味着

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left[\delta_{x_1}^{(\eta)}\otimes\cdots\otimes\delta_{x_k}^{(\eta)}\left(\int|(h^{\theta/2}u)^{\otimes k}\rangle\langle(h^{\theta/2}u)^{\otimes k}|d\mu_0(u)\right)\delta_{x_k}^{(\eta)}\otimes\cdots\otimes\delta_{x_1}^{(\eta)}\right]\\&\qquad\leq k!\mathrm{Tr}\left[\delta_{x_1}^{(\eta)}\otimes\cdots\otimes\delta_{x_k}^{(\eta)}\left(h^{\theta-1}\right)^{\otimes k}\delta_{x_k}^{(\eta)}\otimes\cdots\otimes\delta_{x_1}^{(\eta)}\right]\end{aligned}$$

并且由于

$$\mathrm{Tr}\left[\delta_x^{(\eta)}h^{\theta-1}\delta_x^{(\eta)}\right]=\iint\delta_x^{(\eta)}(y_1)h^{\theta-1}(y_1,y_2)\delta_x^{(\eta)}(y_2)dy_1dy_2$$

我们可以令 $\eta\to 0$，从而推出

$$\int|h^{\theta/2}u(x_1)|^2\cdots|h^{\theta/2}u(x_k)|^2d\mu_0(u)\leq k!h^{\theta-1}(x_1,x_1)\cdots h^{\theta-1}(x_k,x_k).$$

这意味着

$$\int\|u\|^{2k}_{\mathcal{H}^\theta}d\mu_0(u)\leq k!\Big(\int_{\mathbb{R}}h^{\theta-1}(x,x)dx\Big)^k=k!\left(\mathrm{Tr}[h^{-(1-\theta)}]\right)^k.$$

特别地，我们得到

$$\int e^{c\|u\|^2_{\mathcal{H}^\theta}}d\mu_0(u)\leq\sum_{k\geq 0}\left(c\mathrm{Tr}[h^{-(1-\theta)}]\right)^k\leq C$$

只要 c迹$[h^{-(1-\theta)}]<1$。这就证明了（3.3）。注意，由于$[h^{-(1-\theta)}]<\infty$ （参见引理 A.1），有 $\theta<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$。

根据（3.1），高斯测度典型样本的正则性与协方差的性质相关 h^{-1}（薛定谔算子的格林函数）。当 $s>2$时，构造（至少是散焦非线性的）相互作用测度相对容易，因为 h^{-1} 是迹类算子，参见 [33, 例 52] 和附录 A。对于 $s\le 2$，以下引理在我们的分析学中起着关键作用。它推广了 [34,第 3]节中的估计。

引理 3.3 (**密度的可积性**)。
设 $s>1$，V满足假设 *1.1*，且 $0\le\beta<\frac{1}{2}$。则 $x\mapsto h^{\beta-1}(x,\ x)$ 属于 $L^p(\mathbb{R})$对所有

$$\max\left\{1,\frac{2}{s(1-2\beta)}\right\}<p\le\infty,$$

其中 $h^{\beta-1}(x,\ y)$ 是 $h^{\beta-1}$ 的积分核，定义同 (2.14)。

证明。只需证明，对于任意满足 $\chi^2\in L^q(\mathbb{R})$ 且具有 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的乘法算子 $\chi\ge 0$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}}\chi^2(x)h^{\beta-1}(x,x)dx=\mathrm{Tr}[\chi h^{\beta-1}\chi]=\|h^{(\beta-1)/2}\chi\|_{\mathfrak{S}^2}^2\le C\|\chi^2\|_{L^q(\mathbb{R})},\tag{3.5}$$

其中对于任意 $1\le p\le\infty$,

$$\mathfrak{S}^p:=\left\{A:\|A\|_{\mathfrak{S}^p}:=\left(\mathrm{Tr}[(A^*A)^{p/2}]\right)^{1/p}<\infty\right\}$$

是 p希尔伯特空间 [50, 53] ($p=1$、2、∞ 阶 Schatten 类算子（分别对应于迹类、希尔伯特-施密特算子和紧算子）。

对于 $0<\alpha<\frac{1-\beta}{2}$，记作

$$h^{(\beta-1)/2}\chi=h^{\alpha+(\beta-1)/2}\left(h^{-\alpha}(1-\partial_x^2)^{\alpha}\right)\left((1-\partial_x^2)^{-\alpha}\chi\right).$$

我们有

$$h^{\alpha+(\beta-1)/2}\in\mathfrak{S}^{2p}\iff\mathrm{Tr}\left[h^{-2p\left(\frac{1-\beta}{2}-\alpha\right)}\right]<\infty,$$

当（见引理 A.1）成立时

$$2p\left(\frac{1-\beta}{2}-\alpha\right)>\frac{1}{2}+\frac{1}{s}.$$

由于 $h\ge\frac{1}{2}(-\partial_x^2+\lambda_1)$ 的最低特征值为 $\lambda_1>0$，且 h，我们推知 $h\ge C(1-\partial_x^2)$，其中 $C>0$。由于 $\alpha<\frac{1}{2}$ 的算子单调性 $x\mapsto x^{2\alpha}$ （见 [12, 定理 2。6]）可得

$$h^{2\alpha}\ge C^{2\alpha}(1-\partial_x^2)^{2\alpha}$$

or

$$h^{-\alpha}(1-\partial_x^2)^{2\alpha}h^{-\alpha}\le\frac{1}{C^{2\alpha}}$$

因此，对于 $0<\alpha<(1-\beta)/2$，$h^{-\alpha}(1-\partial_x^2)^{\alpha}$ 是一个有界算子。

由 Kato–Seiler–Simon 不等式（例如参见 [53, 定理 4.1]），对于 $1\le r<\infty$,

$$\|f(-\mathrm{i}\nabla)g(x)\|_{\mathfrak{S}^r}\le\|f\|_{L^r}\|g\|_{L^r},$$

我们有

$$\|(1-\partial_x^2)^{-\alpha}\chi\|_{\mathfrak{S}^{2q}}\le\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{2\alpha q}}\right)^{1/2q}\|\chi\|_{L^{2q}(\mathbb{R})}\le C\|\chi\|_{L^{2q}(\mathbb{R})}$$

前提是 $4\alpha q>1$。这里我们需要 $q<\infty$，因此 $p>1$。

综合这些估计，并应用 Schatten空间中的 Hölder不等式（见 [53, 定理 2。8]），可得

$$\begin{aligned}\|h^{(\beta-1)/2}\chi\|_{\mathfrak{S}^2}^2 &\leq \|h^{\alpha+(\beta-1)/2}\|_{\mathfrak{S}^{2p}}^2 \|h^{-\alpha}(1-\partial_x^2)^{\alpha}\|_{\mathfrak{S}^\infty}^2 \|(1-\partial_x^2)^{-\alpha}\chi\|_{\mathfrak{S}^{2q}}^2 \\ &\leq C\|\chi\|_{L^{2q}(\mathbb{R})}^2 = C\|\chi^2\|_{L^q(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

以下条件满足时，该估计成立：

$$2p\left(\frac{1-\beta}{2}-\alpha\right) > \frac{1}{2}+\frac{1}{s}, \quad 4\alpha q > 1. \tag{3.7}$$

对于 $0 \leq \beta < 1/2$ 和 $\max\left\{1, \frac{2}{s(1-2\beta)}\right\} < p \leq \infty$，我们选取 $0 < \alpha < \frac{1-\beta}{2}$ 使得

$$\frac{1}{4q} < \alpha < \frac{1-\beta}{2} - \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{s}\right),$$

我们看到 (3.7) 得以满足，将 (3.6) 代入 (3.5) 即可得到结论。 □

应用上述结果，我们将推导出 μ_0 支撑于索博列夫空间 $\mathcal{W}^{\beta,\,p}$ 其基于 h，如 (2.6) 所示。事实上，我们有以下 Fernique型估计，给出这类范数的衰减。

引理 3.4 (L^p**-正则性：高斯测度的支撑集**)。
设 $s > 1$、V 满足假设 *1.1*，$0 \leq \beta < \frac{1}{2}$，且 $p >$ 最大值 $\left\{2, \frac{4}{s(1-2\beta)}\right\}$ 为偶整数。则存在 C、$c > 0$，使得

$$\int e^{c\|u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^2} d\mu_0(u) \leq C. \tag{3.8}$$

特别地，对于 $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$ 以及所有 $\lambda > 0$,

$$\mu_0\left(u \in \mathcal{H}^\theta : \|u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} > \lambda\right) \leq Ce^{-c\lambda^2}. \tag{3.9}$$

证明。 只需证明（3.8）。为此，我们写出

$$\int e^{c\|u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^2} d\mu_0(u) = \sum_{k\geq 0} \frac{c^k}{k!} \int \|u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{2k} d\mu_0(u)$$

并估计各项。
对于 $2k = pm$ 且 $m \geq 0$ 为整数的情况，我们有

$$\begin{aligned}\int \|u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{2k} d\mu_0(u) &= \int \underbrace{\|u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^p \cdots \|u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^p}_{m \text{ times}} d\mu_0(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \Big(\int |h^{\beta/2}u(x_1)|^p \cdots |h^{\beta/2}u(x_m)|^p d\mu_0(u) \Big) dx_1 \cdots dx_m.\end{aligned}$$

利用（3.2），我们看到[2]

$$
\begin{aligned}
&\int |h^{\beta/2}u(x_1)|^p \cdots |h^{\beta/2}u(x_m)|^p d\mu_0(u)\\
&= \mathrm{Tr}\Big[(\delta_{x_1})^{\otimes n} \otimes \cdots \otimes (\delta_{x_m})^{\otimes n} \int |(h^{\beta/2}u)^{\otimes(mn)}\rangle\langle(h^{\beta/2}u)^{\otimes(mn)}| d\mu_0(u) (\delta_{x_1})^{\otimes n} \otimes \cdots \otimes (\delta_{x_m})^{\otimes n}\Big]\\
&\le (mn)! \mathrm{Tr}\Big[(\delta_{x_1})^{\otimes n} \otimes \cdots \otimes (\delta_{x_m})^{\otimes n} (h^{\beta-1})^{\otimes(mn)} (\delta_{x_1})^{\otimes n} \otimes \cdots \otimes (\delta_{x_m})^{\otimes n}\Big]\\
&= (mn)! \mathrm{Tr}\Big[(\delta_{x_1})^{\otimes n} \otimes \cdots \otimes (\delta_{x_m})^{\otimes n} (h^{\beta-1} \otimes \cdots \otimes h^{\beta-1})^{\otimes n} (\delta_{x_1})^{\otimes n} \otimes \cdots \otimes (\delta_{x_m})^{\otimes n}\Big]\\
&= (mn)! \mathrm{Tr}\Big[\big((\delta_{x_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_m})(h^{\beta-1} \otimes \cdots \otimes h^{\beta-1})(\delta_{x_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_m})\big)^{\otimes n}\Big]\\
&\le (mn)! \Big(\mathrm{Tr}\Big[(\delta_{x_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_m})(h^{\beta-1} \otimes \cdots \otimes h^{\beta-1})(\delta_{x_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_m})\Big]\Big)^n\\
&\le (mn)! \left(h^{\beta-1}(x_1,x_1) \cdots h^{\beta-1}(x_m,x_m)\right)^n,
\end{aligned}
$$

其中 $p = 2n$。因此我们得到

$$\int \|u\|^{2k}_{\mathcal{W}^{\beta,p}} d\mu_0(u) \le k! B^k_{\beta,p},$$

其中

$$B_{\beta,p} := \left(\int_{\mathbb{R}} \left(h^{\beta-1}(x,x)\right)^{p/2} dx\right)^{2/p}. \tag{3.10}$$

注意 $B_{\beta,\,p}$ 由于引理 3.3 以及关于 p 和 β 的假设，有限。

对于 $pm < 2k < p(m+1)$，其中 $m \ge 0$ 为整数，我们使用霍尔德不等式得到

$$
\begin{aligned}
&\int \|u\|^{2k}_{\mathcal{W}^{\beta,p}} d\mu_0(u) \int \left(\|u\|^{pm}_{\mathcal{W}^{\beta,p}}\right)^{\delta} \left(\|u\|^{p(m+1)}_{\mathcal{W}^{\beta,p}}\right)^{1-\delta} d\mu_0(u)\\
&\qquad \le \left(\int \|u\|^{pm}_{\mathcal{W}^{\beta,p}} d\mu_0(u)\right)^{\delta} \left(\int \|u\|^{p(m+1)}_{\mathcal{W}^{\beta,p}} d\mu_0(u)\right)^{1-\delta}\\
&\qquad \le \left(\left(\frac{pm}{2}\right)! B^{\frac{pm}{2}}_{\beta,p}\right)^{\delta} \left(\left(\frac{p(m+1)}{2}\right)! B^{\frac{p(m+1)}{2}}_{\beta,p}\right)^{1-\delta}\\
&\qquad = \left(\left(\frac{pm}{2}\right)!\right)^{\delta} \left(\left(\frac{p(m+1)}{2}\right)!\right)^{1-\delta} B^k_{\beta,p},
\end{aligned}
$$

其中 $\delta \in (0,\ 1)$ 满足 $2k = pm\delta + p(m+1)(1-\delta)$ 或 $\delta = m + 1 - \frac{2k}{p}$。我们声称

$$\left(\left(\frac{pm}{2}\right)!\right)^{\delta} \left(\left(\frac{p(m+1)}{2}\right)!\right)^{1-\delta} \le \left(\frac{p}{2}\right)! k! \tag{3.11}$$

暂且假设这一断言成立，我们得到

$$\int \|u\|^{2k}_{\mathcal{W}^{\beta,p}} d\mu_0(u) \le \left(\frac{p}{2}\right)! k! B^k_{\beta,p}$$

因此

$$\int e^{c\|u\|^2_{\mathcal{W}^{\beta,p}}} d\mu_0(u) \le \left(\frac{p}{2}\right)! \sum_{k\ge 0} (cB_{\beta,p})^k \le C$$

前提是 $c > 0$ 选择得满足$cB_{\beta,\,p} < 1$。这就证明了（3.8）。

[2]严格来说，狄拉克δ函数必须像引理的证明中那样进行正则化 3.2。

接下来只需证明结论（3.11）。我们将 $2k = pm + 2l$ 写作 $1 \leq l \leq n-1$。特别地，我们有 $\delta = 1 - \frac{l}{n}$ 以及 $1-\delta = \frac{l}{n}$。我们还有

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{pm}{2}\right)!\right)^{\delta}\left(\left(\frac{p(m+1)}{2}\right)!\right)^{1-\delta} &= \left((k-l)!\right)^{\delta}\left((k-l+n)!\right)^{1-\delta} \\ &= \left(k!\frac{1}{k\cdots(k-l+1)}\right)^{1-\frac{l}{n}}\left(k!(k+1)\cdots(k-l+n)\right)^{\frac{l}{n}} \\ &= k!\left(\frac{(k+1)^l\cdots(k-l+n)^l}{k^{n-l}\cdots(k-l+1)^{n-l}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= k!\left(\underbrace{\frac{(k+1)\cdots(k-l+n)}{k^{n-l}}\cdots\frac{(k+1)\cdots(k-l+n)}{(k-l+1)^{n-l}}}_{l\text{ times}}\right)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

我们注意到，方括号内的每个因子都具有如下形式

$$\frac{(a+j)\cdots(a+j+n-l-1)}{a^{n-l}}$$

其中 $j = 1, \cdots l$ 和 $a \geq 1$。我们可以将这一项估计为

$$\left(1+\frac{j}{a}\right)\cdots\left(1+\frac{j+n-l-1}{a}\right) \leq (1+j)\cdots(j+n-l) \leq n!$$

对所有 $j = 1, \cdots l$ 均成立。因此，我们得到

$$\left(\left(\frac{pm}{2}\right)!\right)^{\delta}\left(\left(\frac{p(m+1)}{2}\right)!\right)^{1-\delta} \leq k!(n!)^{\frac{l}{n}} \leq n!k!$$

这就证明了（3.11）。 □

根据上述估计，散焦吉布斯测度的构造是直接的。

命题2.2第（1）项的证明。只需证明

$$Z = \int e^{-\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4} d\mu_0(u) \in (0,\infty).$$

由于 μ_0 是一个概率测度，显然有 $Z \leq 1$。如引理3.4的证明所示，对任意 $s > 1$，

$$\int \|u\|_{L^4}^4 d\mu_0(u) \leq 2!B_{0,4}^2 < \infty,$$

其中$B_{0,\ 4}$ 与式（3.10）中的定义相同。由詹森不等式

$$\int e^{-\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4} d\mu_0(u) \geq \exp\left(-\frac{1}{2}\int \|u\|_{L^4}^4 d\mu_0(u)\right),$$

由此可得 $Z > 0$。 □

3.2. 聚焦测度。接下来，我们处理更微妙的聚焦吉布斯测度定义。对于 $u \in \mathrm{H}^{\theta}$ 和 $\Lambda \geq \lambda_1$，记

$$P_{\leq\Lambda}u = \sum_{\lambda_j \leq \Lambda} \alpha_j u_j, \quad P_{>\Lambda}u = \sum_{\lambda_j > \Lambda} \alpha_j u_j \tag{3.12}$$

分别表示低频和高频投影。

引理 3.5 （ L^4 **范数的衰减估计**）。
设 $s>1$， V 满足假设 *1.1*，且 $0\le\rho<\frac{s-1}{2s}$ 。那么存在 C， $c>0$ 使得对于 $\theta<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$ 以及所有 Λ， $R>0$,

$$\mu_0\left(u\in\mathcal{H}^\theta:\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}>R\right)\le Ce^{-c\Lambda^\rho R^2}. \tag{3.13}$$

证明。 令 $t>0$ 为稍后选取的正常数。我们估计

$$\begin{aligned}\mu_0\left(\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}>R\right)&\le e^{-tR^2}\int e^{t\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^2}d\mu_0(u)\\&=e^{-tR^2}\sum_{k\ge0}\frac{t^k}{k!}\int\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k}d\mu_0(u).\end{aligned}$$

根据引理 3.4证明中的相同论证，我们有

$$\int\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k}d\mu_0(u)\le 2!k!B_{\Lambda,0,4}^k,\quad\forall k\ge0,$$

其中

$$B_{\Lambda,0,4}:=\left(\int_{\mathbb{R}}\left((P_{>\Lambda}h)^{-1}(x,x)\right)^2dx\right)^{1/2} \tag{3.14}$$

with

$$(P_{>\Lambda}h)^{-1}(x,x)=\sum_{\lambda_j>\Lambda}\lambda_j^{-1}|u_j(x)|^2.$$

由此可得

$$\int e^{t\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^2}d\mu_0(u)\le 2!\sum_{k\ge0}(tB_{\Lambda,0,4})^k.$$

对于 $0\le\rho<\frac{s-1}{2s}$，我们有

$$\begin{aligned}(P_{>\Lambda}h)^{-1}(x,x)&=\sum_{\lambda_j>\Lambda}\lambda_j^{-1}|u_j(x)|^2\\&\le\Lambda^{-\rho}\sum_{\lambda_j>\Lambda}\lambda_j^{\rho-1}|u_j(x)|^2\\&\le\Lambda^{-\rho}h^{\rho-1}(x,x).\end{aligned}$$

根据引理 3.3，可知对于所有 $0\le\rho<\frac{s-1}{2s}$， $x\mapsto h^{\rho-1}(x,x)\in L^2(\mathbb{R})$，因此$B_{\Lambda,0,4}\le C\Lambda^{-\rho}$，其中某个常数为 $C>0$。特别地，我们有

$$\mu_0\left(\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}>R\right)\le e^{-tR^2}2!\sum_{k\ge0}(Ct\Lambda^{-\rho})^k.$$

取 $t=\nu\Lambda^\rho$ 使 $\nu>0$ 足够小，从而 $Ct\Lambda^{-\rho}=C\nu<1$，我们得到（3.13）。□

当 $1<s\le2$ 时，高斯测度 μ_0 支撑在负 Sobolev 空间 H^θ 上，且$\theta<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$，因此质量几乎处处为无穷大 μ_0。在这种情况下，我们如下定义重整化质量。

引理 3.6（**重整化质量**）。
设 $1<s\le2$ 和 V 满足假设 *1.1*。对于每个 $\Lambda\ge\lambda_1$，我们定义截断重整化质量

$$\mathcal{M}_{\le\Lambda}(u):=\|P_{\le\Lambda}u\|_{L^2}^2-\int\|P_{\le\Lambda}u\|_{L^2}^2d\mu_0(u).$$

那么 $\{\mathcal{M}_{\le\Lambda}\}_{\Lambda\ge\lambda_1}$ 强收敛到 $L^2(d\mu_0)$中的一个极限，即，

$$\mathcal{M}(u):=\lim_{\Lambda\to\infty}\mathcal{M}_{\le\Lambda}(u)\ in\ L^2(d\mu_0).$$

特别地，我们有

$$\int (\mathcal{M}(u))^2 d\mu_0(u) = \mathrm{Tr}[h^{-2}] < \infty.$$

证明。这与 [35, 引理 5。2]中的论证相同。为方便读者，我们将其重述如下。对于 $\Lambda \geq \lambda_1$，我们有

$$\|P_{\leq\Lambda} u\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda_j \leq \Lambda} |\alpha_j|^2$$

and

$$\begin{aligned}
\int \|P_{\leq\Lambda} u\|_{L^2}^2 d\mu_0(u) &= \sum_{\lambda_j \leq \Lambda} \int |\alpha_j|^2 d\mu_0(u) \\
&= \sum_{\lambda_j \leq \Lambda} \left(\int_{\mathbb{C}} |\alpha_j|^2 \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j |\alpha_j|^2} d\alpha_j \right) \left(\prod_{\lambda_k \neq \lambda_j} \int_{\mathbb{C}} \frac{\lambda_k}{\pi} e^{-\lambda_k |\alpha_k|^2} d\alpha_k \right) \\
&= \sum_{\lambda_j \leq \Lambda} \frac{1}{\lambda_j}.
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\mathcal{M}_{\leq\Lambda}(u) = \sum_{\lambda_j \leq \Lambda} |\alpha_j|^2 - \lambda_j^{-1}. \tag{3.15}$$

现在，对于 $\Theta \geq \Lambda$，我们计算

$$\begin{aligned}
&\int |\mathcal{M}_{\leq\Theta}(u) - \mathcal{M}_{\leq\Lambda}(u)|^2 d\mu_0(u) \\
&\qquad = \int \Big(\sum_{\Lambda < \lambda_j \leq \Theta} |\alpha_j|^2 - \lambda_j^{-1} \Big)^2 d\mu_0(u) \\
&\qquad = \sum_{\Lambda < \lambda_j, \lambda_k \leq \Theta} \int \Big(|\alpha_j|^2 - \lambda_j^{-1} \Big) \Big(|\alpha_k|^2 - \lambda_k^{-1} \Big) d\mu_0(u) \\
&\qquad = \sum_{\Lambda < \lambda_j, \lambda_k \leq \Theta} \int \Big(|\alpha_j|^2 |\alpha_k|^2 - \lambda_j^{-1} |\alpha_k|^2 - \lambda_k^{-1} |\alpha_j|^2 + \lambda_j^{-1} \lambda_k^{-1} \Big) d\mu_0(u) \\
&\qquad = \sum_{\Lambda < \lambda_j, \lambda_k \leq \Theta} \int \Big(|\alpha_j|^2 |\alpha_k|^2 - \lambda_j^{-1} \lambda_k^{-1} \Big) d\mu_0(u) \\
&\qquad = \sum_{\Lambda < \lambda_j \leq \Theta} \int \Big(|\alpha_j|^4 - \lambda_j^{-2} \Big) d\mu_0(u) + \sum_{\substack{\Lambda < \lambda_j, \lambda_k \leq \Theta \\ \lambda_j \neq \lambda_k}} \int \Big(|\alpha_j|^2 |\alpha_k|^2 - \lambda_j^{-1} \lambda_k^{-1} \Big) d\mu_0(u) \\
&\qquad = \sum_{\Lambda < \lambda_j \leq \Theta} \lambda_j^{-2} \to 0 \text{ as } \Lambda, \Theta \to \infty
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Tr}[h^{-2}] = \sum_{j \geq 1} \lambda_j^{-2} < \infty$，且对所有 $1 < s \leq 2$，$2 > \frac{1}{2} + \frac{1}{s}$（见引理 A.1）。这表明 $\{\mathrm{M}_{\leq\Lambda}(u)\}_{\Lambda \geq \lambda_1}$ 是 $L^2(d\mu_0)$ 中的一个柯西序列。因此，存在 $\mathrm{M}(u) \in L^2(d\mu_0)$，使得当 $\Lambda \to \infty$ 时，$\mathrm{M}_{\leq\Lambda}(u) \to \mathrm{M}(u)$ 在 $L^2(d\mu_0)$ 中强收敛。此外，根据上述计算，我们有

$$\int (\mathcal{M}(u))^2 d\mu_0(u) = \lim_{\Lambda \to \infty} \int (\mathcal{M}_{\leq\Lambda}(u))^2 d\mu_0(u) = \lim_{\Lambda \to \infty} \sum_{\lambda_j \leq \Lambda} \lambda_j^{-2} = \mathrm{Tr}[h^{-2}].$$

□

我们对重整化质量有如下观察。

引理 3.7（重整化质量的衰减估计）。
设 $1 < s \le 2$, V 满足假设 1.1，且 $0 \le \gamma < \frac{3s-2}{4s}$。那么存在 C, $c > 0$使得对于 $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$ 以及所有 Λ, $R > 0$,

$$\mu_0(u \in \mathcal{H}^\theta : |\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)| > R) \le Ce^{-c\Lambda^\gamma R}, \tag{3.16}$$

其中

$$\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) := \sum_{\lambda_j > \Lambda} |\alpha_j|^2 - \lambda_j^{-1}. \tag{3.17}$$

证明。我们有

$$\mu_0(|\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)| > R) \le \mu_0(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) > R) + \mu_0(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) < -R) =: (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}).$$

对于（I），我们对稍后选取的 $0 < t < \frac{\Lambda}{2}$ 进行估计，

$$\begin{aligned}
\mu_0(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) > R) &\le e^{-tR} \int e^{t\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)} d\mu_0(u) \\
&= e^{-tR} \int e^{t\left(\sum_{\lambda_j>\Lambda} |\alpha_j|^2 - \lambda_j^{-1}\right)} d\mu_0(u) \\
&= e^{-tR} \int \prod_{\lambda_j > \Lambda} e^{-t\lambda_j^{-1}} e^{t|\alpha_j|^2} d\mu_0(u) \\
&= e^{-tR} \prod_{\lambda_j > \Lambda} e^{-t\lambda_j^{-1}} \left(\int_{\mathbb{C}} \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j(1-t\lambda_j^{-1})|\alpha_j|^2} d\alpha_j \right) \left(\prod_{\substack{k \ge 1 \\ \lambda_k \ne \lambda_j}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\lambda_k}{\pi} e^{-\lambda_k |\alpha_k|^2} d\alpha_k \right) \\
&= e^{-tR} \prod_{\lambda_j > \Lambda} e^{-t\lambda_j^{-1}} \frac{1}{1 - t\lambda_j^{-1}}.
\end{aligned}$$

注意，对于 $0 \le x \le \frac{1}{2}$，我们有 $\frac{1}{1-x} \le Ce^{x+x^2}$，其中 $C > 0$ 是某个常数。将其应用于 $x = t\lambda_j^{-1} \le t\Lambda^{-1} \le \frac{1}{2}$，得到

$$\mu_0(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) > R) \le Ce^{-tR} \prod_{\lambda_j > \Lambda} e^{t^2\lambda_j^{-2}} = Ce^{-tR} e^{t^2 \sum_{\lambda_j > \Lambda} \lambda_j^{-2}}.$$

对于 $0 \le \gamma < \frac{3s-2}{4s}$，我们注意到

$$\sum_{\lambda_j > \Lambda} \lambda_j^{-2} \le \Lambda^{-2\gamma} \sum_{\lambda_j > \Lambda} \lambda_j^{-2+2\gamma} \le \Lambda^{-2\gamma} \mathrm{Tr}[h^{-2+2\gamma}].$$

这里的迹 $[h^{-2+2\gamma}] < \infty$ 因为 $2 - 2\gamma > \frac{1}{2} + \frac{1}{s}$ 对所有 $1 < s \le 2$（见引理 A.1）。因此我们得到

$$\mu_0(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) > R) \le Ce^{-tR + t^2\Lambda^{-2\gamma}\mathrm{Tr}[h^{-2+2\gamma}]}.$$

取 $t = \nu\Lambda^\gamma$，并令 $\nu > 0$ 足够小，我们得到

$$\mu_0(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) > R) \le Ce^{-c\Lambda^\gamma R}.$$

对于 (II)，当 $0 < t < \frac{\Lambda}{2}$ 时，我们有：

$$\mu_0(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) < -R) \le e^{-tR} \int e^{-t\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)} d\mu_0(u) = e^{-tR} \prod_{\lambda_j > \Lambda} e^{t\lambda_j^{-1}} \frac{1}{1 + t\lambda_j^{-1}}.$$

注意，对于 $0 \le x \le \frac{1}{2}$，存在某个常数 $C > 0$，使得 $\frac{1}{1+x} \le Ce^{-x+x^2}$。按照 (I) 中的方法进行估计，我们同样证明了

$$\mu_0(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) < -R) \le Ce^{-c\Lambda^\gamma R}.$$

合并这两项后，我们证明了（3.16）。 □

我们构造聚焦吉布斯测度时用到了[3] 以下由 Brézis 和 Mironescu 给出的插值不等式 [7]。它将 [39, 40] 众所周知的结果推广到分数阶 Sobolev 空间，这对我们的情形很有帮助，因为我们的测度最多只能承受 1/2 阶导数。

引理 3.8 （分数阶 Gagliardo–Nirenberg 不等式）。
设 $1 < s \leq 2$, V 满足假设 *1.1*, $0 < \beta < 2$, $1 \leq p \leq \infty$，且

$$0 < \delta = \frac{1}{2 + 4\beta - \frac{4}{p}} < 1.$$

则存在 $C > 0$ 使得

$$\|u\|_{L^4} \leq C \|u\|_{L^2}^{1-\delta} \|u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{\delta}. \tag{3.18}$$

在通常的索博列夫空间中，我们有不等式 $W^{\beta,\,p}(\mathbb{R})$ （见[7]）

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1-\delta} \|u\|_{W^{\beta,p}(\mathbb{R})}^{\delta}$$

若 $1 \leq p \leq \infty$ 和 $\delta \in (0,\ 1)$ 满足

$$\frac{1}{4} = \frac{1-\delta}{2} + \frac{\delta}{p} - \delta\beta$$

or

$$\delta = \frac{1}{2 + 4\beta - \frac{4}{p}}.$$

因此，由范数等价（3.18）和（B.1）可得。

现在我们可以定义命题 2.2 中的聚焦吉布斯测度。

命题 *2.2* 的证明，第 *(2)* 和 *(3)* 项。第（*2*）项。令 $s > 2$。我们将证明

$$Z = \int e^{\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4} \mathbb{1}_{\left\{\|u\|_{L^2}^2 \leq m\right\}} d\mu_0(u) \in (0, \infty).$$

首先有

$$Z \geq \int \mathbb{1}_{\left\{\|u\|_{L^2}^2 \leq m\right\}} d\mu_0(u) \geq \frac{1}{m} \int \|u\|_{L^2}^2 d\mu_0(u) = \frac{1}{m} \mathrm{Tr}[h^{-1}] > 0.$$

为证明 $Z < \infty$，我们利用层蛋糕表示写出

$$Z = \int_0^\infty \mu_0\left(e^{\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4} > \lambda, \|u\|_{L^2}^2 \leq m\right) d\lambda = \int_0^\infty \mu_0\left(\|u\|_{L^4} > (2\log\lambda)^{1/4}, \|u\|_{L^2}^2 \leq m\right) d\lambda.$$

记

$$\Lambda_0 := (\log\lambda)^l \tag{3.19}$$

其中 $l > 0$ 将在后面确定。由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\mu_0\left(\|u\|_{L^4} > (2\log\lambda)^{1/4}, \|u\|_{L^2}^2 \leq m\right) \leq\ & \mu_0\left(\|P_{\leq\Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2}(2\log\lambda)^{1/4}, \|u\|_{L^2}^2 \leq m\right) \\ & + \mu_0\left(\|P_{>\Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2}(2\log\lambda)^{1/4}, \|u\|_{L^2}^2 \leq m\right).\end{aligned}$$

由引理 3.5，可得

$$\begin{aligned}\mu_0\left(\|P_{>\Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2}(2\log\lambda)^{1/4}, \|u\|_{L^2}^2 \leq m\right) &\leq \mu_0\left(\|P_{>\Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2}(2\log\lambda)^{1/4}\right) \\ &\leq C e^{-c\Lambda_0^\rho (\log\lambda)^{1/2}} = C e^{-c(\log\lambda)^{\rho l + \frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

[3]这就是我们施加技术限制 $s > 8/5$ 的原因。

对所有 $0 \le \rho < \frac{s-1}{2s}$，另一方面，由分数阶 Gagliardo–Nirenberg 不等式（3.18），可得

$$\|P_{\le \Lambda_0} u\|_{L^4} \le C \|P_{\le \Lambda_0} u\|_{L^2}^{1-\delta} \|P_{\le \Lambda_0} u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{\delta} \tag{3.20}$$

其中 $0 < \beta < \frac{1}{2}$、$1 \le p \le \infty$ 和 $\delta \in (0, 1)$ 满足

$$\delta = \frac{1}{2 - \frac{4}{p} + 4\beta}. \tag{3.21}$$

因此，对于 u 满足 $\|P_{\le \Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2}(2\log\lambda)^{1/4}$ 且 $\|u\|_{L^2}^2 \le m$，由 (3.20) 可得

$$\frac{1}{2}(2\log\lambda)^{1/4} < \|P_{\le \Lambda_0} u\|_{L^4} \le C m^{(1-\delta)/2} \|P_{\le \Lambda_0} u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{\delta}$$

or

$$\|P_{\le \Lambda_0} u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} > C(m)(\log\lambda)^{\frac{1}{4\delta}}.$$

因此我们得到

$$\mu_0\left(\|P_{\le \Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2}(2\log\lambda)^{1/4}, \|u\|_{L^2}^2 \le m\right) \le \mu_0\left(\|P_{\le \Lambda_0} u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} > C(m)(\log\lambda)^{\frac{1}{4\delta}}\right).$$

对于 $0 < \beta < \frac{1}{2}$，我们可以找到一个足够大的偶整数 p，使得 $p > s^{\frac{4}{(1-2\beta)}}$。因此，根据引理3.4，我们有

$$\mu_0\left(\|P_{\le \Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2}(2\log\lambda)^{1/4}, \|u\|_{L^2}^2 \le m\right) \le C e^{-c(\log\lambda)^{\frac{1}{2\delta}}}.$$

利用以下事实：对于任意 $L > 0$，$\varepsilon > 0$，存在 $C > 0$ 使得

$$e^{-c(\log\lambda)^{1+\varepsilon}} \le C\lambda^{-L},$$

当满足以下条件时，配分函数 Z 有限

$$\rho l + \frac{1}{2} > 1, \quad \frac{1}{2\delta} > 1$$

其中 $0 \le \rho < \frac{s-1}{2s}$ 且 δ 如（3.21）中所示。取以下参数即可满足上述条件

$$l = \frac{s}{s-1} + \eta, \quad \rho = \frac{s-1}{2s} - \eta, \quad \beta = \frac{1}{2} - \eta, \quad p = \eta^{-1}$$

其中 $0 < \eta \ll 1$ 是一个足够小的数。

条目 (3)。设 $\frac{8}{5} < s \le 2$。我们有

$$Z \ge \int \mathbb{1}_{\{|\mathcal{M}(u)| \le m\}} d\mu_0(u) \ge \frac{1}{m^2} \int (\mathcal{M}(u))^2 d\mu_0(u) = \frac{1}{m^2} \mathrm{Tr}[h^{-2}] > 0.$$

还需证明 $Z < \infty$。我们有

$$\begin{aligned} Z &= \int e^{\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4} \mathbb{1}_{\{|\mathcal{M}(u)| \le m\}} d\mu_0(u) \\ &= \int_0^\infty \mu_0\left(e^{\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4} > \lambda, |\mathcal{M}(u)| \le m\right) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \mu_0\left(\|u\|_{L^4} > (2\log\lambda)^{1/4}, |\mathcal{M}(u)| \le m\right) d\lambda. \end{aligned}$$

对于 Λ_0，如式（3.19）所示，由三角不等式可得

$$\begin{aligned} \mu_0\left(\|u\|_{L^4} > (2\log\lambda)^{1/4}, |\mathcal{M}(u)| \le m\right) &\le \mu_0\left(\|P_{> \Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2}(2\log\lambda)^{1/4}, |\mathcal{M}(u)| \le m\right) \\ &\quad + \mu_0\left(\|P_{\le \Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2}(2\log\lambda)^{1/4}, |\mathcal{M}(u)| \le m\right) \\ &=: (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}). \end{aligned}$$

由引理 3.5，对于任意 $0 \leq \rho < \frac{s-1}{2s}$，

$$\text{(I)} \leq \mu_0 \left(\|P_{>\Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2} (2 \log \lambda)^{1/4} \right) \leq C e^{-c\Lambda_0^{\rho} (\log \lambda)^{1/2}} = C e^{-c(\log \lambda)^{\rho l + 1/2}}. \tag{3.22}$$

对于 (II)，记

$$A_{\Lambda_0,\lambda} := \left\{ \|P_{\leq \Lambda_0} u\|_{L^4} > \frac{1}{2} (2 \log \lambda)^{1/4}, |\mathcal{M}(u)| \leq m \right\}.$$

我们估计

$$\begin{aligned} \|P_{\leq \Lambda_0} u\|_{L^2}^2 &= \sum_{\lambda_j \leq \Lambda_0} |\alpha_j|^2 \\ &= \sum_{\lambda_j \leq \Lambda_0} |\alpha_j|^2 - \lambda_j^{-1} + \sum_{\lambda_j \leq \Lambda_0} \lambda_j^{-1} \\ &= \mathcal{M}_{\leq \Lambda_0}(u) + \sum_{\lambda_j \leq \Lambda_0} \lambda_j^{-1} \\ &= \mathcal{M}(u) - \mathcal{M}_{>\Lambda_0}(u) + \sum_{\lambda_j \leq \Lambda_0} \lambda_j^{-1}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

其中 $\mathcal{M}_{\leq \Lambda}(u)$ 和 $\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)$ 分别定义于 (3.15) 和 (3.17) 中。注意到

$$\sum_{\lambda_j \leq \Lambda_0} \lambda_j^{-1} \leq \Lambda_0^{\nu} \sum_{\lambda_j \leq \Lambda_0} \lambda_j^{-1-\nu} = \Lambda_0^{\nu} \mathrm{Tr}[h^{-1-\nu}] \tag{3.24}$$

其中 $\mathrm{Tr}[h^{-1-\nu}] < \infty$，条件是 $\nu > \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$。定义集合

$$\Omega_{\Lambda_0,\lambda} := \{ |\mathcal{M}_{>\Lambda_0}(u)| \leq \Lambda_0^{\nu} \}.$$

我们有

$$\text{(II)} = \mu_0(A_{\Lambda_0,\lambda}) \leq \mu_0 \left(A_{\Lambda_0,\lambda} \cap \Omega_{\Lambda_0,\lambda}^c \right) + \mu_0 \left(A_{\Lambda_0,\lambda} \cap \Omega_{\Lambda_0,\lambda} \right) =: (\mathrm{II}_1) + (\mathrm{II}_2).$$

根据引理 3.7，对于任意 $0 \leq \gamma < \frac{3s-2}{4s}$，

$$(\mathrm{II}_1) \leq \mu_0(\Omega_{\Lambda_0,\lambda}^c) \leq C e^{-c\Lambda_0^{\gamma+\nu}} = C e^{-c(\log \lambda)^{(\gamma+\nu)l}}. \tag{3.25}$$

对于 $u \in A_{\Lambda_0,\,\lambda} \cap \Omega_{\Lambda_0,\,\lambda}$，由 (3.23) 和 (3.24) 可得

$$\|P_{\leq \Lambda_0} u\|_{L^2} \leq \sqrt{m + C\Lambda_0^{\nu}} \leq C\Lambda_0^{\nu/2}.$$

此外，利用 (3.20)，可得对于任意 $u \in A_{\Lambda_0,\,\lambda} \cap \Omega_{\Lambda_0,\,\lambda}$，

$$\frac{1}{2} (2 \log \lambda)^{1/4} < \|P_{\leq \Lambda_0} u\|_{L^4} \leq C \|P_{\leq \Lambda_0} u\|_{L^2}^{1-\delta} \|P_{\leq \Lambda_0} u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{\delta} \leq C \Lambda_0^{\nu(1-\delta)/2} \|P_{\leq \Lambda_0} u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{\delta}$$

其中 δ 如 (3.21) 中所示，因此

$$\|P_{\leq \Lambda_0} u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} > C \left(\frac{(\log \lambda)^{1/4}}{\Lambda_0^{\nu(1-\delta)/2}} \right)^{\frac{1}{\delta}} \sim (\log \lambda)^{\frac{1}{4\delta} - \frac{l\nu}{2}\left(\frac{1}{\delta} - 1\right)} \sim (\log \lambda)^{\frac{1}{2} + \beta - \frac{1}{p} - \frac{l\nu}{2}\left(1 + 4\beta - \frac{4}{p}\right)}.$$

因此，由引理 3.4，得到

$$\begin{aligned} (\mathrm{II}_2) &\leq \mu_0 \left(\|P_{\leq \Lambda_0} u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} > C (\log \lambda)^{\frac{1}{2} + \beta - \frac{1}{p} - \frac{l\nu}{2}\left(1 + 4\beta - \frac{4}{p}\right)} \right) \\ &\leq C e^{-c(\log \lambda)^{1 + 2\beta - \frac{2}{p} - l\nu\left(1 + 4\beta - \frac{4}{p}\right)}}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

综合（3.22）、（3.25）和（3.26），得到

$$\begin{aligned} \mu_0 \left(\|u\|_{L^4} > (2 \log \lambda)^{1/4}, |\mathcal{M}(u)| \leq m \right) \leq\ & C e^{-c(\log \lambda)^{\rho l + 1/2}} + C e^{-c(\log \lambda)^{(\gamma+\nu)l}} \\ & + C e^{-c(\log \lambda)^{1 + 2\beta - \frac{2}{p} - l\nu\left(1 + 4\beta - \frac{4}{p}\right)}} \end{aligned}$$

对于任意的 $0 \le \rho < \frac{s-1}{2s}$、$0 \le \gamma < \frac{3s-2}{4s}$、$\nu > \frac{2-s}{2s}$、$0 < \beta < \frac{1}{2}$，以及满足 $p > {}_{s}{}^{4}{}_{(1-2\beta)}$ 的一个足~~够大的~~偶整数 p。为使 $Z < \infty$，我们将选取 l，ρ，γ，ν，β 和p 的合适取值，使得满足以下条件：

$$\rho l + 1/2 > 1, \quad (\gamma+\nu)l > 1, \quad 1 + 2\beta - \frac{2}{p} - l\nu\left(1 + 4\beta - \frac{4}{p}\right) > 1.$$

取一个足够小的 $0 < \eta \ll 1$

$$\rho = \frac{s-1}{2s} - \eta, \quad \gamma = \frac{3s-2}{4s} - \eta, \quad \nu = \frac{2-s}{2s} + \eta,$$

前两个条件推出

$$l > \max\left\{\frac{s}{s-1}+, \frac{4s}{s+2}\right\}.$$

接着取

$$\beta = \frac{1}{2} - \eta, \quad p = \eta^{-1},$$

最后一个条件给出

$$l < \frac{2s}{3(2-s)}.$$

由于 $\frac{4s}{s+2} \le \frac{s}{s-1} < {}_{3}\frac{2s}{2-s()}$ 对于 $\frac{8}{5} < s \le 2$，我们可以选择满足上述条件的 l。这表明对于任意 $L > 0$,

$$\mu_0\left(\|u\|_{L^4} > (2\log\lambda)^{1/4}, |\mathcal{M}(u)| \le m\right) \le C_L\lambda^{-L}$$

这保证了 $Z < \infty$。证明完毕。 □

注记 3.1（高阶非线性）。上述论证可用于构造（2.16）的吉布斯测度。更确切地说，由于高斯测度μ_0 的支撑集包含于 L^κ（$\mathbb{R}$）中，且 $\max\{2, \frac{4}{s}\} < \kappa < \infty$（见引理3.4，其中 $\beta = 0$），因此可以轻易构造散焦吉布斯测度

$$d\mu(u) = \frac{1}{Z}e^{-\frac{2}{\kappa}\|u\|_{L^\kappa}^\kappa} d\mu_0(u)$$

对任意 $\max\{2, \frac{4}{s}\} < \kappa < \infty$。对于聚焦吉布斯测度，当 $s > 2$ 时，可以构造测度

$$d\mu(u) = \frac{1}{Z}e^{\frac{2}{\kappa}\|u\|_{L^\kappa}^\kappa} \mathbb{1}_{\{\int_{\mathbb{R}} |u|^2 \le m\}} d\mu_0(u)$$

对任意

$$2 < \kappa < 6, \quad m > 0. \tag{3.27}$$

此外，当 $s \le 2$ 时，可以构造测度

$$d\mu(u) = \frac{1}{Z}e^{\frac{2}{\kappa}\|u\|_{L^\kappa}^\kappa} \mathbb{1}_{\{|\mathcal{M}(u)| \le m\}} d\mu_0(u)$$

对任意 $\frac{14}{9} < s \le 2$ 和

$$\frac{4}{s} < \kappa < \frac{3s + 2 + \sqrt{9s^2 + 4s - 28}}{2}, \quad m > 0. \tag{3.28}$$

为证明 (3.27) 和 (3.28)，我们沿用前述构造中的推理思路，并考虑以下估计（这是引理3.3 和3.5 的推论）：

$$\mu_0(u \in \mathcal{H}^\theta : \|P_{>\Lambda}u\|_{L^\kappa} > R) \le Ce^{-c\Lambda^\rho R^2} \tag{3.29}$$

对于 $\kappa > \max\left\{2,\ \frac{4}{s}\right\}$ 和 $0 \le \rho < \frac{\kappa s-4}{2\kappa s}$。更确切地说，对于 $s > 2$，我们需要

$$\rho l + \frac{2}{\kappa} > 1, \quad \frac{2}{\kappa\delta} > 1$$

with

$$0 \le \rho < \frac{\kappa s - 4}{2\kappa s}, \quad \delta = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \beta}. \tag{3.30}$$

取 $l = {}^{2s}(\kappa-2)\ \frac{}{\kappa s-4}+$，$\rho = \frac{\kappa s-4}{2\kappa s}-$，$\beta = \frac{1}{2}-$，以及 $p = \infty-$，上述条件可化简为 $\frac{4}{\kappa-2} > 1$。结合 $\kappa > 2$ 这便得到（3.27）。当 $s \le 2$时，我们需要

$$\rho l + \frac{2}{\kappa} > 1, \quad (\gamma+\nu)l > 1, \quad \frac{2}{\kappa\delta} - \nu l\left(\frac{1}{\delta} - 1\right) > 1$$

其中 ρ，δ 如（3.30）中所示，并且

$$0 \le \gamma < \frac{3s-2}{4s}, \quad \nu > \frac{2-s}{2s}, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad p > \frac{4}{s(1-2\beta)}.$$

现在我们选择

$$\rho = \frac{\kappa s - 4}{2\kappa s}-, \quad \gamma = \frac{3s-2}{4s}-, \quad \nu = \frac{2-s}{2s}+, \quad \beta = \frac{1}{2}-, \quad p = \infty-$$

由此得到

$$\max\left\{\frac{2s(\kappa-2)}{\kappa s-4}, \frac{4s}{s+2}\right\} < l < \frac{2s(6-\kappa)}{(2-s)(p+2)}.$$

只要满足以下条件，就可以作出这样的选择

$$\frac{2s(\kappa-2)}{\kappa s-4} < \frac{2s(6-\kappa)}{(2-s)(\kappa+2)}$$

or

$$s > \frac{\kappa^2 - 2\kappa + 8}{3\kappa - 2}$$

结合 $\kappa > \frac{4}{s}$（见（3.29））可得（3.28）。 ◇

3.3. **近似测度**。 接下来，我们为 μ 定义近似测度，它们有助于证明吉布斯测度在（1.1）的流下的不变性。按照 [8],，我们为 $\Lambda \ge \lambda_1$ 引入

$$Q_\Lambda u := \sum_{j\ge1} \chi\left(\frac{\lambda_j}{\Lambda}\right)\alpha_j u_j = \chi(h/\Lambda)u, \tag{3.31}$$

其中 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\mathrm{supp}(\chi) \subset [-1,1]$, $\chi \in [0,1]$，且 $\chi = 1$ 在 $[-1/2, 1/2]$上成立。众所周知，

$$Q_\Lambda P_{\le\Lambda} = P_{\le\Lambda} Q_\Lambda = Q_\Lambda \tag{3.32}$$

并且存在 $C > 0$，使得对所有 $\Lambda \ge \lambda_1$,

$$\|Q_\Lambda\|_{L^p \to L^p} \le C, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{3.33}$$

后者可由 L^p-半经典伪微分算子的有界性推出，正如我们在附录C中简要回顾的那样。

对于散焦非线性，我们将近似测度定义为

$$d\mu_\Lambda(u) := \frac{1}{Z^\Lambda} e^{-\frac{1}{2}\|Q_\Lambda u\|_{L^4}^4} d\mu_0(u) = d\mu^{\le\Lambda}(u) \otimes d\mu_0^{>\Lambda}(u), \tag{3.34}$$

其中

$$d\mu_0^{>\Lambda}(u) = \prod_{\lambda_j>\Lambda} \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j|\alpha_j|^2} d\alpha_j \tag{3.35}$$

and

$$d\mu^{\leq\Lambda}(u) = \frac{1}{Z^\Lambda} e^{-\frac{1}{2}\|Q_\Lambda u\|_{L^4}^4} d\mu_0^{\leq\Lambda}(u)$$

其中 $\mu_0^{\leq\Lambda}$ 如（2.8）中所示，且

$$Z^\Lambda = \int e^{-\frac{1}{2}\|Q_\Lambda u\|_{L^4}^4} d\mu_0(u) = \int e^{-\frac{1}{2}\|Q_\Lambda u\|_{L^4}^4} d\mu_0^{\leq\Lambda}(u).$$

对于聚焦非线性，这些定义包含自然截断:

$$d\mu_\Lambda(u) := d\mu^{\leq\Lambda}(u) \otimes d\mu_0^{>\Lambda}(u), \tag{3.36}$$

其中

$$d\mu^{\leq\Lambda}(u) = \frac{1}{Z^\Lambda} e^{\frac{1}{2}\|Q_\Lambda u\|_{L^4}^4} \mathbb{1}_{\{\|P_{\leq\Lambda}u\|_{L^2}^2<m\}} d\mu_0^{\leq\Lambda}(u)$$

若 $s > 2$ 且

$$d\mu^{\leq\Lambda}(u) = \frac{1}{Z^\Lambda} e^{\frac{1}{2}\|Q_\Lambda u\|_{L^4}^4} \mathbb{1}_{\{|\mathcal{M}_{\leq\Lambda}(u)|<m\}} d\mu_0^{\leq\Lambda}(u)$$

若 $\frac{8}{5} < s \leq 2$。配分函数 Z^Λ 照常将这些测度归一化为概率测度。

引理 3.9 （近似测度）。
设 $s > 1$、V 满足假设 *1.1*，$\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$，且 $\Lambda \geq \lambda_1$。此外，假设$s > \frac{8}{5}$ 对于聚焦非线性成立。则测度 μ_Λ 是良定义的，且相对于高斯测度 μ_0绝对连续。此外，μ_Λ 收敛于 μ，其意义是对任意可测集 $A \subset \mathcal{H}^\theta$,

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \mu_\Lambda(A) = \mu(A). \tag{3.37}$$

证明。由（3.32）和（3.33）可知，近似测度的良定义性可完全仿照上文讨论的全测度情形 $\Lambda = \infty$ 得出。此外，归一化常数 Z^Λ 关于 Λ一致有界。

我们先证明散焦情形下的（3.37）。记

$$G_\Lambda(u) := e^{-\frac{1}{2}\|Q_\Lambda u\|_{L^4}^4}, \quad G(u) := e^{-\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4} \tag{3.38}$$

我们首先断言，$G_\Lambda(u)$ 关于 μ_0 依测度收敛于 $\to G(u)$，即

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \lim_{\Lambda\to\infty} \mu_0\left(u \in \mathcal{H}^\theta : |G_\Lambda(u) - G(u)| > \varepsilon\right) = 0. \tag{3.39}$$

由于 $\mu_0(\mathrm{H}^\theta) = 1$，依测度收敛在复合以及与连续函数相乘后仍然成立。因此，只需证明 $\mathrm{k}Q_\Lambda u\mathrm{k}_{L^4} \to \mathrm{k}u\mathrm{k}_{L^4}$ 关于 μ_0 依测度收敛。根据切比雪夫不等式，即

$$\mu_0\left(|\|Q_\Lambda u\|_{L^4} - \|u\|_{L^4}| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \int |\|Q_\Lambda u\|_{L^4} - \|u\|_{L^4}|^4 d\mu_0(u),$$

只需证明

$$\int \|Q_\Lambda u - u\|_{L^4}^4 d\mu_0(u) \to 0 \text{ as } \Lambda \to \infty.$$

为此，我们记 $R_\Lambda := Q_\Lambda - \mathrm{Id}$，因此

$$R_\Lambda u = \sum_{j\geq1} R(\lambda_j)\alpha_j u_j, \quad R(\lambda_j) := \chi\left(\frac{\lambda_j}{\Lambda}\right) - 1.$$

利用（3.2），可得[4]

$$\begin{aligned}\int |R_\Lambda u(x)|^4 d\mu_0(u) &= \mathrm{Tr}\left[(\delta_x)^{\otimes 2}\int |(R_\Lambda u)^{\otimes 2}\rangle\langle (R_\Lambda u)^{\otimes 2}| d\mu_0(u)(\delta_x)^{\otimes 2}\right]\\ &\leq 2!\mathrm{Tr}\left[(\delta_x)^{\otimes 2}(R_\Lambda h^{-1}R_\Lambda)^{\otimes 2}(\delta_x)^{\otimes 2}\right]\\ &\leq 2!\left(\mathrm{Tr}[\delta_x R_\Lambda h^{-1}R_\Lambda \delta_x]\right)^2\\ &= 2!\left(\sum_{j\geq 1}|R(\lambda_j)|^2\lambda_j^{-1}|u_j(x)|^2\right)^2\end{aligned}$$

根据 χ 的选择，对于 $\lambda_j \leq \Lambda/2$，有 $R(\lambda_j)=0$；对于所有 j，有 $|R(\lambda_j)|\leq 2$，因此

$$\int \|R_\Lambda u\|_{L^4}^4 d\mu_0(u) \leq 32\int \Big(\sum_{\lambda_j>\Lambda/2}\lambda_j^{-1}|u_j(x)|^2\Big)^2 dx \to 0 \text{ as } \Lambda\to\infty.$$

因此结论成立。

现在令 A 为 H^θ 中的一个可测集。我们将证明

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\int \mathbb{1}_A G_\Lambda(u)d\mu_0(u) = \int \mathbb{1}_A G(u)d\mu_0(u) \tag{3.40}$$

这是（3.37）。令 $\varepsilon>0$。我们引入集合

$$B_{\Lambda,\varepsilon} := \left\{u\in\mathcal{H}^\theta : |G_\Lambda(u)-G(u)|\leq\varepsilon\right\}.$$

我们有

$$\Big|\int_{B_{\Lambda,\varepsilon}} \mathbb{1}_A(G_\Lambda(u)-G(u))d\mu_0(u)\Big| \leq \varepsilon.$$

另一方面，由于 $G_\Lambda(u)$ $G(u)$ $\in L^2(d\mu_0)$ 在 Λ上一致成立，我们由（3.39）可推出

$$\Big|\int_{B_{\Lambda,\varepsilon}^c} \mathbb{1}_A(G_\Lambda(u)-G(u))d\mu_0(u)\Big| \leq \|G_N(u)-G(u)\|_{L^2(d\mu_0)}\sqrt{\mu_0(B_{\Lambda,\varepsilon}^c)} \to 0 \text{ as } \Lambda\to\infty.$$

结合上述估计，我们证明了（3.40）。

对于聚焦情形，记

$$G_\Lambda(u) := e^{\frac{1}{2}\|Q_\Lambda u\|_{L^4}^4}\mathbb{1}_{\left\{\|P_{\leq\Lambda}u\|_{L^2}^2<m\right\}}, \quad G(u) := e^{\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}\mathbb{1}_{\left\{\|u\|_{L^2}^2<m\right\}} \tag{3.41}$$

对 $s>2$ 和

$$G_\Lambda(u) := e^{\frac{1}{2}\|Q_\Lambda u\|_{L^4}^4}\mathbb{1}_{\left\{|\mathcal{M}_{\leq\Lambda}(u)|<m\right\}}, \quad G(u) := e^{\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}\mathbb{1}_{\{|\mathcal{M}(u)|<m\}} \tag{3.42}$$

对 $\frac{8}{5}<s\leq 2$。由于 $G_\Lambda(u)$ $G(u)$ $\in L^2(d\mu_0)$ 在 Λ上一致成立，与散焦情形中相同的论证表明（3.37）。□

上述测度的一个直接用途是，很容易证明它们在近似非线性薛定谔方程的流下保持不变

$$\begin{cases}\mathrm{i}\,\partial_t u_\Lambda - h u_\Lambda &= \pm Q_\Lambda(|Q_\Lambda u_\Lambda|^2 Q_\Lambda u_\Lambda), \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\\ u_\Lambda|_{t=0} &= f.\end{cases} \tag{3.43}$$

例如，[2, 3, 8], 我们将广泛使用这一事实。

引理 3.10 (近似非线性薛定谔动力学)。
设 $s>1$, V 满足假设 1.1, $\theta<2s$, 且 $f\in\mathcal{H}^\theta$。则对每个 $\Lambda\geq\lambda_1$，方程 (3.43) 的解在全时间范围内存在。此外，测度 μ_Λ （定义见 (3.34)或 (3.36)）在方程 (3.43)的流下保持不变。

[4]再次按照引理 3.2的证明中的做法对狄拉克δ函数进行正则化。

证明。**步骤 1，整体存在性**。我们将 $u_\Lambda = u_\Lambda^{\mathrm{lo}} + u_\Lambda^{\mathrm{hi}}$ 写作 $u_\Lambda^{\mathrm{lo}} := P_{\le\Lambda}u_\Lambda$，并将 $u_\Lambda^{\mathrm{hi}} := P_{>\Lambda}u_\Lambda$。由于 $P_{>\Lambda}Q_\Lambda = 0$，高频部分满足

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\partial_t u_\Lambda^{\mathrm{hi}} - h u_\Lambda^{\mathrm{hi}} &= 0, \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u_\Lambda^{\mathrm{hi}}\big|_{t=0} &= P_{>\Lambda}f. \end{cases} \tag{3.44}$$

如果我们写作

$$u_\Lambda^{\mathrm{hi}}(t,x) = \sum_{\lambda_j>\Lambda} \alpha_j^{\mathrm{hi}}(t)u_j(x), \quad P_{>\Lambda}f = \sum_{\lambda_j>\Lambda}\alpha_{j0}u_j, \quad \alpha_{j0} = \langle f, u_j\rangle,$$

那么我们有

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\partial_t \alpha_j^{\mathrm{hi}} - \lambda_j \alpha_j^{\mathrm{hi}} &= 0, \\ \alpha_j^{\mathrm{hi}}\big|_{t=0} &= \alpha_{j0}, \end{cases}$$

因此 $\alpha_j^{\mathrm{hi}}(t) = e^{-\mathrm{i}\,t\lambda_j}\alpha_{j0}$ 或

$$u_\Lambda^{\mathrm{hi}}(t,x) = \sum_{\lambda_j>\Lambda} e^{-\mathrm{i}\,t\lambda_j}\alpha_{j0}u_j(x).$$

特别地，高频部分在全局时间内存在。

另一方面，通过应用 $P_{\le\Lambda}$ 于（3.43）两边，并利用（3.32），我们得到

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\partial_t u_\Lambda^{\mathrm{lo}} - h u_\Lambda^{\mathrm{lo}} &= \pm Q_\Lambda\left(|Q_\Lambda u_\Lambda^{\mathrm{lo}}|^2 Q_\Lambda u_\Lambda^{\mathrm{lo}}\right), \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u_\Lambda^{\mathrm{lo}}\big|_{t=0} &= P_{\le\Lambda}f. \end{cases} \tag{3.45}$$

如果我们记

$$u_\Lambda^{\mathrm{lo}}(t,x) = \sum_{\lambda_j\le\Lambda}\alpha_j^{\mathrm{lo}}(t)u_j(x), \quad \alpha_j^{\mathrm{lo}} = a_j^{\mathrm{lo}} + \mathrm{i}\,b_j^{\mathrm{lo}},$$

那么（3.45）是如下形式的哈密顿常微分方程

$$\partial_t a_j^{\mathrm{lo}} = \frac{\partial H}{\partial b_j^{\mathrm{lo}}}, \quad \partial_t b_j^{\mathrm{lo}} = -\frac{\partial H}{\partial a_j^{\mathrm{lo}}}, \quad \lambda_j\le\Lambda,$$

其中

$$\begin{aligned} H(u_\Lambda^{\mathrm{lo}}) &= \|h^{1/2}u_\Lambda^{\mathrm{lo}}\|_{L^2}^2 \pm \frac{1}{2}\|Q_\Lambda u_\Lambda^{\mathrm{lo}}\|_{L^4}^4 \\ &= \sum_{\lambda_j\le\Lambda}\lambda_j|\alpha_j^{\mathrm{lo}}|^2 \pm \frac{1}{2}\Big\|Q_\Lambda\Big(\sum_{\lambda_j\le\Lambda}\alpha_j^{\mathrm{lo}}u_j\Big)\Big\|_{L^4}^4 =: H(a_j^{\mathrm{lo}}, b_j^{\mathrm{lo}}) \end{aligned}$$

在（3.45）的流下保持守恒。根据柯西-利普希茨定理，（3.45）存在局部解。此外，由于质量守恒

$$M(u_\Lambda^{\mathrm{lo}}) = \|u_\Lambda^{\mathrm{lo}}\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda_j\le\Lambda}|\alpha_j^{\mathrm{lo}}|^2,$$

局部解可以在整个时间范围内延拓。因此，u_Λ^{lo} 在整个时间范围内均存在。

步骤 2，测度不变性。我们证明 $\mu_0^{>\Lambda}$和 $\mu^{\le\Lambda}$ 在 (3.44) 和 (3.45) 的流下保持不变。为此，我们分别将 (3.44) 和 (3.45) 的解映射记为 $\Phi_\Lambda^{\mathrm{hi}}(t)$ 和 $\Phi_\Lambda^{\mathrm{lo}}(t)$。

设 A 是 H^θ 中的可测集，且满足 $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$。我们有

$$\begin{aligned}
\mu_0^{>\Lambda}(\Phi_\Lambda^{\mathrm{hi}}(t)(A)) &= \int_A d\mu_0^{>\Lambda}(u_\Lambda^{\mathrm{hi}}(t)) \\
&= \int_A \prod_{\lambda_j>\Lambda} \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j|\alpha_\Lambda^{\mathrm{hi}}(t)|^2} d\alpha_j^{\mathrm{hi}}(t) \\
&= \int_A \prod_{\lambda_j>\Lambda} \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j|e^{-i\lambda_j}\alpha_{j0}|^2} d\left(e^{-\mathrm{i}\,t\lambda_j}\alpha_{j0}\right) \\
&= \int_A \prod_{\lambda_j>\Lambda} \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j|\alpha_{j0}|^2} d\alpha_{j0} \\
&= \int_A d\mu_0^{>\Lambda}(u_0) = \mu_0^{>\Lambda}(A),
\end{aligned}$$

其中第四行利用了勒贝格测度在旋转下的不变性。由此可知， $\mu_0^{>\Lambda}$在（3.44）的流下是不变的。

由于 $\mu^{\leq\Lambda}$ 是有限维的， $\mu^{\leq\Lambda}$ 在（3.45）的流下的不变性，可直接由哈密顿量 H（u_Λ^{lo}）的守恒以及$du_\Lambda^{\mathrm{lo}} = \prod_{\lambda_j\leq\Lambda} da_j^{\mathrm{lo}} db_j^{\mathrm{lo}}$的刘维尔定理推出。对于聚焦测度，我们还利用了质量守恒。□

4. 柯西问题与不变测度：超调和情形

我们从 $s > 2$情形开始分析柯西问题。在这种情况下，吉布斯测度支撑在具有正指标的索博列夫空间上，也就是说，支撑在$\mathcal{H}^\theta$中，其中$0 < \theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$。因此，我们有理由期待，对于取值于吉布斯测度支撑集中的初始数据，确定性局部适定性成立。这正是我们在第4.1节给出的结果。在第4.2节中，我们利用上述引入的近似测度的不变性，将流延拓为全局流。

4.1. **确定性局部适定性**。

当 $s > 2$时，我们可以使用 [63, 64,65]中的工具，得到以下确定性局部适定性结果。

命题 4.1 (**确定性局部适定性，** $s > 2$)。
设 $s > 2$， V满足假设 *1.1*，且 θ 满足

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right) < \theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}. \tag{4.1}$$

设 $(p,\ q)$ 是附录 *B* 中的斯特里卡兹容许对，且 $\gamma > 0$ 满足

$$p > 4, \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{p} < \gamma < \theta - \frac{2}{p}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right). \tag{4.2}$$

那么，对任意 $f \in \mathcal{H}^\theta$，都存在 $\delta > 0$ 以及方程 (1.1) 的唯一解，其初始值为$u|_{t=0} = f$且满足

$$u \in C([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta) \cap L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q}).$$

特别地，若 $\|f\|_{\mathcal{H}^\theta} \leq K$，则

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} \leq 2CK \tag{4.3}$$

对所有 $|t| \leq \delta \sim K^{-\varrho}$ 满足 $\varrho > 0$ 以及某个普适常数 $C > 0$。此外，若 $u_1(t)$和 $u_2(t)$ 分别是以下方程的解：(1.1) 其初始数据为 $u_1|_{t=0} = f_1$， $u_2|_{t=0} = f_2 \in \mathcal{H}^\theta$并满足 $\|f_1\|_{\mathcal{H}^\theta}$， $\|f_2\|_{\mathcal{H}^\theta} \leq K$，则

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} \leq 2C\|f_1 - f_2\|_{\mathcal{H}^\theta} \tag{4.4}$$

对所有 $|t| \leq \delta \sim K^{-\varrho}$。

我们简要评论一下条件（4.1）和（4.2）。不等式（4.1）中的第二个不等式确保吉布斯测度的支撑集包含于 $\mathcal{H}^\theta$。不等式（4.1）中的第一个不等式保证存在由（p， q）给出的 Strichartz 可容许对。条件（ 4.2 ）中的第一个条件使我们可以在时间变量上使用霍尔德不等式。条件（4.2）中第二个条件的第一个不等式，结合（p， q）的容许性，可得

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{2}{p}<\gamma$$

从而我们有 Sobolev 嵌入 $\mathcal{W}^{\gamma,\ q}\subset L^\infty(\mathbb{R})$。最后，条件 (4.2) 中第二个条件的第二个不等式推出 $\theta-\gamma>\frac{2}{p}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)$ 这对于使用带导数损失的 Strichartz 估计是必需的

$$\|e^{-\mathrm{i}\,th}f\|_{L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q})}\lesssim\|f\|_{\mathcal{H}^\theta}. \tag{4.5}$$

更多细节请参见附录B 。

命题 *4.1* 的证明。 证明的主要内容已见 [64]。为方便读者，我们回顾一些细节。设 $\delta>0$ 为稍后选取的一个小参数。记

$$X_\delta^{\theta,\gamma}:=C([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta)\cap L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q})$$

赋予范数

$$\|u\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}}=\|u\|_{L^\infty([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta)}+\|u\|_{L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q})}.$$

只需证明 Duhamel 泛函

$$\Phi_f(u(t))=e^{-\mathrm{i}\,th}f\mp\mathrm{i}\int_0^t e^{-\mathrm{i}\,(t-\tau)h}|u(\tau)|^2u(\tau)d\tau$$

是 $(B_{X^{\theta,\delta}}{}^{\gamma}(L)\ d)$ 上的压缩映射，其中

$$B_{X_\delta^{\theta,\gamma}}(L):=\left\{u\in X_\delta^{\theta,\gamma}:\|u\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}}\le L\right\}$$

是 $X^{\theta}{}_{,\delta}{}^{\gamma}$ 中以零为中心、半径为 L 的球，并且

$$d(u_1,u_2):=\|u_1-u_2\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}}.$$

By 在 $e^{-\mathrm{i}\,th}$ 作用于 $\mathcal{H}^\theta$ 上的酉性以及分数阶乘积法则（见引理 B.3），我们得到 e

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[-\delta,\delta]}\|\Phi_f(u)(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}&\le\|f\|_{\mathcal{H}^\theta}+\int_0^\delta\||u(\tau)|^2u(\tau)\|_{\mathcal{H}^\theta}d\tau\\&\le\|f\|_{\mathcal{H}^\theta}+C\int_0^\delta\|u(\tau)\|_{L^\infty}^2\|u(\tau)\|_{\mathcal{H}^\theta}d\tau\\&\le\|f\|_{\mathcal{H}^\theta}+C\|u\|_{L^2([-\delta,\delta],L^\infty)}^2\|u\|_{L^\infty([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta)}\\&\le\|f\|_{\mathcal{H}^\theta}+C\delta^{1-\frac{2}{p}}\|u\|_{L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q})}^2\|u\|_{L^\infty([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta)},\end{aligned}$$

这里我们利用时间变量上的 Hölder不等式和索伯列夫嵌入$\mathcal{W}^{\gamma,\,q}\subset L^\infty(\mathbb{R})$ 得到了最后一个不等式。另一方面，利用（4.5），我们有

$$\begin{aligned}\|\Phi_f(u)\|_{L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q})} &\leq \|e^{-\mathrm{i}\,th}f\|_{L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q})} + \left\|\int_0^t e^{-\mathrm{i}\,(t-\tau)h}|u(\tau)|^2u(\tau)d\tau\right\|_{L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q})}\\ &\leq C\|f\|_{\mathcal{H}^\theta} + \int_0^\delta \|\mathbb{1}_{\{\tau<t\}}e^{-\mathrm{i}\,(t-\tau)h}|u(\tau)|^2u(\tau)\|_{L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q})}d\tau\\ &\leq C\|f\|_{\mathcal{H}^\theta} + \int_0^\delta \|e^{-\mathrm{i}\,th}e^{i\tau h}|u(\tau)|^2u(\tau)\|_{L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q})}d\tau\\ &\leq C\|f\|_{\mathcal{H}^\theta} + C\int_0^\delta \||u(\tau)|^2u(\tau)\|_{\mathcal{H}^\theta}d\tau\\ &\leq C\|f\|_{\mathcal{H}^\theta} + C\delta^{1-\frac{2}{p}}\|u\|^2_{L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q})}\|u\|_{L^\infty([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta)}.\end{aligned}$$

特别地，我们有

$$\|\Phi_f(u)\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^\theta} + C\delta^{1-\frac{2}{p}}\|u\|^3_{X_\delta^{\theta,\gamma}}.$$

通过写成

$$|u_1|^2u_1 - |u_2|^2u_2 = (u_1-u_2)(|u_1|^2+|u_2|^2) + (\overline{u}_1-\overline{u}_2)u_1u_2,$$

同样的论证可得

$$\begin{aligned}\|\Phi_f(u_1)-\Phi_f(u_2)\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}} &\leq \left\|\int_0^t e^{-\mathrm{i}\,(t-\tau)h}(|u_1(\tau)|^2u_1(\tau)-|u_2(\tau)|^2u_2(\tau))d\tau\right\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}}\\ &\leq C\delta^{1-\frac{2}{p}}\left(\|u_1\|^2_{X_\delta^{\theta,\gamma}}+\|u_2\|^2_{X_\delta^{\theta,\gamma}}\right)\|u_1-u_2\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}}.\end{aligned}$$

因此，存在 $C>0$，使得对每个 $u_1,\,u_2\in B_{X^{\theta,\,\delta}{}^{\gamma}}(L)$,

$$\|\Phi_f(u)\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^\theta} + C\delta^{1-\frac{2}{p}}L^3,$$

$$d(\Phi_f(u_1),\Phi_f(u_2)) \leq C\delta^{1-\frac{2}{p}}L^2d(u_1,u_2).$$

取 $L=2C\|f\|_{\mathcal{H}^\theta}$，并选择 $\delta>0$使得 $C\delta^{1-\frac{2}{p}}L^2\leq\frac{1}{2}$，我们看到 Φ_f是 $(B_{X^{\theta,\,\delta}{}^{\gamma}}(L)\ d)$ 上的压缩映射。这证明了满足 (4.3) 的解存在。此外，若 $\|f\|_{\mathcal{H}^\theta}\leq K$，则我们可以取 $L=2CK$和 $\delta=\nu K^{-\varrho}$，使得 $\varrho=\frac{2}{1-\frac{2}{p}}$并且 $\nu>0$ 充分小，从而

$$C\delta^{1-\frac{2}{p}}L^2 = 4C^3\nu^{1-\frac{2}{p}} \leq \frac{1}{2}.$$

因此，对于所有 $|t|\leq\delta\sim K^{-\varrho}$，该解满足 $\mathrm{k}u(t)\mathrm{k}_{\mathcal{H}^\theta}\leq 2CK$。

为证明（4.4），我们像之前一样进行估计，得到

$$\|u_1-u_2\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}} \leq C\|f_1-f_2\|_{\mathcal{H}^\theta} + C\delta^{1-\frac{2}{p}}\left(\|u_1\|^2_{X_\delta^{\theta,\gamma}}+\|u_2\|^2_{X_\delta^{\theta,\gamma}}\right)\|u_1-u_2\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}}.$$

由于 $\mathrm{k}f_1\mathrm{k}_{\mathcal{H}^\theta},\ \mathrm{k}f_2\mathrm{k}_{\mathcal{H}^\theta}\leq K$，我们有

$$\|u_1\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}},\ \|u_2\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}} \leq 2CK,$$

因此

$$\|u_1-u_2\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}} \leq C\|f_1-f_2\|_{\mathcal{H}^\theta} + C\delta^{1-\frac{2}{p}}K^2\|u_1-u_2\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}}.$$

我们将 $\delta > 0$ 取得足够小，使得 $C\delta^{1-\frac{2}{p}}K^2 \le \frac{1}{2}$。然后，我们可以将右边的第二项吸收到左边，从而得到

$$\|u_1 - u_2\|_{X_\delta^{\theta,\gamma}} \le 2C\|f_1 - f_2\|_{\mathcal{H}^\theta}$$

由此得到（4.4）。证明完毕。 □

4.2. 测度不变性与整体适定性。 接下来我们证明，对于一个吉布斯测度满测集中的初始数据，流可以整体化。

定理 4.2 （几乎必然整体适定性， $s > 2$）。
设 $s > 2$, V 满足假设 *1.1*，且 θ 满足

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right) < \theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}.$$

那么存在集合 $\Sigma \subset \mathcal{H}^\theta$ 满足 $\mu(\Sigma) = 1$，使得对任意 $f \in \Sigma$，方程(1.1) 以初始值 $u|_{t=0} = f$ 出发的对应解在所有时间上均存在，且满足

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} \le C\left(\omega(f) + \log^{\frac{1}{2}}(1 + |t|)\right), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

对于某个常数 $\omega(f) > 0$，其取决于 f，以及某个普适常数 $C > 0$。此外，吉布斯测度 μ 在 (1.1) 的流下是不变的。

证明基于两个主要要素:

- 近似非线性薛定谔流（3.43）在一个测度几乎为满的集合上实现了整体化，并具有显式界。
- T证明了完整流（1.1）的局部解始终接近近似解 .

我们先讨论前一个要素，其中关键是利用吉布斯测度 μ_Λ 在近似流下的不变性。

引理 4.3 (**近似流的一致估计，** $s > 2$)。
令 s, θ 如前述陈述所述，并取满足以下条件的 θ_1

$$\theta < \theta_1 < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}.$$

那么，对所有 $\Lambda \ge \lambda_1$ 和 T，$\varepsilon > 0$。存在与 $\Sigma_{\Lambda,T,\varepsilon} \subset \mathcal{H}^{\theta_1}$ 和 $C > 0$ 无关的 f Λ, T, ε，使得: *(1)* μ_Λ $(\Sigma^c_{\Lambda,T,\varepsilon}) \le C\varepsilon$。
(2) 对于 $f \in \Sigma_{\Lambda,T,\varepsilon}$，存在方程 (3.43) 在 $[-T, T]$ 上的唯一解，满足

$$\|u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \le C\left(\log\frac{T}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad \forall |t| \le T. \tag{4.7}$$

证明。令 $K > 0$ 并记

$$B_K := \{u \in \mathcal{H}^{\theta_1} : \|u\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \le K\}. \tag{4.8}$$

由 (3.33) 可知，命题 4.1 中的确定性局部适定性论证稍作调整后同样适用于近似流，并由此可得，对于 $f \in B_K$，方程 (3.43) 存在唯一解，满足

$$\|u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \le 2CK, \quad \forall |t| \le \delta \tag{4.9}$$

with

$$\delta = \nu(K + 1)^{-\varrho}, \tag{4.10}$$

其中 $\varrho > 0$ 与命题 4.1中的相同， $\nu > 0$ 较小，且 $C > 0$ 与 Λ无关， K。这里我们取 δ，使其略小于命题 4.1证明中所取的值，这在后文会很方便。

记 $J = \left[\frac{T}{\delta}\right]$ 为 $\frac{T}{\delta}$的整数部分，并令

$$\Sigma_{\Lambda,T,K} := \bigcap_{j=-J}^{J} \Phi_\Lambda\left(-j\delta\right)\left(B_K\right), \tag{4.11}$$

其中 Φ_Λ 是方程 (3.43) 的解映射。由于 μ_Λ 在方程 (3.43) 的流下保持不变，因此我们有

$$\begin{aligned}
\mu_\Lambda(\Sigma^c_{\Lambda,T,K}) &= \mu_\Lambda\Big(\Big(\bigcap_{j=-J}^{J} \Phi_\Lambda(-j\delta)(B_K)\Big)^c\Big) \\
&= \mu_\Lambda\Big(\bigcup_{j=-J}^{J} (\Phi_\Lambda(-j\delta)(B_K))^c\Big) \\
&= \mu_\Lambda\Big(\bigcup_{j=-J}^{J} \Phi_\Lambda(-j\delta)(B_K^c)\Big) \\
&\leq \sum_{j=-J}^{J} \mu_\Lambda(\Phi_\Lambda(-j\delta)(B_K^c)) \\
&\leq 2\frac{T}{\delta}\mu_\Lambda(B_K^c).
\end{aligned}$$

由 (3.4)，我们有

$$\begin{aligned}
\mu_\Lambda(B_K^c) &= \int \mathbb{1}_{B_K^c} d\mu_\Lambda(u) \\
&= \int \mathbb{1}_{B_K^c} \frac{1}{Z^\Lambda} G_\Lambda(u) d\mu_0(u) \\
&\leq \frac{1}{Z^\Lambda} \|G_\Lambda(u)\|_{L^2(d\mu_0)} \left(\mu_0(B_K^c)\right)^{1/2} \\
&\leq Ce^{-cK^2},
\end{aligned}$$

其中 $G_\Lambda(u)$ 在散焦情形下如 (3.38) 所示，在聚焦情形下如 (3.41) 所示。这里我们用到了以下事实： $G_\Lambda(u) \in L^2(d\mu_0)$，并且 $Z^\Lambda \geq C > 0$ 关于 Λ一致成立。特别地，我们得到

$$\mu_\Lambda(\Sigma^c_{\Lambda,T,K}) \leq \frac{2C}{\nu} T(K+1)^\varrho e^{-cK^2} \leq CTe^{-cK^2}$$

对于某些常数 C， $c > 0$。注意，常数 C， c可能随行变化，但与 Λ， T， K无关。通过选取

$$K = C\left(\log\frac{T}{\varepsilon}\right)^{1/2} \tag{4.12}$$

取适当的常数 $C > 0$，我们得到

$$\mu_\Lambda(\Sigma^c_{\Lambda,T,K}) \leq C\varepsilon.$$

令$\Sigma_{\Lambda,\ T,\ \varepsilon} = \Sigma_{\Lambda,\ T,\ K}$ 其中 K 如式（4.12）所示，则第一个结论成立。为了证明第二个结论，我们注意到，对于 $|t| \leq T$，存在一个整数 j和 $\delta_1 \in [-\delta, \delta]$，使得$t = j\delta + \delta_1$，因此

$$u_\Lambda(t) = \Phi_\Lambda(\delta_1)\Phi_\Lambda(j\delta)f.$$

由于 $f \in \Phi_\Lambda\left(-j\delta\right)\ \left(B_K\right)$，我们有 $\Phi_\Lambda\left(j\delta\right)\ f \in B_K$ 由式（4.9）可得

$$\|u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \leq 2CK, \quad \forall |t| \leq T. \tag{4.13}$$

考虑到（4.12），我们得到了所需的估计。 □

下面转向第二个主要要素。

引理 4.4（近似流与精确流的比较，$s>2$）。
设 $\Sigma_{\Lambda,T,\varepsilon}$ 与前一个引理中相同。那么对任意 $f\in\Sigma_{\Lambda,T,\varepsilon}$，存在一个 *unique* 解（1.1），其初始数据为 $u|_{t=0}=f$，满足

$$\|u(t)-u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le C(T,\varepsilon)\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2},\quad \forall |t|\le T \tag{4.14}$$

对所有充分大的 Λ，以及某个与 Λ 无关的常数 $C(T,\varepsilon)>0$。特别地，存在与 T,ε 无关的 $\Sigma_{T,\varepsilon}\subset\mathcal{H}^\theta$ 和 $C>0$，使得：
$\mu(\Sigma\setminus\Sigma_{T,\varepsilon}^c)\le C\varepsilon$。
(2) 对于 $f\in\Sigma_{T,\varepsilon}$，存在方程 (1.1) 的唯一解，其初始数据为 $u|_{t=0}=f$ 在$[-T,T]$上满足

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le C\left(\log\frac{T}{\varepsilon}\right)^{1/2},\quad \forall |t|\le T. \tag{4.15}$$

证明。 **估计差**。记

$$v_\Lambda:=Q_\Lambda u_\Lambda$$

其中 Q_Λ 如 (3.31) 中所示。我们首先研究差 $u-v_\Lambda$ 在

$$X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])=L^\infty([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta)\cap L^p([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\gamma,q}), \tag{4.16}$$

其中 δ 如 (4.10) 中所示，$(p,\ q)$ 是一个斯特里卡兹容许对（见附录 B），且 γ 满足

$$p>4,\quad \frac12-\frac2p<\gamma<\theta-\frac2p\left(\frac12-\frac2p\right). \tag{4.17}$$

由 (3.43)，我们得到以下 Duhamel 公式

$$u(t)-v_\Lambda(t)=e^{-\mathrm{i}\,th}(f-Q_\Lambda f)\mp\mathrm{i}\int_0^t e^{-\mathrm{i}\,(t-\tau)h}\left(|u(\tau)|^2u(\tau)-Q_\Lambda^2(|v_\Lambda(\tau)|^2v_\Lambda(\tau))\right)d\tau$$

由斯特里卡茨估计（见附录B），可得

$$\|u-v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])}\le C\|f-Q_\Lambda f\|_{\mathcal{H}^\theta}+C\||u|^2u-Q_\Lambda^2(|v_\Lambda|^2v_\Lambda)\|_{L^1([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta)}.$$

对于线性项，我们估计（回忆一下（3.31））

$$\|f-Q_\Lambda f\|_{\mathcal{H}^\theta}\le C\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}\|f\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}}\le CK\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}.$$

对于非线性项，我们写作

$$|u|^2u-Q_\Lambda^2(|v_\Lambda|^2v_\Lambda)=|u|^2u-|v_\Lambda|^2v_\Lambda+(\mathrm{Id}-Q_\Lambda^2)(|v_\Lambda|^2v_\Lambda).$$

由于 $f\in\Sigma_{\Lambda,T,\varepsilon}$（见（4.11）），我们有 $\|f\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}}=\|u_\Lambda(0)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}}\le K$，而（3.43）的局部理论保证存在满足以下条件的唯一解 $\|u_\Lambda\|_{X^{\theta_1,\gamma}([-\delta,\delta])}\le 2CK$ 由（3.33）可得

$$\|v_\Lambda\|_{X^{\theta_1,\gamma}([-\delta,\delta])}\le 2CK,$$

其中 $X^{\theta_1,\gamma}([-\delta,\delta])$ 与（4.16）中的定义相同，其中 p,q,γ如（4.17）所示。按照命题4.1证明中的方法进行估计，可得

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{Id}-Q_\Lambda^2)(|v_\Lambda|^2v_\Lambda)\|_{L^1([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta)}&\le C\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}\||v_\Lambda|^2v_\Lambda\|_{L^1([-\delta,\delta],\mathcal{H}^{\theta_1})}\\&\le C\delta^{1-\frac2p}\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}\|v_\Lambda\|^3_{X^{\theta_1,\gamma}([-\delta,\delta])}\\&\le C\delta^{1-\frac2p}K^3\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}.\end{aligned}$$

由于 $\|f\|_{\mathcal{H}^\theta}\le\|f\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}}\le K$，局部理论和（3.33）给出

$$\|u\|_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])},\ \|v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])}\le 2CK,$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\||u|^2u-|v_\Lambda|^2v_\Lambda\|_{L^1([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta)}\\&\quad\le C\delta^{1-\frac{2}{p}}\left(\|u\|^2_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])}+\|v_\Lambda\|^2_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])}\right)\|u-v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])}\\&\quad\le C\delta^{1-\frac{2}{p}}K^2\|u-v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])}.\end{aligned}$$

通过选择 δ 并取 $\nu>0$ 足够小，我们得到

$$\|u-v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])}\le CK\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}+\frac{1}{2}\|u-v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])}$$

因此

$$\|u-v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])}\le 2CK\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}.$$

另一方面，由（4.13）可推得

$$\|u_\Lambda(t)-v_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le C\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}\|u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}}\le CK\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}$$

这给出

$$\begin{aligned}\|u(t)-u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}&\le\|u(t)-v_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}+\|u_\Lambda(t)-v_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}\\&\le 3CK\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2},\quad\forall|t|\le\delta.\end{aligned}\tag{4.18}$$

我们可以将上述论证迭代 $\left[\frac{T}{\delta}\right]$ 多次。例如，在第二次迭代中，我们有

$$\|u-v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([0,2\delta])}\le C\|u(\delta)-v_\Lambda(\delta)\|_{\mathcal{H}^\theta}+\text{ nonlinear term.}$$

注意到

$$\|u(\delta)-v_\Lambda(\delta)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le\|u-v_\Lambda\|_{L^\infty([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\theta)}\le\|u-v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([-\delta,\delta])}\le 2CK\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}.$$

注意到非线性项可像之前一样处理，因为$\|u_\Lambda(\delta)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}}=\|\Phi_\Lambda(\delta)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}}\le K$(见（4.11）），且

$$\|u(\delta)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le\|u_\Lambda(\delta)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}}+\|u(\delta)-u_\Lambda(\delta)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le K+1$$

只要 Λ 取得足够大即可。上述估计正是我们采用δ 如（4.10）所示形式的原因。因此得到

$$\|u-v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([0,2\delta])}\le(2C)^2K\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}.$$

仿照（4.18）中的论证，可得

$$\|u(t)-u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le(3C)^2K\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2},\quad\forall t\in[0,2\delta].$$

经过 $\left[\frac{T}{\delta}\right]$ 次迭代后，对所有子区间求和可得

$$\|u-v_\Lambda\|_{X^{\theta,\gamma}([-T,T])}\le Ce^{c\frac{T}{\delta}}K\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}\le Ce^{cT(K+1)^\varrho}K\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}.$$

通过与（4.18）相同的推理，并应用（4.12），我们证明了（4.14）。

全局化流。由（4.14），存在 Λ_1 充分大，使得对于 $f\in\Sigma_{\Lambda_1,T,\varepsilon}$，方程（1.1）中初始数据为 $u|_{t=0}$ 的对应解满足

$$\|u(t)-u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}\ll 1,\quad\forall|t|\le T,\quad\forall\Lambda\ge\Lambda_1.$$

由此以及（4.7），可得

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le C\left(\log\frac{T}{\varepsilon}\right)^{1/2},\quad\forall|t|\le T.$$

令 $\Sigma_{\Lambda_1,T,\varepsilon} := \Sigma_{\Lambda_1,T,\varepsilon}$，即可证明（4.15）。接下来只需证明第一项。我们估计

$$\mu(\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}) = \int \mathbb{1}_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} d\mu(u) = \int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} \frac{1}{Z} G(u) d\mu_0(u) \le C \int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} G(u) d\mu_0(u),$$

其中 $G(u)$ 在散焦非线性情形下如（3.38）所示，在聚焦情形下如（3.41）所示。这里我们用到了这一事实：$Z \ge C > 0$。

为了用 μ_{Λ_1} 估计最后一个积分，我们分两种情形讨论。对于散焦非线性，我们利用如下事实：$\|Q_\Lambda u\|^4_{L^4} \le C_1 \|u\|^4_{L^4}$，其中某个常数为 $C_1 > 0$。不失一般性，不妨设 $C_1 \ge 1$。由霍尔德不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2}\|u\|^4_{L^4}} d\mu_0(u) &\le \int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2C_1}\|Q_{\Lambda_1} u\|^4_{L^4}} d\mu_0(u) \\
&\le \Big(\int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2}\|Q_{\Lambda_1} u\|^4_{L^4}} d\mu_0(u) \Big)^{1/C_1} \Big(\int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} d\mu_0(u) \Big)^{1/C_1'} \\
&= \Big(Z^{\Lambda_1} \int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} d\mu_{\Lambda_1}(u) \Big)^{1/C_1} \Big(\int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} d\mu_0(u) \Big)^{1/C_1'} \\
&\le C \left(\mu_{\Lambda_1}(\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}) \right)^{1/C_1} \\
&< C\varepsilon^{1/C_1},
\end{aligned}$$

其中我们用到了 C_1, C_1') 是一对 Hölder 共轭指数，μ_0 是一个概率测度，并且$Z^{\Lambda_1} \le 1$。最后一个不等式由引理 4.3 得出。在聚焦情形下，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} G(u) d\mu_0(u) &= \int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} G(u) \mathbb{1}_{\{\|u\|^2_{L^2} < m\}} d\mu_0(u) \\
&\le \|G(u)\|_{L^2(d\mu_0)} \left(\int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} \mathbb{1}_{\{\|u\|^2_{L^2} < m\}} d\mu_0(u) \right)^{1/2} \\
&\le C \left(\int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} \mathbb{1}_{\{\|P_{\le\Lambda_1} u\|^2_{L^2} < m\}} d\mu_0(u) \right)^{1/2} \\
&\le C \left(\int_{\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}} e^{\frac{1}{2}\|Q_{\Lambda_1} u\|^4_{L^4}} \mathbb{1}_{\{\|P_{\le\Lambda_1} u\|^2_{L^2} < m\}} d\mu_0(u) \right)^{1/2} \\
&= C \left(\mu_{\Lambda_1}(\Sigma^c_{\Lambda_1,T,\varepsilon}) \right)^{1/2} \\
&< C\varepsilon^{1/2}.
\end{aligned}$$

在这两种情形下，我们都对 ε 作微小调整，以得到所需结果。证明完毕。 □

现在我们可以得出定理4.2的证明。

定理4.2的证明。**几乎必然流，全局时间**。固定 $\varepsilon > 0$ 并令 $T_n = 2^n$，$\varepsilon_n = \varepsilon 2^{-n}$。令$\Sigma_n = \Sigma_{T_n, \varepsilon_n}$ 如引理4.4 中所述，并令

$$\Sigma_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Sigma_n.$$

对于 $f \in \Sigma_\varepsilon$，我们有 $f \in \Sigma_n$ 对所有 $n \ge 1$。根据引理 4.4，方程 (1.1) 对应的初始数据为 $u|_{t=0} = f$ 的解在时间上全局存在，因为它对所有 $[2^{-n}, 2^n]$ 均存在

$n \geq 1$。此外，我们有

$$\mu(\Sigma_\varepsilon^c) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n^c\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Sigma_n^c) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = C\varepsilon.$$

现在定义

$$\Sigma = \bigcup_{\varepsilon>0} \Sigma_\varepsilon \tag{4.19}$$

使得

$$\mu(\Sigma^c) = \mu\Big(\bigcap_{\varepsilon>0} \Sigma_\varepsilon^c\Big) \leq \inf_{\varepsilon>0} \mu(\Sigma_\varepsilon^c) = 0.$$

因此，我们确实找到了所声称的一个具有满 μ 测度的集合，在该集合上流是全局定义的。

时间增长。取 $f \in \Sigma$ 和 $t \in \mathbb{R}$。必然存在某个 $\varepsilon > 0$，使得 $f \in \Sigma_\varepsilon$，并且

$$2^{n-1} \leq 1 + |t| \leq 2^n$$

对于某个整数 $n \geq 1$。特别地，我们有 $n \leq 1 +$ 对数$_2$（$1 + |t|$） $\leq 1 + 2$对数（$1 + |t|$）。对于这样的 n，我们应用引理 4.4，取 $f \in \Sigma_n$ 得到

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} \leq C \left(\log \frac{T_n}{\varepsilon_n}\right)^{1/2} = C \left(\log \frac{1}{\varepsilon} + n\right)^{1/2} \leq C \left(\log^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\varepsilon} + \log^{\frac{1}{2}}(1 + |t|)\right)$$

对于某个常数 $C > 0$。由于 ε依赖于 f，我们用 ω证明（4.6） ω（f） $=$对数$^{\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{\varepsilon}$。

测度不变性。令 θ满足 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right) < \theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$。由解映射的时间可逆性，只需证明

$$\mu(A) \leq \mu(\Phi(t)(A)) \tag{4.20}$$

对所有可测集 $A \subset \Sigma$ 以及所有 $t \in \mathbb{R}$均成立。由内正则性，存在 H^θ 中闭集序列 $\{F_n\}_n$，使得 $F_n \subset A$ 且 $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$。我们声称，只需对闭集证明（4.20）。注意，由于 $F_n \subset A$，解的唯一性意味着 $\mu(\Phi(t)(F_n)) \leq \mu(\Phi(t)(A))$。若（4.20）对闭集成立，则有

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(\Phi(t)(F_n)) \leq \mu(\Phi(t)(A)),$$

因此，(4.20) 对所有可测集都成立。现在给定一个闭集 $F \subset \mathcal{H}^\theta$。取$\theta < \theta_1 < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$ 并令

$$U_n := \{u \in F : \|u\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \leq n\}.$$

由 (3.9)，我们推得

$$\begin{aligned}
\mu(F \setminus U_n) &= \frac{1}{Z} \int_{F\setminus U_n} G(u) d\mu_0(u) \\
&\leq C\|G(u)\|_{L^2(d\mu_0)} \left(\mu_0(F \setminus U_n)\right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\mu_0(\|u\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} > n)\right)^{1/2} \\
&\leq Ce^{-cn^2} \to 0 \text{ as } n \to \infty.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n).$$

与上面的论证相同，只需对 $\mathcal{H}^\theta$ 中有界的闭集证明 (4.20) 即可$\mathcal{H}^{\theta_1}$。

设 U 是这样的集合，并固定 $t > 0$ （$t < 0$ 的情形类似）。由于 U 在 H^{θ_1} 中有界，局部理论保证存在 $K > 0$，使得

$$\{\Phi(\tau)(U) : 0 \leq \tau \leq t\} \subset \{u \in \mathcal{H}^{\theta_1} : \|u\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \leq K\} =: B_{\theta_1,K}.$$

Set

$$\delta = \nu K^{-\varrho},$$

其中 ϱ 与命题 4.1 中的相同，且 $\nu > 0$ 是一个与 K无关的小常数。只需证明

$$\mu(U) \le \mu(\Phi(t)(U)), \quad \forall t \in [0, \delta]. \tag{4.21}$$

事实上，我们将 $[0,t]$ 划分为长度为 δ 的区间，并在这些区间上应用（4.21）。由于解映射的连续性，这样的迭代是可行的，因为每个区间的像在 H^θ 中仍为闭集，且包含于 $B_{\theta_1,\ K}$。

为证明（4.21），取 $\varepsilon > 0$，并用 $B_{\theta,\ \varepsilon}$ 表示 H^θ 中以原点为中心、半径为 ε的开球。存在充分大的 $0 < c \ll 1$ 和 $\Lambda \ge \lambda_1$，使得

$$\begin{aligned}
\Phi_\Lambda(t)(U + B_{\theta,c\varepsilon}) &\subset \Phi_\Lambda(t)(U) + B_{\theta,\varepsilon/2} && \text{(Lipschitz continuity (4.4))}\\
&\subset \Phi(t)(U) + B_{\theta,\varepsilon}. && \text{(Lemma 4.4)}
\end{aligned}$$

因此，我们得到以下不等式链

$$\begin{aligned}
\mu(U) \le \mu(U + B_{\theta,c\varepsilon}) &\le \liminf_{\Lambda\to\infty} \mu_\Lambda(U + B_{\theta,c\varepsilon}) && (\mu_\Lambda \rightharpoonup \mu \text{ weakly})\\
&= \liminf_{\Lambda\to\infty} \mu_\Lambda(\Phi_\Lambda(t)(U + B_{\theta,c\varepsilon})) && (\text{invariance of } \mu_\Lambda)\\
&\le \liminf_{\Lambda\to\infty} \mu_\Lambda(\Phi(t)(U) + B_{\theta,\varepsilon})\\
&\le \limsup_{\Lambda\to\infty} \mu_\Lambda(\Phi(t)(U) + \overline{B}_{\theta,\varepsilon})\\
&\le \mu(\Phi(t)(U) + \overline{B}_{\theta,\varepsilon}). && (\mu_\Lambda \rightharpoonup \mu \text{ weakly})
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$，得到对于所有 $t \in [0,\delta]$，$\mu(U) \le \mu(\Phi(t)(U))$。证明完毕。 □

注 4.1（高阶非线性）。本节所述论证可用于证明与（2.16）相关的吉布斯测度的不变性，对任意 $s > 2$ 和$2 < \kappa < 4+s$ 均成立，只要吉布斯测度定义良好。事实上，局部适定性在

$$C([-\delta,\delta], \mathcal{H}^\theta) \cap L^p([-\delta,\delta], \mathcal{W}^{\gamma,q}),$$

其中指数选取如下：

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\max\{\kappa-2, 4\}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s}\right) < \theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s},$$

这一对 $(p,\ q)$ 是斯特里卡兹容许的，并且我们假设

$$p > \max\{\kappa-2, 4\}, \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{p} < \gamma < \theta - \frac{2}{p}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right).$$

条件 $\kappa < 4 + s$ 保证了此类指数的存在，随后由以下斯特里卡茨估计可得局部适定性

$$\|e^{-\mathrm{i}\,th} f\|_{L^p_\delta \mathcal{W}^{\gamma,q}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}^\theta}.$$

以及非线性估计

$$\begin{aligned}
\||u|^{\kappa-2}u\|_{L^1_\delta \mathcal{H}^\theta} &\le \|u\|^{\kappa-2}_{L^{\kappa-2}_\delta L^\infty} \|u\|_{L^\infty_\delta \mathcal{H}^\theta} \lesssim \delta^{1-\frac{\kappa-2}{p}} \|u\|^{\kappa-2}_{L^p_\delta \mathcal{W}^{\gamma,q}} \|u\|_{L^\infty_\delta \mathcal{H}^\theta}\\
\||u_1|^{\kappa-2}u_1 - |u_2|^{\kappa-2}u_2\|_{L^1_\delta \mathcal{H}^\theta} &\lesssim \delta^{1-\frac{\kappa-2}{p}} \left(\|u_1\|^{\kappa-2}_{L^p_\delta \mathcal{W}^{\gamma,q}} + \|u_2\|^{\kappa-2}_{L^p_\delta \mathcal{W}^{\gamma,q}}\right) \|u_1 - u_2\|_{L^\infty_\delta \mathcal{H}^\theta},
\end{aligned}$$

其中，我们利用了 Sobolev 嵌入得到 $\mathrm{W}^{\gamma,\ q} \subset L^\infty(\mathbb{R})$，因为 $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{2}{p} < \gamma$。局部适定性证明之后，吉布斯测度的不变性可由与上述相同的论证得到。⋄

5. 柯西问题与不变测度，（次）调和情形

现在我们考虑 $1 < s \leq 2$ 这一情形，此时吉布斯测度支撑在 L^2- 基负指标 Sobolev 空间上。在这种情况下，似乎很难证明方程（1.1）的确定性局部适定性。在 [8], 中，作者利用一些精细的多线性估计证明了 $s = 2$ 的确定性局部适定性。这些估计的证明高度依赖于对谐振子谱性质的深入理解。我们预计，这类多线性估计的证明无法推广到 $1 < s < 2$ 这一情形。在第 5.1 节，我们旨在证明方程（1.1）的几乎必然局部适定性。第 5.2 节将讨论几乎必然整体适定性及测度不变性。

5.1. 概率局部适定性。

我们对几乎必然局部适定性的证明依赖于以下概率斯特里卡茨估计。

引理 5.1 (概率斯特里卡茨估计)。 设 $1 < s \leq 2$, V 满足假设 1.1, $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$，且 $p > \max\left\{2, s^{\frac{4}{(1-2\beta)}}\right\}$ 为偶整数。那么存在 $C, c > 0$，使得

$$\int e^{c\|e^{-\mathrm{i}th}f\|^2_{\mathcal{W}^{\beta,p}}} d\mu_0(f) \leq C, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

此外，对于 $\theta < 1/2 - 1/s$ 以及所有 $\lambda > 0$,

$$\mu_0\left(f \in \mathcal{H}^\theta : \|e^{-\mathrm{i}th}f\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{W}^{\beta,p})} > \lambda\right) \leq Ce^{-c\lambda^2} \tag{5.2}$$

对于所有 $T > 0$、所有 $q \geq 1$ 以及所有 $\lambda > 0$,

$$\mu_0\left(f \in \mathcal{H}^\theta : \|e^{-\mathrm{i}th}f\|_{L^q([-T,T],\mathcal{W}^{\beta,p})} > \lambda\right) \leq Ce^{-c\frac{\lambda^2}{T^{2/q}}}. \tag{5.3}$$

证明。 记 $g_f(t) := e^{-\mathrm{i}th}f$。我们写作

$$f = \sum_{j\geq 1} \alpha_j u_j, \quad \alpha_j = \langle f, u_j\rangle,$$

因此

$$g_f(t) = \sum_{j\geq 1} \beta_j(t) u_j, \quad \beta_j(t) = \alpha_j e^{-\mathrm{i}t\lambda_j}.$$

注意到

$$\begin{aligned} d\mu_0(g_f(t)) &= \prod_{j\geq 1} \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j|\beta_j(t)|^2} d\beta_j(t) \\ &= \prod_{j\geq 1} \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j|\alpha_j|^2} d\alpha_j = d\mu_0(f), \end{aligned}$$

其中我们使用了勒贝格测度在旋转变换下的不变性。因此得到

$$\int e^{c\|e^{-\mathrm{i}th}f\|^2_{W^{\beta,p}}} d\mu_0(f) = \int e^{c\|g_f(t)\|^2_{W^{\beta,p}}} d\mu_0(g_f(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

由引理 3.4，我们证明了（5.1）。这立即得到（5.2）。为证明（5.3），我们在时间变量上使用霍尔德不等式，得到

$$\|e^{-\mathrm{i}th}f\|_{L^q([-T,T],\mathcal{W}^{\beta,p})} \leq CT^{1/q}\|e^{-\mathrm{i}th}f\|_{L^\infty([-T,T],\mathcal{W}^{\beta,p})}.$$

Thus

$$\mu_0\left(f \in \mathcal{H}^\theta : \|e^{-\mathrm{i}th}f\|_{L^q([-T,T],\mathcal{W}^{\beta,p})} > \lambda\right) \leq \mu_0\left(f \in \mathcal{H}^\theta : \|e^{-\mathrm{i}th}f\|_{L^\infty([-T,T],\mathcal{W}^{\beta,p})} > C\frac{\lambda}{T^{1/q}}\right)$$

且（5.3）由（5.2）得出。 □

现在我们可以陈述方程（1.1）的几乎必然局部适定性。

命题 5.2 (概率局部适定性， $1 < s \le 2$**).**
设 $1 < s \le 2$, V 满足假设 *1.1*, $0 \le \beta < {}^{s-}2s$ ，且 ~~$\theta < 2s$~~。对于~~任意~~ $K > 0$，存在 $\Sigma(K) \subset H^\theta$ ，满足 $\mu_0(\Sigma^c(K)) \le Ce^{-cK^2}$ ，其中常数 $C, c > 0$ 和 $\delta \sim K^{-4} > 0$ 使得对于所有 $f \in \Sigma(K)$，方程 *(1.1)* 存在一个以初始数据 $u|_{t=0} = f$ 为初值的唯一解，并满足

$$u(t) - e^{-\mathrm{i}\,th} f \in C([-\delta, \delta], \mathcal{H}^\beta) \cap L^8([-\delta, \delta], \mathcal{W}^{\beta,4}).$$

此外，对于所有 $f \in \Sigma(K)$，我们有 $\|f\|_{\mathcal{H}^\theta} \le K$ ，且对应的、初始数据为 (1.1) $u|_{t=0} = f$ 的解满足

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} \le 2K, \quad \forall |t| \le \delta. \tag{5.4}$$

此外，如果 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$分别是具有初始数据 (1.1) 的 $u_1|_{t=0} = f_1$, $u_2|_{t=0} = f_2$ 且 f_1, $f_2 \in \Sigma(K)$的解，那么

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} \le \|f_1 - f_2\|_{\mathcal{H}^\theta} + \|e^{-\mathrm{i}\,th} f_1 - e^{-\mathrm{i}\,th} f_2\|_{L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4})} \tag{5.5}$$

对于所有 $|t| \le \delta$。

注意，由于有序对 (8,4) 是斯特里卡兹容许的，且 $\beta > \theta$, (5.5) 推出一个带有导数损失的估计

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} \le C\|f_1 - f_2\|_{\mathcal{H}^\beta}. \tag{5.6}$$

为证明命题 5.2，记

$$g_f(t) := e^{-\mathrm{i}\,th} f, \quad v(t) := u(t) - g_f(t).$$

我们寻求方程的一个解 v

$$\mathrm{i}\,\partial_t v - hv = \pm|g_f + v|^2(g_f + v), \quad v|_{t=0} = 0.$$

为此，我们对 $0 < \delta \le 1$ 定义，

$$X_\delta^\beta := C([-\delta, \delta], \mathcal{H}^\beta) \cap L^8([-\delta, \delta], \mathcal{W}^{\beta,4}).$$

我们的目的是证明泛函

$$\Phi_f(v(t)) := \mp\mathrm{i} \int_0^t e^{-\mathrm{i}\,(t-\tau)h}(|g_f + v|^2(g_f + v))(\tau)d\tau$$

是球上的压缩映射

$$B_{X_\delta^\beta}(L) := \left\{ v \in X_\delta^\beta : \|v\|_{X_\delta^\beta} \le L \right\}$$

并配备距离

$$d(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\|_{X_\delta^\beta},$$

其中 $L > 0$ 稍后确定。

我们先从以下非线性估计开始。

引理5.3 (非线性估计）。
存在 $C > 0$，使得对于任意 $0 < \delta \le 1$、任意满足以下条件的 $f \in \mathcal{H}^\theta$

$$\|g_f\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta,4})} \le K$$

对于某个 $K > 0$，以及任意的 v、v_1、$v_2 \in X_\delta^\beta$，

$$\|\Phi_f(v)\|_{X_\delta^\beta} \le C\delta^{1/2}\left(K^3 + \|v\|_{X_\delta^\beta}^3\right),$$

$$\|\Phi_f(v_1) - \Phi_f(v_2)\|_{X_\delta^\beta} \le C\delta^{1/2}\left(K^2 + \|v_1\|_{X_\delta^\beta}^2 + \|v\|_{X_\delta^\beta}^2\right)\|v_1 - v_2\|_{X_\delta^\beta}.$$

证明。 根据 Strichartz 估计（见附录B），我们有

$$\|\Phi_f(v)\|_{X_\delta^\beta} \leq C \left\| h^{\beta/2} \left(|g_f + v|^2 (g_f + v) \right) \right\|_{L^{8/7}([-\delta,\delta],L^{4/3})}$$

根据乘积法则（见引理 B.3），利用时间变量上的 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned} \|\Phi_f(v)\|_{X_\delta^\beta} &\leq C \|g_f + v\|^2_{L^{24/7}([-\delta,\delta],L^4)} \|h^{\beta/2}(g_f + v)\|_{L^{24/7}([-\delta,\delta],L^4)} \\ &\leq C\delta^{1/2} \|g_f + v\|^2_{L^8([-\delta,\delta],L^4)} \|h^{\beta/2}(g_f + v)\|_{L^8([-\delta,\delta],L^4)}. \end{aligned}$$

根据范数等价关系（B.1），可知

$$\begin{aligned} \|\Phi_f(v)\|_{X_\delta^\beta} &\leq C\delta^{1/2} \|h^{\beta/2}(g_f + v)\|^3_{L^8([-\delta,\delta],L^4)} \\ &\leq C\delta^{1/2} \left(\|g_f\|^3_{L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4})} + \|v\|^3_{L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4})} \right) \\ &\leq C\delta^{1/2} \left(\|g_f\|^3_{L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4})} + \|v\|^3_{X_\delta^\beta} \right). \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\|\Phi_f(v_1) - \Phi_f(v_2)\|_{X_\delta^\beta} \leq C \left\| h^{\beta/2} \left(|g_f + v_1|^2 (g_f + v_1) - |g_f + v_2|^2 (g_f + v_2) \right) \right\|_{L^{8/7}([-\delta,\delta],L^{4/3})}.$$

写成

$$\begin{aligned} &|g_f + v_1|^2 (g_f + v_1) - |g_f + v_2|^2 (g_f + v_2) \\ &\qquad = |g_f + v_1|^2 (v_1 - v_2) + |g_f + v_2|^2 (v_1 - v_2) + (g_f + v_1)(g_f + v_2)(\overline{v}_1 - \overline{v}_2), \end{aligned}$$

并按照上面的方法估计，可得

$$\begin{aligned} \|\Phi_f(v_1) - \Phi_f(v_2)\|_{X_\delta^\beta} &\leq C \|h^{\beta/2}(v_1 - v_2)\|_{L^{24/7}([-\delta,\delta],L^4)} \\ &\quad \times \left(\|h^{\beta/2}(g_f + v_1)\|^2_{L^{24/7}([-\delta,\delta],L^4)} + \|h^{\beta/2}(g_f + v_2)\|^2_{L^{24/7}([-\delta,\delta],L^4)} \right) \\ &\leq C\delta^{1/2} \|h^{\beta/2}(v_1 - v_2)\|_{L^8([-\delta,\delta],L^4)} \\ &\quad \times \left(\|h^{\beta/2}(g_f + v_1)\|^2_{L^8([-\delta,\delta],L^4)} + \|h^{\beta/2}(g_f + v_2)\|^2_{L^8([-\delta,\delta],L^4)} \right) \\ &\leq C\delta^{1/2} \|v_1 - v_2\|_{X_\delta^\beta} \left(\|g_f\|^2_{L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4})} + \|v_1\|^2_{X_\delta^\beta} + \|v_2\|^2_{X_\delta^\beta} \right). \end{aligned}$$

因此我们得到了所需的估计。 □

现在我们可以完成

命题 5.2 的证明。 记

$$\Sigma(K) := \left\{ f \in \mathcal{H}^\theta : \|f\|_{\mathcal{H}^\theta} \leq K, \|g_f\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta,4})} \leq K \right\},$$

其中 $g_f(t) = e^{-\mathrm{i}th} f$。根据引理 3.2和引理 5.1，我们有

$$\begin{aligned} \mu_0(\Sigma^c(K)) &\leq \mu_0(f \in \mathcal{H}^\theta : \|f\|_{\mathcal{H}^\theta} > K) + \mu_0(f \in \mathcal{H}^\theta : \|g_f\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta,4})} > K) \\ &\leq Ce^{-cK^2}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

根据引理 5.3，存在 $C > 0$ 使得对于所有 $0 < \delta \leq 1$、所有 $f \in \Sigma(K)$，以及所有v，v_1，$v_2 \in B_{X_\delta^\beta}(L)$，

$$\|\Phi_f(v)\|_{X_\delta^\beta} \leq C\delta^{1/2}(K^3 + L^3),$$

$$d(\Phi_f(v_1), \Phi_f(v_2)) \leq C\delta^{1/2}(K^2 + L^2) d(v_1, v_2).$$

取 $L = K$ 和 $\delta = \nu K^{-4}$，并令 $\nu > 0$ 充分小，使得 $0 < \delta \leq 1$ 和

$$2C\delta^{1/2}K^2 = 2C\sqrt{\nu} \leq \frac{1}{2}.$$

我们得到

$$\|\Phi_f(v)\|_{X_\delta^\beta} \le K,$$

$$d(\Phi_f(v_1),\Phi_f(v_2)) \le \frac{1}{2} d(v_1,v_2),$$

因此 Φ_f 是 $\left(B_{X_\delta^\beta}(K)\ d\right)$的压缩映射。特别地，对于每个 $f \in \Sigma(K)$，方程（1.1）在初始值 $u|_{t=0} = f$ 满足

$$u(t) - e^{-\mathrm{i}th} f \in C([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\beta) \cap L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4}).$$

此外，对于所有 $f \in \Sigma(K)$，我们有 $\|f\|_{\mathcal{H}^\theta} \le K$，且方程（1.1）的相应解满足

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} &\le \|e^{-\mathrm{i}th} f\|_{\mathcal{H}^\theta} + \|u(t) - e^{-\mathrm{i}th} f\|_{\mathcal{H}^\theta} \\ &\le \|f\|_{\mathcal{H}^\theta} + \|u(t) - e^{-\mathrm{i}th} f\|_{\mathcal{H}^\beta} \\ &\le 2K, \quad \forall |t| \le \delta\end{aligned}$$

这就是（5.4）。

下面证明（5.5）。我们有

$$\begin{aligned}\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} &\le \|e^{-\mathrm{i}th} f_1 - e^{-\mathrm{i}th} f_2\|_{\mathcal{H}^\theta} + \|v_1(t) - v_2(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} \\ &\le \|f_1 - f_2\|_{\mathcal{H}^\theta} + \|v_1(t) - v_2(t)\|_{\mathcal{H}^\beta}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

其中

$$v_1(t) := u_1(t) - e^{-\mathrm{i}th} f_1, \quad v_2(t) := u_2(t) - e^{-\mathrm{i}th} f_2.$$

利用杜哈梅公式，按照上述方法估计可得

$$\begin{aligned}\|v_1 - v_2\|_{X_\delta^\beta} &\le \| |g_{f_1} + v_1|^2 (g_{f_1} + v_1) - |g_{f_2} + v_2|^2 (g_{f_2} + v_2) \|_{L^{8/7}([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4/3})} \\ &\le C\delta^{1/2} \Big(\|g_{f_1}\|^2_{L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4})} + \|g_{f_2}\|^2_{L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4})} + \|v_1\|^2_{X_\delta^\beta} + \|v_2\|^2_{X_\delta^\beta} \Big) \\ &\quad \times \Big(\|g_{f_1} - g_{f_2}\|_{L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4})} + \|v_1 - v_2\|_{X_\delta^\beta} \Big).\end{aligned}$$

由于 $f_1,\ f_2 \in \Sigma(K)$，我们有

$$\|g_{f_1}\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta,4})},\ \|g_{f_2}\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta,4})},\ \|v_1\|_{X_\delta^\beta},\ \|v_2\|_{X_\delta^\beta} \le K,$$

因此

$$\begin{aligned}\|v_1 - v_2\|_{X_\delta^\beta} &\le \| |g_{f_1} + v_1|^2 (g_{f_1} + v_1) - |g_{f_2} + v_2|^2 (g_{f_2} + v_2) \|_{L^{8/7}([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4/3})} \\ &\le C\delta^{1/2} K^2 \Big(\|g_{f_1} - g_{f_2}\|_{L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4})} + \|v_1 - v_2\|_{X_\delta^\beta} \Big).\end{aligned}$$

通过选择 $\delta > 0$ 足够小，使得 $C\delta^{1/2}K^2 \le \frac{1}{2}$，我们得到

$$\|v_1 - v_2\|_{X_\delta^\beta} \le \|g_{f_1} - g_{f_2}\|_{L^8([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,4})}.$$

这与（5.8）共同推出（5.5）。证明完毕。 □

5.2. **测度不变性与整体适定性。**

定理 5.4（**几乎必然整体适定性，** $1 < s \le 2$）。
设 $1 < s \le 2$，V 满足假设 *1.1*，并且 $\theta < 2s$。进一步假设，对于 $s > \frac{8}{5}$ 聚焦非线性成立。那么存在集合 $\Sigma \subset \mathcal{H}^\theta$，满足 $\mu(\Sigma) = 1$ 使得对于任意 $f \in \Sigma$，以初始数据 $u|_{t=0} = f$ 为初值的方程 (1.1) 的相应解全局存在，并且满足

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}^\theta} \le C\left(\omega(f) + \log^{\frac{1}{2}}(1 + |t|)\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

对于某个常数 $\omega(f) > 0$，该常数依赖于 f 以及某个普适常数 $C > 0$。此外，吉布斯测度 μ 在 (1.1)的流下保持不变。

本定理的证明沿用定理 4.2 的相同推理思路。不过，由于缺乏确定性局部适定性，我们需要采用不同的方法。

引理 5.5 (近似流的一致估计，$1 < s \leq 2$).
设 s, θ 如前述陈述所示，并取满足下列条件的 θ_1

$$\theta < \theta_1 < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}.$$

则对所有 $\Lambda \geq \lambda_1$ 和 $T, \varepsilon > 0$。存在 $\Sigma_{\Lambda,T,\varepsilon} \subset H^{\theta_1}$ 以及与Λ, T, ε无关的 $C > 0$，使得：*(1)* $\mu_\Lambda(\Sigma^c_{\Lambda,T,\varepsilon}) \leq C\varepsilon$。*(2)* 对于 $f \in \Sigma_{\Lambda,T,\varepsilon}$，在 $[-T, T]$ 上存在方程 *(3.43)* 的唯一解，满足

$$\|u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \leq C \left(\log \frac{T}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad \forall |t| \leq T. \tag{5.9}$$

证明。 取 $0 \leq \beta < \beta_1 < \frac{s-1}{2s}$ 使得

$$\theta_1 - \theta = \beta_1 - \beta = \eta > 0. \tag{5.10}$$

对于 $K > 0$，记

$$\Sigma_{\theta_1,\beta_1}(K) := \left\{ f \in \mathcal{H}^{\theta_1} : \|f\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \leq K, \|e^{-\mathrm{i}\,th} f\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta_1,4})} \leq K \right\}.$$

利用（3.33），命题 5.2 中给出的概率局部适定性3.43适用于（$f \in \Sigma_{\theta_1,\ \beta_1}(K)$，存在（3.43）的唯一解，满足

$$\|u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \leq 2K, \quad \forall |t| \leq \delta \tag{5.11}$$

with

$$\delta = \nu(K+1)^{-4}, \tag{5.12}$$

其中 $\nu > 0$ 是一个与 Λ、K无关的小常数。对于超调和情形，我们取 δ 略小于 νK^{-4}，如命题 5.2 中所述，这对迭代过程很有用（见引理5.6）。

记 $J = \left[\frac{T}{\delta}\right]$ 并令

$$\Sigma_{\Lambda,K,\theta_1,\beta_1} := \bigcap_{j=-J}^{J} \Phi_\Lambda(-j\delta)(\Sigma_{\theta_1,\beta_1}(K)), \tag{5.13}$$

其中 Φ_Λ 是（3.43）的解映射。注意，集合 $\Sigma_{\Lambda,\ K,\ \theta_1,\ \beta_1}$ 包含所有初始数据 f，使得相应的解 $u_\Lambda(t)$ 满足（3.43）

$$\|u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \leq 2K, \quad \forall |t| \leq T. \tag{5.14}$$

事实上，对于 $|t| \leq T$，存在一个整数 j和 $\delta_1 \in (-\delta,\ \delta)$，使得 $t = j\delta + \delta_1$。因此

$$u_\Lambda(t) = \Phi_\Lambda(\delta_1)\Phi_\Lambda(j\delta)f.$$

由于 $f \in \Phi_\Lambda(-j\delta)(\Sigma_{\theta_1,\ \beta_1}(K))$，我们有 $\Phi_\Lambda(j\delta)f \in \Sigma_{\theta_1,\ \beta_1}(K)$，而观察结论由 (5.11) 得出。

由于 μ_Λ 在 (3.43) 的流作用下保持不变，因此我们有

$$\begin{aligned}\mu_\Lambda(\Sigma^c_{\Lambda,K,\theta_1,\beta_1}) &= \mu_\Lambda\Big(\Big(\bigcap_{j=-J}^{J}\Phi_\Lambda(-j\delta)(\Sigma_{\theta_1,\beta_1}(K))\Big)^c\Big)\\ &\le \sum_{j=-J}^{J}\mu_\Lambda(\Phi_\Lambda(-j\delta)(\Sigma^c_{\theta_1,\beta_1}(K)))\\ &= \sum_{j=-J}^{J}\mu_\Lambda(\Sigma^c_{\theta_1,\beta_1}(K))\\ &\le 2\frac{T}{\delta}\mu_\Lambda(\Sigma^c_{\theta_1,\beta_1}(K)).\end{aligned}$$

根据命题 5.2 ，我们有

$$\begin{aligned}\mu_\Lambda(\Sigma^c_{\theta_1,\beta_1}(K)) &= \int \mathbb{1}_{\Sigma^c_{\theta_1,\beta_1}(K)}d\mu_\Lambda(u)\\ &= \int \mathbb{1}_{\Sigma^c_{\theta_1,\beta_1}(K)}\frac{1}{Z^\Lambda}G_\Lambda(u)d\mu_0(u)\\ &\le \frac{1}{Z^\Lambda}\|G_\Lambda(u)\|_{L^2(d\mu_0)}\left(\mu_0(\Sigma^c_{\theta_1,\beta_1}(K))\right)^{1/2}\\ &\le Ce^{-cK^2},\end{aligned}$$

其中我们用到了 $G_\Lambda(u)\in L^2(d\mu_0)$，并且 $Z^\Lambda\ge C>0$ 关于 Λ 一致，且（5.7）。特别地，我们得到

$$\mu_\Lambda(\Sigma^c_{\Lambda,K,\theta_1,\beta_1})\le\frac{2C}{\nu}T(K+1)^4e^{-cK^2}\le CTe^{-cK^2}$$

对于某些常数 C， $c>0$。取 K 如（4.12）中所示，并令 $\Sigma_{\Lambda,\,T,\,\varepsilon}=\Sigma_{\Lambda,\,K,\,\theta_1,\,\beta_1}$，即可得到所需的估计。□

引理 5.6 （近似流与精确流的比较， $1<s\le 2$）。
设 $\Sigma_{\Lambda,\,T,\,\varepsilon}$ 如前一个引理所述。则对于任意 $f\in\Sigma_{\Lambda,\,T,\,\varepsilon}$，方程 (1.1) 在初始数据 $u|_{t=0}=f$ 下存在唯一解，满足

$$\|u(t)-u_\Lambda(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le C(T,\varepsilon)\Lambda^{-\eta/2},\quad \forall|t|\le T \tag{5.15}$$

对所有 Λ 充分大的 Λ 以及某个常数 $C(T,\varepsilon)>0$ （与 Λ无关），其中 η 如(5.10)所示。特别地，存在与 T,ε 无关的$\Sigma_{T,\varepsilon}\subset\mathcal{H}^\theta$ 和 $C>0$，使得：*(1)* $\mu(\Sigma^c_{T,\varepsilon})\le C\varepsilon$。

(2) 对于$f\in\Sigma_{T,\varepsilon}$，方程(1.1) 存在一个以 $u|_{t=0}=f$ 为$[-T,T]$上的初始数据，满足

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le C\left(\log\frac{T}{\varepsilon}\right)^{1/2},\quad\forall|t|\le T. \tag{5.16}$$

证明。 **估计差**。 我们首先研究 u 与 u_Λ 在$I_0=[-\delta,\delta]$上的差，其中 δ与（5.12）中相同。为此，我们记 $g_f(t)=e^{-\mathrm{i}\,th}f$以及 $v_\Lambda:=Q_\Lambda u_\Lambda$。由杜哈梅公式，对于 $t\in I_0$,

$$u(t)=g_f(t)+v(t),\quad v(t):=\mp\mathrm{i}\int_0^t e^{-\mathrm{i}\,(t-\tau)h}(|g_f+v|^2(g_f+v))(\tau)d\tau$$

and

$$v_\Lambda(t)=Q_\Lambda g_f(t)+w_\Lambda(t),\quad w_\Lambda(t):=\mp\mathrm{i}\int_0^t e^{-\mathrm{i}\,(t-\tau)h}(Q_\Lambda^2(|Q_\Lambda g_f+w_\Lambda|^2(Q_\Lambda g_f+w_\Lambda)))(\tau)d\tau.$$

记

$$X^\beta(I_0) := C(I_0, \mathcal{H}^\beta) \cap L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4}).$$

根据 Strichartz 估计（参见附录B），我们有

$$\|v - w_\Lambda\|_{X^\beta(I_0)} \lesssim \| |g_f + v|^2(g_f + v) - Q_\Lambda^2(|Q_\Lambda g_f + w_\Lambda|^2(Q_\Lambda g_f + w_\Lambda))\|_{L^{8/7}(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4/3})}.$$

我们记

$$\begin{aligned} &|g_f + v|^2(g_f + v) - Q_\Lambda^2(|Q_\Lambda g_f + w_\Lambda|^2(Q_\Lambda g_f + w_\Lambda)) \\ &\qquad = |g_f + v|^2(g_f + v) - |Q_\Lambda g_f + w_\Lambda|^2(Q_\Lambda g_f + w_\Lambda) \\ &\qquad\quad + (\mathrm{Id} - Q_\Lambda^2)(|Q_\Lambda g_f + w_\Lambda|^2(Q_\Lambda g_f + w_\Lambda)). \end{aligned}$$

由于 $f \in \Sigma_{\theta_1,\ \beta_1}(K)$，由命题 5.2 和（3.33），我们有

$$\|w_\Lambda\|_{X^{\beta_1}(I_0)} \leq CK. \tag{5.17}$$

按照引理 5.3 的证明进行估计，可得

$$\begin{aligned} &\|(\mathrm{Id} - Q_\Lambda^2)(|Q_\Lambda g_f + w_\Lambda|^2(Q_\Lambda g_f + w_\Lambda))\|_{L^{8/7}(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4/3})} \\ &\qquad \leq C\Lambda^{(\beta-\beta_1)/2} \| |Q_\Lambda g_f + w_\Lambda|^2(Q_\Lambda g_f + w_\Lambda)\|_{L^{8/7}(I_0, \mathcal{W}^{\beta_1,4/3})} \\ &\qquad \leq C\delta^{1/2}\Lambda^{-\eta/2}\Big(\|Q_\Lambda g_f\|^3_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta_1,4})} + \|w_\Lambda\|^3_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta_1,4})}\Big) \\ &\qquad \leq C\delta^{1/2}\Lambda^{-\eta/2}\Big(\|g_f\|^3_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta_1,4})} + \|w_\Lambda\|^3_{X^{\beta_1}(I_0)}\Big) \\ &\qquad \leq C\delta^{1/2}K^3\Lambda^{-\eta/2}. \end{aligned}$$

由于 $\|f\|_{\mathcal{H}^\theta} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \leq K$ and $\|g_f\|_{L^8([-1,1],W^{\beta,4})} \leq \|g_f\|_{L^8([-1,1],W^{\beta_1,4})} \leq K$ 由于 $f \in \Sigma_{\theta_1,\beta_1}(K)$, 命题 5.2 和 (3.33) 给出

$$\|v\|_{X^\beta(I_0)},\ \|w_\Lambda\|_{X^\beta(I_0)} \leq K.$$

通过写成

$$\begin{aligned} &|g_f + v|^2(g_f + v) - |Q_\Lambda g_f + w_\Lambda|^2(Q_\Lambda g_f + w_\Lambda) \\ &\qquad = (g_f - Q_\Lambda g_f + v - w_\Lambda)R_2(g_f, Q_\Lambda g_f, v, w_\Lambda), \end{aligned}$$

其中 R_2 是一个次数为 2 的齐次多项式（为简便起见省略复共轭项），并按照引理 5.3进行估计，可得

$$\begin{aligned} &\|Q_\Lambda^2(|g_f + v|^2(g_f + v) - |Q_\Lambda g_f + w_\Lambda|^2(Q_\Lambda g_f + w_\Lambda))\|_{L^{8/7}(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4/3})} \\ &\qquad \leq C\delta^{1/2}\left(\|g_f - Q_\Lambda g_f\|_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4})} + \|v - w_\Lambda\|_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4})}\right) \\ &\qquad\quad \times \left(\|g_f\|^2_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4})} + \|Q_\Lambda g_f\|^2_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4})} + \|v\|^2_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4})} + \|w_\Lambda\|^2_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4})}\right) \\ &\qquad \leq C\delta^{1/2}\left(\Lambda^{(\beta-\beta_1)/2}\|g_f\|_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta_1,4})} + \|v - w_\Lambda\|_{X^\beta(I_0)}\right) \\ &\qquad\quad \times \left(\|g_f\|^2_{L^8(I_0, \mathcal{W}^{\beta,4})} + \|v\|^2_{X^\beta(I_0)} + \|w_\Lambda\|^2_{X^\beta(I_0)}\right) \\ &\qquad \leq C\delta^{1/2}K^2\left(K\Lambda^{-\eta/2} + \|v - w_\Lambda\|_{X^\beta(I_0)}\right). \end{aligned}$$

因此可得

$$\|v - w_\Lambda\|_{X^\beta(I_0)} \leq C\delta^{1/2}K^3\Lambda^{-\eta/2} + C\delta^{1/2}K^2\|v - w_\Lambda\|_{X^\beta(I_0)}.$$

根据 δ （见（4.12））， 可得

$$\|v - w_\Lambda\|_{X^\beta(I_0)} \leq K\Lambda^{-\eta/2}.$$

由此以及（5.14），我们推得

$$\begin{aligned}\|u-u_\Lambda\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^\theta)} &\le \|u-v_\Lambda\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^\theta)}+\|v_\Lambda-u_\Lambda\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^\theta)}\\ &\le \|g_f-Q_\Lambda g_f\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^\theta)}+\|v-w_\Lambda\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^\theta)}+\|Q_\Lambda u_\Lambda-u_\Lambda\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^\theta)}\\ &\le \|f-Q_\Lambda f\|_{\mathcal{H}^\theta}+\|v-w_\Lambda\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^\beta)}+\|Q_\Lambda u_\Lambda-u_\Lambda\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^\theta)}\\ &\le C\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}\|f\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}}+\|v-w_\Lambda\|_{X^\beta(I_0)}+C\Lambda^{(\theta-\theta_1)/2}\|u_\Lambda\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^{\theta_1})}\\ &\le CK\Lambda^{-\eta/2}. \end{aligned}\tag{5.18}$$

按时间迭代。现在我们将这一论证迭代到 $[-T,T]$ 的其他子区间。下一次迭代针对 $I_1:=[0,2\delta]$。为此，我们声称，取 Λ 足够大，

$$\|u(\delta)\|_{\mathcal{H}^\theta}\le K+1,\quad \|e^{-\mathrm{i}th}u(\delta)\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta,4})}\le K+1.\tag{5.19}$$

事实上，第一个观察结论可直接由（5.18）及

$$\|u_\Lambda(\delta)\|_{\mathcal{H}^\theta}=\|\Phi_\Lambda(\delta)f\|_{\mathcal{H}^\theta}\le\|\Phi_\Lambda(\delta)f\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}}\le K$$

因为 $u_\Lambda(\delta)=\Phi_\Lambda(\delta)f\in\Sigma_{\theta_1,\beta_1}(K)$（见（5.13））。接下来，我们利用 Strichartz 估计和（5.10）来处理（5.19）中的第二个不等式

$$\begin{aligned}\|e^{-\mathrm{i}th}u(\delta)\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta,4})} &\le \|e^{-\mathrm{i}th}u_\Lambda(\delta)\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta,4})}+\|e^{-\mathrm{i}th}(u(\delta)-u_\Lambda(\delta))\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta,4})}\\ &\le \|e^{-\mathrm{i}th}u_\Lambda(\delta)\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta_1,4})}+C\|u(\delta)-u_\Lambda(\delta)\|_{\mathcal{H}^\beta}\\ &\le K+C\Lambda^{-\eta/2}\|u-u_\Lambda\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^{\beta_1})}. \end{aligned}\tag{5.20}$$

接下来，利用杜哈梅尔公式

$$u(t)=e^{-\mathrm{i}th}f\mp\mathrm{i}\int_0^t e^{-\mathrm{i}(t-\tau)h}(|u|^2u)(\tau)d\tau$$

and

$$u_\Lambda(t)=e^{-\mathrm{i}th}f\mp\mathrm{i}\int_0^t e^{-\mathrm{i}(t-\tau)h}(Q_\Lambda(|Q_\Lambda u_\Lambda|^2Q_\Lambda u_\Lambda))(\tau)d\tau,$$

我们有

$$\begin{aligned}\|u-u_\Lambda\|_{L^\infty(I_0,\mathcal{H}^{\beta_1})} &\le C\||u|^2u-Q_\Lambda(|Q_\Lambda u_\Lambda|^2Q_\Lambda u_\Lambda)\|_{L^{8/7}(I_0,\mathcal{W}^{\beta_1,4/3})}\\ &\le C\delta^{1/2}\left(\|u\|^3_{L^8(I_0,\mathcal{W}^{\beta_1,4})}+\|u_\Lambda\|^3_{L^8(I_0,\mathcal{W}^{\beta_1,4})}\right) \qquad (5.21)\\ &\le C\delta^{1/2}K^3\\ &\le K \qquad (5.22)\end{aligned}$$

根据 δ 的选取。这里我们用到了以下事实：

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^8(I_0,\mathcal{W}^{\beta_1,4})}&\le\|g_f\|_{L^8(I_0,\mathcal{W}^{\beta_1,4})}+\|u-g_f\|_{L^8(I_0,\mathcal{W}^{\beta_1,4})}\le 2K,\\ \|u_\Lambda\|_{L^8(I_0,\mathcal{W}^{\beta_1,4})}&\le\|g_f\|_{L^8(I_0,\mathcal{W}^{\beta_1,4})}+\|u_\Lambda-g_f\|_{L^8(I_0,\mathcal{W}^{\beta_1,4})}\le 2K,\end{aligned}$$

第二行由概率局部适定性得出。结合（5.20）和（5.21），得到（5.19）中的第二个不等式。注意，（5.19）正是我们按照（5.12）选取 δ 的原因。

得益于（5.19）以及 $u_\Lambda(\delta)=\Phi_\Lambda(\delta)f\in\Sigma_{\theta_1,\beta_1}(K)$，我们可以利用以下关于 $t\in[0,2\delta]$ 的 Duhamel 公式，重复上述论证，

$$\begin{aligned}u(t)&=g_\delta(t)+v(t),\quad v(t):=\mp\mathrm{i}\int_\delta^t e^{-\mathrm{i}(t-\tau)h}(|g_\delta+v|^2(g_\delta+v))(\tau)d\tau\\ v_\Lambda(t)&=Q_\Lambda g_{\Lambda,\delta}(t)+w_\Lambda(t),\\ w_\Lambda(t):&=\mp\mathrm{i}\int_\delta^t e^{-\mathrm{i}(t-\tau)h}(Q_\Lambda^2(|Q_\Lambda g_{\Lambda,\delta}+w_\Lambda|^2(Q_\Lambda g_{\Lambda,\delta}+w_\Lambda)))(\tau)d\tau\end{aligned}$$

其中 $g_\delta(t) := e^{-\mathrm{i}(t-\delta)^h} u(\delta)$，且 $g_{\Lambda,\,\delta}(t) := e^{-\mathrm{i}(t-\delta)h} u_\Lambda(\delta)$，从而得到

$$\|v - w_\Lambda\|_{X^\beta(I_1)} \leq K\Lambda^{-\eta/2}.$$

与 (5.18) 中相同的推理可得

$$\|u - u_\Lambda\|_{L^\infty(I_1,\mathcal{H}^\theta)} \lesssim CK\Lambda^{-\eta/2}.$$

将此估计 $\left[\frac{T}{\delta}\right]$ 反复迭代多次，并考虑到 K 的选取（见 (4.12)），即可证明 (5.15)。

全局化流。最后，(5.16) 可由 (5.14) 和 (5.15) 得出，方法与引理 4.3的证明完全相同。细节从略。□

现在我们可以证明定理5.4。

定理 *5.4* 的证明。几乎必然整体适定性和时间增长的证明与定理 4.2 的证明采用相同的论证。由于解流的连续性并非仅取决于初始数据的 $\mathcal{H}^\theta$ 范数（见 (5.5) 和 (5.6)），超调和情形中的论证需作修改，方法是在更高阶的索博列夫空间中选取一个合适的球。这里我们采用另一种方法，利用测度不变性的一个等价刻画（例如参见 [38, 定理 6。5]），即对所有 $F \in L^1(\mathcal{H}^\theta,\ d\mu)$，

$$\int F(\Phi(t)u)d\mu(u) = \int F(u)d\mu(u), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.23}$$

通过迭代，只需证明 5.23 对于 $t > 0$ 较小的情形成立。此外，通过稠密性论证，问题可归结为证明 5.23 对于 F 有界且连续的情形成立。

现在固定一个较小的 $t > 0$，并令 $\varepsilon > 0$。对于 $\Lambda \geq \lambda_1$，记作：

$$\begin{aligned}\left|\int F(\Phi(t)u)d\mu(u) - \int F(u)d\mu(u)\right| \leq{}& \left|\int F(\Phi(t)u)d\mu(u) - \int F(\Phi(t)u)d\mu_\Lambda(u)\right| \\ &+ \left|\int F(\Phi(t)u)d\mu_\Lambda(u) - \int F(\Phi_\Lambda(t)u)d\mu_\Lambda(u)\right| \\ &+ \left|\int F(\Phi_\Lambda(t)u)d\mu_\Lambda(u) - \int F(u)d\mu_\Lambda(u)\right| \\ &+ \left|\int F(u)d\mu_\Lambda(u) - \int F(u)d\mu(u)\right| \\ =:{}& (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}) + (\mathrm{IV}).\end{aligned}$$

由于当 $\Lambda \to \infty$ 时，$\mu_\Lambda \rightharpoonup \mu$ 弱收敛，因此 F 的有界性意味着

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{IV}) \to 0 \text{ as } \Lambda \to \infty.$$

由于 μ_Λ 在流映射 $\Phi_\Lambda(t)$ 下不变，由（5.23）中的不变性等价刻画可得（III） $= 0$。剩下只需估计（II）。取 $\theta < \theta_1 < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$ 和$0 \leq \beta < \beta_1 < \frac{s-1}{2s}$ 使得 $\theta_1 - \theta = \beta_1 - \beta = \eta > 0$。记

$$\Sigma_{\theta_1,\beta_1}(K) := \left\{f \in \mathcal{H}^{\theta_1} : \|f\|_{\mathcal{H}^{\theta_1}} \leq K, \|e^{-\mathrm{i}\,th} f\|_{L^8([-1,1],\mathcal{W}^{\beta_1,4})} \leq K\right\}.$$

我们来估计

$$\begin{aligned}(\mathrm{II}) &\leq \left|\int_{\Sigma_{\theta_1,\beta_1}(K)} F(\Phi(t)u) - F(\Phi_\Lambda(t)u)d\mu_\Lambda(u)\right| + \left|\int_{\Sigma^c_{\theta_1,\beta_1}(K)} F(\Phi(t)u) - F(\Phi_\Lambda(t)u)d\mu_\Lambda(u)\right| \\ &=: (\mathrm{II}_1) + (\mathrm{II}_2).\end{aligned}$$

由于 F 有界，我们有

$$(\mathrm{II}_2) \leq 2\|F\|_{L^\infty}\mu_\Lambda(\Sigma^c_{\theta_1,\beta_1}(K)) \leq C\|F\|_{L^\infty}\left(\mu_0(\Sigma^c_{\theta_1,\beta_1}(K))\right)^{1/2} \leq Ce^{-cK^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

前提是 K 取足够大。对于这样的 K，与引理5.5 证明中的相同论证可得

$$\|\Phi(t)u-\Phi_\Lambda(t)u\|_{\mathcal{H}^\theta}\le CK\Lambda^{-\eta/2}$$

对所有 $u\in\Sigma_{\theta_1,\ \beta_1}(K)$。注意，这里将 $t>0$ 取为较小值。由于 F 连续，我们有

$$\|F(\Phi(t)u)-F(\Phi_\Lambda(t)u)\|_{\mathcal{H}^\theta}<\varepsilon/2$$

对所有 $u\in\Sigma_{\theta_1,\ \beta_1}(K)$，只要 Λ 取得足够大。由于 μ_Λ 是概率测度，我们有 $(\mathrm{II}_1)\le\varepsilon/2$，因此

$$(\mathrm{II})\to 0\text{ as }\Lambda\to\infty.$$

综合上述估计，我们证明了不变性。 □

定理 *2.3* 的证明。 由定理 4.2 和5.4 可得。 □

注 5.1（高阶非线性）。本节所采用的方法可以加以修改，从而证明与（2.16）相关的吉布斯测度对于任意 $1<s\le 2$ 和$\frac{4}{s}<\kappa<6$ 都具有不变性，前提是吉布斯测度定义良好。事实上，取 $0\le\beta<\frac{\kappa s-4}{2\kappa s}$ 和 $\theta<\frac12-\frac1s$。对于 $K>0$，我们定义

$$\Sigma(K):=\left\{f\in\mathcal{H}^\theta:\|f\|_{\mathcal{H}^\theta}\le K,\quad \|g_f\|_{L^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}([-1,1],\mathcal{W}^{\beta,\kappa})}\le K\right\},$$

其中 $g_f(t)=e^{-\mathrm{i}\,th}f$ 且 $\left(\frac{4\kappa}{\kappa-2},\kappa\right)$ 是一个 Strichartz 可容许对。根据 β的选取，我们有（见引理5.1）

$$\mu_0(\Sigma^c(K))\le Ce^{-cK^2}.$$

借助以下非线性估计

$$\begin{aligned}\||g_f+v|^{\kappa-2}(g_f+v)\|_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{3\kappa+2}}\mathcal{W}^{\beta,\frac{\kappa}{\kappa-1}}}&\le\|g_f+v\|^{\kappa-2}_{L_\delta^{\frac{2\kappa(\kappa-2)}{\kappa+2}}L^\kappa}\|g_f+v\|_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}\mathcal{W}^{\beta,\kappa}}\\&\lesssim\delta^{\frac{6-\kappa}{4}}\|g_f+v\|^{\kappa-2}_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}L^\kappa}\|g_f+v\|_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}\mathcal{W}^{\beta,\kappa}}\\&\lesssim\delta^{\frac{6-\kappa}{4}}\left(\|g_f\|^{\kappa-1}_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}\mathcal{W}^{\beta,\kappa}}+\|v\|^{\kappa-1}_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}\mathcal{W}^{\beta,\kappa}}\right)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\||g_f+v_1|^{\kappa-2}(g_f+v_1)-|g_f+v_2|^{\kappa-2}(g_f+v_2)\|_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{3\kappa+2}}\mathcal{W}^{\beta,\frac{\kappa}{\kappa-1}}}\\&\lesssim\delta^{\frac{6-\kappa}{4}}\left(\|g_f\|^{\kappa-2}_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}\mathcal{W}^{\beta,\kappa}}+\|v_1\|^{\kappa-2}_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}\mathcal{W}^{\beta,\kappa}}+\|v_1\|^{\kappa-2}_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}\mathcal{W}^{\beta,\kappa}}\right)\|v_1-v_2\|_{L_\delta^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}\mathcal{W}^{\beta,\kappa}},\end{aligned}$$

我们可以重复命题 5.2 证明中的相同论证，从而证明方程（2.16）的几乎必然局部适定性，其中 $\left(\frac{4\kappa}{3\kappa+2},\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)$ 是 $\left(\frac{4\kappa}{\kappa-2},\kappa\right)$的对偶对。注意，条件 $\kappa<6$ 对于完成压缩映射论证是必要的。特别地，对于所有 $f\in\Sigma(K)$，存在 $\delta\sim K^{-\frac{4(\kappa-2)}{6-\kappa}}$，使得方程（2.16）在初始数据 $u|_{t=0}=f$ 下有唯一解，且满足

$$u(t)-e^{-\mathrm{i}\,th}f\in C([-\delta,\delta],\mathcal{H}^\beta)\cap L^{\frac{4\kappa}{\kappa-2}}([-\delta,\delta],\mathcal{W}^{\beta,\kappa}).$$

一旦局部解存在，基于 $\left(\frac{4\kappa}{\kappa-2},\kappa\right)$ 是一个 Strichartz 可容许对这一事实，对上述论证稍作修改即可得到吉布斯测度的不变性。事实上，后一条件是决定可处理非线性项范围的主要限制。◇

6. 正则测度

我们的目标是构造以质量为条件的吉布斯测度，并证明其不变性。为此，我们首先在第 6.1 节定义具有固定重整化质量的高斯测度。随后，我们在第6.2 节定义以质量为条件的吉布斯测度。最后，在第 6.3 节，我们证明这些测度在方程（1.1）的动力学下保持不变。

6.1. 具有固定重整化质量的高斯测度。 本节旨在严格定义以质量为条件的高斯测度。$s > 2$ 和 $1 < s \leq 2$ 两种情形有所不同，后者的质量几乎必然为无穷大。不过，我们通过对重整化质量施加条件，以统一的方式处理这两种情形，尽管对于 $s > 2$ 而言（其质量几乎必然有限），这样做略显冗余。为此，我们将定义具有固定重整化质量的高斯测度，其形式上由下式给出

$$d\mu_0^m(u) \text{“}=\text{”} \frac{\mathbb{1}_{\{\mathcal{M}(u)=m\}}}{\mu_0(\mathcal{M}(u)=m)} d\mu_0(u), \tag{6.1}$$

其中 $m \in \mathbb{R}$，$\mathcal{M}(u) = \|u\|_{L^2}^2 - \langle \|u\|_{L^2}^2 \rangle_{\mu_0}$ 是重整化质量（见引理 3.6），并且μ_0 是高斯测度。当 $s > 2$时，由于相对于高斯测度的质量期望有限，

$$\left\langle \|u\|_{L^2}^2 \right\rangle_{\mu_0} = \mathrm{Tr}[h^{-1}] < \infty,$$

我们得到一个具有固定质量 $m + \mathrm{Tr}[h^{-1}] > 0$ 的高斯测度。

表述（6.1）完全是形式上的，因为我们实际上有

$$\mu_0(\mathcal{M}(u) = m) = 0.$$

受 Oh 和 Quastel 的一个想法启发， [44], 我们将上述测度定义为约束测度的极限，其中 $\varepsilon \to 0^+$趋于

$$d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) = \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}} \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}} d\mu_0(u),$$

其中

$$Z_0^{m,\varepsilon} = \mu_0(m - \varepsilon < \mathcal{M}(u) < m + \varepsilon).$$

注意，对每个 $\varepsilon > 0$，测度 $\mu^{m,}{}_0{}^{\varepsilon}$ 先验上是定义良好的；然而，由于归一化常数 $Z^{m,}{}_0{}^{\varepsilon}$ 在 $\varepsilon \to 0^+$ 时趋于零，因此需要谨慎论证该极限的含义。

正则高斯测度的构造分为两步：

- 我们首先在有限维空间上构造一个测度序列

$$E_{\leq \Lambda} = \mathbb{1}_{h \leq \Lambda} L^2(\mathbb{R})$$

以定义目标测度的柱面投影。

- 然后我们证明上述测度序列在某个适当的希尔伯特空间上是紧的，因此可以将目标测度定义为该序列的极限。

这总结为以下命题，其证明构成了本小节的全部内容。

命题 6.1 （固定重整化质量的高斯测度）。
令 $s > 1$， V 满足假设*1.1*， $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$， $m \in \mathbb{R}$，并假设 $m > -$迹$[h^{-1}]$ 若$s > 2$。

(1) 对于 $E_{\le\Lambda}$ 的任意博雷尔集 A，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mu_0^{m,\varepsilon}(A)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\mu_0(A\cap\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\})}{\mu_0(m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon)} \tag{6.2}$$

存在，因此我们可以通过如下方式定义 $E_{\le\Lambda}$ 上的概率测度：

$$\mu_0^{m,\le\Lambda}(A):=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mu_0^{m,\varepsilon}(A).$$

(2) 存在唯一测度 μ_0^m，其支撑集包含于 $\mathcal{H}^\theta\cap\{\mathcal{M}(u)=m\}$，使得对于所有$\Lambda\ge\lambda_1$，$\mu_{0}^{m,\le\Lambda}$ 都是 μ_0^m 在 $E_{\le\Lambda}$ 上的柱面投影。此外，对于任意可测集 $A\subset\mathcal{H}^\theta$

$$\mu_0^m(A)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mu_0^{m,\varepsilon}(A).$$

我们先如下定义有限维测度。

引理 6.2 (柱面投影 I)。
μ 的投影 μ^m 在 $E_{\le\Lambda}$ 上由下式给出

$$\begin{aligned}d\mu_0^{m,\varepsilon}|_{E_{\le\Lambda}}&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\mu_0^{>\Lambda}\left(m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda<\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda\right)d\mu_0^{\le\Lambda}(u)\\&=:d\mu_0^{m,\varepsilon,\le\Lambda}(u),\end{aligned} \tag{6.3}$$

其中

$$\vartheta_\Lambda:=\mathcal{M}_{\le\Lambda}(u)=\sum_{\lambda_j\le\Lambda}|\alpha_j|^2-\lambda_j^{-1}$$

并且$\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)$ 与 (3.17) 中相同。测度 $\mu^{m,\varepsilon}_{0}{}_{\le\Lambda}$，是 $\mu^{m,\varepsilon}_{0}$ 在 $E_{\le\Lambda}$ 上的柱面投影，即对于 $\Theta\ge\Lambda$,

$$\mu_0^{m,\varepsilon,\le\Theta}\big|_{E_{\le\Lambda}}=\mu_0^{m,\varepsilon,\le\Lambda}. \tag{6.4}$$

证明。 对于 $E_{\le\Lambda}$ 的任意博雷尔集 A，有

$$\begin{aligned}\mu_0^{m,\varepsilon}(A)&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int\mathbb{1}_{A\cap\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}}d\mu_0(u)\\&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int_A\left(\int\mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda<\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda\}}d\mu_0^{>\Lambda}(u)\right)d\mu_0^{\le\Lambda}(u)\\&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int_A\mu_0^{>\Lambda}\left(m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda<\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda\right)d\mu_0^{\le\Lambda}(u),\end{aligned}$$

其中 $d\mu_0^{\le\Lambda}(u)$ 和 $d\mu_0^{>\Lambda}(u)$ 分别按 (2.8) 和 (3.35) 中的定义给出。这表明 (6.3)。为证明 (6.4)，注意到 $A\times\mathbb{C}^N$是 $E_{\le\Theta}$中的一个博雷尔集，其 $N=\#\{\lambda_j\colon\Lambda<$

$\lambda_j \le \Theta\}$, 因此

$$\begin{aligned}
&\mu_0^{m,\varepsilon,\le\Theta}\Big|_{E_{\le\Lambda}}(A) = \int_{A\times\mathbb{C}^N} d\mu_0^{m,\varepsilon,\le\Theta}(u)\\
&= \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int_{A\times\mathbb{C}^N} \mu_0^{>\Theta}(m-\varepsilon-\vartheta_\Theta < \mathcal{M}_{>\Theta}(u) < m+\varepsilon-\vartheta_\Theta) d\mu_0^{\le\Theta}(u)\\
&= \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int_{A\times\mathbb{C}^N} \left(\int \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-\vartheta_\Theta<\mathcal{M}_{>\Theta}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Theta\}} d\mu_0^{>\Theta}(u)\right) d\mu_0^{\le\Theta}(u)\\
&= \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int_A \left(\int_{\mathbb{C}^N} \left(\int \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-\vartheta_\Theta<\mathcal{M}_{>\Theta}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Theta\}} d\mu_0^{>\Theta}(u)\right) \prod_{\Lambda<\lambda_j\le\Theta} \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j|\alpha_j|^2} d\alpha_j\right) d\mu_0^{\le\Lambda}(u)\\
&= \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int_A \left(\int \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda<\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda\}} d\mu_0^{>\Lambda}(u)\right) d\mu_0^{\le\Lambda}(u)\\
&= \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int_A \mu_0^{>\Lambda}(m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda < \mathcal{M}_{>\Lambda}(u) < m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda) d\mu_0^{\le\Lambda}(u)\\
&= \int_A d\mu_0^{m,\varepsilon,\le\Lambda}(u) = \mu_0^{m,\varepsilon,\le\Lambda}(A) \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

这就证明了（6.4）。 □

为了证明（6.2）中的极限存在，我们记 f_Λ 为 $\mathcal{M}_{>\Lambda}(u$ 关于 $\mu_0^{>\Lambda}$的密度函数。特别地，我们有

$$\mu_0^{>\Lambda}(m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda < \mathcal{M}_{>\Lambda}(u) < m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda) = \int_{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda}^{m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda} f_\Lambda(x)dx$$

and

$$Z_0^{m,\varepsilon} = \mu_0(m-\varepsilon < \mathcal{M}(u) < m+\varepsilon) = \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} f_0(x)dx,$$

因此

$$\mu_0^{m,\varepsilon}(A) = \int_A \left(\int_{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda}^{m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda} f_\Lambda(x)dx\right)\left(\int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} f_0(x)dx\right)^{-1} d\mu_0^{\le\Lambda}(u). \qquad (6.6)$$

引理 6.3（密度函数的一致连续性）。
对于任意 $\Lambda \ge 0$， f_Λ 在（m_0, $+\infty$）上有界且一致连续，其中 m_0 =–迹$[h^{-1}]$ 若 $s > 2$，以及 $m_0 = -\infty$ 若 $1 < s \le 2$。此外，当 $\Lambda > 0$ 充分大时，存在 $C > 0$ 使得 $\|f_\Lambda\|_{L^\infty}$（（m_0, $+\infty$）$\le C\Lambda$。

证明。 记 ϕ_Λ 为 $\mathbf{M}_{>\Lambda}(u)$ 关于 $\mu_0^{>\Lambda}$的特征函数。我们有

$$\begin{aligned}
\phi_\Lambda(s) &= \mathbb{E}_{\mu_0^{>\Lambda}}[e^{is\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)}]\\
&= \int e^{is\sum_{\lambda_j>\Lambda}|\alpha_j|^2-\lambda_j^{-1}} d\mu_0^{>\Lambda}(u)\\
&= \int \prod_{\lambda_j>\Lambda} e^{is(|\alpha_j|^2-\lambda_j^{-1})} \prod_{\lambda_k>\Lambda} \frac{\lambda_k}{\pi} e^{-\lambda_k|\alpha_k|^2} d\alpha_k\\
&= \prod_{\lambda_j>\Lambda}\left(\int_{\mathbb{C}} e^{-is\lambda_j^{-1}} \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-(1-is\lambda_j^{-1})\lambda_j|\alpha_j|^2} d\alpha_j\right)\left(\prod_{\substack{\lambda_k\ne\lambda_j\\ \lambda_k>\Lambda}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\lambda_k}{\pi} e^{-\lambda_k|\alpha_k|^2} d\alpha_k\right)\\
&= \prod_{\lambda_j>\Lambda} \frac{e^{-is\lambda_j^{-1}}}{1-is\lambda_j^{-1}}.
\end{aligned}$$

该乘积的每个因子的复范数都小于或等于 1，因此该乘积的范数不大于任意两个项乘积的范数。特别地，我们有

$$|\phi_\Lambda(s)| \le \left| \frac{e^{-is\lambda_{j_1}^{-1}}}{1-is\lambda_{j_1}^{-1}} \frac{e^{-is\lambda_{j_2}^{-1}}}{1-is\lambda_{j_2}^{-1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+s^2\lambda_{j_1}^{-2}}} \frac{1}{\sqrt{1+s^2\lambda_{j_2}^{-2}}} \le \frac{1}{1+s^2\lambda_{j_2}^{-2}},$$

其中 j_1 和 j_2 是满足 $\lambda_{j_2} \ge \lambda_{j_1} > \Lambda$的前两个指标。我们推得$\phi_\Lambda \in L^1(\mathbb{R})$，其中

$$\|\phi_\Lambda\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C\lambda_{j_2}.$$

我们有（见引理 D.1），特征值 $N(\Lambda)$ 的数量为 h 低于 Λ，且满足

$$c\Lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{s}} \le N(\Lambda) \le C\Lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{s}}$$

其中 $c, C > 0$为正常数。因此，我们可以选取某个足够大但与 Λ 无关的 $k > 0$，以确保

$$N(k\Lambda) - N(\Lambda) \ge \left(ck^{1/2+1/s} - C\right)\Lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{s}} > 1$$

当 Λ 充分大时成立。因此，在上述论证中， λ_{j_2} 可以取为 Λ 阶，从而我们推得

$$\|\phi_\Lambda\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C\Lambda$$

当 Λ充分大时成立。

利用密度与特征函数之间的下述关系

$$f_\Lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\phi_\Lambda(s)ds,$$

我们推知， f_Λ 在（m_0, $+\infty$）上有界且一致连续。注意，当$s > 2$时，我们有 $\mathrm{M}_{>\Lambda}(u) = \mathrm{k}P_{>\Lambda}u\mathrm{k}_{L^2}^2 - \langle \mathrm{k}P_{>\Lambda}u\mathrm{k}_{L^2}^2\rangle_{\mu_0} > -$迹$[h^{-1}]$，因此密度函数 f_Λ 定义在（$-$迹$[h^{-1}]$, $+\infty$）上。□

引理 6.4 （密度函数的正性）。

设 $s > 1$、 $m \in \mathbb{R}$，并假设 $m > -$迹$[h^-]$ 若 $s > 2$。我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} f_0(x)dx = f_0(m) > 0.$$

证明。 由于 f_0 在 $\mathbb{R}$上一致连续，我们有

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} f_0(x)dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} f_0(m).$$

接下来证明 $f_0(m) > 0$。由于 h 的第一特征值是单重的（例如参见 [36,定理 11。8]），因此有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\varepsilon}\int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} f_0(x)dx \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\mu_0(m-\varepsilon < \mathcal{M}(u) < m+\varepsilon) \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\mu_0(\mathcal{M}_{>\lambda_1}(u) \in (m_0,+\infty), m-\varepsilon-\mathcal{M}_{>\lambda_1}(u) < |\alpha_1|^2 - \lambda_1^{-1} < m+\varepsilon-\mathcal{M}_{>\lambda_1}(u)) \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\mu_0(\mathcal{M}_{>\lambda_1}(u) \in (m_0,+\infty), \lambda_1^{-1}+m-\varepsilon-\mathcal{M}_{>\lambda_1}(u) < |\alpha_1|^2 < \lambda_1^{-1}+m+\varepsilon-\mathcal{M}_{>\lambda_1}(u)) \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{m_0}^{+\infty} f_{\lambda_1}(x)\left(\int_{\max\{0,\lambda_1^{-1}+m-\varepsilon-x\}<|\alpha_1|^2<\lambda_1^{-1}+m+\varepsilon-x} \frac{\lambda_1}{\pi}e^{-\lambda_1|\alpha_1|^2}d\alpha_1\right)dx.
\end{aligned}$$

我们进一步估计如下:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\varepsilon}\int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} f_0(x)dx \\
&\quad= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{m_0}^{\lambda_1^{-1}+m-\varepsilon} f_{\lambda_1}(x)\left(\int_{\lambda_1^{-1}+m-\varepsilon-x<|\alpha_1|^2<\lambda_1^{-1}+m+\varepsilon-x}\frac{\lambda_1}{\pi}e^{-\lambda_1|\alpha_1|^2}d\alpha_1\right)dx \\
&\qquad+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\lambda_1^{-1}+m-\varepsilon}^{\lambda_1^{-1}+m+\varepsilon} f_{\lambda_1}(x)\left(\int_{0<|\alpha_1|^2<\lambda_1^{-1}+m+\varepsilon-x}\frac{\lambda_1}{\pi}e^{-\lambda_1|\alpha_1|^2}d\alpha_1\right)dx \\
&\quad= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{m_0}^{\lambda_1^{-1}+m-\varepsilon} f_{\lambda_1}(x)\left(\int_{1+\lambda_1(m-\varepsilon-x)}^{1+\lambda_1(m+\varepsilon-x)} e^{-\lambda}d\lambda\right)dx \\
&\qquad+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\lambda_1^{-1}+m-\varepsilon}^{\lambda_1^{-1}+m+\varepsilon} f_{\lambda_1}(x)\left(\int_{0}^{1+\lambda_1(m+\varepsilon-x)} e^{-\lambda}d\lambda\right)dx \\
&\quad\geq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{m_0}^{\lambda_1^{-1}+m-\varepsilon} f_{\lambda_1}(x)e^{-1-\lambda_1 m+\lambda_1 x}(e^{\lambda_1\varepsilon}-e^{-\lambda_1\varepsilon})dx \\
&\quad= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{m_0}^{\lambda_1^{-1}+m} f_{\lambda_1}(x)e^{-1-\lambda_1 m+\lambda_1 x}(e^{\lambda_1\varepsilon}-e^{-\lambda_1\varepsilon})dx \\
&\qquad-\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\lambda_1^{-1}+m-\varepsilon}^{\lambda_1^{-1}+m} f_{\lambda_1}(x)e^{-1-\lambda_1 m+\lambda_1 x}(e^{\lambda_1\varepsilon}-e^{-\lambda_1\varepsilon})dx.
\end{aligned}$$

由于控制收敛定理，最后一项在 $\varepsilon\to 0^+$ 时趋于零。因此令 $\varepsilon\to 0^+$，我们得到

$$\begin{aligned}
f_0(m)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} f_0(x)dx &\geq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{m_0}^{\lambda_1^{-1}+m} f_{\lambda_1}(x)e^{-1-\lambda_1 m+\lambda_1 x}\frac{e^{\lambda_1\varepsilon}-e^{-\lambda_1\varepsilon}}{2\varepsilon}dx \\
&= \int_{m_0}^{\lambda_1^{-1}+m} f_{\lambda_1}(x)e^{-1-\lambda_1 m+\lambda_1 x}\lambda_1 dx.
\end{aligned}$$

反设 $f_0(m)=0$。由于对所有 $x\in(m_0,\ +\infty)$，都有 $f_{\lambda_1}(x)\geq 0$，我们推得对所有 $x\in(m_0,\ \lambda_1^{-1}+m)$，都有 $f_{\lambda_1}(x)=0$。特别地，我们有

$$\begin{aligned}
0&=\int_{m_0}^{\lambda_1^{-1}+m} f_{\lambda_1}(x)dx \\
&=\mu_0^{>\lambda_1}(m_0<\mathcal{M}_{>\lambda_1}(u)<\lambda_1^{-1}+m) \\
&=\mu_0^{>\lambda_1}\Big(\mathcal{M}_{>\lambda_2}(u)\in(m_0,+\infty), m_0-\mathcal{M}_{>\lambda_2}(u)<\sum_{\lambda_j=\lambda_2}|\alpha_j|^2-\lambda_j^{-1}<\lambda_1^{-1}+m-\mathcal{M}_{>\lambda_2}(u)\Big).
\end{aligned}$$

为继续推导，我们记

$$\alpha=(\alpha_j)_{\lambda_j=\lambda_2}\in\mathbb{C}^N,$$

其中 N 是 λ_2的重数，因此 $d\alpha = \prod_{\lambda_j=\lambda_2} d\alpha_j$ 且 $|\alpha|^2 = \sum_{\lambda_j=\lambda_2} |\alpha_j|^2$。上述测度变为

$$\begin{aligned}
&\int_{m_0}^{N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m} f_{\lambda_2}(x)\Big(\int_{\max\{0,m_0+N\lambda_2^{-1}-x\}<|\alpha|^2<N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m-x} \left(\frac{\lambda_2}{\pi}\right)^N e^{-\lambda_2|\alpha|^2}d\alpha\Big)dx\\
&= \int_{m_0}^{N\lambda_2^{-1}+m_0} f_{\lambda_2}(x)\Big(\int_{m_0+N\lambda_2^{-1}-x<|\alpha|^2<N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m-x} \left(\frac{\lambda_2}{\pi}\right)^N e^{-\lambda_2|\alpha|^2}d\alpha\Big)dx\\
&\quad + \int_{N\lambda_2^{-1}+m_0}^{N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m} f_{\lambda_2}(x)\Big(\int_{0<|\alpha|^2<N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m-x} \left(\frac{\lambda_2}{\pi}\right)^N e^{-\lambda_2|\alpha|^2}d\alpha\Big)dx
\end{aligned}$$

使用极坐标，这就变为（相差一个因子 $\sigma(\mathbb{S}^{2N-1})$）

$$\begin{aligned}
&\int_{m_0}^{N\lambda_2^{-1}+m_0} f_{\lambda_2}(x)\Big(\int_{\sqrt{m_0+N\lambda_2^{-1}-x}}^{\sqrt{N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m-x}} \left(\frac{\lambda_2}{\pi}\right)^N e^{-\lambda_2 r^2} r^{2N-1}dr\Big)dx\\
&\quad + \int_{N\lambda_2^{-1}+m_0}^{N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m-x} f_{\lambda_2}(x)\Big(\int_0^{\sqrt{N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m}} \left(\frac{\lambda_2}{\pi}\right)^N e^{-\lambda_2 r^2} r^{2N-1}dr\Big)dx.
\end{aligned}$$

通过变量替换 $\lambda = \lambda_2 r^2$，上述量为（相差一个因子 $\frac{1}{2\pi^N}$）

$$\begin{aligned}
&\int_{m_0}^{N\lambda_2^{-1}+m_0} f_{\lambda_2}(x)\Big(\int_{\lambda_2(m_0+N\lambda_2^{-1}-x)}^{\lambda_2(N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m-x)} e^{-\lambda}\lambda^{N-1}\lambda\Big)dx\\
&\quad + \int_{N\lambda_2^{-1}+m_0}^{N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m} f_{\lambda_2}(x)\Big(\int_0^{\lambda_2(N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m-x)} e^{-\lambda}\lambda^{N-1}\lambda\Big)dx.
\end{aligned}$$

由于该和等于零，且两项均非负，因此我们推断，对于所有 $x \in (m_0, N\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}+m)$，$f_{\lambda_2}(x) = 0$。类似地，我们可以证明，对于所有 $x \in (m_0, \mathrm{Tr}[(P_{\le\Lambda}h)^{-1}]+m)$ 以及所有 $\Lambda \ge 0$，$f_\Lambda(x) = 0$。因此

$$1 = \int_{m_0}^{+\infty} f_\Lambda(x)dx = \int_{\mathrm{Tr}[(P_{\le\Lambda}h)^{-1}]+m}^{+\infty} f_\Lambda(x)dx, \quad \forall \Lambda \ge 0.$$

这与以下事实矛盾

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{Tr}[(P_{\le\Lambda}h)^{-1}]+m}^{+\infty} f_\Lambda(x)dx &= \mu_0^{>\Lambda}\left(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) > \mathrm{Tr}[(P_{\le\Lambda}h)^{-1}]+m\right)\\
&\le \mu_0^{>\Lambda}\left((\mathcal{M}_{>\Lambda}(u))^2 > (\mathrm{Tr}[(P_{\le\Lambda}h)^{-1}]+m)^2\right)\\
&\le \frac{1}{(\mathrm{Tr}[(P_{\le\Lambda}h)^{-1}]+m)^2}\int (\mathcal{M}_{>\Lambda}(u))^2 d\mu_0^{>\Lambda}(u)\\
&= \frac{1}{(\mathrm{Tr}[(P_{\le\Lambda}h)^{-1}]+m)^2}\sum_{\lambda_j>\Lambda}\lambda_j^{-2} \to 0 \text{ as } \Lambda\to\infty
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Tr}[h^{-2}] = \sum \lambda_j^{-2} < \infty$。注意，对于固定的 m，我们有

$$\mathrm{Tr}[(P_{\le\Lambda}h)^{-1}]+m \xrightarrow[\Lambda\to\infty]{} \begin{cases} m+\mathrm{Tr}[h^{-1}] > 0 & \text{if } s>2,\\ +\infty & \text{if } 1<s\le 2.\end{cases}$$

证明完毕。 □

引理 6.5（柱面投影 II）。
令 $s > 1$、$m \in \mathbb{R}$，并假设 $m > -$迹 $[h^{-1}]$ 若 $s > 2$。则对于任意 $\Lambda \ge \lambda_1$ 以及任意

A 属于 $E_{\leq\Lambda}$ 的博雷尔集，极限 $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mu_{0}^{m,\varepsilon}(A)$ 存在，且

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mu_0^{m,\varepsilon}(A)=\int_A\frac{f_\Lambda\left(m-\vartheta_\Lambda\right)}{f_0(m)}d\mu_0^{\leq\Lambda}(u)=:\mu_0^{m,\leq\Lambda}(A). \tag{6.7}$$

特别地，

$$d\mu_0^{m,\leq\Lambda}(u)=\frac{f_\Lambda(m-\vartheta_\Lambda)}{f_0(m)}d\mu_0^{\leq\Lambda}(u)$$

对任意 $\Theta\geq\Lambda$，满足

$$\mu_0^{m,\leq\Theta}\Big|_{E_{\leq\Lambda}}=\mu_0^{m,\leq\Lambda}. \tag{6.8}$$

证明。一方面，由于 f_Λ 的一致连续性，我们有

$$\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda}^{m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda}f_\Lambda(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon}f_0(x)dx\right)^{-1}\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{}\frac{f_\Lambda(m-\vartheta_\Lambda)}{f_0(m)}.$$

另一方面，f_Λ 的有界性给出

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda}^{m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda}f_\Lambda(x)dx\leq\|f_\Lambda\|_{L^\infty}.$$

由于 $f_0(m)>0$，对于充分小的 $\varepsilon>0$，我们有

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon}f_0(x)dx\geq\frac{f_0(m)}{2}.$$

特别地，当 $\varepsilon>0$ 足够小时，我们得到：

$$\left(\int_{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda}^{m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda}f_\Lambda(x)dx\right)\left(\int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon}f_0(x)dx\right)^{-1}d\mu_0^{\leq\Lambda}(u)\leq\frac{2\|f_\Lambda\|_{L^\infty}}{f_0(m)}d\mu_0^{\leq\Lambda}(u)$$

它在 A 上可积。由（6.6），根据控制收敛定理可得（6.7）。为证明（6.8），利用（6.5），对于 A 中的任意博雷尔集 $E_{\leq\Lambda}$，有：

$$\begin{aligned}\mu_0^{m,\leq\Theta}\Big|_{E_{\leq\Lambda}}(A)&=\mu_0^{m,\leq\Theta}(A\times\mathbb{C}^N)\\&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mu_0^{m,\varepsilon,\leq\Theta}(A\times\mathbb{C}^N)\\&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mu_0^{m,\varepsilon,\leq\Lambda}(A)\\&=\mu_0^{m,\leq\Lambda}(A),\end{aligned}$$

其中 $N=\#\{\lambda_j:\Lambda<\lambda_j\leq\Theta\}$。 □

我们在有限维空间 $\{\mu^{m,\varepsilon}_{0}{}^{\leq\Lambda}\}_{\Lambda\geq\lambda_1}$ 上构造了测度序列 $\{E_{\leq\Lambda}\}_{\Lambda\geq\lambda_1}$，它满足柱状性质（6.8）。至此，我们完成了命题 6.1中第（1）项的证明。

为证明第（2）项，我们将证明存在一个唯一测度 μ_0^m，它定义在一个无限维希尔伯特空间上，并满足

$$\mu_0^m|_{E_{\leq\Lambda}}=\mu_0^{m,\leq\Lambda}.$$

根据斯科罗霍德判据（见 [54, 引理 1]），只需验证测度序列 $\{\mu^{m,\varepsilon}_{0}{}^{\leq\Lambda}\}_{\Lambda\geq\lambda_1}$ 是紧的，即

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{\Lambda\geq\lambda_1}\mu_0^{m,\leq\Lambda}(\{u\in E_{\leq\Lambda}:\|u\|_{\mathcal{H}^\theta}\geq R\})=0$$

对于 $\theta<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$。这显然可由以下引理推出，其证明也就完成了命题6.1的证明。

引理 6.6 (正则高斯测度的紧性)。
设 $s>1$、 $m\in\mathbb{R}$，并假设 $m>$ –迹$[h^{-}]$ 若 $\frac{1}{s}>2$。那么对于任意 $\theta<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$，存在 $C($ m、 $\theta)>0$ 使得

$$\int_{E_{\leq\Lambda}}\|u\|_{\mathcal{H}^\theta}^2 d\mu_0^{m,\leq\Lambda}(u)\leq C(m,\theta),\quad \forall\Lambda\geq\lambda_1.$$

证明。 只需证明

$$\int\lambda_j|\alpha_j|^2 d\mu_0^{m,\leq\Lambda}(u)\leq C(m),\quad \forall\Lambda\geq\lambda_1,\quad \forall\lambda_1\leq\lambda_j\leq\Lambda \tag{6.9}$$

存在仅依赖于 m 的常数 $C(m)$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\int_{E_{\leq\Lambda}}\|u\|_{\mathcal{H}^\theta}^2 d\mu_0^{m,\leq\Lambda}(u)&=\int\sum_{\lambda_j\leq\Lambda}\lambda_j^\theta|\alpha_j|^2 d\mu_0^{m,\leq\Lambda}(u)\\&=\sum_{\lambda_j\leq\Lambda}\lambda_j^{\theta-1}\int\lambda_j|\alpha_j|^2 d\mu_0^{m,\leq\Lambda}(u)\\&\leq C(m)\sum_{\lambda_j\leq\Lambda}\lambda_j^{-1+\theta}\\&\leq C(m)\mathrm{Tr}[h^{-1+\theta}]<\infty,\end{aligned}$$

其中我们利用了 $1-\theta>\frac{1}{2}+\frac{1}{s}$ 这一事实来得到 $\mathrm{Tr}[h^{-1+\theta}]$ 的有限性（见引理 A.1）。

因此，只需证明 (6.9)，我们将根据以下事实推出该结论：对于所有$\Lambda\geq\lambda_1$、所有 $\lambda_1\leq\lambda_j\leq\Lambda$ 以及所有充分小的 $\varepsilon>0$，

$$\int\lambda_j|\alpha_j|^2 d\mu_0^{m,\varepsilon,\leq\Lambda}(u)\leq C(m). \tag{6.10}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int\lambda_j|\alpha_j|^2 d\mu_0^{m,\varepsilon,\leq\Lambda}(u)\\&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int\lambda_j|\alpha_j|^2\mu_0^{>\Lambda}(m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda<\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda)d\mu_0^{\leq\Lambda}(u)\\&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int\lambda_j|\alpha_j|^2\left(\int\mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda<\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda\}}d\mu_0^{>\Lambda}(u)\right)d\mu_0^{\leq\Lambda}(u)\\&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int\lambda_j|\alpha_j|^2\left(\int\mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}<\mathcal{M}_{\neq j}(u)<m+\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}\}}d\mu_0^{\neq j}(u)\right)\frac{\lambda_j}{\pi}e^{-\lambda_j|\alpha_j|^2}d\alpha_j\\&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int\lambda_j|\alpha_j|^2\mu_0^{\neq j}(m-\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}<\mathcal{M}_{\neq j}(u)<m+\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1})\frac{\lambda_j}{\pi}e^{-\lambda_j|\alpha_j|^2}d\alpha_j,\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{M}_{\neq j}(u)=\sum_{k\neq j}|\alpha_k|^2-\lambda_k^{-1},\quad d\mu_0^{\neq j}(u)=\prod_{k\neq j}\frac{\lambda_k}{\pi}e^{-\lambda_k|\alpha_k|^2}d\alpha_k.$$

记 F_j 为 $\mathrm{M}_{\neq j}(u)$ 关于 $\mu_0^{\neq j}$ 的密度函数。我们改写为

$$\int(\lambda_j|\alpha_j|^2)^q d\mu_0^{m,\varepsilon,\leq\Lambda}(u)=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int\lambda_j|\alpha_j|^2\left(\int_{m-\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}}^{m+\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}}F_j(x)dx\right)\frac{\lambda_j}{\pi}e^{-\lambda_j|\alpha_j|^2}d\alpha_j.$$

接下来，我们将 Φ_j 记为 $\mathcal{M}_{\neq j}(u)$ 关于 $\mu_0^{\neq j}$ 的特征函数。与引理 6.3的证明中一样，我们有

$$\Phi_j(s)=\mathbb{E}_{\mu_0^{\neq j}}[e^{is\mathcal{M}_{\neq j}(u)}]=\prod_{k\neq j}\frac{e^{-is\lambda_k^{-1}}}{1-is\lambda_k^{-1}}.$$

由于该乘积的每个因子的复范数都小于或等于 1，因此我们用任意两个项的乘积的范数来界定该乘积的范数。取前两项可得，对所有 $\lambda_j \geq \lambda_1$,

$$|\Phi_j(s)| \leq \frac{1}{1+s^2\lambda_3^{-2}}.$$

特别地，对于所有 $\lambda_j \geq \lambda_1$，$\|\Phi_j\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\lambda_3$。因此，对于所有 $\lambda_j \geq \lambda_1$，F_j 有界（关于 j 一致），且一致连续。

由引理 6.4，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，

$$\frac{1}{2\varepsilon} Z_0^{m,\varepsilon} \geq \frac{f_0(m)}{2}.$$

我们还有

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{m-\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}}^{m+\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}} F_j(x)dx \leq \|F_j\|_{L^\infty} \leq C\|\Phi_j\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\lambda_3, \quad \forall \lambda_j \geq \lambda_1.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int \lambda_j|\alpha_j|^2 d\mu_0^{m,\varepsilon,\leq\Lambda}(u) &\leq \frac{2C\lambda_3}{f_0(m)}\int \lambda_j|\alpha_j|^2 \frac{\lambda_j}{\pi} e^{-\lambda_j|\alpha_j|^2} d\alpha_j \\ &= \frac{2C\lambda_3}{f_0(m)}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda} d\lambda \\ &= C(m)\end{aligned}$$

对于所有 $\lambda_j \geq \lambda_1$ 以及所有 $\varepsilon > 0$ 充分小的情况。这证明了（6.10）。

我们现在证明（6.9）。利用层蛋糕表示，问题归结为证明

$$\int_0^\infty \mu_0^{m,\leq\Lambda}(\lambda_j|\alpha_j|^2 > \lambda)d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^\infty \mu_0^{m,\varepsilon,\leq\Lambda}(\lambda_j|\alpha_j|^2 > \lambda)d\lambda.$$

得益于弱收敛 $\mu^{m,\varepsilon,\le\Lambda}_0 \to \mu^{m,\varepsilon,\le\Lambda}_0$，（6.9）可由控制收敛定理以及这一事实推出：

$$\begin{aligned}
&\mu_0^{m,\varepsilon,\le\Lambda}(\lambda_j|\alpha_j|^2>\lambda)\\
&\quad=\int \mathbb{1}_{\{\lambda_j|\alpha_j|^2>\lambda\}} d\mu_0^{m,\varepsilon,\le\Lambda}(u)\\
&\quad=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int \mathbb{1}_{\{\lambda_j|\alpha_j|^2>\lambda\}}\mu_0^{>\Lambda}(m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda<\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda)d\mu_0^{\le\Lambda}(u)\\
&\quad=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int \mathbb{1}_{\{\lambda_j|\alpha_j|^2>\lambda\}}\left(\int \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda<\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda\}}d\mu_0^{>\Lambda}(u)\right)d\mu_0^{\le\Lambda}(u)\\
&\quad=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int \mathbb{1}_{\{\lambda_j|\alpha_j|^2>\lambda\}\cap\{|\alpha_j|^2-\lambda_j^{-1}\in\mathbb{R}\}}\\
&\qquad\times\left(\int \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}<\mathcal{M}_{\neq j}(u)<m+\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}\}}d\mu_0^{\neq j}(u)\right)\frac{\lambda_j}{\pi}e^{-\lambda_j|\alpha_j|^2}d\alpha_j\\
&\quad=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int \mathbb{1}_{\{\lambda_j|\alpha_j|^2>\lambda\}\cap\{|\alpha_j|^2-\lambda_j^{-1}\in\mathbb{R}\}}\left(\int_{m-\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}}^{m+\varepsilon-|\alpha_j|^2+\lambda_j^{-1}}F_j(x)dx\right)\frac{\lambda_j}{\pi}e^{-\lambda_j|\alpha_j|^2}d\alpha_j\\
&\quad\le\frac{2C\lambda_3}{f_0(m)}\int \mathbb{1}_{\{\lambda_j|\alpha_j|^2>\lambda,|\alpha_j|^2-\lambda_j^{-1}\in\mathbb{R}\}}\frac{\lambda_j}{\pi}e^{-\lambda_j|\alpha_j|^2}d\alpha_j\\
&\quad\le\frac{2C\lambda_3}{f_0(m)}\int_\lambda^\infty e^{-\tau}d\tau\\
&\quad=\frac{2C\lambda_3}{f_0(m)}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

它在 $(0,\infty)$ 上可积。 □

6.2. 给定质量条件下的吉布斯测度。 构造出给定质量条件下的高斯测度后，我们接下来的任务是定义具有固定重整化质量的吉布斯测度如下：

$$d\mu^m(u)=\frac{1}{Z^m}e^{\mp\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}d\mu_0^m(u),$$

其中

$$Z^m:=\int e^{\mp\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}d\mu_0^m(u)$$

是归一化常数。这里，负号表示散焦非线性，正号表示聚焦非线性。

命题 6.7 (给定质量条件下的吉布斯测度)。
设 $s>1$，V 满足假设 1.1，$m\in\mathbb{R}$，并假设 $m>-\mathrm{Tr}[h^{-1}]$ 当 $s>2$ 时成立。另假设，对于聚焦非线性，$s>\frac{8}{5}$。那么 μ^m 作为概率测度是有意义的。

我们首先需要以下观察。

引理 6.8 （重整化质量的衰减）。
设 $s>1$，V 满足假设 1.1，$m>-\mathrm{Tr}[h^{-1}]$ 当 $s>2$ 时成立。那么存在 C、$c>0$，使得对于 $\theta<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$、所有 $\Lambda\ge\lambda_2$、所有 $R>0$，以及所有充分小的 $\varepsilon>0$，

$$\mu_0^{m,\varepsilon}\left(u\in\mathcal{H}^\theta:|\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)|>R\right)\le Ce^{-c\Lambda^\gamma R}. \tag{6.11}$$

特别地，我们有

$$\mu_0^{m}\left(u\in\mathcal{H}^\theta:|\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)|>R\right)\le Ce^{-c\Lambda^\gamma R}. \tag{6.12}$$

证明。 由于 $\mu^{m,\varepsilon}_0 \to \mu^m_0$因为 $\varepsilon \to 0^+$ （见命题 6.1），只需证明（6.11）。我们估计

$$\mu_0^{m,\varepsilon}\left(|\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)| > R\right) \leq \mu_0^{m,\varepsilon}\left(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) > R\right) + \mu_0^{m,\varepsilon}\left(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) < -R\right) = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}).$$

对于 (I)，取 $0 < t < \frac{\Lambda}{2}$ （稍后确定），有

$$\mu_0^{m,\varepsilon}\left(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u) > R\right) \leq e^{-tR} \int e^{t\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)} d\mu_0^{m,\varepsilon}(u).$$

根据 $\mu^{m,\varepsilon}_0$的定义，

$$\begin{aligned}\int e^{t\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)} d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) &= \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}} \int e^{t\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)} \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}} d\mu_0(u) \\ &= \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}} \int e^{t\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)} \left(\int \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-\varrho_\Lambda<\mathcal{M}_{\leq\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\varrho_\Lambda\}} d\mu_0^{\leq\Lambda}(u) \right) d\mu_0^{>\Lambda}(u),\end{aligned}$$

其中

$$\varrho_\Lambda = \mathcal{M}_{>\Lambda}(u).$$

记 g_Λ 为 $\mathrm{M}_{\leq\Lambda}(u)$ 关于 $\mu_0^{\leq\Lambda}$ 的密度函数。将上述量改写为

$$\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}} \int e^{t\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)} \left(\int_{m-\varepsilon-\varrho_\Lambda}^{m+\varepsilon-\varrho_\Lambda} g_\Lambda(x)dx \right) d\mu_0^{>\Lambda}(u).$$

令 ψ_Λ 为 $\mathrm{M}_{\leq\Lambda}(u)$ 关于 $\mu_0^{\leq\Lambda}$ 的特征函数。我们计算 te

$$\begin{aligned}\psi_\Lambda(s) &= \mathbb{E}_{\mu_0^{\leq\Lambda}}[e^{is\mathcal{M}_{\leq\Lambda}(u)}] \\ &= \int e^{is\mathcal{M}_{\leq\Lambda}(u)} d\mu_0^{\leq\Lambda}(u) \\ &= \int e^{is\sum_{\lambda_j\leq\Lambda}|\alpha_j|^2-\lambda_j^{-1}} \prod_{\lambda_k\leq\Lambda} \frac{\lambda_k}{\pi} e^{-\lambda_k|\alpha_k|^2} d\alpha_k \\ &= \prod_{\lambda_j\leq\Lambda} \frac{e^{-is\lambda_j^{-1}}}{1-is\lambda_j^{-1}}.\end{aligned}$$

由于 $\Lambda \geq \lambda_2$，我们看到

$$|\psi_\Lambda(s)| \leq \frac{1}{1+s^2\lambda_2^{-2}},$$

因此 $\mathrm{k}\psi_\Lambda\mathrm{k}_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\lambda_2$。由此可得， g_Λ 一致有界（关于 Λ）且一致连续。特别地，我们有

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{m-\varepsilon-\varrho_\Lambda}^{m+\varepsilon-\varrho_\Lambda} g_\Lambda(x)dx \leq \|g_\Lambda\|_{L^\infty} \leq C\|\psi_\Lambda\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\lambda_2.$$

另一方面，引理 6.4 表明，对于 $\varepsilon > 0$ 充分小的情形，

$$\frac{1}{2\varepsilon} Z_0^{m,\varepsilon} \geq \frac{f_0(m)}{2}.$$

因此，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们得到

$$\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}} \int_{m-\varepsilon-\varrho_\Lambda}^{m+\varepsilon-\varrho_\Lambda} g_\Lambda(x)dx \leq \frac{2C\lambda_2}{f_0(m)},$$

因此

$$\int e^{t\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)} d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \leq \frac{2C\lambda_2}{f_0(m)} \int e^{t\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)} d\mu_0^{>\Lambda}(u).$$

根据引理 3.7 的证明中相同的论证，我们有

$$\int e^{t\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)}d\mu_0^{>\Lambda}(u)=\prod_{\lambda_j>\Lambda}e^{-t\lambda_j^{-1}}\frac{1}{1-t\lambda_j^{-1}}\le C\prod_{\lambda_j>\Lambda}e^{t^2\lambda_j^{-2}}=Ce^{t^2\sum_{\lambda_j>\Lambda}\lambda_j^{-2}}.$$

对于 $0\le\gamma<\frac{3s-2}{4s}$，我们有

$$\sum_{\lambda_j>\Lambda}\lambda_j^{-2}\le\Lambda^{-2\gamma}\mathrm{Tr}[h^{-2+2\gamma}].$$

特别地，我们得到

$$\mu_0^{m,\varepsilon}(\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)>R)\le Ce^{-tR+t^2\Lambda^{-2}\mathrm{Tr}[h^{-2+2\gamma}]}.$$

取 $t=\nu\Lambda^\gamma$，并令 $\nu>0$ 足够小，可得

$$(\mathrm{I})\le Ce^{-c\Lambda^\gamma R}$$

对于任意 $0\le\gamma<\frac{3s-2}{4s}$。项 (II) 以类似方式处理，我们证明了 (6.11)。 □

我们还有以下衰减估计。

引理 6.9（L^4 **范数的衰减**）。
设 $s>1$，V 满足假设 *1.1*，$0\le\gamma<\frac{3s-2}{4s}$，$m\in\mathbb{R}$，并假设 $m>-$迹$[h^{-1}]$ 如果$s>2$。那么存在 C，$c>0$ 使得对于 $\theta<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$，所有 $\Lambda\ge\lambda_2$，所有 $R>0$ 以及所有 $\varepsilon>0$ 充分小的情形，

$$\mu_0^{m,\varepsilon}\left(u\in\mathcal{H}^\theta:\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}>R\right)\le Ce^{-c\Lambda^\rho R^2}. \tag{6.13}$$

特别地，我们有

$$\mu_0^{m}\left(u\in\mathcal{H}^\theta:\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}>R\right)\le Ce^{-c\Lambda^\rho R^2}. \tag{6.14}$$

证明。由于 $\mu^{m,\varepsilon}_0\to\mu_0^m$ 当 $\varepsilon\to0^+$ 时，只需证明（6.13）。设 $t>0$ 为一个待定的正常数。我们估计

$$\begin{aligned}\mu_0^{m,\varepsilon}\left(\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}>R\right)&\le e^{-tR^2}\int e^{t\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^2}d\mu_0^{m,\varepsilon}(u)\\&=e^{-tR^2}\sum_{k\ge0}\frac{t^k}{k!}\int\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k}d\mu_0^{m,\varepsilon}(u).\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k}d\mu_0^{m,\varepsilon}(u)\\&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k}\mathbb{1}_{\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}}d\mu_0(u)\\&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k}\left(\int\mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-\varrho_\Lambda<\mathcal{M}_{\le\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\varrho_\Lambda\}}d\mu_0^{\le\Lambda}(u)\right)d\mu_0^{>\Lambda}(u)\\&=\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k}\left(\int_{m-\varepsilon-\varrho_\Lambda}^{m+\varepsilon-\varrho_\Lambda}g_\Lambda(x)dx\right)d\mu_0^{>\Lambda}(u),\end{aligned}$$

其中 g_Λ 是 $\mathcal{M}^{\le\Lambda}(u)$ 关于 $\mu_0^{\le\Lambda}$ 的密度函数，而 $\varrho_\Lambda=\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)$。如引理 6.8 的证明中所示，对于 $\varepsilon>0$ 充分小的情形，

$$\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}}\int_{m-\varepsilon-\varrho_\Lambda}^{m+\varepsilon-\varrho_\Lambda}g_\Lambda(x)dx\le\frac{2C\lambda_2}{f_0(m)}$$

因此

$$\int\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k}d\mu_0^{m,\varepsilon}(u)\le\frac{2C\lambda_2}{f_0(m)}\int\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k}d\mu_0^{>\Lambda}(u).$$

由引理 3.4 的证明中相同的论证可得

$$\int \|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k} d\mu_0^{>\Lambda}(u) \leq 2!k!B_{\Lambda,0,4}^k, \quad \forall k \geq 0,$$

其中 $B_{\Lambda,\,0,\,4}$ 与（3.14）中相同。特别地，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，

$$\int \|P_{>\Lambda}u\|_{L^4}^{2k} d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \leq Ck!B_{\Lambda,0,4}^k, \quad \forall k \geq 0,$$

因此

$$\mu_0^{m,\varepsilon}\left(\|P_{>\Lambda}u\|_{L^4} > R\right) \leq Ce^{-tR^2} \sum_{k\geq 0} (tB_{\Lambda,0,4})^k.$$

完全按照引理 3.5的证明进行推导，我们得到（6.13）。 □

引理 6.10 （W衰减$^{\beta,\ p}$-范数）。 设 $s > 1$, V满足假设 *1.1*, $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$, $p >$最大 $\left\{2, s^{\frac{4}{(1-2\beta)}}\right\}$为偶整数，$m \in \mathbb{R}$，并假设 $m > -\mathrm{Tr}[h^{-1}]$ 若 $s > 2$。那么存在 $c > 0$ 使得对于$\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$，所有充分大的 $\Lambda \geq \lambda_1$，所有 $R > 0$，以及所有充分小的 $\varepsilon > 0$，

$$\mu_0^{m,\varepsilon}\left(u \in \mathcal{H}^\theta : \|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} > R\right) \leq C\Lambda e^{-cR^2}. \tag{6.15}$$

特别地，我们有

$$\mu_0^{m}\left(u \in \mathcal{H}^\theta : \|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} > R\right) \leq C\Lambda e^{-cR^2}. \tag{6.16}$$

证明。 我们只需证明 (6.15)。我们估计

$$\begin{aligned}\mu_0^{m,\varepsilon}(\|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} > R) &\leq e^{-tR^2} \int e^{t\|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^2} d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \\ &= e^{-tR^2} \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} \int \|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{2k} d\mu_0^{m,\varepsilon}(u).\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int \|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{2k} d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \\ &= \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}} \int \|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{2k} \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}} d\mu_0(u) \\ &= \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}} \int \|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{2k} \left(\int \mathbb{1}_{\{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda<\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)<m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda\}} d\mu_0^{>\Lambda}(u)\right) d\mu_0^{\leq\Lambda}(u) \\ &= \frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}} \int \|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{2k} \left(\int_{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda}^{m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda} f_\Lambda(x)dx\right) d\mu_0^{\leq\Lambda}(u),\end{aligned}$$

其中 f_Λ 是 $\mathcal{M}_{>\Lambda}(u)$ 关于 $\mu_0^{>\Lambda}$的密度函数，且 $\vartheta_\Lambda = \mathcal{M}^{\leq\Lambda}(u)$。由引理 6.3 和 6.4，我们推知，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，

$$\frac{1}{Z_0^{m,\varepsilon}} \int_{m-\varepsilon-\vartheta_\Lambda}^{m+\varepsilon-\vartheta_\Lambda} f_\Lambda(x)dx \leq \frac{2\|f_\Lambda\|_{L^\infty}}{f_0(m)} \leq C\Lambda.$$

我们推得，当 $\varepsilon > 0$ 较小时，

$$\int \|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}^{2k} d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \leq C\Lambda \int \|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,q}}^{2k} d\mu_0^{\leq\Lambda}(u).$$

右侧的积分可完全按照引理 3.4 中的方法进行估计，从而得到

$$\int \|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,q}}^{2k} d\mu_0^{\leq\Lambda}(u) \leq \left(\frac{p}{2}\right)!k!B_{\beta,p}^k, \quad \forall k \geq 0.$$

特别地，我们得到

$$\mu_0^{m,\varepsilon}(\|P_{\leq\Lambda}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}} > R) \leq C\Lambda e^{-tR^2}\sum_{k\geq 0}(tB_{\beta,p})^k \leq C\Lambda e^{-cR^2}$$

前提是 $t>0$ 取得足够小。 □

注 6.1.根据引理证明中的论证 6.9 和 6.10 (另见引理 3.2的证明），我们可以证明：对于 $s>1$, $\theta<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$，以及 $m>0$,

$$\mu_0^m(u\in\mathcal{H}^\theta:\|u\|_{\mathcal{H}^\theta}>\lambda)\leq Ce^{-c\lambda^2} \tag{6.17}$$

对于某些常数 C, $c>0$。

命题 *6.7*的证明。 我们只考虑较难的聚焦非线性情形，因为散焦非线性情形较为简单。由于 μ_0^m是一个概率测度，显然有 $Z^m\geq 1$。剩下需要证明的是

$$Z^m=\int e^{\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}d\mu_0^m(u)<\infty. \tag{6.18}$$

我们有

$$Z^m=\int_0^\infty \mu_0^m\left(e^{\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}>\lambda\right)d\lambda = C(\lambda_0)+\int_{\lambda_0}^\infty \mu_0^m\left(e^{\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}>\lambda\right)d\lambda$$

对某个稍后确定的 $\lambda_0>0$ 。为证明其有限性，

$$\int_{\lambda_0}^\infty \mu_0^m\left(e^{\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}>\lambda\right)d\lambda,$$

我们重复命题 2.2 证明中的相同推理，使用引理 6.8、6.9和 6.10。注意，在 $\mathcal{M}(u)=m$ 的支撑集上，因此 μ_0^m，从而当 $\|u\|_{L^2}^2=m+\mathrm{Tr}[h^{-1}]\in(0,\infty)$ 时 $s>2$。唯一不同之处在于以下估计（见引理 6.10）：

$$\mu_0^m(\|P_{\leq\Lambda_0}u\|_{\mathcal{W}^{\beta,p}}>C(\log\lambda)^\sigma)\leq C\Lambda_0 e^{-c(\log\lambda)^{2\sigma}},$$

其中附加项 Λ_0 恰好是 $(\log\lambda)^l$ （见（3.19））， 并且可以被指数衰减 $e^{-c(\log\lambda)^{2\sigma}}$吸收。常数 λ_0的选取使得 Λ_0足够大，从而可以按需应用引理 6.8、6.9和6.10。 □

6.3. **按质量条件化的吉布斯测度的不变性**。 得益于标准 Gibbs 测度 μ 的不变性（见定理 2.3 ），我们可以推出按质量条件化的吉布斯测度的不变性。

命题 6.11 (典范吉布斯测度的不变性)。
设 $s>1$, V满足假设 *1.1*, $m\in\mathbb{R}$，并假设当 $m>-$迹$[h^{-1}]$ 时 $s>2$。此外，假设对于 $s>\frac{8}{5}$ 聚焦非线性成立。则 μ^m 在方程 (1.1)的流下保持不变。

证明基于下面的引理。

引理 6.12(近似典范测度)。
设 $s>1$, V满足假设 *1.1*, $m\in\mathbb{R}$，并假设当 $m>-$迹$[h^{-1}]$ 时 $s>2$。此外，假设对于 $s>\frac{8}{5}$ 聚焦非线性成立。记

$$d\mu^{m,\varepsilon}(u)=\frac{1}{Z^{m,\varepsilon}}e^{\mp\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}d\mu_0^{m,\varepsilon}(u),\quad Z^{m,\varepsilon}=\int e^{\mp\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}d\mu_0^{m,\varepsilon}(u).$$

则 $\mu^{m,\varepsilon}$ 弱收敛于 μ^m，当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，其意义为

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int F(u)d\mu^{m,\varepsilon}(u)=\int F(u)d\mu^m(u)$$

对所有有界连续函数 F： $\mathcal{H}^\theta\to\mathbb{R}$。

证明。 我们首先证明，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时， $Z^{m,\varepsilon} \to Z^m$ 。为简化记号，我们记

$$G(u) = e^{\mp\frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4}$$

and

$$w_\Lambda := P_{\leq\Lambda} u.$$

当 $\Lambda \geq \lambda_1$ 足够大且 $\varepsilon > 0$ 时，我们估计

$$|Z^{m,\varepsilon} - Z^m| \leq \Big| \int G(u) - G(w_\Lambda) d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \Big| + \Big| \int G(w_\Lambda) d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) - \int G(w_\Lambda) d\mu_0^m(u) \Big|$$
$$+ \Big| \int G(u) - G(w_\Lambda) d\mu_0^m(u) \Big| =: (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}).$$

关于 (II)，我们写作

$$\int G(w_\Lambda) d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) = \int_0^\infty \mu_0^{m,\varepsilon}(G(w_\Lambda) > \lambda) d\lambda.$$

对于每个 $\Lambda \geq \lambda_1$，我们有 $\mu^{m,\ 0}{}^{\ \varepsilon}(G(w_\Lambda) > \lambda) \to \mu^m(G(w_\Lambda) > \lambda)$，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时。此外，当 $\varepsilon > 0$ 很小时，我们有，

$$\begin{aligned} \mu_0^{m,\varepsilon}(G(w_\Lambda) > \lambda) &\leq \frac{1}{\lambda^2} \int G^2(w_\Lambda) d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \int e^{\mp\|P_{\leq\Lambda} u\|_{L^4}^4} d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \\ &\leq \frac{C\Lambda}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

当 Λ 足够大时。控制收敛定理表明，当 $\Lambda \geq \lambda_1$ 足够大时，(II) $\to 0$ ，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时。

为估计 (I)，令 $\delta > 0$。由连续性，存在 $\nu > 0$ ，使得若 $\|u - w_\Lambda\|_{L^4} < \nu$，则 $|G(u) - G(w_\Lambda)| < \frac{1}{2}\delta$。我们写作

$$(\mathrm{I}) \leq \Big| \int_{\|u-w_\Lambda\|_{L^4} \geq \nu} G(u) - G(w_\Lambda) d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \Big| + \Big| \int_{\|u-w_\Lambda\|_{L^4} < \nu} G(u) - G(w_\Lambda) d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \Big|.$$

由于当 Λ 充分小时， $G(u) - G(w_\Lambda) \in L^2(d\mu^{m,\ 0}{}^{\ \varepsilon})$ 在 Λ 中一致成立，我们有

$$(\mathrm{I}) \leq \|G(u) - G(w_\Lambda)\|_{L^2(d\mu_0^{m,\varepsilon})} \left(\mu_0^{m,\varepsilon}\left(\|u - w_\Lambda\|_{L^4} \geq \nu\right)\right)^{1/2} + \frac{\delta}{2}.$$

根据引理 6.9，对于 $\varepsilon > 0$ 足够小时，

$$\mu_0^{m,\varepsilon}\left(\|u - w_\Lambda\|_{L^4} \geq \nu\right) = \mu_0^{m,\varepsilon}\left(\|P_{>\Lambda} u\|_{L^4} > \nu\right) \leq C e^{-c\Lambda^\rho \nu^2}$$

对任意 $0 \leq \rho < \frac{s-1}{2s}$。固定 $0 < \rho < \frac{s-1}{2s}$，我们推得，当 Λ 足够大时，

$$\|G(u) - G(w_\Lambda)\|_{L^2(d\mu_0^{m,\varepsilon})} \left(\mu_0^{m,\varepsilon}\left(\|u - w_\Lambda\|_{L^4} \geq \nu\right)\right)^{1/2} < \frac{\delta}{2}$$

对所有充分小的 $\varepsilon > 0$ 均成立。这表明，只要 $\varepsilon > 0$ 取得足够小，(I) $\to 0$ 当 $\Lambda \to \infty$ 时成立。对 (III) 也可作类似论证，从而证明 $Z^{m,\ \varepsilon} \to Z^m$。

现在，对于 F 一个测试函数，我们写成

$$\begin{aligned} \int F(u) d\mu^{m,\varepsilon}(u) &= \frac{1}{Z^{m,\varepsilon}} \int F(u) G(u) d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \\ &= \left(\frac{1}{Z^{m,\varepsilon}} - \frac{1}{Z^m}\right) \int F(u) G(u) d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) + \frac{1}{Z^m} \int F(u) G(u) d\mu_0^{m,\varepsilon}(u). \end{aligned}$$

右侧的第一项趋于零，因为 $Z^{m,\ \varepsilon} \to Z^m$ 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，且

$$\int F(u) G(u) d\mu_0^{m,\varepsilon}(u) \leq \|F\|_{L^\infty} \|G(u)\|_{L^1(d\mu_0^{m,\varepsilon})} \leq C$$

其中某个常数 $C>0$ 与较小的 $\varepsilon>0$ 无关。

对于第二项，我们估计

$$\begin{aligned}
&\Big|\int F(u)G(u)d\mu_0^{m,\varepsilon}(u)-\int F(u)G(u)d\mu_0^{m}(u)\Big| \\
&\qquad=\Big|\int F(u)(G(u)-G(w_\Lambda))+G(w_\Lambda)(F(u)-F(w_\Lambda))d\mu_0^{m,\varepsilon}(u)\Big| \\
&\qquad\quad+\Big|\int F(w_\Lambda)G(w_\Lambda)d\mu_0^{m,\varepsilon}(u)-\int F(w_\Lambda)G(w_\Lambda)d\mu_0^{m}(u)\Big| \\
&\qquad\quad+\Big|\int F(u)(G(u)-G(w_\Lambda))+G(w_\Lambda)(F(u)-F(w_\Lambda))d\mu_0^{m}(u)\Big|.
\end{aligned}$$

如上所述，我们推得

$$\int F(u)G(u)d\mu_0^{m,\varepsilon}(u)\to\int F(u)G(u)d\mu_0^{m}(u)\text{ as }\varepsilon\to 0^+.$$

证明完毕。 □

命题 *6.11*的证明。 **近似正则测度的不变性**。 我们首先证明 $\mu^{m,\varepsilon}$ 在（1.1）的流作用下是不变的。事实上，我们可以将 $\mu^{m,\varepsilon}$ 改写为

$$d\mu^{m,\varepsilon}(u)=\frac{1}{Z^{m,\varepsilon}}\mathbb{1}_{\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}}d\mu(u).$$

这里 μ 是标准 Gibbs 测度，它在（1.1）的流作用下保持不变。现在设A 是 $\mathcal{H}^\theta$ 中的一个可测集，且 $\theta<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$ 如定理 2.3所述。我们有

$$\begin{aligned}
\mu^{m,\varepsilon}(A)&=\frac{1}{Z^{m,\varepsilon}}\int_A\mathbb{1}_{\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}}d\mu(u)\\
&=\frac{1}{Z^{m,\varepsilon}}\int\mathbb{1}_{\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}\cap A}d\mu(u)\\
&=\frac{1}{Z^{m,\varepsilon}}\mu\left(\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}\cap A\right)\\
&=\frac{1}{Z^{m,\varepsilon}}\mu\left(\Phi(t)\left(\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}\cap A\right)\right)\qquad\text{(invariance of }\mu\text{)}\\
&=\frac{1}{Z^{m,\varepsilon}}\mu\left(\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}\cap\Phi(t)(A)\right)\qquad\text{(mass conservation)}\\
&=\frac{1}{Z^{m,\varepsilon}}\int_{\Phi(t)(A)}\mathbb{1}_{\{m-\varepsilon<\mathcal{M}(u)<m+\varepsilon\}}d\mu(u)\\
&=\mu^{m,\varepsilon}(\Phi(t)(A)),
\end{aligned}$$

其中 $\Phi(t)$ 是（1.1）的解映射。这表明 $\mu^{m,\varepsilon}$ 在（1.1）的流下不变。

正则吉布斯测度的不变性。 现在我们证明 μ^m在（1.1）的流下的不变性。按照定理 4.2 的证明中相同的推理，利用（6.17），只需证明

$$\mu^m(U)\le\mu^m(\Phi(t)(U))$$

对于任意闭集 U，该集合在 H^θ 中有界，且在 H^{θ_1} 中满足 $\theta<\theta_1<\frac{1}{2}-\frac{1}{s}$，并且对所有 $t\in\mathbb{R}$ 均成立。问题可进一步归结为证明

$$\mu^m(U)\le\mu^m(\Phi(t)(U)),\quad\forall t\in[0,\delta]\tag{6.19}$$

其中 $\delta>0$ 充分小。根据局部理论，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $0<c\ll 1$ 使得

$$\Phi(t)(U+B_{\gamma,c\varepsilon})\subset\Phi(t)(U)+B_{\theta,\varepsilon},\tag{6.20}$$

其中 $B_{\theta,\varepsilon}$ 是 $\mathcal{H}^\theta$ 中以零为中心、半径为 ε的球。这里 $\gamma=\theta$ 对于 $s>2$ （见（4.4））以及 $\gamma=\beta$ 对于 $1<s\leq 2$ （见（5.6））。由于 $\mu^{m,\varepsilon}\rightharpoonup\mu^m$ 当 $\varepsilon\to 0^+$ 时弱收敛，我们有

$$\begin{aligned}
\mu^m(U) &\leq \mu^m(U+B_{\gamma,c\varepsilon}) \\
&\leq \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\mu^{m,\varepsilon}(U+B_{\gamma,c\varepsilon}) && (\mu^{m,\varepsilon}\rightharpoonup\mu^m \text{ weakly}) \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\mu^{m,\varepsilon}\left(\Phi(t)(U+B_{\gamma,c\varepsilon})\right) && (\text{invariance of } \mu^{m,\varepsilon}) \\
&\leq \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\mu^{m,\varepsilon}\left(\Phi(t)(U)+B_{\theta,\varepsilon}\right) && (\text{due to (6.20)}) \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\mu^{m,\varepsilon}\left(\Phi(t)(U)+B_{\theta,\varepsilon}\right) \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\mu^{m,\varepsilon}\left(\left(\Phi(t)(U)+\overline{B}_{\theta,\varepsilon}\right)\right) \\
&\leq \mu^m(\Phi(t)(U)+\overline{B}_{\theta,\varepsilon}). && (\mu^{m,\varepsilon}\rightharpoonup\mu^m \text{ weakly})
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，得到（6.19）。这证明了 μ^m 在（1.1）的流下的不变性。 □

定理 *2.4* 的证明。结合命题 6.7 和 6.11 即可得出。 □

注 6.2（高阶非线性）。得益于本节中的论证以及注3.1，我们可以为具有更一般非线性的非线性薛定谔方程构造重整化质量固定的吉布斯测度（2.16）。此外，根据注4.1 和 5.1中提到的巨正则测度的不变性，这些重整化质量固定的吉布斯测度在（2.16）的流下确实是不变的。◇

附录 A. 协方差算子的界

引理 A.1（格林函数的 Schatten 范数）。
设 $s>0$ 和 $p>\frac{1}{2}+\frac{1}{s}$。则有

$$\mathrm{Tr}[h^{-p}]=\sum_{j\geq 1}\lambda_j^{-p}<\infty. \tag{A.1}$$

证明。 我们采用 [33, 例 3。2]。设 $\lambda_1>0$ 为h的第一特征值。我们有

$$h+\lambda_1\leq 2h,$$

因此

$$\mathrm{Tr}[h^{-p}]\leq 2^p\mathrm{Tr}[(h+\lambda_1)^{-p}].$$

由 Lieb–Thirring 不等式的一个版本 [22, 定理 1]，，我们有

$$\mathrm{Tr}[(h+\lambda_1)^{-p}]\leq\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\frac{dxd\xi}{(|\xi|^2+V(x)+\lambda_1)^p}.$$

利用假设 1.1 和层蛋糕表示，可得

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\frac{dxd\xi}{(|\xi|^2+V(x)+\lambda_1)^p}=\int_{\mathbb{R}}(V(x)+\lambda_1)^{1/2-p}\,dx<+\infty$$

在我们所陈述的假设下成立。下面给出另一种简短的证明。我们有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\frac{dxd\xi}{(|\xi|^2+V(x)+\lambda_1)^p}&=\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|\leq 1}\frac{dxd\xi}{(|\xi|^2+V(x)+\lambda_1)^p}+\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|\geq 1}\frac{dxd\xi}{(|\xi|^2+V(x)+\lambda_1)^p}\\&\leq\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|\leq 1}\frac{dxd\xi}{(|\xi|^2+\lambda_1)^p}+C\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|\geq 1}\frac{dxd\xi}{(|\xi|^2+|x|^s+1)^p}\\&=\text{(I)}+\text{(II)},\end{aligned}$$

其中 $V(x)\geq 0$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 都成立，并且 $V(x)\geq C|x|^s$ 对 $|x|\geq 1$成立。由于 $p>\frac{1}{2}+\frac{1}{s}$，显然 (I) $<\infty$。为证明 (II) $<\infty$，我们取

$$\theta=\frac{4}{2+s}$$

从而

$$\frac{1}{2-\theta}=\frac{2}{\theta s}=\frac{1}{2}+\frac{1}{s}.$$

根据杨氏不等式，我们有

$$\begin{aligned}|\xi|^2+|x|^s+1&\gtrsim(1+|\xi|^2)+(1+|x|^s)\\&\gtrsim(1+|\xi|)^2+(1+|x|)^s\\&\gtrsim(1+|\xi|)^{2-\theta}(1+|x|)^{\frac{\theta s}{2}}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|\geq 1}\frac{dxd\xi}{(|\xi|^2+|x|^s+1)^p}\lesssim\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{(2-\theta)p}}\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{(1+|x|)^{\frac{\theta sp}{2}}}\Big)<\infty.$$

注意 $(2-\theta)\,p=\frac{\theta sp}{2}=\frac{p}{\frac{1}{2}+\frac{1}{s}}>1$。 □

附录B. 基本泛函分析估计

我们在此汇总本文中反复使用的已知泛函不等式。首先介绍以下由 [63]证明的范数等价。

引理 B.1 (**范数等价**).
设 $s>1$, V满足假设 *1.1*, $\beta>0$，且 $1<p<\infty$。则有

$$\|h^{\beta/2}u\|_{L^p}\sim\|\langle D\rangle^{\beta}u\|_{L^p}+\|\langle x\rangle^{\beta s/2}u\|_{L^p}, \tag{B.1}$$

其中 $\langle D\rangle:=\sqrt{1-\partial_x^2}$.

证明。 在[63, 引理 2.4], 中，利用伪微分演算证明了上述范数等价适用于 $s>2$。不过，同样的证明也适用于 $1<s\leq 2$。□

引理 B.2(**索伯列夫嵌入**)。
设 $s>1$ 和 V满足假设 *1.1*。
(i) 若 $1<r<\overline{r}<\infty$ 和 $\beta>0$ 满足 $\frac{1}{\overline{r}}\geq\frac{1}{r}-\beta$，则 $\mathcal{W}^{\beta,\,r}\subset L^{\overline{r}}(\mathbb{R})$。
(ii) 若 $\beta>\frac{1}{r}$，则 $\mathcal{W}^{\beta,\,r}\subset L^{\infty}(\mathbb{R})$。

证明。 这是由 $\mathbb{R}$ 上标准索伯列夫空间的嵌入以及范数等价（B.1）直接得到的。□

引理 B.3 (**分数阶乘积法则**)。
设 $s>1$, V满足 fy A假设 *1.1*, $\beta>0$，以及 $1<p<\infty$。那么

$$\|h^{\beta/2}(fg)\|_{L^2}\leq C\|f\|_{L^{q_1}}\|h^{\beta/2}g\|_{L^{q_2}}+C\|g\|_{L^{r_1}}\|h^{\beta/2}f\|_{L^{r_2}} \tag{B.2}$$

假设

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2},\quad q_2,r_2\in(1,\infty),\quad q_1,r_1\in(1,\infty].$$

证明。 由（B.1）和以下乘积法则直接推出（例如参见 [56, 第 2]章命题 1.1）：

$$\|\langle D\rangle^{\beta}(fg)\|_{L^2}\leq C\|f\|_{L^{q_1}}\|\langle D\rangle^{\beta}g\|_{L^{q_2}}+C\|g\|_{L^{r_1}}\|\langle D\rangle^{\beta}f\|_{L^{r_2}}.$$

□

接下来回顾一些斯特里卡茨估计，其证明在[28, 15] 中可见（情形 $s\leq 2$），而在 [64] 中可见（情形 $s>2$）。

定义 B.4 （**斯特里卡兹容许对**）。
如果(p,q) 满足以下条件，则称其为斯特里卡兹容许对:

$$\frac{2}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2},\quad q\in[2,\infty].$$

命题 B.5 (**Strichartz 估计**)。
(i) [28, 15] 令 $1<s\leq 2$ 且(p,q) 为一个斯特里卡兹容许对。则存在$C>0$ 使得

$$\|e^{-ith}f\|_{L^p((-1,1),L^q(\mathbb{R}))}\leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{B.3}$$

*Mor*此外，对于任意两个斯特里卡茨可容许对(p,q)和(a,b)，存在 $C>0$使得 *at*

$$\Big\|\int_0^t e^{-i(t-\tau)h}F(\tau)d\tau\Big\|_{L^p((-1,1),L^q(\mathbb{R}))}\leq C\|F\|_{L^{a'}((-1,1),L^{b'}(\mathbb{R}))}. \tag{B.4}$$

(ii) 设 $s>2$、(p,q) 为 *Strichartz* 可容许对，且 $\sigma>\frac{2}{p}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)$。那么存在 $C>0$，使得

$$\|e^{-ith}f\|_{L^p((-1,1),L^q(\mathbb{R}))}\leq C\|f\|_{\mathcal{H}^{\sigma}}. \tag{B.5}$$

特别地，我们有

$$\Big\| \int_0^t e^{-i(t-\tau)h} F(\tau) d\tau \Big\|_{L^p((-1,1),L^q(\mathbb{R}))} \leq C \|F\|_{L^1((-1,1),\mathcal{H}^\sigma)}. \tag{B.6}$$

对于在无穷远处至多按二次增长的势，即 $|\partial^\alpha V(x)| \leq C_\alpha$ 当 $|\alpha| \geq 2$时，已知（参见 [28]）以下色散估计成立

$$\|e^{-ith} f\|_{L^\infty} \leq C|t|^{-1/2} \|f\|_{L^1}, \quad \forall |t| \leq \delta \tag{B.7}$$

其中常数 $\delta > 0$ 足够小。利用这一点和酉性质，我们可在时间区间 [30] 上得到 Strichartz 估计（例如参见 $[-\delta, \delta]$）。将（-1，1）划分为长度为 2δ 的区间，并对这些区间应用 Strichartz 估计，再对所有子区间求和，即可得到（B.3）和（B.4）。

对于超二次势函数，（B.5）中存在导数损失。此外，由于 e^{-ith} 的核无界且不够光滑，类似于（ [62]）的色散估计不再成立。因此，对于（B.6），上述非齐次 Strichartz 估计可能不适用于（a，b）$\neq (\infty, 2)$。

附录 C. 平滑化谱投影算子的 L^p-有界性

这里我们讨论平滑化谱投影算子 Q_Λ (定义见 (3.31)) 作为作用于 $L^p(\mathbb{R})$ 上的算子的有界性。这一结果源于一些已知事实，我们将在下面的引理中汇总。

引理 C.1(L^p**-有界的平滑谱投影**)。
设 $1 < p < \infty$。那么存在 $C > 0$，使得对所有 $\Lambda \geq \lambda_1$，

$$\|Q_\Lambda\|_{L^p \to L^p} \leq C.$$

证明。证明由具有 L^p-有界性的伪微分算子得出，其符号属于 $S(1, g)$（例如参见 [61, 定理 22。3]）。这里

$$g = \frac{dx^2}{\langle x \rangle^2} + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2}$$

是一个度量，且 $S(1, g)$ 是 Hörmander符号类，由满足以下条件的函数 $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 构成：

$$|\partial_x^j \partial_\xi^k a(x, \xi)| \leq C_{jk} \langle x \rangle^{-j} \langle \xi \rangle^{-k}, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2.$$

我们将 Q_Λ 的符号写作

$$p_\Lambda(x, \xi) = \chi(q_\Lambda(x, \xi))$$

with

$$q_\Lambda(x, \xi) = \Lambda^{-1}(\xi^2 + V(x)),$$

并且我们将证明，$p_\Lambda \in S(1, g)$ 关于 $\Lambda \geq \lambda_1$ 一致。为此，我们注意到，对于j，$k \geq 0$，存在与 Λ 无关的 C_j，$C_k > 0$，使得

$$|\partial_x^j q_\Lambda(x, \xi)| \leq C_j \langle x \rangle^{-j}, \quad |\partial_\xi^k q_\Lambda(x, \xi)| \leq C_k \langle \xi \rangle^{-k} \tag{C.1}$$

对于 p_Λ 的支撑集中的所有 (x, ξ)。注意，混合导数

$$\partial_x^j \partial_\xi^k q_\Lambda(x, \xi) = 0$$

对于 j，$k \neq 0$。事实上，对于 x 阶导数，当 $j = 0$ 时显然成立。对于 $j \geq 1$，我们有 $\partial_x^j q_\Lambda(x, \xi) = \Lambda^{-1} \partial_x^j V(x)$。根据假设 1.1，我们有

$$|\partial_x^j q_\Lambda(x, \xi)| \leq C_j \Lambda^{-1} \langle x \rangle^{s-j} \leq C_j \langle x \rangle^{-j}.$$

实际上，对于 $|x| \leq 1$，我们有 $\mathbf{h}x\mathbf{i}^s \leq 2^{s/2}$ 和 $\Lambda^{-1} \leq \lambda_1^{-1}$，因此 $\Lambda^{-1}\mathbf{h}x\mathbf{i}^s \leq C$。另一方面，对于 $|x| \geq 1$，由于 $V(x) \leq \Lambda$ 在 p_Λ 的支撑集上，关于 V 的假设给出$\frac{1}{C}\mathbf{h}x\mathbf{i}^s \leq V(x) \leq \Lambda$，因此 $\Lambda^{-1}\mathbf{h}x\mathbf{i}^s \leq C$。对于 ξ-导数，当 $k = 0$ 时显然

并且 $k \geq 3$ 由于 $\partial_\xi^k q_\Lambda(x,\xi) = 0$ 对于 $k \geq 3$ 成立。对于 $k = 1,2$，我们有 $\partial_\xi^k q_\Lambda(x,\xi) = 2\Lambda^{-1}\xi^{2-k}$。在 p_Λ 的支撑集上，我们有 $|\xi| \leq \Lambda^{\frac{1}{2}}$，因此

$$|\partial_\xi^k q_\Lambda(x,\xi)| \leq C\Lambda^{-\frac{k}{2}} \leq C\langle\xi\rangle^{-k}.$$

这里，为了得到第二个估计，我们用到了以下事实：

$$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\Lambda^{-1} \leq (1+\Lambda)^{-1} \leq \langle\xi\rangle^{-2}$$

如 $\Lambda \geq \lambda_1$ 和 $|\xi|^2 \leq \Lambda$。

结论现在由（C.1）以及法阿·迪·布鲁诺公式得出，该公式指出 $\partial_x^j g(f(x))$ 是以下各项的线性组合：

$$g^{(n)}(f(x))\left(f'(x)\right)^{n_1}\left(f''(x)\right)^{n_2}\cdots\left(f^{(n)}(x)\right)^{n_j},$$

其中 $n = n_1 + \cdots + n_j$，求和遍历 j 的所有划分，即满足 $n_1 + 2n_2 + \cdots + jn_j = j$ 的所有 j 元组 $(n_1, \cdots n_j)$。□

附录D. 特征值数量的估计

我们关注薛定谔算子的特征值个数 $h = -\partial_x^2 + V(x)$，这些特征值低于某个能量阈值；该阈值在构造以质量为条件的高斯测度时需要用到（参见引理 6.3）。

引理 D.1 (**Cwikel-Lieb-Rozenbljum 定律**)。
设 $s > 1$ 和 V 满足假设 *1.1*。那么，当 $\Lambda > 0$ 充分大时，有

$$c\Lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{s}} \leq \#\{\lambda_j : \lambda_j \leq \Lambda\} \leq C\Lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{s}}$$

对于固定常数 $c, C > 0$.

证明。为说明这一点，我们回顾 Rozenbljum [49]给出的以下结果。设 $V(x) \geq 1$和 $V(x) \to +\infty$ 如 $|x| \to \infty$。假设以下条件成立：

(V1) $\sigma(2\Lambda) \leq C\sigma(\Lambda)$, where $\sigma(\Lambda) := |\{x \in \mathbb{R} : V(x) < \Lambda\}|$.

(V2) 当 $|x-y| < 1$ 时，几乎处处有 $V(x) \leq CV(y)$。

(V3) 存在一个连续函数 $\eta(t) \geq 0$、$0 \leq t < 1$、$\eta(0) = 0$，以及一个指标$\beta \in [0, 1/2)$，使得

$$\int_{\substack{|x-y|\leq 1\\ |x+z-y|\leq 1}} |V(x+z) - V(x)|dx < \eta(|z|)|z|^{2\beta}(V(y))^{1+\beta}$$

对于任意 y、$z \in \mathbb{R}$ 和 $|z| < 1$。那么，当 Λ 充分大时，我们有

$$\#\{\lambda_j : \lambda_j \leq \Lambda\} \propto \int_{\mathbb{R}} (\Lambda - V(x))_+^{1/2} dx, \tag{D.1}$$

其中 $(f(x))_+ := \max\{f(x), 0\}$。

我们将验证上述条件对于 V（如假设1.1中所述）成立。首先，我们注意到，通过进行变量替换 $u(t, x) \mapsto e^{-iat}u(t, x)$ 对于（1.1），取某个常数 $a > 0$，我们可以假设（除假设1.1之外）$V(x) \geq 1$ 对所有$x \in \mathbb{R}$均成立。由此，我们推断存在 $C \geq 1$ 使得

$$\frac{1}{C}\langle x\rangle^s \leq V(x) \leq C\langle x\rangle^s, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{D.2}$$

现在我们来验证条件（V1）-（V3）。

- 检查（V1）：由（D.2），$V(x) < \Lambda$ 可推出 $|x| < \langle x\rangle < (C\Lambda)^{1/s}$，因此

$$\sigma(\Lambda) \leq |\{x \in \mathbb{R} : |x| < (C\Lambda)^{1/s}\}|. \tag{D.3}$$

另一方面，对于 $|x| < \left(\frac{1}{C2^{s/2}}\Lambda\right)^{1/s}$，当 Λ 足够大时，我们有，

$$\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2} < \sqrt{1+\left(\frac{1}{C2^{s/2}}\Lambda\right)^{2/s}} \le \left(\frac{1}{C2^{s/2}}\Lambda\right)^{1/s} 2^{1/2}$$

因此，由（D.2），

$$V(x) \le C\langle x\rangle^s < C\left(\frac{1}{C}\Lambda\right) = \Lambda.$$

这表明

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R} : |x| < \left(\frac{1}{C2^{s/2}}\Lambda\right)^{1/s}\right\}\right| \le \sigma(\Lambda). \tag{D.4}$$

由（D.3）和（D.4），可得（V1）。

•验证（V2）：我们有

$$V(x) \sim \langle x\rangle^s \le \langle y\rangle^s\langle x-y\rangle^s \le C\langle y\rangle^s \sim CV(y)$$

对所有 $|x-y|\le 1$,

•验证 (V3)：根据泰勒公式，我们有

$$|V(x+z)-V(x)| \le |z|\int_0^1 |V'(x+tz)|dt,$$

由假设 1.1，可得

$$|V(x+z)-V(x)| \le C|z|\int_0^1 \langle x+tz\rangle^{s-1}dt.$$

由于 $s>1$，我们推知

$$|V(x+z)-V(x)| \le C|z|\langle x\rangle^{s-1}\langle z\rangle^{s-1}.$$

现在记

$$\Omega := \{x\in\mathbb{R} : |x-y|\le 1, |x+z-y|\le 1\}.$$

对于 $x\in\Omega$，我们有 $|x| \le 1+|y| < 2\langle y\rangle$。特别地，

$$|V(x+z)-V(x)| \le C|z|\langle y\rangle^{s-1}\langle z\rangle^{s-1}, \quad \forall x\in\Omega$$

and

$$|\Omega| \le |\{x\in\mathbb{R} : |x| < 2\langle y\rangle\}| \sim \langle y\rangle.$$

因此，我们得到

$$\int_{\substack{|x-y|\le 1\\ |x+z-y|\le 1}} |V(x+z)-V(x)|dx < C|z|\langle y\rangle^s\langle z\rangle^{s-1} \le C|z|V(y)$$

对所有 $y,z\in\mathbb{R}^d$，其中 $|z|<1$。这就是 (V3)，其中 $\eta(t) = t$ 且 $\beta = 0$。

到目前为止，我们已经证明，对于D.1，当 V 满足假设1.1时成立。引理的结论由此得出，下面说明原因。为了得到上界，我们利用 (D.3) 得到

$$\int_{\mathbb{R}} (\Lambda - V(x))_+^{1/2}dx = \int_{V(x)\le\Lambda} (\Lambda - V(x))^{1/2}dx \le (2\Lambda)^{1/2}\sigma(\Lambda) \le C\Lambda^{1/2+1/s}.$$

对于下界，我们估计一个待后续选取的小常数 $\nu>0$，

$$\int_{\mathbb{R}} (\Lambda - V(x))_+^{1/2}dx \ge \int_{\nu\Lambda<V(x)\le\Lambda/2} (\Lambda - V(x))^{1/2}dx \ge \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^{1/2}(\sigma(\Lambda/2)-\sigma(\nu\Lambda)).$$

由（D.3）和（D.4），我们推得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}(\Lambda - V(x))_+^{1/2}dx &\geq \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^{1/2}(\sigma(\Lambda/2) - \sigma(\nu\Lambda)) \\ &\geq \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^{1/2}\left(\left|B\left(0, \left(\frac{1}{C2^{s/2}\frac{\Lambda}{2}}\right)^{1/s}\right)\right| - |B(0, C\nu\Lambda)^{1/s}|\right) \\ &\geq C\Lambda^{1/2+1/s}\end{aligned}$$

前提是 $\nu > 0$ 取值足够小，其中 $B(0,\ R)$ 是线段 $[-R, R]$。 □

参考文献

[1] Bourgain, J. 周期非线性薛定谔方程与不变测度。《数学物理通讯》 *166*, 1 1994 1 26 3, 4 ( ), –。Bourgain, J. 二维散焦非线性薛定谔方程的不变测度。《数学物理通讯》 *176* 1996 421 445 3, 5, 24 ( ), –。Bourgain, J. Gross-Pitaevskii 方程的不变测度。《纯粹与应用数学杂志》76, 8 (1997), 649 702 3, 24 –。Bourgain, J. 和 Bulut, A. 单位球上径向非线性薛定谔方程几乎必然整体适定性 I: 2 *31*, 6 2014 1267 1288 3, 5 维情形。《庞加莱研究所年刊》（C）( ), –。Bourgain, J. 和 Bulut, A. 单位球上径向非线性薛定谔方程几乎必然整体适定性 II: 3 *16* 2014 1289 1325 3 维情形。《欧洲数学会杂志》( ), –。Brereton, J. T. 固定质量下的不变测度构造。《非线性》(2019), 496–558。[7] Brézis, H. 和 Mironescu, P. Sobolev 理论与 Gagliardo-Nirenberg 理论的交汇。《泛函分析杂志》 *277* 2019 2839 2864 7, 18 ( ), –。Burq, N.、Thomann, L. 和 Tzvetkov, N. 一维非线性薛定谔方程的长时间动力学。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊 *63*, 6 2013 2137 2198 3, 5, 6, 7, 9, 22, 24, 36 ( ), –。Burq, N. 和 Tzvetkov, N. 三维非线性波动方程的不变测度。《国际数学研究通知》 *2007* 2007 108 5 ( ), 文章编号 rnm 。Burq, N. 和 Tzvetkov, N. 超临界波动方程的随机初值柯西理论 II：整体存在性结果。《数学发明》 *173*, 3 2008 477 496 5 ( ), –。Cacciafesta, F. 和 de Suzzoni, A.-S. 实数直线上薛定谔方程的不变测度。《泛函分析杂志》 *269*, 1 2015 271 324 5 ( ), –。Carlen, E. 迹不等式与量子熵：入门课程。载于《熵与量子》(2010)，R. Sims 和 D. Ueltschi 编，第 529 卷《当代数学》，美国数学会，第 73–140 页。亚利桑那分析及其应用暑期学校，2009 年 3 月 16–20 日，亚利桑那大学。[13] Carlen, E.、Fröhlich, J. 和 Lebowitz, J. 带噪声的一维聚焦非线性薛定谔方程指数趋于平衡。《数学物理通讯》342, 1 (2016), 303 332 4, 7 –。Carlen, E.、Fröhlich, J.、Lebowitz, J. 和 Wang, W.-M. 若干一维随机非线性薛定谔方程趋近平衡速率的定量界。《非线性》 *32*, 4 2019 1352 1374 7 ( ), –。Carles, R. 带势非线性薛定谔方程的线性效应与非线性效应。《当代数学通讯》 *7* 2005 483 508 64 ( ), –。de Bouard, A.、Debussche, A. 和 Fukuizumi, R. 正温度下 Gross-Pitaevskii 方程的长时间行为。《工业与应用数学学会数学分析杂志》 *50*, 6 2018 3 ( )。de Suzzoni, A.-S. $\mathbb{R}^3$单位球上的三次波动方程的不变测度。《动力系统与偏微分方程》 *8*, 2 2011 127 147 5 ( ), –。Deng, Y. 带随机径向初值的二维非线性薛定谔方程。《偏微分方程分析》5, 5 2012 913 960 ( ), –。[19] Deng, Y.、Nahmod, A. R. 和 Yue, H. 二维非线性薛定谔方程的不变吉布斯测度与整体强解。arXiv: 1910 08492, 2019 3 。Deng, Y.、Nahmod, A. R. 和 Yue, H. 三维 Hartree 非线性薛定谔方程的不变吉布斯测度与整体强解。《数学物理杂志》 *62* 2021 031514 3 ( )。Deng, Y.、Nahmod, A. R. 和 Yue, H. 随机张量、随机性的传播与非线性色散方程。《数学发明》 *228*, 2 2022 539 686 3 ( ), –。Dolbeault, J.、Felmer, P.、Loss, M. 和 Paturel, E. 系统的 Lieb-Thirring 型不等式与 Gagliardo-Nirenberg 不等式。《泛函分析杂志》 *238*, 1 2006 193 220 7, 63 ( ), –。Friedlander, L. 方程 $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$ 的不变测度。《数学物理通讯》98, (1985 1 16 5), –。Fröhlich, J.、Knowles, A.、Schlein, B. 和 Sohinger, V. 非线性薛定谔方程的吉布斯测度作为量子多体态的极限：维数为 $d \leq 3$。《数学物理通讯》 *356* 2017 883 980 2, 3, 9 ( ), –。Fröhlich, J.、Knowles, A.、Schlein, B. 和 Sohinger, V. 一维三次非线性薛定谔方程的时间依赖关联函数的微观推导。《数学进展》353 (2019 67 115 2, 3, 9), –。Fröhlich, J.、Knowles, A.、Schlein, B. 和 Sohinger, V. 欧几里得 φ_2^4 理论作为相互作用玻色气体的极限。arXiv:2201.07632, 2022. 3

[27] Fröhlich, J., Knowles, A., Schlein, B. 和 Sohinger, V. 正温度下量子玻色气体的平均场极限。《美国数学会杂志》 *35* 2022 995 1030 3 ( ), –。Fujiwara, D. 薛定谔方程基本解的构造。《数学分析杂志》 *35* 1979 41 96 64, 65 ( ), –。Glimm, J. 和 Jaffe, A.《量子物理：泛函积分的观点》。施普林格出版社，1987。4[28][29]

[30] *120*, 5 1998 955 980 65 Keel, M. 和 Tao, T.

[31] 端点 Strichartz 估计。《美国数学杂志》( ), –。7Koch, H. 和 Tataru, D. Hermite 算子的特征函数界。《杜克数学杂志》128, 2 2005 369 392 ( ), –。[32] Lebowitz, J. L., Rose, H. A. 和 Speer, E. R. 非线性薛定谔方程的统计力学。《统计物理学杂志》 *50*, 3 4 1988 657 687 4 - ( ), –。Lewin, M., Nam, P. 和 Rougerie, N. 从多体量子力学推导非线性吉布斯测度。《综合理工学院数学杂志》 *2*, 1 2016 553 606 2, 3, 5, 6, 9, 11, 63 ( ), –。[33][34] Lewin, M., Nam, P. 和 Rougerie, N. 基于 D（非）谐振子的吉布斯测度作为平均场极限。《数学物理杂志》 *59*, 4 2018 2, 3, 6, 11 ( )。Lewin, M., Nam, P. 和 Rougerie, N.

[35] 2 3 *224* 2021 315 444 3, 6, 16 D 和 D 中多体量子吉布斯态的经典场论极限。《数学发明》( ), –。Lieb, E. H. 和 Loss, M.《分析学》，第 nd 版，第 卷，数学研究生教程。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001 49 。Lieb, E. H., Seiringer, R., Solovej, J. P. 和 Yngvason, J.《玻色气体的数学及其凝聚》。奥伯沃尔法赫研讨会。Birkhäuser, 2005 2 。[36][37]

Nahmod, A. R., Oh, T., Rey-Bellet, L. 和 Staffilani, G. 周期导数非线性薛定谔方程的不变加权维纳测度与几乎必然整体适定性。《欧洲数学会杂志》14 (2011), 1275 1330 5, 44 –。Nirenberg, L. 关于椭圆型偏微分方程。《比萨高等师范学院年刊》13，2 (1959)，115–162。18[38][39][40] Nirenberg, L. 一个扩展的插值不等式。《比萨高等师范学院年刊》20，4 (1966)，733–737。18[41] Oh, T. 薛定谔–Benjamin–Ono 系统的吉布斯测度不变性。《工业与应用数学学会数学分析杂志》 *41* 2009 2207 2225 5 ( ), –。Oh, T. 耦合 KdV 系统的不变吉布斯测度与几乎必然整体适定性。《微分与积分方程》 *22* 2009 637 668 5 ( ), –。[42][43] Oh, T., Sosoe, P. 和 Tolomeo, L. 环面上与聚焦型非线性薛定谔方程相关的吉布斯测度的最优可积性阈值。《数学发明》 *227*, 2022 3, 1323 1429 4 ( ), 第 – 期。Oh, T. 和 Quastel, J. 关于受质量和动量约束的不变吉布斯测度。《日本数学会杂志》 *65*, 1 2013 13 35 3, 7, 8, 46 ( ), –。[44][45] Poiret, A., Robert, D. 和 Thomann, L. 超临界非线性谐振子的概率整体适定性。《偏微分方程分析》 *7*, 4 2014 997 1026 5 ( ), –。Robert, T., Seong, K., Tolomeo, L. 和 Wang, Y. 带调和势的聚焦型吉布斯测度。arXiv: 2212 11386, 2022 3, 5, 9 。[46][47] Rougerie, N. 玻色基态的尺度极限：从多体到非线性薛定谔方程。《欧洲数学会数学科学综述》 *7*, 2 2020 253 408 2 ( ), –。Rout, A. 和 Sohinger, V. 一维聚焦型立方非线性薛定谔方程吉布斯测度的微观推导。arXiv: 2206 03392, 2022 2, 3 。[48][49] Rozenbljum, G. V. 薛定谔算子特征值的渐近行为。《苏联数学文集》 *22* 1974 349 371 66 ( ), –。Schatten, R.《完全连续算子的范数理想》，《数学及其边界领域成果》第 2 卷。第 Folge, 1960 11 。Schlein, B. 从微观量子动力学推导有效演化方程。arXiv 电子预印本（ 2008 2 ）。苏黎世联邦理工学院课程讲义。Simon, B.（）欧几里得（量子）场论。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州， 1974 4 。[50][51][52] 普林斯顿物理学丛书。Simon, B.《迹理想及其应用》，伦敦数学会讲义系列第 35 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1979 7, 11, 12 。Skorokhod, A. 希尔伯特空间中的积分。《数学及其边界领域成果》。施普林格出版社， 1974 5, 52 。[53][54] Sohinger, V. 具有无界相互作用势的非线性薛定谔方程吉布斯测度的微观推导。《国际数学研究论文集》 *180* 2022 14964 15063 3 ( ), –。Taylor, M. E.《偏微分方程工具：伪微分算子、拟微分算子与层势》，数学调查与专著第 80 卷。AMS，2000。64[55][56]

[57] Thomann, L. 超临界薛定谔方程的随机数据柯西问题。庞加莱分析与非线性研究所年刊 *26*, 6 2009 2385 2402 5 ( ), –。Thomann, L. 和 Tzvetkov, N. 周期导数非线性薛[58]定谔方程的吉布斯测度。《非线性》 *23*, 11 2010 2771 5 ( ), 。Tzvetkov, N. 圆盘上非线性薛定谔方程的不变测度。《动力系统与偏微分方程》[59] *3*, 2 2006 111 160 3, 5 ( ), –。Tzvetkov, N. 散焦非线性薛定谔方程的不变测度。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊[60] *58*, 7 2008 2543 2604 3, 5 ( ), –。Wong, M. W.《伪微分算子导论》，第 3 版，分析、应用[61]与计算丛书第 6 卷。世界科技出版公司，约克大学，加拿大， 2014 65 。Yajima, K. 含时[62]薛定谔方程基本解的光滑性与非光滑性。《数学物理通讯》 *181* 1996 605 629 65 ( ), –。Yajima, K. 和 Zhang, G. 无穷远处超[63]二次势下薛定谔方程的平滑性质。《数学物理通讯》 *221*, 3 2001 537 590 2, 26, 64 ( ), –。Yajima, K. 和 Zhang, G. 无[64]穷远处超二次势下薛定谔方程的局部平滑性质与斯特里哈茨不等式。《微分方程杂志》202 (2004)，81–110。2, 7, 26, 27, 64
[65] Zhang, G., Yajima, K. 和 Liu, F. H^s 无穷远处具有超二次势的非线性薛定谔方程解。《物理快报 A》 *356*, 2 2006 95 98 2, 26 ( ), –。Zhidkov, P. 非线性薛定谔方程的一个[66]不变测度。（俄语）《苏联科学院通报》317，(1991)，第 3 期，543–546；译文见《苏联数学通报》43，(1991)，第 2 期，431–434。5[67] Zhidkov, P. 非线性波动方程的一个不变测度。《非线性分析》22 3，319 1994 325 5 ( )，第 – 期。

(V. D. Dinh) 里昂高等师范学院 & 法国国家科学研究中心，UMPA (UMR 5669)，里昂，法国
电子邮箱： contact@duongdinh.com

(N. Rougerie) 里昂高等师范学院 & 法国国家科学研究中心，UMPA (UMR 5669)，里昂，法国电子邮箱：
nicolas.rougerie@ens-lyon.fr