arXiv:2301.02545v1 [math.AG] 6 Jan 2023

A S射影簇的环面退化综述 S

Lara Bossinger

摘要。本文综述总结了由赋值和格罗布纳理论得到的环面退化的构造，并说明它们在哪种意义下等价。我们展示了如何利用适配基，将经典牛顿多胞体推广为我们所称的 $\mathbb{B}$-牛顿多胞体。 $\mathbb{B}$-牛顿多胞体决定了所有共享适配标准单项式基 $\mathbb{B}$ 的 Khovanskii 有限赋值所对应的 Newton–Okounkov 多面体。

1. 引言

环面簇是代数几何中的重要研究对象，因为它们的几何性质（如维数、次数）与相关组合对象（如扇、多胞体）的性质之间存在对应关系。这种对应关系可以从环面簇推广到具有环面退化的簇。环面退化是一个（平坦的）簇族，其中的簇共享许多性质（如维数、次数、希尔伯特多项式）。该簇族包含我们关注的簇以及一个环面簇，因此可以从环面簇的组合结构中读出我们所关注簇的性质。

环面退化的研究在纯数学和应用数学中有着各种应用，例如概率论、统计学和数学生物学。针对所关注的簇，确定哪种环面退化具有所需性质是一项极具挑战性的任务。因此，需要研究并比较各种可能的构造。

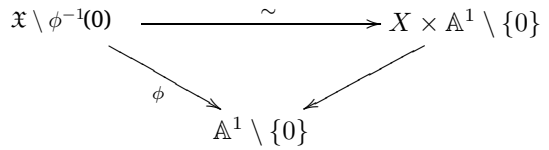
除了其 在经典代数几何中的应用之外，环面退化也已被证明在若干其他领域中很有用，例如

- 辛几何 [NNU12, HK14, FLP18, HP18, HK15, Kav19],
- 牛顿–奥昆科夫体 [LM09, KK12, KL17],
- 表示论 [GL96, Cal02, AB05, KM05, HJL+09, FFL11, Kav15, FFL17],
- 镜像对称 [Giv97, BCFKvS00, Bat04, GS11, FOOO11, ACGK12, Nis15],
- 簇代数 [GHKK18, BFF+18, RW19, BFMN20],
- 数值与计算代数几何 [CM97, BLMM17, BSW20]
- 代数统计学 [KMS15, Ber17]

上述列表和其中所引文献并不完整，因为这一领域范围广泛，而且新的应用不断涌现。如果我遗漏了你最喜欢的关于环面退化应用的论文，谨此致歉；也欢迎你发邮件告诉我更多精彩应用的线索。

本综述旨在介绍环面退化的两种主要构造及其相互关系。具体而言，我们重点讨论源自赋值的构造（可追溯至 Anderson[And13] ），以及源自格罗布纳理论或理想的热带化的构造。实际上，连接这两种构造的桥梁尤为实用，因为每种方法都有各自的优点和局限。

更确切地说，考虑一个射影簇 X。 X 的**环面退化**是一个平坦态射ϕ: $\mathfrak{X} \to \mathbb{A}^1$ ，它在 $0 \in \mathbb{A}^1$上的纤维之外是平凡的



我们将研究 T-等变环面退化，也就是说，我们假设中心纤维上的作用是 X 上环面作用的扩张。

概要： 我们在 §2.1 概述赋值的背景知识，并在 §2.2 概述格罗布纳理论以及理想的热带化。在 §3 中，我们解释由赋值构造环面退化与由理想的热带化构造环面退化之间的等价性 [KM19, Bos21b]。在 §3.3 中，我们探讨更一般的代数环面退化，以及在何种条件下可以将它们作为由赋值构造的环面退化获得 [KMM17]。在 §4 中，我们阐述适配基对于环面退化的重要性。特别地，在 §4.1 中，我们展示适配基如何导出 $\mathbb{B}$-牛顿多面体，并且这些多面体可投影到所有与该适配基对应的赋值的 Newton–Okounkov 多面体。在 §4.2 中，我们回顾 Newton–Okounkov 多面体的墙穿越公式的定义 [EH20]。在 §5, [BMNC21] 中，我们从更几何的角度，在包含多种环面退化的平坦族背景下回顾这一概念。在 §6 中，我们详细讨论格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$ 的例子。

致谢： 感谢会议论文集的编辑们给予我机会，就我最喜爱的主题撰写一篇综述。§4.1 中的想法源于我与 Man-Wai Cheung、Timothy Magee 和 Alfredo Nájera Chávez 合作研究簇簇的牛顿–奥昆科夫体。在合作期间，我们进行了许多富有启发性的讨论，我对此深表感激。

2. 预备知识

本节介绍本文用于构造环面退化的主要工具。具体而言，我们回顾赋值和牛顿–奥昆科夫体的背景知识，以及初始理想、格罗布纳理论和理想的热带化相关背景。全文采用最大值约定，因此与所引原文中的定义相比，可能存在细微差异（主要只是符号不同）。

2.1. 赋值。 设 k 是特征零的代数闭域。全文中，我们将 A 记作一个**正（多重）分次代数和整环**，也就是说 $A=\bigoplus_{w\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}} A_w$。设 Γ 是一个由 $<$ 全序的阿贝尔群。我们称定义在 A 上的一个（**Krull**）**赋值** 为一个映射 $\nu\colon A\setminus\{0\}\to\Gamma$，它对所有 a、$b\in A$ 和 $c\in k$ 均满足

$$\nu(ab)=\nu(a)+\nu(b),\quad \nu(a+b)\leq\max\{\nu(a),\nu(b)\},\quad \nu(ca)=\nu(a).$$

如果 ν 仅满足 $\nu(ab)\leq\nu(a)+\nu(b)$，则称其为**拟赋值**。注意，赋值 ν 的像具有加法半群的结构。因此，它称为 ν 的**值半群**，记作 $S(A,\nu)$。ν 的**秩** 定义为其半群在 Γ中的群完成的秩；若 ν 的秩与 A 的克鲁尔维数相同，则称 ν 具有**满秩**。每个赋值都会在 A 上诱导一个滤过，其中 $\gamma\in\Gamma$ 的滤过部分定义为

$$\mathcal{F}_{\nu,\gamma}:=\{a\in A:\nu(a)\geq\gamma\}\quad(\text{resp. }\mathcal{F}_{\nu,>\gamma}:=\{a\in A:\nu(a)>\gamma\}).$$

伴随分次代数 为 $\mathrm{gr}_\nu(A):=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{F}_{\nu,\gamma}/\mathcal{F}_{\nu,>\gamma}$。存在一个从 A 到 $\mathrm{gr}_\nu(A)$的自然向量空间商映射，它将 $f\in A$ 映为 $\mathcal{F}_{\nu,\nu(f)}/\mathcal{F}_{\nu,>\nu(f)}$；将其像记为 $\hat{f}\in\mathrm{gr}_\nu(A)$。注意，$\nu(fg)=\nu(f)+\nu(g)$ 蕴含 $\widehat{fg}=\hat{f}\hat{g}$。若商空间 $F_{\nu,\gamma}/\mathcal{F}_{\nu,>\gamma}$至多是一维的，则称 ν 具有**一维叶**。这一性质很有用，因为它给出了一个同一

$$\mathrm{gr}_\nu(A)\to k[S(A,\nu)],\quad\text{given by}\quad \hat{f}_\gamma\mapsto\nu(f_\gamma),$$

其中 $f_\gamma\in\mathcal{F}_{\nu,\gamma}/\mathcal{F}_{\nu,>\gamma}$ 是一个生成元，且 $f_\gamma\in A$ 属于 f_γ 在商映射$\hat{}\colon A\to\mathrm{gr}_\nu(A)$ 下的原像。根据 Abhyankar 不等式，满秩赋值具有一维叶。

一个重要的定义是赋值 ν的**Khovanskii 基** 的概念：即 A 的一个子集 B，其在 $\mathrm{gr}_\nu(A)$ 中的像是一个代数生成集。不难看出，若 B 是 ν 的 Khovanskii 基，则集合 $\{\nu(b):b\in B\}$ 生成值半群 [KM19，引理 2.10]。

如果赋值在 A 上尊重分次，更确切地说，若 $f\in A$ 具有齐次表示 $\sum_i f_i$，则 $\nu(f)=\max\{\nu(f_i)\}$，那么该赋值称为**齐次**。如果 $\nu(f)=(\deg(f)\ \nu'(f))$，也就是说 $S(A,\nu)\subset\mathbb{Z}^m_{\geq 0}\times\Gamma'$，则称该赋值**完全齐次**。任何齐次赋值都可以通过与半群同构 [IW20, Remark 2.6] 复合，由某个完全齐次赋值得到。因此，在研究齐次赋值时，不失一般性地假设它们是完全齐次的。

给定一个完全齐次赋值 $\nu\colon A\setminus\{0\}\to\mathbb{Z}^m_{\geq 0}\times\Gamma'$，我们定义它的**牛顿–奥科恩科夫锥**

$$C(A,\nu):=\overline{\operatorname{cone}(S(A,\nu))}=\overline{\operatorname{cone}(\nu(f):f\in A)}, \tag{1}$$

其中，闭包（取于欧几里得拓扑中）是在 $(\mathbb{Z}^m_{\geq 0}\times\Gamma')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 内取的。令 $\Gamma'_{\mathbb{R}}=\Gamma'\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$。于是，$\nu$ 的 **Newton–Okounkov 体**定义为以下交集

$$\Delta(A,\nu):=C(A,\nu)\cap\{(1,\dots,1)\}\times\Gamma'_{\mathbb{R}}, \tag{2}$$

其中，$(1,\dots,1)$ 表示 $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ 中所有分量均为 1 的元素。该定义由 Lazarsfeld–Mustata [LM09] 和 Kaveh–Khovanskii [KK12] 独立提出，他们的工作基于 Okounkov [Oko98] 的一种构造。Newton–Okounkov 体对多项式的牛顿多面体作了广泛推广，并包含关于代数 A 或（加权）射影簇 $X=\operatorname{Proj}(A)$[1] 的大量信息。

定理 *2.1*（推论 *3.2* [*KK12*]）。设 $X=Proj(A)$，且 $\nu\colon A\setminus\{0\}\to\mathbb{Z}^d$ 是一个满秩齐次赋值。那么，$\Delta(A,\nu)$ 的维数 q 与 X 的维数相同；此外，$\Delta(A,\nu)$ 的 q 维整体积乘以 $q!/ind(S(A,\nu))$ 等于 X 的次数，其中 $ind(S(A,\nu))$ 指由 $S(A,\nu)$ 在 $\mathbb{Z}^d$ 内张成的子格的指数。

一般而言，赋值的 Newton–Okounkov 体不一定有界或为多面体，但它们是凸的。计算这些体通常颇具挑战性；不过，当赋值拥有有限 Khovanskii 基时，计算会大为简化，后文将对此展开说明。

2.1.1. *Khovanskii*有限赋值。**Khovanskii 有限赋值**是满秩齐次（Krull）赋值，其值半群有限生成。特别地，Khovanskii 有限赋值具有有限 Khovanskii 基。Ilten 和 Wrobel 在 [IW20] 中引入了这一概念，并对其进行了深入研究。

Khovanskii 基的存在具有计算上的优势。给定 $\{b_1,\dots,b_n\}$for ν 的 Khovanskii 基，我们可以将 $\operatorname{gr}_\nu(A)$ 表示为多项式环 $S:=k[x_1,\dots,x_n]$ 的商。定义

$$\pi_\nu:k[x_1,\dots,x_n]\to\operatorname{gr}_\nu(A)\quad\text{by}\quad x_i\mapsto b_i.$$

那么 $I_\nu:=\ker(\pi_\nu)$ 给出 $S/I_\nu\cong\operatorname{gr}_\nu(A)$。

我们称值半群 $S(A,\nu)\subset(\Gamma,<)$ 是**最小良序**的，当且仅当 $S(A,\nu)$ 的每个子集相对于 $<$ 都有唯一的极小元。在此情形下，根据 [KM19，命题 2.13]，以下版本的子约化算法会在有限时间内终止。

算法 2.2。设 A 是正分次代数和整环，$\nu\colon A\setminus\{0\}\to(\Gamma,<)$ 是一个满秩齐次 *Khovanskii*有限赋值，其 $S(A,\nu)$ 最小良序，且 $\{b_1,\dots,b_n\}$ 是一个 *Khovanskii* 基。

输入： $f\in A\setminus\{0\}$;
输出： 一个用 $\{\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n\}$ 表示 f 的多项式表达式。

(1) 由于 $b_1,\dots,b_n$ 生成 $gr_\nu(A)$，我们可以找到一个用 $b_1,\dots,b_n$ 表示 f 的多项式表达式：$\bar{f}=p(\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n)$，这里 $p\in\pi_\nu^{-1}(\bar{f})$。*(2)* 我们区分两种情况：*a.* 如果 $f=p(b_1,\dots,b_n)$，那么输出 p；*b.* 如果 $\nu(f-p(b_1,\dots,b_n))<\nu(f)$，则将 f 替换为 $f-p(b_1,\dots,b_n)$，并返回步骤 *1*。

特别是，每个 Khovanskii 基都是该代数的生成集。

[1]回想一下，生成元的次数为 d_ie_i，$\{e_1,\dots,e_m\}$ $\mathbb{Z}^m$ $\mathbb{P}\,d_1\,\dots\,d_m$ A （它们是 的标准基）的 $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ 分次多项式环的射影谱是加权射影空间 $(,,)$。特别地，如果 是多重分次的，那么 $\operatorname{Proj}(A)$ 可以看作加权射影空间的一个子簇。详情请参阅 [Dol82]。

2.2. **初始理想与热带化**。我们研究环面退化的第二个工具箱来自格罗布纳理论。有关更详细的信息，请参阅 [HH11、CLO15、Eis13、Stu96]。

对于 $m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，我们记作 $x^m := x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \in k[x_1, \ldots, x_n]$。在 $S := k[x_1, \ldots, x_n]$ 中的单项式集合上，全序若满足以下条件，则称为 **项序**：

$$(i)\ 1 < x^m\ \forall m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \setminus \{0\} \quad \text{and} \quad (ii)\ x^a < x^b \Rightarrow x^{a+c} < x^{b+c}\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}.$$

元素 $f = \sum c_a x^a \in S$ 关于项序 $<$ 的**首项** 是 $\mathrm{in}_<(f) = c_b x^b := \max_<\{c_a x^a : c_a \neq 0\}$，其中 c_b 称为**首系数**，x^b 称为**首单项式**。对于 $I \subset S$ 中的理想，我们将其关于 $<$ 的**初始理想** 定义为

$$\mathrm{in}_<(I) := (\mathrm{in}_<(f) : f \in I).$$

初始理想是有限生成的。I 的生成集 G 若满足 $(\mathrm{in}_<(g) : g \in G) = \mathrm{in}_<(I)$，则称为 I **关于** $<$ 的**格罗布纳基**。每个理想只有有限个不同的初始理想 [Stu96, 定理 1.2]。Mora 和 Robbiano 已证明，这些初始理想可以组织成一个多面扇 [MR88]。为说明这一点，我们需要引入关于权向量的初始理想这一概念：固定 $w \in \mathbb{R}^n$，称其为**权向量**，并将元素 $f = \sum c_a x^a$ 关于 w 的**初始形式** 定义为

$$\mathrm{in}_w(f) = \sum_{b:\ w\cdot b = \max\{w\cdot a : c_a \neq 0\}} c_b x^b.$$

注意，取决于 w 和 f，$\mathrm{in}_w(f)$ 中的初始形式不一定只有一项。类似地，我们将 I 关于 w 的**初始理想** 定义为 $\mathrm{in}_w(I) := (\mathrm{in}_w(f) : f \in I)$。对于任意权向量 w，我们都可以定义 I 在 $k[x_1, \ldots, x_n, t]$ 中的**齐次化**：对于单个元素 $f = \sum c_a x^a$，我们令

$$f^{h;w} := \sum c_a x^a t^{\max\{w\cdot b : c_b \neq 0\} - w\cdot a}.$$

类似地，对于理想 I，我们定义 $I^{h;w} := (f^{h;w} : f \in I)$。$I$ 的齐次化是 I 的一个变形族，而商代数 $A^{h;w} := k[x_1, \ldots, x_n, t]/I^{h;w}$ 是一个自由的 $k[t]$-模 [Eis13, §15.8]。设 $A^w := S/\mathrm{in}_w(I)$。由 $\mathrm{Spec}(A^{h;w})$ 定义的 $\mathrm{Spec}(A)$ 到 $\mathrm{Spec}(A^w)$ 的退化称为**格罗布纳退化**。

给定理想 I，任意项序都可以由 $w \in \mathbb{Z}^n_{>0}$ 中的一个权向量表示（例如参见 [HH11，引理 3.1。1]），即 $\mathrm{in}_w(I) = \mathrm{in}_<(I)$。反过来，如果存在某个项序 $<$ 使得 $\mathrm{in}_<(\mathrm{in}_w(I)) = \mathrm{in}_<(I)$，那么权向量 w 属于格罗布纳区域 $\mathrm{GR}(I)$。格罗布纳区域带有一种称为格罗布纳扇 $\mathrm{GF}(I)$ 的扇结构，该结构由 Mora 和 Robbiano 在 [MR88] 中发现。两个权向量 v、$w \in \mathbb{R}^n$ 位于锥 C 的相对内部，记作 v、$w \in C^\circ$，当且仅当 $\mathrm{in}_v(I) = \mathrm{in}_w(I)$。$\mathrm{GF}(I)$ 中维数最大的锥对应于与 S 上的项序相关联的单项式初始理想。这些理想尤其有用，因为它们为商代数 $A = S/I$ 导出向量空间基：我们称不属于 $\mathrm{in}_<(I)$ 的单项式 x^a 为标准单项式。集合 $\mathbb{B}_< := \{\bar{x}^a \in A : x^a \notin \mathrm{in}_<(I)\}$ 是 A 的向量空间基，称为标准单项式基。事实上，若 $w \in C$ 对于与 $<$ 相关联的 $\mathrm{GF}(I)$ 中某个极大锥 $C \in$ 成立，那么 $\mathbb{B}_<$ 是自由 $k[t]$-模 $A^{h;w}$ 的一组基，例如参见 [Eis13，定理 15 的证明。17]。

格罗布纳扇有一个有趣的子扇，它将引导我们回到 A 上的赋值：我们定义 I 的**热带化**：

$$\mathrm{Trop}(I) := \{w \in \mathrm{GR}(I) : \mathrm{in}_w(I) \text{ does not contain monomials}\}.$$

$\mathrm{Trop}(I)$ 的维数与 A [EKL06] 的 Krull 维数一致。事实上，根据 [BJS+07，引理 4]，我们可以将讨论范围缩小到齐次理想。对于齐次理想，我们有 $\mathrm{GR}(I) = \mathbb{R}^n$，见 [Stu96，命题 1.12]。在这种情况下，热带化是一个纯扇，其维数与 A 的 Krull 维数一致。此外，$\mathrm{Trop}(I)$ 和 $\mathrm{GF}(I)$ 有一个线性子空间 $\mathcal{L}_I$，称为**线性空间**，它由满足 $\mathrm{in}_w(I) = I$ 的元素 $w \in \mathbb{R}^n$ 组成。更准确地说，我们有以下显然的引理：

引理 2.3. 设 I 是 S 中关于由 $\deg(x_{ij}) = e_i$ 给出的 $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-分次的一个（多）齐次理想，其中 $S = k[x_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i]$，这里 k_i 满足 $k_1 + \cdots + k_m = n$ 和 $\{e_i : 1 \leq i \leq m\}$ 是 $\mathbb{Z}^m$ 的标准基。那么对于 $1 \leq i \leq m$，有

$$\ell_i := (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathcal{L}_I \tag{3}$$

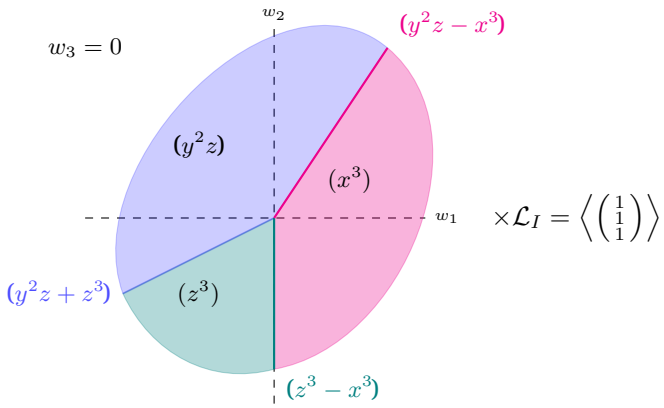


图 1. $I = (y^2z - x^3 + z^3) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ 模 $\mathcal{L}_I$ 的格罗布纳扇，其一维骨架是热带簇 Trop(I)，以及所有初始理想。

其中 *1* 出现在位置 $i_1, \ldots, i_{k_i}$。

在 Trop(I) 的极大锥中，我们可以寻找**素锥**，其对应的初始理想是二项式素理想。因此，它们的零点集定义了环面簇。特别地，与极大素锥内部的权向量相关联的任何格罗布纳退化实际上都是一种**环面退化**。

例 2.4. 考虑 $I = (y^2z - x^3 + z^3) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$。线性空间 $\mathcal{L}_I$ 是一维的，由 $(1, 1, 1)^T$ 生成。我们在超平面 $\{(w_1, w_2, w_3)^T \in \mathbb{R}^3 : w_3 = 0\}$ 内，模去 $\mathcal{L}_I$，绘出格罗布纳扇 $\mathrm{GF}(I)$，如图 *1* 所示。其极大锥与上图中的射线相对应的一维骨架，是 I 的热带化。

2.2.1. 关于权重矩阵的初始理想。 在进入下一节之前，我们需要补充一些关于初始理想稍作推广的背景知识：格罗布纳理论的高维类比（例如参见 [FR16]）。

回忆 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$，并像之前一样考虑 $f = \sum c_a x^a \in S$。我们称矩阵 $M \in \mathbb{Q}^{d \times n}$ 为**权重矩阵**，并将它与 $\mathbb{Z}^d$ 上的线性序 $\prec$ 结合起来，定义 f 关于 M 的**初始形式** 为

$$\mathrm{in}_M(f) := \mathrm{in}_{M,\prec}(f) := \sum_{b:\ Mb = \max_\prec\{Ma : c_a \neq 0\}} c_b x^b.$$

和之前一样，我们将理想 $I \subset S$ 关于 M（以及 $\prec$）的初始理想定义为 $\mathrm{in}^{M;\prec}(I) := (\mathrm{in}_M(f) : f \in I)$。为简化记号，我们将从下标中省略线性序，并假定该线性序已固定。格罗布纳区域也有更高维的类似概念：$d^{\mathbf{th}}$ 格罗布纳区域记作 $\mathrm{GR}^d(I)$，定义为所有满足以下条件的权重矩阵 $M \in \mathbb{Q}^{d \times n}$ 的集合：存在 S 上的项序 $<$，使得 $\mathrm{in}_<(I) = \mathrm{in}_<(\mathrm{in}_M(I))$。给定 $<$，令 $\mathrm{GR}^d(I)$ 表示满足前述关系的所有 M 的集合。我们还可以通过设定 $C_M := \{M' \in \mathrm{GR}^d(I) : \mathrm{in}_M(I) = \mathrm{in}_{M'}(I)\}$ 来定义权重矩阵的等价类。在高维情形下，格罗布纳理论的若干性质仍然成立，其中包括标准单项式基的存在性。例如，$\mathrm{GR}^d(I)$ 总是包含正正交象限 $\mathbb{Q}^{d \times n}_{\geq 0}$；若 I 是齐次的，则有 $\mathrm{GR}^d(I) = \mathbb{Q}^{d \times n}$（见 [KM19，引理 8.7]），但请注意，作者采用的是最小值约定，因此会引入一个符号）。

我们可以用权矩阵如下定义拟赋值。考虑商映射 $\pi : S \to S/I =: A$，并用 f 表示 f 在商中的陪集。对于 $f = \sum c_a x^a \in S$，令 $\tilde{\nu}_M(f) := \max_\prec\{Ma : c_a \neq 0\}$。这定义了一个赋值 $\tilde{\nu}_M : S \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$。根据 [KM19, 引理 3.2]，存在一个拟赋值 $\nu_M : A \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^d, \prec)$，对于 $\bar{f} \in A$，其定义为

$$\nu_M(\bar{f}) = \min_\prec\{\tilde{\nu}_M(f) : f \in \bar{f}\}$$

称为**权矩阵拟赋值** M。其伴随分次代数记作 $\mathrm{gr}_M(A)$，满足 $\mathrm{gr}_M(A) \cong S/\mathrm{in}_M(I)$。特别地，这个同构为 $\mathrm{gr}_M(A)$ 给出了标准单项式基：设 $<$ 是一个满足 $M \in C^d_<$ 的项序。那么 $\mathbb{B}_<$ 是 $\mathrm{gr}_M(A)$ 的向量空间基。此外，我们可以用 $\mathbb{B}_<$ 计算 ν_M 的取值：对于 $f \in A$，设 $f = \sum_{\bar{x}^b \in \mathbb{B}_<} c_b \bar{x}^n$ 是其在 $\mathbb{B}_<$ 中的表达式。那么

$$\nu_M(\pi(f)) = \max_{\prec}\{Mb : c_b \neq 0\}.$$

我们将在 §4 中进一步探讨标准单项式基及其对赋值的影响 .

3. 赋值、热带化与环面退化

本节将 Khovanskii有限赋值的概念与理想的热带化结合起来。本节基于 [KM19] 和 [Bos21b]中的结果。

3.1. 由热带化得到的赋值。 Kaveh 和 Manon 在 [KM19] 中的主要目标，是建立一种联系：将热带化中素锥所对应的环面退化，与由 Newton–Okounkov 多面体得到的环面退化联系起来。这一方法依赖于前文介绍的带权重矩阵的拟赋值。

与前文相同，设 $I \subset S$ 为一个齐次理想。假设存在一个极大素锥 $\tau \in \mathrm{Trop}(I)$，并选取一组基 $r_1, \ldots, r_d \in \mathbb{Q}^n$，作为由 τ 张成的实向量空间的基。商 $\tau/\mathcal{L}_I$ 是一个强凸锥（例如参见 [BMNC21, 引理 2.13]），因此我们可以取 $\tau/\mathcal{L}_I$ 的本原射线生成元陪集中的一个极大线性无关集。将其与线性空间的一组基合在一起，便得到我们对 $\mathbf{r} := \{r_1, \ldots, r_d\}$ 的选择。特别地，对于 $1 \leq i \leq m$，我们设 $r_i = \ell_i$，参见引理 2.3。定义

$$M_{\mathbf{r}} := (r_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n}$$

其中 r_{ij} 是 r_i 中的 j^{th} 项，因此 r_i 是 $M_{\mathbf{r}}$ 的各行。

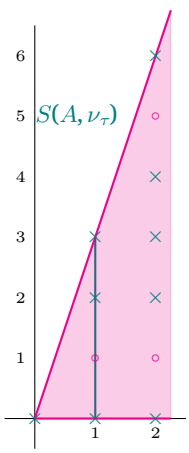
命题 3.1 ([KM19]中的命题 4.2 和 4.6)。 若 τ 是$\mathrm{Trop}(I)$ 中的极大素锥，则权矩阵为 $M_{\mathbf{r}}$ 的拟赋值实际上是一个具有一维叶的满秩赋值。其值半群由 $\bar{x}_1$、……、$\bar{x}_n$ 的像生成，并且只取决于 τ，而不取决于我们对$\mathbf{r}$的选择。

根据该命题，我们采用相应记号并设 $M_\tau := M_{\mathbf{r}}$ ， $\nu_\tau := \nu_{M_\tau}$。由此得到关于相应 Newton–Okounkov 多面体的以下推论：

推论 3.2 ([KM19]中的推论 4.7)。 赋值 ν_τ 的 *Newton–Okounkov* 体是一个凸多面体，其顶点为 $\nu_\tau(\bar{x}_1)$、……、$\nu_\tau(\bar{x}_n)$，它们恰好是 M_τ 的各列。此外，在相差一个线性同构的意义下， $\Delta(A, \nu_\tau)$ 只取决于 τ。

注意，对于相对于标准分次齐次的 I ，以及如上所述的 r_1 =(1, . . ., 1)，该推论表明（在相差一个线性同构的意义下）我们有$\Delta(A, \nu)$ $\subset \{1\} \times \mathbb{R}^{d-1}$。

例 *3.3*。考虑上文例 *2.4* 中的 $I = (y^2z - x^3 + z^3) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$。图 *1* 中射线 $(2, 3, 0)^T$ 对应的初始理想 $(y^2z - x^3)$ 是热带簇 *Trop(I)* 中的一个极大素锥 τ。相应的射线矩阵为 $M_\tau =$ *(1 1 12 3 0)*。令 $A = \mathbb{C}[x, y, z]/I$，则赋值 ν_τ: $A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}$ 满足 $\nu_\tau(\bar{x})$ =(1, 2) $\nu_\tau(\bar{y})$ =(1, 3) 且$\nu_\tau(\bar{z})$ =(1, 0)。特别地， ν_τ 的值半群由这三个元素生成，如右图所示。



这里， × 表示 $S(A, \nu_\tau)$ 中的格点，而 ○ 表示不属于 $S(A, \nu_\tau)$ 的格点。阴影区域是牛顿–奥科恩科夫锥 $C(A, \nu_\tau)$，连接$(1, 0)^T$和$(1, 3)^T$的线段是*Newton–Okounkov* 多面体 $\Delta(A, \nu_\tau)$。注意， $S(A, \nu_\tau)$并未饱和：例如，$(2, 2)^T$ 属于 $S(A, \nu_\tau)$，但$(1, 1)^T$ 不属于。

3.2. **由赋值得到热带化**。 固定一个正分次代数 $A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ 及整环 A上的 Khovanskii有限赋值 ν。不失一般性，我们可以假设 $\dim_{\mathrm{Krull}}(A) = d$ （若非如此，可以应用 [BG09, 命题 2.17(e)] ，因为 ν 的像实际上是一个只有 0 作为单位元的幺半群）。此外，我们可以假设 $\mathbb{Z}^d$ 上的底层全序为字典序（若非如此，可以按照 Mora 和 Robbiano [MR88] 的方法，用一个 $d \times s$ 矩阵 M 表示该序，使得我们的序与 $M\mathbb{Z}^d$上的字典序一致）。取值半群 $\nu(A\setminus\{0\})$的有限生成集 $a_1, \ldots, a_n$，并令 M_ν为列向量分别为 $a_1, \ldots, a_n$的 $d \times n$矩阵。注意

$$\operatorname{rank}(M_\nu) = \dim(\operatorname{im}(M_\nu) = \dim(\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(a_1, \ldots, a_n)) = \dim(\operatorname{cone}(a_1, \ldots, a_n)) = \operatorname{rank}(\nu).$$

特别地， M_ν 是满秩的。

引理 3.4. 给定值半群 $S(A,\nu)$ 的生成元 $a_1, \ldots, a_n$，选取 $b_1, \ldots, b_n \in A$，使得 $\nu(b_i) = a_i$。则集合 $\{b_1, \ldots, b_n\}$ 是一个 *Khovanskii* 基。

证明。 由于 $k[S(A,\nu)] \cong \mathrm{gr}_\nu(A)$，元素 $a_1, \ldots, a_n$ 构成 $\mathrm{gr}_\nu(A)$ 的代数生成元集。 □

进一步注意到，出于维数方面的考虑，Khovanskii 基 $\{b_1, \ldots, b_n\}$ 是 A 的生成集，因为 ν 是满秩的。因此，我们可以用它来得到 A 的一个表示。定义

$$\pi : S := k[x_1, \ldots, x_n] \to A, \quad \text{by} \quad x_i \mapsto b_i.$$

注意， $b_1, \ldots, b_n$ 在 A 中不一定是一次的。为了得到 A 的一个分次的表示，我们在多项式环上赋予一种（不一定是标准的）分次，规定 $\deg(x_i) := \deg(b_i)$。那么 $I := \ker(\pi)$ 是一个齐次理想，且 $S/I \cong A$。我们的赋值 ν 与理想 I 的热带化密切相关。

定理 3.5 ([Bos21b])。 设 $\nu\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ 是一个满秩赋值，其值半群有限生成；设 $S/I \cong A$ 是由 *Khovanskii* 基 $b_1, .., b_n$诱导的表示。

那么存在一个极大素锥 $\tau \in$热带簇(I) 使得 $\nu = \nu_\tau$ 和

$$k[S(A,\nu)] \cong \mathrm{gr}_\nu(A) \cong S/\operatorname{in}_\tau(I).$$

证明。 注意， $M := M_\nu$， ν 的权矩阵是满秩的，因为 ν 是满秩的。由 [Bos21b，定理 1] 可知，初始理想 $\operatorname{in}_M(I)$ 是素理想，因为值半群 $S(A,\nu)$ 由 $\nu(b_1), \ldots, \nu(b_n)$ 生成。这里我们使用由 ν 给出的 $\mathbb{Z}^d$ 上的全序。根据 [Bos21b，引理 3] ，存在一个权向量 $w \in \mathbb{Z}^n$ ，使得 $\operatorname{in}_w(I) = \operatorname{in}_M(I)$；因此我们可以将注意力限制在通常初始理想的情形。接下来只需证明

(1) $w \in$热带簇(J); (2) $k[S(A,\nu)] \cong S/$属于$_\tau(J)$，其中 $w \in \tau^\circ$。

第一项由 [Bos21b，推论 3] 得出。对于第二项，考虑拟赋值 ν_M。根据命题 2.1 ν_M 是一个赋值，并且根据 [Bos21b，命题 1] ，它满足 $\nu = \nu_M$。此外，根据[Bos21b，等式 3.3] ，我们有

$$S/\operatorname{in}_w(I) \cong \mathrm{gr}_\nu(A) \cong k[S(A,\nu)],$$

由此完成证明。 □

这一联系的一个优点是，它可用于刻画环面退化何时为格罗布纳退化。我们将在下一小节进一步探讨这一方向。

定理 3.5 取决于 Khovanskii 基的选择，因此自然会有人问这种依赖性有多强。若改变 Khovanskii 基， A 的表示也会改变，热带化亦然。

命题 *3.6.* 假设 $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$ 和 $\mathcal{B}' := \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ 是 (A,ν) 的两个 *Khovanskii* 基。设 I 和 I' 是表示 A 的理想，并设 τ 和 τ' 是定理 *3.5* 得到的相应热带化~中的锥。那么存在某个 $m \geq n$ 对应的理想 $I \subset k[y_1, \ldots, y_m]$，它表示 A，以及~投影 $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 和 $p' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，使得对于极大素锥 $\tilde{\tau} \in \mathrm{Trop}(I)$，有$p(\tilde{\tau}) = \tau$和 $p'(\tilde{\tau}) = \tau'$。

证明。我们有 A 的两种表示:

$$\pi : S \to A, \pi(x_i) = b_i \quad \text{and} \quad \pi' : S \to A, \pi'(x_i) = b_i'$$

由 $\ker(\pi) = I$ 和 $\ker(\pi') = I'$给出。为了了解两个热带化 $\mathrm{Trop}(I)$ 和 $\mathrm{Trop}(I')$ 之间的关系，我们递归地进行，并引入由 $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$给出的 A的另一种表示。为简单起见，假设对所有 $i < n$都有 $b_i = b_i'$。考虑由 $x_i \mapsto b_i, x_{n+1} \mapsto b_n'$给出的 $\tilde{\pi}\colon k[x_1, \ldots, x_{n+1}] \to A$，并令$J := \ker(\tilde{\pi})$。设 $p\colon k[x_1, \ldots, x_{n+1}] \to k[x_1, \ldots, x_n]$和 $p'\colon k[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}]$为自然投影。根据构造，我们有 $I \subset p(I)$ 和 $I' \subset p'(I)$。设 $\tilde{\tau} \in \mathrm{Trop}(I)$ 是定理 3.5 给出的极大素锥。那么来自 $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ 的相应投影 p 和 p' 具有所需的性质。□

命题 3.6 提醒我们转换视角：假设我们有 A 上两个 Khovanskii 有限赋值 ν 和 ν'，以及两组不同的 Khovanskii 基 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$。我们可以利用命题 3.6 的证明，构造一个热带化，使其同时包含分别对应于 ν 和 ν' 的素锥。这个想法与 [BLMM17] 中通过改变 A 的表示来构造新素锥的一种方法密切相关（[BLMM17，方法 1]）。[IW20] 证明，对于非 Khovanskii 有限赋值，上述方法不会终止。我们将在格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$ 的例子中进一步阐述这些想法，见 §6。

3.3. 哪些环面退化是格罗布纳退化？ 定理 3.5 表明，由 Khovanskii 有限赋值诱导的环面退化，等价于由适当理想的热带化得到的格罗布纳退化。自然地，我们可以进一步提出问题：哪些环面退化是格罗布纳退化?

回顾 §1 中环面退化的定义。设 X 是一个射影簇，并且有 $X = \mathrm{Proj}(A)$。给定 $\nu\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ 一个 Khovanskii 有限赋值，$\mathrm{gr}_\nu(A)$ 是一个 $\mathbb{Z}^d$-分次环面代数。Anderson 展示了如何构造 X 的环面退化，给定 ν，我们简要回顾其构造 [And13]。为了关联一个对 ν 进行变形、使其退化为 $\mathrm{gr}_\nu(A)$ 的（诺特）Rees 代数，我们应用一个标准技巧 [Bay82，命题 1.8]，将 $\mathrm{gr}_\nu(A)$ 上的 $\mathbb{Z}^d$-分次转换为一个 $\mathbb{Z}$-分次:

引理 3.7。设 F 是 $\mathbb{Z}^d$ 的有限子集。那么存在一个 **保序投影**$e\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得对于所有 m，$n \in F$，我们有 $m < n$ （在 $\mathbb{Z}^d$ 中）蕴含 $e(m) < e(n)$ （在 $\mathbb{Z}$ 中）。

在我们的设定中，集合 F 由一个格罗布纳基诱导。考虑由 ν 的一个 Khovanskii 基给出的 $A = S/I$ 的表示，并令 $\tau \in \mathrm{Trop}(I)$ 为对应于 ν的极大素锥。接着，选取一个包含 τ作为面的极大锥 $C \in \mathrm{GF}(I)$，并固定关于单项式初始理想 $\mathrm{in}_C(I)$ 的 I的格罗布纳基 $g_1, \ldots, g_s$。不失一般性，我们可以假设 ν 是与矩阵 M 相关联的赋值，该矩阵的各行是 τ的射线的代表元。如果情况并非如此，根据推论 3.2，存在一个线性同构，将 $S(A, \nu)$ 映射到 $S(A, \nu_M)$。赋值ν_M 的优势在于它与 $\tilde{\nu}_M$ 兼容：$S \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ 按上述方式定义为

$$\tilde{\nu}_M(f) = \max_{\prec} \left\{ Ma : f = \sum c_a \mathbf{x}^a, c_a \neq 0 \right\}$$

其中 $\prec$ 是 t 在 $\mathbb{Z}^d$上的全序。对于格罗布纳基 g 中的每个元素，我们都有一个表达式

$$g = \sum_{a\colon\, Ma = \nu_M(g)} c_a \mathbf{x}^a + \sum_{b\colon\, Mb \prec \nu_M(g)} c_b \mathbf{x}^b,$$

其中尤其有 $Ma \succ Mb$。对于 Gröbner 基中的所有 g，元素 Ma、Mb 构成了引理 3.7 中的有限集合 F，该集合决定了保序投影 $e\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}$。它诱导出一个 $\mathbb{Z}$-滤过，A 的滤过分次为

$$\mathcal{F}_{\nu,i} := \{ f \in A : e(\nu(f)) \geq i \}.$$

根据构造，伴随分次代数与 $\mathrm{gr}_\nu(A)$ 一致。我们将**的 Rees 代数**定义为

$$\mathcal{R}_{\nu,A} := \bigoplus_{i \geq 0} t^i \mathcal{F}_{\nu,i} \subset A[t].$$

命题 3.8 （ [与13]中的命题 5.1）。*Rees* 代数 $\mathcal{R}_{\nu,\ A}$ 是一个平坦的 $k[t]$-代数，且$\mathcal{R}_{\nu,\ A}/(t) \cong \mathrm{gr}_\nu(A)$，并且 $\mathcal{R}_{\nu,\ A}[t^{-1}] \cong A[t,t^{-1}]$ 作为 $k[t]$-模。

此外，上述命题中的同构对分次代数也成立（记住，ν 是齐次的）。特别地， ϕ: Proj($\mathcal{R}_{\nu,A}$) $\to \mathbb{A}^1$ 是 X 的环面退化，其特殊纤维为ϕ^{-1}(0) $= X_0 =$ Proj(gr$_\nu$(A)) 。虽然 X_0 是正规当且仅当 S(A, ν)是饱和的，但 Anderson 证明，其正规化是与 Newton–Okounkov 多面体Δ(A, ν)相关联的射影环面簇。

根据由赋值诱导的环面退化示例，我们可以给出环面退化的代数定义。我们总结 Kaveh、Manon 和 Murata 的以下结果，以及它与赋值的关系：

定理 3.9 （见 [KMM17]中的定理 1.11）。设 A 是一个正分次整环，且 $\mathcal{R}$ 是一个有限生成的正分次 $k[t]$-模和整环，并满足以下性质：

- $\mathcal{R}[t^{-1}] \cong A[t,t^{-1}]$ 作为 $k[t]$-模和分次代数；
- 代数 $\mathcal{R}/(t)$ 是一个分次半群代数 $k[S]$ 其中 $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^d$；
- 在 $k[t]$ 上的标准k^*-作用可扩展为对 $\mathcal{R}$ 的作用，并保持其分次；此外，该$k[t]$-作用在半群代数 $k[S]$上通过$(k^*)^d$ 作用。

于是存在一个满秩赋值 ν： $A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^d$，使得 $S = S(A,\ \nu)$。

我们将由定理 3.9 中的代数 $\mathcal{R}$ 诱导的 Proj(A) 的环面退化称为**代数环面退化**。结合定理 3.9 和定理 3.5，我们得到以下推论：

推论 3.10。每个代数环面退化都由一个赋值诱导，并且可以实现为与某个适当理想的热带化中的极大素锥相关的格罗布纳退化。

4. 适配基与墙穿越公式

假设 $A = \bigoplus_{j\geq 0} A_j$ 是一个分次代数，例如某个线丛的截面环，并且配备了一个向量空间基 $\mathbb{B}$。我们假设该基是**分次的**，即基元素是齐次的，并且次数为 i 的齐次元素 f 是次数为 i 的基元素的线性组合。回顾一下，给定一个赋值 ν: $A \setminus \{0\} \to \Gamma$，如果对于每个 $\gamma \in \Gamma$，集合 $\mathbb{B} \cap \mathcal{F}_{\nu,\ \gamma}$ 都是滤过部分 $\mathcal{F}_{\nu,\ \gamma} \subset A$ 的向量空间基，那么基 $\mathbb{B}$ 就是**适配于** ν。反过来，我们称 ν **适配于** $\mathbb{B}$。特别地，如果 ν 具有一维叶，则存在集合之间的双射

$$\mathbb{B} \quad \leftrightarrow \quad S(A,\nu).$$

本节探讨其推论。假设该基**由格点参数化**，因此我们对所有 $b \in \mathbb{B}$ 都有一个对应关系 $b \mapsto m(b) \in \mathbb{Z}^n$。事实上，对于每个 Khovanskii 有限赋值，我们都可以找到一个由格点参数化的适配基。考虑 ν: $A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$，其 Khovanskii 基为 b_1、 ..... 、 b_n，并令 $S/I \cong A$ 和 $\tau \in$ Trop(I) 分别表示 A 的表示以及 Trop(I) 中的极大素锥，如定理 3.5 所述。根据定义，Trop(I) 是格罗布纳扇 GF(I) 的一个子扇，而 τ 是 GF(I) 中至少一个极大锥的面。GF(I) 中的极大锥与 I 的单项式初始理想相对应，定义如上。对于一个极大锥 C，我们用 in$_C$(I) $\subset S$ 表示相应的单项式理想。特别地，集合

$$\mathbb{B}_C := \{\mathbf{x}^m : \mathbf{x}^m \notin \mathrm{in}_C(I)\}$$

是所有商 $A_w := S/$in$_w$(I) 的向量空间基，其中 $w \in C$ 称为**标准单项式基**。注意，对于 $w = 0$，商 $A_w = A$；而对于 $w \in \tau^\circ$，我们有 $A_w \cong$gr$_\nu$(A)。因此， $\mathbb{B}_C$ 是 ν 的适配基。映射

$$\mathbf{x}^m \mapsto m \in \mathbb{Z}^n$$

是由格点给出的参数化。回想一下，每个单项式理想都有唯一的单项式生成元集合（参见例如 [HH11, 命题 1.1.6]）。令 $\mathbf{x}^{g_1}, \ldots, \mathbf{x}^{g_t}$ 为这个生成集。那么，当且仅当存在 i 使得 $\mathbf{x}^{g_i}$ 整除 $\mathbf{x}^m$时，$\mathbf{x}^m$ ∈属于$_C$(I)。这转化为 $m \notin \bigcup_{i=1}^t g_t + \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 对于

标准单项式基的元素，其中 $+$ 表示闵可夫斯基和。因此我们有集合之间的双射

$$S(A,\nu) \quad \leftrightarrow \quad \mathbb{B}_C \quad \leftrightarrow \quad \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \setminus \bigcup_{i=1}^{t} g_i + \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$$

因此，我们得到以下推论:

推论 4.1. 每个 *Khovanskii*有限赋值都有一个以格点为参数的适配基。

例 4.2. 如上，考虑 $I = (y^2z - x^3 + z^3) \subset \mathbb{C}[x,y,z]$ 以及由射线 $(2,3,0)^T$ 在模去 $\mathcal{L}_I$的意义下张成的极大素锥$\tau \in$热带簇$(I) \subset \mathbb{C}[x,y,z]$。在$\mathrm{GF}(I)$ 中，锥 τ与两个极大锥相邻：其中一个对应的初始单项式理想为(x^3) （见图 *1*）。令 C 为这个极大锥。那么， $\mathbb{B}_C = \{x^a y^b z^c \colon a < 3\}$ 是 $\mathbb{C}[x,y,z]$ 中所有不能被 x^3整除的单项式构成的集合，因此它们不属于$\mathrm{in}_C(I)$。

4.1. **由适配基得到的多胞体**。 固定一个 Khovanskii 有限赋值 $\nu \colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ 以及与之关联的适配标准单项式基 $\mathbb{B} := \mathbb{B}_C$，其参数化如上所述。对于一个元素 $f \in A$，令$f = \sum_{\mathbf{x}^m \in \mathbb{B}} c_m \mathbf{x}^m$ 为它在 $\mathbb{B}$中的线性扩张。令 M 为一个矩阵，其各行$r_1, \ldots, r_m$是 C的本原射线生成元的代表元。特别地，令 $r_1, \ldots, r_s$为线性空间的生成元。定义 $\mathrm{supp}_{\mathbb{B}}(f) := \{m \in \mathbb{Z}^n \colon c_m \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^n$，并将 f 的 $\mathbb{B}$-**牛顿多胞体**定义为

$$\mathrm{New}_{\mathbb{B}}(f) := \mathrm{conv}\,(Ma : a \in \mathrm{supp}_{\mathbb{B}}(f)) \subset \mathbb{R}^m.$$

请注意，$\mathrm{New}_{\mathbb{B}}(f)$取决于我们为 C选择的射线生成元。我们稍微滥用一下记号，在指数中省略 M。我们将 $\mathrm{New}_{\mathbb{B}}(f)$视为一个占位符，代表适配于$\mathbb{B}$ 的赋值，并将 ν的 Newton–Okounkov 体记作:

$$\Delta_{\mathbb{B}}(A) := \mathrm{conv}\left(\bigcup_{j \geq 1} \left\{ \frac{1}{j} \mathrm{New}_{\mathbb{B}}(f) : f \in A_j \right\} \right) \subset \mathbb{R}^m.$$

Rec赋值 ν的 **Newton–Okounkov 体** $A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ 定义如下

$$\Delta(A,\nu) := \mathrm{conv}\left(\bigcup_{j \geq 1} \left\{ \frac{\nu(f)}{j} : f \in A_j \right\} \right).$$

若 ν是完全齐次的，即其形式为 $\nu \colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \times \Gamma'$由 $\nu(f) = (\deg(f)\ \nu(f))$给出，则上述定义与方程 (2)中的定义一致。根据构造，在 §3.1 中所述的理想的热带化中，由极大素锥 τ 构造的任何赋值都是完全齐次的。回忆一下， M_τ 的前 m 行是引理 2.3 中的元素 ℓ_i。令 M_ℓ 为行ℓ_1、……、 ℓ_m构成的子矩阵。记 $\mathrm{pr} \colon \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \times \Gamma' \to \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$为投影。于是，对于任意元素 $f \in A$，我们有

$$\mathrm{pr}(\nu_M(f)) = M_\ell b = \deg(f)$$

其中 b满足 $M_\tau b = \max_<\{M_\tau a \colon \ f = \sum c_a \mathbf{x}^a, c_a \neq 0\}$。此外，在此情境下，基 $\mathbb{B} = \mathbb{B}_C$ 与赋值 ν_{M_τ}之间的双射由下式明确给出

$$\mathbb{B} \to S(A, \nu_M), \quad \mathbf{x}^a \mapsto M_\tau a$$

定理 4.3。 设 $C \in \mathrm{GF}(I)$ 是一个极大锥，包含极大素锥 $\tau_1, \ldots, \tau_q \in$热带簇$(I)$，且它们是 d 维面，其对应的 *Khovanskii* 有限赋值为 $\nu_i \colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$。此外，假设 $\mathrm{in}_C(I)$ 不包含任何变量。那么存在投影 $p_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$，使得对于$1 \leq i \leq q$

$$p_i(\Delta_{\mathbb{B}}(A)) = \Delta(A, \nu_i).$$

证明。 令 M 为一个矩阵，其各行为 r_1、……、 r_{n_C}，它们要么是线性空间 $\mathcal{L}_I$ 的生成元，要么是 $C/\mathcal{L}_I$ 的本原射线生成元的代表。注意， $n_C \geq n$，因为 C 是极大锥，当且仅当 $C/\mathcal{L}_I$ 是单纯形的，此时等号成立。对于每个锥 τ_i，选取一组行 r_1、……、 r_s、 r_{i_1}、……、 $r_{i_{d-s}}$（其中 r_1、……、 r_s 是线性空间的生成元），这些行对应的射线张成与 τ_i 相同的实向量空间:

$$\langle r_1, \ldots, r_s, r_{i_1}, \ldots, r_{i_{d-s}} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \tau_i \rangle_{\mathbb{R}}.$$

将行分别为 r_1、……、r_s、r_{i_1}、……、$r_{i_{d-s}}$ 的矩阵记为 M_i，并定义 $p_i\colon\ \mathbb{R}^{n_C} \to \mathbb{R}^d$ 为到坐标 1、……、s、i_1、……、i_{d-s} 上的投影。回顾一下，根据推论 3.2，不失一般性地，$\Delta(A,\nu_i)$ 是矩阵 M_i 的列向量的凸包。我们通过追踪 $\mathbb{B}$ 中的元素在两种构造中的对应关系，逐点验证 $p_i(\Delta_{\mathbb{B}}(A)) = \Delta(A,\nu_i)$。由于 $\mathbb{B}$ 与 $S(A,\nu_i)$ 之间存在双射，结论得证。考虑 $\mathbf{x}^a \in \mathbb{B}$，则 $\mathsf{New}_{\mathbb{B}}(\mathbf{x}^a) = Ma$。在 $\Delta_{\mathbb{B}}(A)$ 中，元素 $\mathbf{x}^a$ 对应于点 $\frac{1}{a_1+\cdots+a_n}Ma$，并且

$$p_i\left(\frac{1}{a_1+\cdots+a_n}Ma\right) = \frac{1}{a_1+\cdots+a_n}M_ia = \frac{1}{a_1+\cdots+a_n}\nu_i(\mathbf{x}^a) \in \Delta(A,\nu_i),$$

因此 $p_i(\Delta_{\mathbb{B}}(A)) \subset \Delta(A,\nu_i)$。要证明二者相等，只需验证 $\Delta(A,\nu_i)$ 的顶点包含于 $p_i(\Delta_{\mathbb{B}}(A))$ 中。根据附加假设，$\mathsf{in}_C(I)$ 不包含任何变量，我们知道 $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{B}$。将上述计算应用于变量 $x_j = \mathbf{x}^a$，得到:

$$p_i\left(\frac{1}{a_1+\cdots+a_n}Ma\right) = M_ie_j = M_{ij},$$

其中 M_{ij} 是 M_i 的第 j 列，并且根据推论 3.2，它是 $\Delta(A,\nu_i)$ 的一个顶点。 □

例 4.4. 我们继续讨论例 *4.2*。对于极大锥 C，我们选取射线矩阵:

$$M_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意，$(1,0,1) \bmod \mathcal{L}_I = (0,-1,0) \bmod \mathcal{L}_I$，它对应于图 *1* 中的蓝绿色射线。令$\mathbb{B} = \mathbb{B}_C$ 和 $A = \mathbb{C}[x,y,z]/I$。那么

$$\Delta_{\mathbb{B}}(A) = \operatorname{conv}\left(\frac{1}{a+b+c}\binom{a+b+c}{2a+3b\ \ a+c} : \begin{matrix} a+b+c \geq 1, a<3 \\ a,b,c \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{matrix}\right) = \operatorname{conv}\left(\binom{1}{2},\binom{1}{3}\binom{1}{0},\binom{1}{0}\binom{1}{1}\right).$$

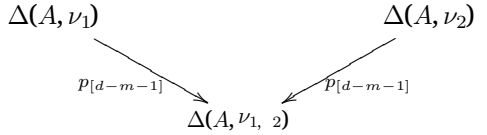
令 p_1 为 $\mathbb{R}^3$ 中沿第三个坐标方向的投影，则

$$p_1(\Delta_{\mathbb{B}}(A)) = \operatorname{conv}\left(\binom{1}{3},\binom{1}{0}\right) = \Delta(A,\nu_\tau).$$

其中 $\tau \in$ 热带簇(I) 是由 $(2,3,0)^T \bmod \mathcal{L}_I$ 张成的极大素锥，如例 *3.3* 所示 .

4.2. **墙穿越公式**。与 C 的面 τ_1、……、τ_q相关联的 Newton–Okounkov 多面体之间由称为**墙穿越公式**的分段线性映射联系起来，该公式由 Escobar 和 Harada 在 [EH20] 中引入。我们简要回顾其构造。

假设 τ_1 和 τ_2 是极大锥 $C \in \mathsf{GF}(I)$的两个相邻面，因此 $\tau := \tau_1 \cap \tau_2$ 是它们共同的一个面。于是我们可以选取射线矩阵 M_1 和 M_2，使它们除最后一行外的所有行都相同。令 $M_{1,2}$ 为由 M_1 和 M_2 共有的 $d-1$ 行组成的矩阵。特别地，我们有两个满秩齐次赋值 $\nu_1 := \nu_{\tau_1}, \nu_2 := \nu_{\tau_2}$: $A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^{d-m}$，以及一个秩几乎满秩的齐次赋值 $\nu_{1,2}\colon\ A\setminus\{0\} \to \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^{d-m-1}$，即其秩为 $d-1$。我们用 $p_{[d-m-1]}\colon\ \mathbb{R}^{d-m} \to \mathbb{R}^{d-m-1}$ 表示到前 $d-m-1$ 个坐标的投影。根据构造（以及推论 3.2），相关联的 Newton–Okounkov 多面体之间有如下关系



特别地，存在分段线性映射 $\varphi_i\colon\ \Delta(A,\nu_{1,2}) \to \mathbb{R}$ 和 $\psi_i\colon\ \Delta(A,\nu_{1,2}) \to \mathbb{R}$，使得$i \in \{1,2\}$

$$\Delta(A,\nu_i) = \left\{(\mathbf{1},v,z) \in \{\mathbf{1}\} \times \mathbb{R}^{d-m-1} \times \mathbb{R} : \begin{matrix} (\mathbf{1},v) \in \Delta(A,\nu_{1,2}) \\ \varphi_i(\mathbf{1},v) \leq z \leq \psi_i(\mathbf{1},v) \end{matrix}\right\}, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{1} = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^m$。根据 [EH20，定理 3.4]，存在一个常数 $\kappa > 0$，使得对所有 $(\mathbf{1},v) \in \Delta(A,\nu_{1,2})$:

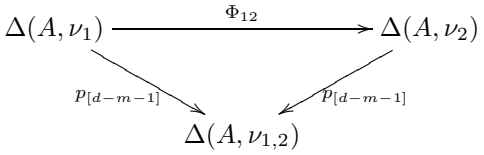
$$\kappa(\psi_1(\mathbf{1},v) - \varphi_1(\mathbf{1},v)) = \psi_2(\mathbf{1},v) - \varphi_2(\mathbf{1},v)$$

我们定义分段线性越墙映射

$$
\begin{aligned}
&S_{12}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d \text{ given by } (\mathbf{1},v,z)\mapsto(\mathbf{1},v,\kappa(z-\varphi_1(\mathbf{1},v))+\varphi_2(\mathbf{1},\mathbf{v}))\\
&F_{12}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d \text{ given by } (\mathbf{1},v,z)\mapsto(\mathbf{1},v,\kappa(\varphi_1(\mathbf{1},v)-z)+\psi_2(\mathbf{1},\mathbf{v})).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

映射 S_{12} 称为**平移**，映射 F_{12} 称为**翻转**。

定理 4.5 （ [EH20]中的定理 2.7）。 设 I 是 S 中的一个（多）齐次理想， C 是$\mathrm{GF}(I)$ 中的一个极大锥，且存在两个极大素锥 τ_1，$\tau_2\subset C\cap\mathrm{Trop}(I)$，它们共享一个公共面 $\tau=\tau_1\cap\tau_2$。设 ν_1，ν_2 和 $\nu_{1,\,2}$ 为相应的齐次赋值。那么，对于$\Phi_{12}\in\{F_{12},S_{12}\}$，相应的 *Newton–Okounkov* 多面体满足如下关系：



而 $p_{[d-m-1]}$ 的纤维的欧几里得长度相等。

例 4.6。 在我们的贯穿示例中，极大锥 $C\in\mathrm{GF}(I)$ 有两个极大素锥作为$\mathrm{Trop}(I)$ 中的面。设 $\tau_1\in\mathrm{Trop}(I)$ 为由 $(2,\ 1,\ 1)^T$ 模 $\mathcal{L}_I$ 生成的锥（图 *1* 中的蓝绿色），而 τ_2 为由 $(2,\ 3,\ 0)^T$ 模 $\mathcal{L}_I$ 生成的锥。那么

$$
\Delta(A,\nu_1)=\mathrm{conv}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)\quad and\quad \Delta(A,\nu_2)=\mathrm{conv}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).
$$

Newton–Okounkov 多面体 $\Delta(A,\ \nu_{1,\ 2})$ 只是点 $\{1\}\in\mathbb{R}$。因此，分段线性函数 φ_i，ψ_i 都是常数：

$$
\begin{aligned}
\Delta(A,\nu_1)&=\{(1,z):\varphi_1(1):=0\le z\le 3=:\psi_1(1)\},\\
\Delta(A,\nu_2)&=\{(1,z):\varphi_2(1):=0\le z\le 1=:\psi_2(1)\}.
\end{aligned}
$$

全局常数可以根据 *Newton–Okounkov* 多面体的体积计算得出（相对于它们所在的、使其成为满维多胞体的环境子空间）。我们有 $\kappa_1\mathrm{vol}(\Delta(A,\ \nu_1))\ =\kappa_2\mathrm{vol}(\Delta(A,\ \nu_2))\ =\deg(y^2z-x^3+z^3)$ 以及 $\kappa=|\kappa_1/\kappa_2|=\frac{1}{3}$，因此

$$
S_{12}:(1,z)\mapsto\left(1,\frac{z}{3}\right),\quad F_{12}:(1,z)\mapsto\left(1,1-\frac{z}{3}\right).
$$

5. 格雷布纳退化族

本节回顾论文 [BMNC21] 中的主要构造。它给出了与极大锥 $C\in\mathrm{GF}(I)$ 相关联的多参数平坦族，其中 $I\subset S$ 是一个齐次理想。我们将看到，这一代数构造与上一节中的多面体对象密切相关。

令 A 为商 S/I。回顾 §2.2 中与权向量 $w\in C^\circ$ 相关的 Gröbner 退化的经典构造，该权向量由商 $S[t]/I^{h;w}$定义。理想 $I^{h;w}$ 定义了平坦族 $\mathrm{Spec}(S[t]/I^{h;w})\ \to\mathrm{Spec}(k[t])$，其在闭点 (t) 上的纤维同构于 $\mathrm{Spec}(A^w)$，其中 $A^w:=S/$属于$w(I)$，而在任意非零闭点 $(t-c)$ 上的纤维同构于 $\mathrm{Spec}(A)$。对于 $\mathrm{GF}(I)$ 中的任意锥， $I^{h;w}$ 的构造以及 [Eis13, Theorem 15.17] 均成立。下文为简便起见，重点讨论极大锥，因为推广到低维锥是直接的。

为推广 $I^{h;w}$ 的构造，我们固定向量 r_1、…、$r_{n_C}\in C$，使得 $\{\overline{r}_1,\dots,\overline{r}_{n_C}\}$是 $\overline{C}$ 的本原射线生成元集合；根据 BMNC21, Lemma 2.13], 这是可能的。令 M 为一个 $(n_C\times n)$ 矩阵，其各行为 r_1、…、r_{n_C}。此外，我们用 $<$ 表示与 C 相容的单项式项序，并用 G 表示相应的约化格罗布纳基。

定义 5.1。 对于 $f=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\ge0}}c_\alpha\mathbf{x}^\alpha\in I$，设 $\mu_M(f):=(\max_{c_\alpha\neq0}\{r_i\cdot\alpha\})_{i=1,\dots,n_C}\in\mathbb{Z}^{n_C\times1}$，因此~$\mu_M($ $f)$ 作为具有 n_C 个条目的列向量。定义 f的**提升** 为多项式 $f_M\in S[t_1,\dots,t_{n_C}]$

由下列公式给出

$$\tilde{f}_M := \tilde{f}_M(\mathbf{t},\mathbf{x}) := f(\mathbf{t}^{-M\cdot e_1}x_1,\ldots,\mathbf{t}^{-M\cdot e_n}x_n)\mathbf{t}^{\mu_M(f)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \mathbf{t}^{-M\cdot\alpha+\mu_M(f)}.$$

类似地，我们将**提升理想** 定义为 $\tilde{I}_M := \left\langle \tilde{f}_M \colon f\in I\right\rangle \subset S[t_1,\ldots,t_{n_C}]$，并将**提升代数**定义为商

$$\tilde{A}_M := S[t_1,\ldots,t_{n_C}]/\tilde{I}_M. \tag{6}$$

尽管按照构造，提升代数依赖于射线矩阵 M 的选择，但可以证明不同的选择会得到相同的代数 [BMNC21，推论 3.10]。关于 $\tilde{}$ 提升理想 I_M 的另一个有用结果是格罗布纳基的显式构造。在 $S[t_1,\ldots,t_{n_C}]$ 上，我们考虑由 S 上的项序 $<$ 诱导的以下项序，该项序对应于 C:

$$\mathbf{x}^\alpha\mathbf{t}^\lambda \ll \mathbf{x}^\beta\mathbf{t}^\mu \quad \text{if and only if} \quad \text{(i) } \mathbf{x}^\alpha < \mathbf{x}^\beta \quad \text{or} \quad \text{(ii) } \mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^\beta \text{ and } \mathbf{t}^\lambda <_{\text{lex}} \mathbf{t}^\mu. \tag{7}$$

于是，根据 [BMNC21，命题 3.9]，相对于 $<$， I 的格罗布纳基 G 中各元素的提升构成了 I_M 关于 $\ll$ 的格罗布纳基。利用该格罗布纳基和 A 的标准单项式基 $\mathbb{B}_C$，可以证明主要结果:

定理 5.2 (见 [BMNC21] 中的定理 3.14)。设 I 是 S 中的齐次理想， $A = S/I$ 是 $\mathrm{GF}(I)$ 中的极大锥，其对应的项序为 $<$； M 是一个$(m\times n)$矩阵，其各行是 $\overline{C}\subset\mathbb{R}^n/\mathcal{L}(I)$ 的本原射线生成元的代表。则:

(i) 代数 $\tilde{A}_M$ 是一个自由的 S-模，其基为 $\mathbb{B}=\mathbb{B}_C$，即相对于中$_C(I)$的标准单项式基。特别地，我们有一个平坦族

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Proj}(\tilde{A}_M) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^{n-1}\times\mathbb{A}^{n_C} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & \swarrow & \\ \mathbb{A}^{n_C} & & \end{array}$$

(ii) 对于 C 的每个面 τ，都存在一个$_\tau\in\mathbb{A}^{n_C}$，使得 $\pi^{-1}(\mathbf{a}_\tau) = \mathrm{Proj}(S/$ 中$_\tau(I))$。特别地，一般纤维同构于$\mathrm{Proj}(A)$ ，并且每个真面$\tau\subset C$都对应一个特殊纤维。

例 5.3. 在我们一直使用的例子 $I=(f:=y^2z-x^3+z^3)$ 中，生成元 f 本身就是 $\mathrm{GF}(I)$ 中每个极大锥的格罗布纳基（对超曲面而言，这一点更普遍地成立）。考虑$\mathrm{GF}(I)$ 中的极大锥 $C\in$，其射线矩阵 M_C 见例 *4.2*。在这一构造中，我们可以省略 M_C 中来自线性空间的射线。因此 $M=\left(\begin{smallmatrix}2&3&0&1&0&1\end{smallmatrix}\right)$ 于是 $\mu_M(f)=\binom{6}{3}$ 并且

$$\tilde{f}_M = f(xt_0^{-1}t_1^{-2}t_2^{-1}, yt_0^{-1}t_1^{-3}, zt_0^{-1}t_2^{-1})t_0^3t_1^6t_2^3 = y^2zt_2^2 - x^3 + z^3t_1^6.$$

回顾例 *4.6* 中的两个极大素锥 $\tau_1,\tau_2\in\mathrm{Trop}(I)$。我们有

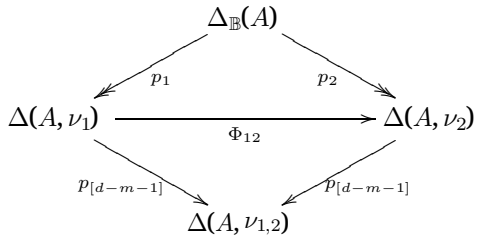
$$\tilde{f}_M|_{(t_1,t_2)=(0,1)} = y^2z - x^3 = \mathrm{in}_{\tau_1}(f) \quad \textit{and} \quad \tilde{f}_M|_{(t_1,t_2)=(1,0)} = -x^3+z^3 = \mathrm{in}_{\tau_2}(f).$$

注意，定理 4.3 可被解释为定理 5.2 的多面体版本。设 $C\in$ GF(I) 为极大锥， τ_1、 τ_2 为 C 的面，且它们是热带簇 Trop(I) 中的极大素锥。记 X_1:=Proj(A_{τ_1}) 和 X_2:=Proj(A_{τ_2})，并设 ν_1 和 ν_2 为相应赋值。回想一下，$\Delta(A,\nu_1)$ 和 $\Delta(A,\nu_2)$ 分别是 X_1 和 X_2 的正规化多面体。我们有如下图表

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \hookrightarrow & \mathrm{Proj}(\tilde{A}_M) & \hookleftarrow & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow \\ \{\mathbf{a}_{\tau_1}\} & \hookrightarrow & \mathbb{A}^{n_C} & \hookleftarrow & \{\mathbf{a}_{\tau_2}\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Delta(A,\nu_1) & & \Delta(A,\nu_2) \\ & {\scriptstyle p_1}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle p_1} & \\ & \Delta_{\mathbb{B}}(A)\subset\mathbb{R}^{n_C} & \end{array}$$

若 τ_1 和 τ_2 相邻，即 $\tau := \tau_1 \cap \tau_2$ 是二者的公共面，则我们还可以使用公式（5）中定义的墙穿越公式 F_{12} 和 S_{12}。设 $\Phi_{12} \in \{F_{12}, S_{12}\}$:

(8)



图表的上方三角形不一定是交换的，以下示例对此进行了说明：

例*5.4.* 设 τ_1、τ_2 和 C 如前几个例子所述。我们此前已计算出多胞体 $\Delta_{\mathbb{B}}(A) = conv\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{0}\\1\end{pmatrix}\right)$、$\Delta(A,\nu_1) = conv\left(\binom{1}{2}, \binom{1}{3}, \binom{1}{0}\right)$，以及 $\Delta(A,\nu_2) = conv\left(\binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right)$，其中所有整点均按照诱导它们的变量 x、y、z 的顺序书写。回顾例 *4.6* 中的映射 S_{12} 和 F_{12}。我们有

$$S_{12}: \binom{1}{2} \mapsto \binom{1}{2/3},\ \binom{1}{3} \mapsto \binom{1}{1},\ \binom{1}{0} \mapsto \binom{1}{0},$$
$$F_{12}: \binom{1}{2} \mapsto \binom{1}{1/3},\ \binom{1}{3} \mapsto \binom{1}{0},\ \binom{1}{0} \mapsto \binom{1}{1}.$$

因此，在这种情况下，F_{12} 和 S_{12} 都无法使(8) 中的上方三角图交换。

然而，针对 $i \in \{1,2\}$ 的双射 $\mathbb{B} \leftrightarrow S(A,\nu_i)$会诱导出一个映射 A_{12}：$S(A,\nu_1) \to S(A,\nu_2)$，使(8) 中的上方三角图交换。这个映射在[EH20] 中称为**代数墙穿越**，它只是这些双射的复合。在特殊情况下，代数墙穿越与翻转映射重合。 [EH20, §5] 给出了一个例子，其中作者证明平面格拉斯曼簇满足这一情形。此外，在这种情况下，翻转映射就是 Fomin–Zelevinsky 的*Fock–Goncharov*热带化（例如参见 [GHK15, Remark 2.3]），对应于其簇突变（例如参见 [FZ02]），如 [BMNC21, §4.6]所示。

例5.5. 代数墙穿越 $A_{12}: S(A,\nu_1) \to S(A,\nu_2)$ 与两者都不同。它只是由 $\mathbb{B}$ 与 $S(A,\nu_1)$ 以及 $S(A,\nu_2)$ 之间的双射所诱导的集合间双射。特别地，我们有

$$A_{12}: \binom{1}{2} \mapsto \binom{1}{1},\ \binom{1}{3} \mapsto \binom{1}{0},\ \binom{1}{0} \mapsto \binom{1}{1}.$$

6. 示例：格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$

本节将命题 3.6 应用于格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$，更准确地说，应用于其关于普吕克嵌入的齐次坐标环。**普吕克代数** $A_{3,6}$ 是多项式环的商

$$S := \mathbb{C}[p_{ijk} : 1 \le i < j < k \le 6]$$

被 **普吕克理想** $I_{3,6}$ 生成，而该理想由以下 34 个普吕克关系最小生成：

$$p_{256}p_{346} - p_{246}p_{356} + p_{236}p_{456} \quad p_{156}p_{346} - p_{146}p_{356} + p_{136}p_{456} \quad p_{256}p_{345} - p_{245}p_{356} + p_{235}p_{456}$$
$$p_{246}p_{345} - p_{245}p_{346} + p_{234}p_{456} \quad p_{236}p_{345} - p_{235}p_{346} + p_{234}p_{356} \quad p_{156}p_{345} - p_{145}p_{356} + p_{135}p_{456}$$
$$p_{146}p_{345} - p_{145}p_{346} + p_{134}p_{456} \quad p_{136}p_{345} - p_{135}p_{346} + p_{134}p_{356} \quad p_{156}p_{246} - p_{146}p_{256} + p_{126}p_{456}$$
$$p_{236}p_{245} - p_{235}p_{246} + p_{234}p_{256} \quad p_{156}p_{245} - p_{145}p_{256} + p_{125}p_{456} \quad p_{146}p_{245} - p_{145}p_{246} + p_{124}p_{456}$$
$$p_{126}p_{245} - p_{125}p_{246} + p_{124}p_{256} \quad p_{156}p_{236} - p_{136}p_{256} + p_{126}p_{356} \quad p_{146}p_{236} - p_{136}p_{246} + p_{126}p_{346}$$
$$p_{156}p_{235} - p_{135}p_{256} + p_{125}p_{356} \quad p_{145}p_{235} - p_{135}p_{245} + p_{125}p_{345} \quad p_{136}p_{235} - p_{135}p_{236} + p_{123}p_{356}$$
$$p_{126}p_{235} - p_{125}p_{236} + p_{123}p_{256} \quad p_{146}p_{234} - p_{134}p_{246} + p_{124}p_{346} \quad p_{145}p_{234} - p_{134}p_{245} + p_{124}p_{345}$$
$$p_{136}p_{234} - p_{134}p_{236} + p_{123}p_{346} \quad p_{135}p_{234} - p_{134}p_{235} + p_{123}p_{345} \quad p_{126}p_{234} - p_{124}p_{236} + p_{123}p_{246}$$
$$p_{125}p_{234} - p_{124}p_{235} + p_{123}p_{245} \quad p_{136}p_{145} - p_{135}p_{146} + p_{134}p_{156} \quad p_{126}p_{145} - p_{125}p_{146} + p_{124}p_{156}$$
$$p_{126}p_{135} - p_{125}p_{136} + p_{123}p_{156} \quad p_{126}p_{134} - p_{124}p_{136} + p_{123}p_{146} \quad p_{125}p_{134} - p_{124}p_{135} + p_{123}p_{145}$$

$$p_{126}p_{345} - p_{125}p_{346} + p_{124}p_{356} - p_{123}p_{456} \quad p_{136}p_{245} - p_{135}p_{246} + p_{134}p_{256} + p_{123}p_{456}$$
$$p_{146}p_{235} - p_{135}p_{246} + p_{125}p_{346} + p_{123}p_{456} \quad p_{156}p_{234} - p_{134}p_{256} + p_{124}p_{356} - p_{123}p_{456}$$
$$p_{145}p_{236} - p_{135}p_{246} + p_{125}p_{346} + p_{156}p_{234}$$

$I_{3的6}$ 的热带化早在2004年便由Speyer和Sturmfels计算得出，他们发现Trop($I_{3的6}$）中存在若干极大素锥， [SS04, §5]。下面简要总结他们的发现。

定理 6.1。 热带格拉斯曼流形$\mathrm{Trop}(I_{3的6}) \subset \mathbb{R}^{20}/\mathcal{L}_{I_{3,\,6}}$ 是一个四维扇，包含*1005*个极大锥，其中*990*个为素锥。这*65*条射线由以下部分组成：

*(1) 20*个标准基元素 e_{ijk}、 $1 \le i < j < k \le 6$；*(2) 15*个形如 $f_{ij} = \sum_{k \notin \{i,j\}} e_{ijk}$、 $1 \le i < j \le 6$ 的向量；*(3)* 与*15*个三划分相关联的*30*个向量， $\{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\, \{i_5, i_6\}\}$ 每个划分 [6] 分别定义两条射线$g_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} := f_{i_5 i_6} + e_{i_3 i_4 i_5} + e_{i_3 i_4 i_6}$ 和 $g_{i_1 i_2 i_5 i_6 i_3 i_4} := f_{i_3 i_4} + e_{i_3 i_5 i_6} + e_{i_4 i_5 i_6}$。

普吕克坐标的指数集合上的对称群作用导致$\mathrm{Trop}(I_{3,6})$不具对称性。极大锥分为七个轨道，其中六个由素锥构成：

EEEE：有 *30* 个类型为 $\{e_{123}, e_{145}, e_{246}, e_{356}\}$ 的单纯素锥；*EEFF1*：有 *90* 个类型为 $\{e_{123}, e_{456}, f_{56}, f_{12}\}$ 的单纯素锥；*EEFF2*：有 *90* 个类型为 $\{e_{125}, e_{345}, f_{12}, f_{34}\}$ 的单纯素锥；*EFFG*：有 *180* 个类型为 $\{e_{345}, f_{34}, f_{12}, g_{123456}\}$ 的单纯素锥；*EEEG*：有 *240* 个类型为 $\{e_{126}, e_{134}, e_{356}, g_{125634}\}$ 的单纯素锥；*EEFG*：有 *360* 个类型为 $\{e_{234}, e_{125}, f_{34}, g_{125634}\}$ 的单纯素锥；*FFFGG*：有 *15* 个类型为 $\{f_{56}, f_{34}, f_{12}, g_{123456}, g_{125634}\}$ 的非单纯非素锥。

已知许多适用于 $A_{3,6}$ 的（满秩齐次）赋值族（例如参见 [Bos21a, FFL17, MS18] ），并且只要普吕克坐标构成 Khovanskii 基，定理 3.5 就会给出与之关联的热带簇 Trop($I_{3,6}$）中的唯一极大素锥。然而，并非所有已知的 $A_{3,6}$ 上的赋值都以普吕克坐标为 Khovanskii 基。例如，可以考虑 [RW19, §9]，其中 Rietsch 和 Williams 展示了一个由*plabic* 图诱导的赋值实例。此例可以推广到更高阶的格拉斯曼流形，参见 [Bos21b, §5]。关于更多细节，包括如何从 plabic 图构造赋值的背景知识，请参阅上述文献。

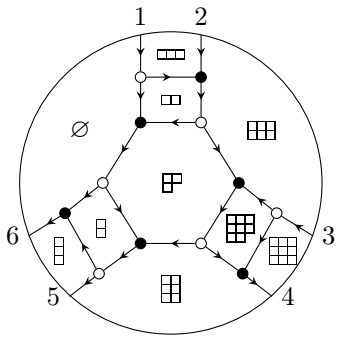
例6.2. 令 $\nu_G : A_{3,6} \to \mathbb{Z}^9$ 为与表*1*左侧的 *plabic* 图相关联的 *Rietsch–Williams*赋值。普吕克坐标在该赋值 ν_G 下的取值见表*1*。该赋值是 *Khovanskii*有限的，但普吕克坐标并不构成 *Khovanskii* 基。在 $\Delta(A_{3,6}, \nu_G)$ 的顶点中，有一个非整数顶点，其形式为

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

它由牛顿–奥科恩科夫锥中由 $\nu_G(\bar{p}_{124}\bar{p}_{356} - \bar{p}_{123}\bar{p}_{456})$ 生成的射线得到。

本节旨在说明如何应用命题 3.6 找到一个合适的热带化，在该热带化中，Khovanskii有限赋值 ν_G 与一个极大素锥相关联。

6.1. 簇嵌入。格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$ 具有簇结构，Scott 首先在 [Sco06] 中展示了这一结构。更确切地说，代数 $A_{3,\,6}$ 是一个簇代数，大致而言，这意味着它可以通过称为种子的特定极大代数独立元素集合，经由称为突变 [FZ02]的组合过程递归构造。种子中的元素称为簇变量。对于 $A_{3,\,6}$，共有 22 个簇变量，其中 20 个是普吕克坐标，另外两个是次数为二的生成元，记作 X 和 Y，它们是普吕克坐标的二项式。特别地， Y 与例6.2中的元素 $\bar{p}_{124}\bar{p}_{356} - \bar{p}_{123}\bar{p}_{456}$ 一致。



$\bar{p}_{123}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{p}_{124}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$\bar{p}_{125}$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\bar{p}_{126}$	0	0	1	1	1	0	0	1	0
$\bar{p}_{134}$	0	1	1	0	0	0	0	1	0
$\bar{p}_{135}$	0	1	1	1	0	0	0	1	0
$\bar{p}_{136}$	0	1	1	1	1	0	0	1	0
$\bar{p}_{145}$	0	1	2	1	0	0	0	1	0
$\bar{p}_{146}$	0	1	2	1	1	0	0	1	0
$\bar{p}_{156}$	0	1	2	2	0	0	1	2	1
$\bar{p}_{234}$	1	1	1	0	0	0	0	1	0
$\bar{p}_{235}$	1	1	1	1	0	0	0	1	0
$\bar{p}_{236}$	1	1	1	1	1	0	0	1	0
$\bar{p}_{245}$	1	1	2	1	0	0	0	1	0
$\bar{p}_{246}$	1	1	2	1	1	0	0	1	0
$\bar{p}_{256}$	1	1	2	2	1	0	1	2	1
$\bar{p}_{345}$	1	2	2	1	0	1	1	2	0
$\bar{p}_{346}$	1	2	2	1	1	1	1	2	0
$\bar{p}_{356}$	1	2	2	2	1	1	1	2	1
$\bar{p}_{456}$	1	2	3	2	1	1	1	2	1

表1. 对于 $\mathrm{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$，使 $\Delta(A_{3,6}, \nu_G)$ 非整的 plabic 图 G（见[RW19, §9]），以及如例6.2中所示赋值 $\mathfrak{v}_G$ 下普吕克坐标的像。

我们将 $A_{3,\ 6}$ 的表示改为 $\mathbb{C}[p_{ijk}, X, Y\colon\ 1 \le i < j < k \le 6]/J_{3,\ 6}$，其中理想$J_{3,\ 6}$ 由以下 37 个二次多项式极小生成:

$$
\begin{array}{lll}
p_{145}p_{236} - p_{123}p_{456} - X, & p_{124}p_{356} - p_{123}p_{456} - Y, & p_{136}p_{245} - p_{126}p_{345} - X, \\
p_{125}p_{346} - p_{126}p_{345} - Y, & p_{146}p_{235} - p_{156}p_{234} - X, & p_{134}p_{256} - p_{156}p_{234} - Y, \\
p_{246}p_{356} - p_{346}p_{256} - p_{236}p_{456}, & p_{245}p_{356} - p_{345}p_{256} - p_{235}p_{456}, & p_{146}p_{356} - p_{346}p_{156} - p_{136}p_{456}, \\
p_{145}p_{356} - p_{345}p_{156} - p_{135}p_{456}, & p_{245}p_{346} - p_{345}p_{246} - p_{234}p_{456}, & p_{235}p_{346} - p_{345}p_{236} - p_{234}p_{356}, \\
p_{145}p_{346} - p_{345}p_{146} - p_{134}p_{456}, & p_{135}p_{346} - p_{345}p_{136} - p_{134}p_{356}, & p_{146}p_{256} - p_{246}p_{156} - p_{126}p_{456}, \\
p_{145}p_{256} - p_{245}p_{156} - p_{125}p_{456}, & p_{136}p_{256} - p_{236}p_{156} - p_{126}p_{356}, & p_{135}p_{256} - p_{235}p_{156} - p_{125}p_{356}, \\
p_{235}p_{246} - p_{245}p_{236} - p_{234}p_{256}, & p_{145}p_{246} - p_{245}p_{146} - p_{124}p_{456}, & p_{136}p_{246} - p_{236}p_{146} - p_{126}p_{346}, \\
p_{134}p_{246} - p_{234}p_{146} - p_{124}p_{346}, & p_{125}p_{246} - p_{245}p_{126} - p_{124}p_{256}, & p_{134}p_{245} - p_{234}p_{145} - p_{124}p_{345}, \\
p_{135}p_{245} - p_{235}p_{145} - p_{125}p_{345}, & p_{135}p_{236} - p_{235}p_{136} - p_{123}p_{356}, & p_{134}p_{236} - p_{234}p_{136} - p_{123}p_{346}, \\
p_{125}p_{236} - p_{235}p_{126} - p_{123}p_{256}, & p_{124}p_{236} - p_{234}p_{126} - p_{123}p_{246}, & p_{134}p_{235} - p_{234}p_{135} - p_{123}p_{345}, \\
p_{124}p_{235} - p_{234}p_{125} - p_{123}p_{245}, & p_{135}p_{146} - p_{145}p_{136} - p_{134}p_{156}, & p_{125}p_{146} - p_{145}p_{126} - p_{124}p_{156}, \\
p_{125}p_{136} - p_{135}p_{126} - p_{123}p_{156}, & p_{124}p_{136} - p_{134}p_{126} - p_{123}p_{146}, & p_{124}p_{135} - p_{134}p_{125} - p_{123}p_{145},
\end{array}
$$

$$
p_{135}p_{246} - p_{156}p_{234} - Y - p_{123}p_{456} - X - p_{126}p_{345}.
$$

理想 $J_{3,\ 6}$ 的热带化尚未被完全知晓，但其热带化与其格罗布纳扇中的一个特定极大锥的交集已在 [BMNC21, §4.4] 中计算出来。我们总结他们的研究结果。

令 $\{e_{123}, \ldots, e_{456}, e_x, e_y\}$ 表示 $\mathbb{R}^{22}$ 的标准基。我们将 f_{ij} 和 g_{abcdef} 中的元素定义为与 $\mathbb{R}^20$ 中相同的标准基元素线性组合（稍微滥用一下记号）。那么，线性空间 $\mathcal{L}_{J_{3,\ 6}}$ 是六维的，其张成空间为

$$
E_i := \sum_{k,j \neq i} e_{ijk} + e_x + e_y.
$$

理想 $J_{3,\ 6}$ 在群 $\Sigma := \langle$(123456),(16)(25)(34)$\rangle \subset S_6$ 的作用下保持不变。特别地，这一作用可转化为对 Trop($J_{3,\ 6}$) 的作用。

定理 6.3 (§4.4 见 [BMNC21])。 存在一个 ***distinguished*** 最大单纯形锥 $C \in \mathrm{GF}(J_{3,6})$，它在 Σ 的作用下保持不变，其射线生成元为

(1) 6 个形如 $e_{i,i+1,i+2}$ 的元素，其中 $i \in \mathbb{Z}_6$;

(2) 6 个形如 $f_{i,i+1} + \begin{cases} e_y & i \\ e_x & i \end{cases}$ 的元素，奇偶相间;

(3) 2 个形如 $g_{123456} + e_y$ 和 $g_{456123} + e_x$ 的元素;

(4) 2 个形如 $g_{654321} + e_y$ 和 $g_{321654} + e_x$ 的元素。

全部 16 条射线也是 热带簇($J_{3,6}$) 的射线（更准确地说，是其全正部分的射线）。交集$C \cap$热带簇($J_{3,\ 6}$) 包含 热带簇($J_{3,6}$) 的 *50* 个最大单纯形锥，且它们都是素的。具体而言，我们发现

(1) 6 个位于 $\{e_{123}, e_{156}, f_{23} + e_x, f_{56} + e_y\}$ 的 Σ-轨道中，并投影到 ***EEFF1*** 型锥上；*(2) 12* 个位于 $\{e_{123}, e_{456}, f_{12} + e_y, f_{56} + e_y\}$ 和 $\{f_{34} + e_y, f_{16} + e_x, e_{156}, e_{234}\}$ 的 Σ-轨道中，并投影到 ***EEFF2*** 型锥上；*(3) 12* 个位于 $\{e_{123}, g_{321654} + e_x, f_{23} + e_x, f_{45} + e_x\}$ 和 $\{f_{34} + e_y, g_{123456} + e_y, f_{12} + e_y, e_{345}\}$的 Σ-轨道中，并投影到 ***EFFG*** 型锥上；*(4) 4* 个位于 $\{e_{123}, g_{123456} + e_y, e_{156}, e_{345}\}$ 的 Σ-轨道中，并投影到 ***EEEG*** 型锥上；*(5) 12* 个位于 $\{g_{456123} + e_x, e_{456}, f_{23} + e_x, e_{234}\}$ 和 $\{g_{654321} + e_y, f_{56} + e_y, e_{456}, e_{234}\}$的 Σ-轨道中，并投影到 ***EEFG*** 型锥上；*(6) 4* 个位于 $\{f_{45} + e_x, f_{16} + e_x, f_{23} + e_x, g_{321654} + e_x\}$ 的 Σ-轨道中，并投影到 ***FFFGG*** 型双棱锥的极大锥内部的 ***FFFG*** 型棱锥上。

这里的投影指投影 $\mathbb{R}^{22} \supset$ 热带簇($J_{3,\ 6}$) $\to$ 热带簇($I_{3,\ 6}$) $\subset \mathbb{R}^{20}$。

理想 $J_{3,\ 6}$ 相比理想 $I_{3,\ 6}$有以下优势:

推论 6.4。 热带化 热带簇($J_{3,\ 6}$) 包含与 $A_{3,\ 6}$ 上所有 ***Khovanskii*** 有限赋值相关联的极大素锥，其中 $\{p_{123}, \ldots, p_{456}, X, Y\}$ 是一个 ***Khovanskii*** 基。特别地，这包括所有与 $\mathrm{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$ 的 ***plabic*** 图相关联的赋值。

特别地，在热带簇($J_{3,\ 6}$)中，我们发现一个与例6.2中的赋值相关联的极大素锥。它对应于射线为 $\{f_{45} + e_x, f_{16} + e_x, f_{23} + e_x, g_{456123} + e_x\}$ 的锥。

参考文献

[AB05] Valery Alexeev 和 Michel Brion. 球面簇的环面退化. *Selecta Mathematica*, 10(4):453–478, 2005年. [ACGK12] Mohammad Akhtar、Tom Coates、Sergey Galkin 和 Alexander M. Kasprzyk. 闵可夫斯基多项式与突变. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 8:论文 094, 17, 2012年. [And13] Dave Anderson. 奥昆科夫体与环面退化. *Mathematische Annalen*, 356 1202, 2013 3 1183( ): – .[Bat04] Victor V. Batyrev. 法诺簇的环面退化与镜像流形的构造. 载于法诺会议，第 109–122 页. 都灵大学，都灵，2004年. [Bay82] David Allen Bayer. 除法算法与希尔伯特概形. ProQuest LLC, 美国密歇根州安娜堡, 1982. 博士论文——哈佛大学. [BCFKvS00] Victor V. Batyrev、Ionuţ Ciocan-Fontanine、Bumsig Kim 和 Duco van Straten. 镜像对称与部分旗流形的环面退化.*Acta Math.*, 184(1):1–39, 2000. [Ber17] Daniel Irving Bernstein. 树度量的完备化与秩 2 13, 2017 533 1 矩阵. *Linear Algebra Appl.*, : – .[BFF+18] L. Bossinger、X. Fang、G. Fourier、M. Hering 和 M. Lanini. 通过 plabic 图实现 Gr(2, n) 和 Gr(3, 6) 的环面退化. *Ann. Comb.*, 22(3):491–512, 2018年. [BFMN20] Lara Bossinger 、 Bosco Frías-Medina 、 Timothy Magee 和 Alfredo Nájera Chávez. 簇簇的环面退化与簇对偶 . *Compos. Math.*, 156(10):2149–2206, 2020. [BG09] Winfried Bruns 和 Joseph Gubeladze. 多胞体、环与 K 理论 . 纽约州纽约: Springer，2009年. [BJS+07] T. Bogart、A. N. Jensen、D. Speyer、B. Sturmfels 和 R. R. Thomas. 热带簇的计算. *J. Symbolic Comput.*, 42(1-2):54–73, 2007. [BLMM17] Lara Bossinger、Sara Lamboglia、Kalina Mincheva 和 Fatemeh Mohammadi. 旗簇环面退化的计算. 载于组合代数几何，Fields Inst. Commun. 第 80 卷，第 247–281 页. Fields 数学科学研究所，多伦多，安大略省，2017年.

[BMNC21] L. Bossinger、F. Mohammadi 和 A. Nájera-Chávez. 格雷布纳退化族、格拉斯曼流形与泛簇代数. SIGMA, 17(059):46, 2021. [Bos21a] Lara Bossinger. 双有理序列与热带格拉斯曼流形. J. Algebra, 585:784–803, 2021. [Bos21b] Lara Bossinger. 满秩赋值与环面初始理想. 《国际数学研究通知》, 04 2021. rnaa071.[BSW20] Micheal Burr、Frank Sottile 和 Elise Walker. 基于 Khovanskii 基的数值同伦. arXiv:2008.*13055* [math.AG], 2020. [Cal02] Philippe Caldero. 舒伯特簇的环面退化. 《变换群》, 7(1):51–60, 2002. [CLO15] David A. Cox、John Little 和 Donal O'Shea. 理想、簇与算法. 《数学本科生教材》. Springer, Cham, 第四版，2015年. 计算代数几何与交换代数导论.[CM97] Stéphane Collart 和 Daniel Mall. 多项式理想的环面退化与扇的几何局部化. J. Symbolic Comput., 24(3-4):443–464, 1997. 计算代数与数论（伦敦，1993）. [Dol82] Igor Dolgachev. 加权射影簇. 载于《群作用与向量场》（温哥华，不列颠哥伦比亚省，1981），《数学讲义》第 956 卷，第 34–71 页. Springer, 柏林，1982年.[EH20] L. Escobar 和 M. Harada. Newton–Okounkov 体与热带格拉斯曼流形的壁穿越. Int. Math. Res. Not., 第 rnaa230 页, 09 2020.[Eis13] David Eisenbud. 交换代数：以代数几何为视角，第 150 卷. Springer Science & Business Media, 2013年.[EKL06] Manfred Einsiedler、Mikhail Kapranov 和 Douglas Lind. 非阿基米德触角与热带簇. 《纯粹与应用数学杂志》, 601:139–157, 2006年. [FFL11] Evgeny Feigin、Ghislain Fourier 和 Peter Littelmann. PBW 过滤与 A_n 型不可约模的基. Transformation Groups, 16(1):71–89, 2011. [FFL17] Xin Fang、Ghislain Fourier 和 Peter Littelmann. 由双有理序列导出的本质基与环面退化. 《数学进展》, 312:107–149, 2017年. [FLP18] Xin Fang、Peter Littelmann 和 Milena Pabiniak. 牛顿-奥昆科夫体中的单形与余伴随轨道的格罗莫夫宽度. 《伦敦数学学会通报》, 50(2):202–218, 2018年. [FOOO11] Kenji Fukaya、Yong-Geun Oh、Hiroshi Ohta 和 Kaoru Ono. 环面退化与 S2×S2 中不可移动拉格朗日环面. 《国际数学研究通知》, 2012(13):2942–2993, 06 2011.[FR16] Tyler Foster 和 Dhruv Ranganathan. Hahn 解析化与高秩热带簇的连通性. Manuscripta Math., 151(3-4):353–374, 2016. [FZ02] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky. 簇代数 I: 基础. 《美国数学会杂志》, 15 529, 2002 2 497( ): – .[GHK15] Mark Gross、Paul Hacking 和 Sean Keel. 簇代数的双有理几何. 《代数几何》, 2(2):137– 175, 2015.[GHKK18] Mark Gross 、 Paul Hacking 、 Sean Keel 和 Maxim Kontsevich. 簇代数的典范基. 《美国数学会杂志》, 31(2):497–608, 2018年. [Giv97] Alexander Givental. 驻相积分、量子 Toda 格、旗流形与镜像猜想. 载于《奇点理论专题》，美国数学会译丛第 2 辑第 180 卷，第 103–115 页. 美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1997年. [GL96] Nicolae Gonciulea 和 Venkatramani Lakshmibai. 旗簇与舒伯特簇退化为环面簇. Transformation Groups, 1(3):215–248, 1996年. [GS11] Mark Gross 和 Bernd Siebert. 《环面退化导论》. 载于《微分几何综述》第 XVI 卷：特殊整体性的几何与相关主题，《微分几何综述》第 16 卷，第 43–78 页. Int. Press, Somerville, MA, 2011年.[HH11] Jürgen Herzog 和 Takayuki Hibi. 单项式理想，《数学研究生教材》第 260 卷. Springer-Verlag London, Ltd., 伦敦，2011年. [HJL+09] Roger Howe、Steven Jackson、Soo Teck Lee、Eng-Chye Tan 和 Jeb Willenbring. 分支代数的环面退化. 《数学进展》, 220(6):1809–1841, 2009年. [HK14] Mark D. Hamilton 和 Hiroshi Konno. 通过环面退化，旗流形上的 Kähler 极化收敛至实极化. J. Symplectic Geom., 12(3):473–509, 2014. [HK15] Megumi Harada 和 Kiumars Kaveh. 可积系统、环面退化与奥昆科夫体. 《数学发明》, 202(3):927–985, 2015. [HP18] Iva Halacheva 和 Milena Pabiniak. 辛群余伴随轨道的格罗莫夫宽度. Pacific J. Math., 295(2):403–420, 2018年. [IW20] Nathan Ilten 和 Milena Wrobel. Khovanskii 有限赋值、有理曲线与环面作用. 《组合代数杂志》, 4(2):141–166, 2020. [Kav15] Kiumars Kaveh. 晶体基与牛顿-奥昆科夫体. 《杜克数学杂志》, 164(13):2461–2506, 2015. [Kav19] Kiumars Kaveh. 环面退化与光滑射影簇的辛几何. J. Lond. Math. Soc. (2), 99(2):377–402, 2019. [KK12] Kiumars Kaveh 和 A. G. Khovanskii. 牛顿-奥昆科夫体、整点半群、分次代数与交理论. 《数学年刊》 (2), 176(2):925–978, 2012年. [KL17] Alex Küronya 和 Victor Lozovanu. 无穷小牛顿-奥昆科夫体与射流分离. 《杜克数学杂志》, 166(7):1349–1376, 2017.

[KM05] Mikhail Kogan 和 Ezra Miller。《舒伯特簇的环面退化与 Gelfand–Tsetlin 多面体》。《数学进展》193(1):1–17，2005年。[KM19] Kiumars Kaveh 和 Christopher Manon。《Khovanskii 基、高秩赋值与热带几何》。《SIAM 应用代数与几何杂志》3(2):292–336，2019年。[KMM17] Kiumars Kaveh、Christopher Manon 和 Takuya Murata。《射影簇向复杂度一的 t-簇的退化》。arXiv 预印本 arXiv:1708.*02698* [math.AG], 2017。[KMS15] Maria Kateri、Fatemeh Mohammadi 和 Bernd Sturmfels。《一族准对称模型》。《J. Algebr. Stat.》6(1):1–16，2015年。[LM09] Robert Lazarsfeld 和 Mircea Mustaţă。《与线性系相关的凸体》。《Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)》42(5):783–835，2009年。[MR88] Teo Mora 和 Lorenzo Robbiano。《理想的格罗布纳扇》。《J. Symb. Comput.》6(2-3):183–208，1988年。[MS18] Fatemeh Mohammadi 和 Kristin Shaw。《由匹配场得到的格拉斯曼流形的环面退化》。arXiv 预印本 arXiv:1809.01026，2018年。[Nis15] Takeo Nishinou。《Fano 流形的环面退化、热带曲线与 Gromov-Witten 不变量》。《Canad. J. Math.》67(3):667–695，2015年。[NNU12] Takeo Nishinou、Yuichi Nohara 和 Kazushi Ueda。《通过环面退化得到势函数》。《Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.》88(2):31–33，2012年。[Oko98] Andrei Okounkov。《重数与牛顿多面体》。载于《Kirillov 表示论研讨班》，第 181 卷《Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2》，第 231–244 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998年。[RW19] K. Rietsch 和 L. Williams。《格拉斯曼流形的 Newton-Okounkov 体、簇对偶与镜像对称》。《杜克数学杂志》168(18):3437–3527，2019年。[Sco06] Joshua S. Scott。《格拉斯曼流形与簇代数》。《Proc. London Math. Soc. (3)》92(2):345–380，2006年。[SS04] David Speyer 和 Bernd Sturmfels。《热带格拉斯曼流形》。《Advances in Geometry》4 411，2004 3 389( ): – 。[Stu96] Bernd Sturmfels。《格罗布纳基与凸多面体》，大学讲座丛书第 8 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1996年。

墨西哥国立自治大学数学研究所瓦哈卡分部，León 2，楼上，历史中心，68000 瓦哈卡，墨西哥电子邮箱地址：lara@im.unam.mx