arXiv:2301.02550v1 [math.AG] 6 Jan 2023

普遍K3曲面上的微分形式

SHOUHEI MA

摘要。我们给出了带标记点的K3曲面模空间的光滑射影模型上全纯微分形式的消失与分类结果。我们证明，当 $0 < k < 10$ 时不存在非零的全纯 k-形式，并且当 k 为偶数 > 19时也不存在。在其余情形下，我们给出了全纯 k-形式空间与模群的向量值模形式空间（$10 \le k \le 18$）或标量值尖点形式空间（k 为奇数 ≥ 19）之间的同构。事实上，这些结果在格极化的一般情形下也得到了证明。

1. 引言

令$\mathcal{F}_{g,n}$ 为亏格为 g 的 n 点标记 K3 曲面模空间 > 2，即其带有次数为 $2g - 2$的本原极化。它是一个维数为 $19 + 2n$ 的拟射影簇，并有一个自然态射$\mathcal{F}_{g,n} \to \mathcal{F}_g$ 到亏格为 g 的 K3 曲面模空间 $\mathcal{F}_g$，该态射一般是一个 $K3^n$-纤维化。本文研究$\mathcal{F}_{g,n}$的光滑射影模型上的全纯微分形式。它们不依赖于光滑射影模型的选取，因此是$\mathcal{F}_{g,n}$的基本双有理不变量。我们证明了约一半次数的消失结果，并对其余次数给出了与周期域上的模形式之间的对应关系。

我们的主要结果表述如下。

定理 1.1。设 $\mathcal{F}_{g,n}$ 是 $\mathcal{F}_{g,n}$ 的一个光滑射影模型，且 $g > 2$。那么我们有一个自然同构

$$H^0(\bar{\mathcal{F}}_{g,n}, \Omega^k) \simeq \begin{cases} 0 & 0 < k \le 9 \\ M_{\wedge^k,k}(\Gamma_g) & 10 \le k \le 18 \\ 0 & k > 19,\ k \in 2\mathbb{Z} \\ S_{19+m}(\Gamma_g, \det) \otimes \mathbb{C}\mathcal{S}_{n,m} & k = 19 + 2m,\ 0 \le m \le n \end{cases} \tag{1.1}$$

这里，Γ_g 是亏格为 g 的 K3 曲面的模群，其定义为 $O^+(L_g) \to O(L_g^\vee/L_g)$ 的核，其中 $L_g = 2U \oplus 2E_8 \oplus \langle 2 - 2g \rangle$ 是亏格为 g 的 K3 曲面的周期格。在第二种情况下，$M_{\wedge^k,\ k}(\Gamma_g)$ 表示权为 $(\wedge^k, k)$ 的向量值模形式空间，定义在

2020年数学主题分类：14J28、14J15、11F55。获科学研究费补助金 21H00971and 20H00112 资助。

Γ_g ([4]) 上。最后一种情况下，$S_{19+m}(\Gamma_g,\det)$ 表示权为 $19+m$、特征标为行列式特征标的尖点形式空间，定义在 Γ_g 上；$\mathcal{S}_{n,m}$表示陪集 $S_n/(S_m\times S_{n-m})$。定理 1.1 实际上是在格极化的一般情形下表述并证明的（定理 2.6）。

对于最高次数 $k=19+2n$ 的情形，即典范形式的情形，同构 (1.1) 已在 [2] 中得到证明。定理 1.1 将这一结果推广到了所有次数 $k<19+2n$。右侧的空间也可以从几何角度作如下解释。当 $k\le 18$ 时，$M_{\wedge^k,k}(\Gamma_g)$ 可识别为 $\mathcal{F}_g$ 的一个光滑射影模型上的全纯 k-形式空间，并经由 $\mathcal{F}_{g,n}\to\mathcal{F}_g$ 拉回。当 $k=19+2m$ 时，$S_{19+m}(\Gamma_g,\text{行列式})$ 可识别为 $\mathcal{F}_{g,m}$ 上的典范形式空间，而张量积 $S_{19+m}(\Gamma_g,\text{行列式})\otimes\mathbb{C}\mathcal{S}_{n,m}$ 则是由各种投影 $\mathcal{F}_{g,n}\to\mathcal{F}_{g,m}$ 拉回的这类典范形式的直和。因此，定理 1.1 可视为一种分类结果：它表明，除典范形式之外，模空间之塔 $(\mathcal{F}_{g,n})_n$ 上基本不存在新的微分形式。事实上，证明正是按照这一思路展开的。

对于每个充分大的 l，空间 $S_l(\Gamma_g,\det)$ 均非零，因此当 $k\ge 19$ 为奇数时，空间 $H^0(\bar{\mathcal{F}}_{g,n},\text{微分形式}^k)$ 通常非零（至少在 k 较大时如此）。另一方面，目前尚不清楚在 $k\le 18$属于范围 $10\le$ 时，$M_{\wedge^k,k}(\Gamma_g)$ 是否为零。这是向量值正交模形式理论中的一个研究课题。

当 $k=19+2m$ 时，同构 (1.1) 是一个 S_n-等变同构；S_n 通过对$\mathcal{F}_{g,n}$的置换作用于 $H^0(\bar{\mathcal{F}}_{g,n},\text{微分形式}^k)$，而它通过对陪集$\mathcal{S}_{n,m}=S_n/(S_m\times S_{n-m})$的自然作用于 $S_{19+m}(\Gamma_g,\det)\otimes\mathbb{C}\mathcal{S}_{n,m}$。因此，取 S_n的不变部分，我们得到无序带标记点模空间$\mathcal{F}_{g,n}/S_n$的以下更简洁结果；该空间双有理地是一个在 $\mathcal{F}_g$ 上的 $K3^{[n]}$-纤维化。

推论 1.2. 设 $\mathcal{F}_{g,n}/S_n$ 是 $\overline{\mathcal{F}_{g,n}/S_n}$ 的光滑射影模型。那么我们有一个自然同构

$$H^0(\overline{\mathcal{F}_{g,n}/\mathfrak{S}_n},\Omega^k)\simeq\begin{cases}0 & 0<k\le 9\\ M_{\wedge^k,k}(\Gamma_g) & 10\le k\le 18\\ 0 & k>19,\ k\in 2\mathbb{Z}\\ S_{19+m}(\Gamma_g,\det) & k=19+2m,\ 0\le m\le n\end{cases}$$

通用 K3 曲面 $\mathcal{F}_{g,1}$ 是椭圆模曲面（[6]）的类比，而一般 n 的模空间 $\mathcal{F}_{g,n}$ 则是模曲线上所谓久贺簇（[7]）的类比。从椭圆模曲面的情形 [6], 出发，久贺簇上的全纯微分形式已用椭圆模形式加以描述：[7] 针对典范形式，[1] 针对较低次数的情形（描述得多少有些隐含）。定理 1.1 可视为这些结果的 K3 版本。

最后补充一点，鉴于通用 K3 曲面与椭圆模曲面之间的类比，考虑到椭圆模曲面具有最大皮卡数这一经典事实（[6]），现在引出了这样一个问题：$H^{k,\,0}(\bar{\mathcal{F}}_{g,\,n}) \oplus H^{0,\,k}(\bar{\mathcal{F}}_{g,\,n})$ 是否是 $H^k(\bar{\mathcal{F}}_{g,\,n},\mathbb{C})$ 的一个子 $\mathbb{Q}$-霍奇结构。这与光滑射影模型 $\mathcal{F}_{g,\,n}$ 的选择无关。

本文其余部分将用于证明定理 1.1。在 §2.1 中，我们计算与某类 $K3^n$-纤维化相关的全纯 Leray 谱序列的一部分。这是证明的主要步骤。在 §2.2 中，我们研究这类纤维化的紧化上的微分形式。在 §2.3 中，我们结合 §2.2 的结果与 [5], [2], [3], [4] 中的一些结果，推导出（推广后的）定理 1.1。当从上下文中可以明确看出簇 X 时，我们有时会在记号 Ω^k_X 中省略下标 X。

2. 证明

2.1. 全纯 Leray 谱序列。设 $\pi\colon X \to B$ 是一个以光滑连通底空间 B 为底的 K3 曲面光滑族。在本小节中，X 和 B 可以是解析空间。我们作如下假设：

条件 2.1. 对于 B 中的每个点，其某个邻域内的周期映射都是嵌入。

这等价于周期映射的微分

$$T_b B \to \mathrm{Hom}(H^{2,0}(X_b), H^{1,1}(X_b))$$

对每个 $b \in B$ 都是单射，其中 X_b 是 π 在 b 上的纤维。

对于自然数 $n > 0$，我们将 $X_n = X \times_B \cdots \times_B X$ 记作 X 在 B 上的 n 重纤维积，并令 $\pi_n\colon X_n \to B$ 为投影。我们将 Ω_{π_n} 记作 π_n 的相对余切丛，并按通常记法将 $\Omega^p_{\pi_n} = \wedge^p \Omega_{\pi_n}$ 用于 $p \geq 0$。

命题 2.2. 设 $\pi\colon X \to B$ 是满足条件 2.1 的 K3 纤维化。那么我们有一个自然同构

$$(\pi_n)_* \Omega^k_{X_n} \simeq \begin{cases} \Omega^k_B & k \leq \dim B \\ 0 & k > \dim B,\ k \neq \dim B \ (2) \\ K_B \otimes (\pi_n)_* \Omega^{2m}_{\pi_n} & k = \dim B + 2m,\ 0 \leq m \leq n \end{cases}$$

这一断言相当于全纯 Leray 谱序列的部分退化。回顾一下（[8] §5.2），$\Omega^{k}_{X_n}$ 具有全纯 Leray 滤子 $L^\bullet \Omega^k_{X_n}$，其定义为

$$L^l \Omega^k_{X_n} = \pi_n^* \Omega^l_B \wedge \Omega^{k-l}_{X_n},$$

其分次商自然同构于

$$\mathrm{Gr}_L^l \Omega_{X_n}^k = \pi_n^* \Omega_B^l \otimes \Omega_{\pi_n}^{k-l}.$$

该滤子诱导出全纯 Leray 谱序列

$$(E_r^{l,q}, d_r) \quad \Rightarrow \quad E_\infty^{l+q} = R^{l+q}(\pi_n)_* \Omega_{X_n}^k$$

它收敛到滤子

$$L^l R^{l+q}(\pi_n)_* \Omega_{X_n}^k \;=\; \mathrm{Im}(R^{l+q}(\pi_n)_* L^l \Omega_{X_n}^k \to R^{l+q}(\pi_n)_* \Omega_{X_n}^k).$$

根据 [8] 命题 5.9，E_1 页与和 π_n的霍奇结构变分相关联的 Koszul 复形集合相一致:

$$(E_1^{l,q}, d_1) = (\mathcal{H}^{k-l,l+q} \otimes \Omega_B^l, \bar{\nabla}). \tag{2.1}$$

这里 $\mathcal{H}^{*,*}$是与纤维化 $\pi_n : X_n \to B$ 相关联的 Hodge 丛，并且

$$\bar{\nabla} : \mathcal{H}^{*,*} \otimes \Omega_B^* \to \mathcal{H}^{*-1,*+1} \otimes \Omega_B^{*+1}$$

是 Koszul 复形中的微分（参见 [8] §5.1.3）。根据次数原因，E_1 页中 (l,q) 的范围满足以下不等式

$$0 \le l \le \dim B, \quad 0 \le k - l \le 2n, \quad 0 \le l + q \le 2n.$$

前两个可以合并为:

$$\max(0, k - 2n) \le l \le \min(\dim B, k), \quad 0 \le l + q \le 2n. \tag{2.2}$$

我们计算边线 $l + q = 0$上的 E_1 至 E_2 页。

引理 2.3。以下结论成立。

(1) 当 $l \le$ min(B 的维数, k) 且 $l \equiv k \bmod 2$ 时，$E_1^{l,-l} = 0$。

(2) 当 $l <$ min(B 的维数, k) 时，$E_2^{l,-l} = 0$。 (3) 对于 $l_0 =$ min(B 的维数, k)，我们有 $E^{l_0,1,-0} = {}_l E^{l_0,2,-0} = \cdots = {}_l E^{l_0,\infty,-0}{}_l$。

证明。由 (2.1)，我们有 $E_1^{l,-l} = \mathcal{H}^{k-l,0} \otimes$ 微分形式$^l{}_B$。由 Künneth 公式，$\mathcal{H}^{k-l,0}$ 在点 $b \in B$ 上的纤维可识别为

$$H^{k-l,0}(X_b^n) = \bigoplus_{(p_1,\cdots,p_n)} H^{p_1,0}(X_b) \otimes \cdots \otimes H^{p_n,0}(X_b), \tag{2.3}$$

其中 $(p_1, \cdots, p_n)$ 遍历所有满足 $\sum_i p_i = k - l$ 且 $0 \le p_i \le 2$ 的指标。

(1) 当 $k - l$ 为奇数时，(2.3) 中的每个指标 $(p_1, \cdots, p_n)$ 都必须包含一个分量 $p_i = 1$。由于 $H^{1,0}(X_b) = 0$，我们看到 $H^{k-l,0}(X^n{}_b) = 0$。因此 $\mathcal{H}^{k-l,0} = 0$ 当 $k - l$ 为奇数时。

(3) 令 $l_0 =$ min(B 的维数, k)。根据 (l, q) 的范围 (2.2)，我们看到，对于每个 $r \ge 1$，d_r 的源为零，它映到 $E^{l_0,-l_0+r}$；而从 $E^{l_0,-l_0+r}$ 出发的 d_r的靶也为零。这就证明了我们的断言。

(2) 令 $l <$ min(B 的维数, k)。根据 (1)，我们可以假设 $l = k - 2m$，其中某个 $m > 0$。由 (2.2)，映射到 $E_1^{l,-l}$，的 d_1 的源为零。我们

将证明 $d_1: E_1^{l,-l} \to , E_1^{l+1,-l}$, 是单射。由 (2.1)，此态射可识别为

$$\bar{\nabla} : \mathcal{H}^{2m,0} \otimes \Omega_B^l \to \mathcal{H}^{2m-1,1} \otimes \Omega_B^{l+1}. \tag{2.4}$$

根据 (2.3) 中的 K¨unneth 公式，Hodge 丛 $\mathcal{H}^{2m,0}$,$\mathcal{H}^{2m-1,1}$ 在 $b \in B$ 上的纤维分别可识别为

$$H^{2m,0}(X_b^n) = \bigoplus_{|\sigma|=m} H^{2,0}(X_b)^{\otimes\sigma}, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} H^{2m-1,1}(X_b^n) &= \bigoplus_{|\sigma'|=m-1} \bigoplus_{i\notin\sigma'} H^{2,0}(X_b)^{\otimes\sigma'} \otimes H^{1,1}(X_b) \\ &= \bigoplus_{|\sigma|=m} \bigoplus_{i\in\sigma} H^{2,0}(X_b)^{\otimes\sigma-\{i\}} \otimes H^{1,1}(X_b). \end{aligned} \tag{2.6}$$

在 (2.5) 中， σ 遍历 $\{1,\cdots,n\}$ 的所有由 m 个元素组成的子集，而 $H^{2,0}(X_b)^{\otimes\sigma}$ 表示 $X^n{}_b$ 中所有第 j 个因子 X_b 对应的 $H^{2,0}(X_b)$ 的张量积。 (2.6) 中的记号 σ', σ 类似，而 (2.6) 中的 $H^{1,1}(X_b)$ 是 $X^n{}_b$ 的第 i 个因子 X_b 的 $H^{1,1}$ 。

为简便起见，记 $V = H^{2,0}(X_b)$，$W = (T_bB)^\vee$ 。在 $b \in B$ 上的同态 (2.4) 写作

$$\bigoplus_{|\sigma|=m} \left(V^{\otimes\sigma} \otimes \wedge^l W \to \bigoplus_{i\in\sigma} V^{\otimes\sigma-\{i\}} \otimes H^{1,1}(X_b) \otimes \wedge^{l+1} W \right). \tag{2.7}$$

根据 [8] 引理5.8，(σ, i)-分量

$$V^{\otimes\sigma} \otimes \wedge^l W \to V^{\otimes\sigma-\{i\}} \otimes H^{1,1}(X_b) \otimes \wedge^{l+1} W \tag{2.8}$$

可分解为

$$\begin{aligned} V^{\otimes\sigma} \otimes \wedge^l W &\to V^{\otimes\sigma-\{i\}} \otimes H^{1,1}(X_b) \otimes W \otimes \wedge^l W \\ &\to V^{\otimes\sigma-\{i\}} \otimes H^{1,1}(X_b) \otimes \wedge^{l+1} W, \end{aligned}$$

其中，第一个映射由第 i 个因子 X_b 的周期映射微分的伴随 $V \to H^{1,1}(X_b) \otimes W$ 诱导，第二个映射由楔积 $W \otimes \wedge^l W \to \wedge^{l+1} W$ 诱导。根据线性代数，这个复合映射也可以分解为

$$\begin{aligned} V^{\otimes\sigma} \otimes \wedge^l W &\to V^{\otimes\sigma-\{i\}} \otimes V \otimes W^\vee \otimes \wedge^{l+1} W \\ &\to V^{\otimes\sigma-\{i\}} \otimes H^{1,1}(X_b) \otimes \wedge^{l+1} W, \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中，第一个映射由楔积的伴随 $\wedge^l W \to W^\vee \otimes \wedge^{l+1} W$ 诱导，第二个映射由周期映射的微分的伴随 $V \otimes W^\vee \to H^{1,1}(X_b)$ 诱导。根据我们的初始假设 2.1，(2.9) 的第二个映射是单射。此外，由于根据我们的假设 $l + 1 \le \dim W$，楔积 $\wedge^l W \times W \to \wedge^{l+1} W$ 是非退化的，因此它的

伴随 $\wedge^l W \to W^\vee \otimes \wedge^{l+1} W$ 是单射。因此，(2.9) 的第一个映射也是单射。由此可知，(2.8) 是单射。由于映射 (2.7) 是其 (σ, i)-分量的直和，因此它是单射。这就完成了引理 2.3 的证明。□

现在我们可以完成命题 2.2 的证明。

（命题 2.2 的证明）。由引理 2.3 (2)，当 $l < l_0 = \min(\dim B, k)$ 时，我们有 $E_\infty^{l,-l} = 0$。结合引理 2.3 (3)，得到

$$(\pi_n)_* \Omega^k_{X_n} = E_\infty^{0,k} = E_\infty^{l_0,-l_0} = E_1^{l_0,-l_0}.$$

当 $k \le \dim B$ 时，我们有 $l_0 = k$，并且由 (2.1) 可得 $E^{l_0,l_0} = \Omega^k_B$。当 $k > \dim B$ 时，我们有 $l_0 = \dim B$，并且由 (2.1) 可得 $E^{l_0,l_0} = \mathcal{H}^{k-\dim B,0} \otimes K${v23>。当 $k - \dim B$ 为奇数时，由引理 2.3 (1)，此项为零。□

在 $k = \dim B + 2m$ 的情形下，向量丛 $\mathcal{H}^{2m,0} \otimes K_B = (\pi_n)_* \Omega^{2m}_{\pi_n} \otimes K_B$ 可以更具体地写成如下形式。对于 $\{1, \cdots, n\}$ 的一个子集 σ，其基数为 $|\sigma| = m$，我们将 $X_\sigma \simeq X_m$ 表示为所有 $i \in \sigma$ 对应的第 i 个因子 $X \to B$ 的纤维积，其中 $X_n \to B$ 是这些因子的纤维积。我们记

$$X_n \xrightarrow{\pi_\sigma} X_\sigma \xrightarrow{\pi^\sigma} B$$

自然投影。K¨unneth 公式 (2.5) 表明

$$(\pi_n)_* \Omega^{2m}_{\pi_n} \simeq \bigoplus_{|\sigma|=m} \pi^\sigma_* K_{\pi^\sigma}.$$

将此与同构结合起来

$$\pi^\sigma_* K_{X_\sigma} \simeq K_B \otimes \pi^\sigma_* K_{\pi^\sigma} \tag{2.10}$$

对于每个 X_σ，我们可以将命题 2.2 最后一种情形中的同构改写为

$$(\pi_n)_* \Omega^{\dim B + 2m}_{X_n} \simeq \bigoplus_{|\sigma|=m} \pi^\sigma_* K_{X_\sigma}. \tag{2.11}$$

2.2. 在紧化上的延拓。设 $\pi: X \to B$ 是 §2.1 中的 K3 纤维化。现在假设 X、B 是准射影的，且 π 是代数簇之间的态射。我们取 X_n、X_σ 和 B 的光滑射影紧化 $\bar{\ }$，并分别记为 $\bar{X}_n$、$\bar{X}_\sigma$、$\bar{B}$。

命题 2.4。我们有

$$H^0(\bar{X}_n, \Omega^k) \simeq \begin{cases} H^0(\bar{B}, \Omega^k) & k \le \dim B \\ 0 & k > \dim B,\ k \ne \dim B \\ \oplus_\sigma H^0(\bar{X}_\sigma, K_{\bar{X}_\sigma}) & k = \dim B + 2m,\ 0 \le m \le n \end{cases} \tag{2}$$

在最后一种情形中，σ 取遍满足 $|\sigma| = m$ 的 $\{1, \cdots, n\}$ 的所有子集。第一种情形中的同构由 $\pi_n: X_n \to B$ 的拉回给出，而

最后一种情形中的同构由对所有 σ， π_σ: $X_n \to X_\sigma$ 的拉回的直和给出。

证明。对于 k > dim B 且 k . dim B mod 2 的情形，结论直接由命题 2.2 的第二种情形得出。接下来考虑 k ≤ dim B 的情形。我们可以假设 π_n: $X_n \to B$ 可延拓为一个满射态射 $X_n \to B$。设 ω 是 X_n上的一个全纯 k-形式。由命题 2.2 的第一种情形，我们有 $\omega|_{X_n} = \pi_n^*\omega_B$，其中 ω_B 是 B 上的一个全纯 k-形式。由于 ω 在 X_n上是全纯的，根据全纯微分形式的一条标准性质， ω_B 在 B 上也全纯。（否则， ω 必定在 X_n 中支配着 B 上那些 ω_B 有极点的除子的除子处有极点。）因此，拉回 H^0(B, 微分形式^k) $\to H^0$(X_n, 微分形式^k) 是满射的。

最后，我们考虑 k = dimB + 2m, 0 ≤ m ≤ n 的情形。设 ω be 是 X_n 上的一个全纯 k-形式。由 (2.11)，我们可以唯一地写成 $\omega|_{X_n} = P_\sigma \pi_\sigma^*\omega_\sigma$，其中 ω_σ 是 X_σ 上的某些典范形式。

断言 2.5. 对每个 σ， ω_σ 在 X_σ 上全纯。

证明。我们将 X_n 识别为纤维积 $X_\sigma \times_B X_\tau$，其中 $\tau = \{1, \cdots, n\} - \sigma$ 是 σ 的陪集。我们可以假设，该纤维积图可以扩展为满射态射之间的交换图

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_n & \xrightarrow{\pi_\tau} & \bar{X}_\tau \\ {\scriptstyle \pi_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^\tau} \\ \bar{X}_\sigma & \xrightarrow{\pi^\sigma} & \bar{B} \end{array}$$

在光滑射影模型之间。取一个不可约子簇 B ⊂ X_τ，使得 B → B 是满射且泛有限的。于是π_τ^{-1}(B) ⊂ X_n 有唯一一个支配 B 的不可约分支。我们取其解奇异化，并记为 Y。由构造可知， $\pi_\sigma|_Y$: Y → X_σ 是支配的（因而也是满射的）且泛有限的。另一方面，对任意满足 $|\sigma'| = m$ 的 σ'， σ，投影 $\pi_{\sigma'}|_Y$: Y ⇢ $X_{\sigma'}$ 并不支配。事实上，这样的 σ' 至少包含一个分量 i ∈ τ，因此如果 Y ⇢ $X_{\sigma'}$ 是支配的，那么第 i 个投影 Y ⇢ X 也将是支配的；但这显然荒谬，因为它可分解为 Y → B ⊂ X_τ ⇢ X。

我们将微分形式 $\omega = \pi_\sigma^*\omega_\sigma + P_{\sigma', \sigma} \pi_{\sigma'}^*\omega_{\sigma'}$ 拉回到 Y，并将其记为 $\omega|_Y$。由于 ω 在 X_n上全纯， $\omega|_Y$ 在 Y 上全纯。由于 $\pi_{\sigma'}^*\omega_{\sigma'}|_Y$ 是由非支配映射 Y ⇢ $X_{\sigma'}$从 $X_{\sigma'}$ 上的典范形式 $\omega_{\sigma'}$ 拉回所得，它恒等于零。因此， $\pi_\sigma^*\omega_\sigma|_Y = \omega|_Y$在 Y 上全纯。由于 $\pi_\sigma|_Y$: Y → X_σ 是满射，这意味着ω_σ 如前所述在 X_σ 上全纯。□

如果我们在 B 的泛点 $\tilde{\eta}$上考察，上述论证就会很清楚：我们将 ω 限制到 $(X_\eta)^n \to (X_\eta)^\tau$ 在 $(X_\eta)^\tau$ 上方、位于 η上的几何点 B 的纤维。

根据这一断言，拉回

$$(\pi_\sigma^*)_\sigma : \bigoplus_{|\sigma|=m} H^0(\bar{X}_\sigma, K_{\bar{X}_\sigma}) \to H^0(\bar{X}_n, \Omega^{\dim B+2m})$$

是满射。由 (2.11) 可知，它也是单射。这就证明了命题 2.4。□

2.3. 通用 K3 曲面。现在我们在格极化的一般情形下证明定理 1.1。设 L 是一个符号差为 (2, d) 的偶格，且可嵌入 K3 格 $3U\oplus 2E_8$，作为本原子格。我们记

$$\mathcal{D} = \{\, \mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}L_{\mathbb{C}} \mid (\omega,\omega) = 0, (\omega,\bar{\omega}) > 0 \,\}^+$$

为与 L 相关的厄米对称域，其中 + 表示一个连通分量。

设 $\pi: X \to B$ 是一个以光滑准射影连通基底 B 为底的 K3 曲面光滑射影族。若存在一个子局部系统 Λ，它是 $R^2\pi_*\mathbb{Z}$ 的子局部系统，且每个纤维 Λ_b 都是 N´eron-Severi 格 $NS(X_b)$ 中的双曲子格，并且正交补 $\Lambda^\perp$ 的纤维均与 L 等距，则称该族$\pi: X \to B$ 是具有周期格 L 的格极化族。于是我们有一个周期映射

$$\mathcal{P} : B \to \Gamma\backslash\mathcal{D}$$

对于 $O^+(L)$ 的某个有限指标子群 Γ。根据 Borel 延拓定理，$\mathcal{P}$ 是一个代数簇态射。

我们作如下假设

(2.12) $$\mathcal{P} \text{ is birational and } -\mathrm{id} \notin \Gamma.$$

对于这样的族 $\pi: X \to B$，必要时缩小 B，则 $\mathcal{P}$ 是开浸入，且满足条件 2.1。例如，对于 $g > 2$，通用 K3 曲面 $\mathcal{F}_{g,1} \to \mathcal{F}_g$ 限制在 $\mathcal{F}_g$ 的一个 Zariski 开集上后，在 $L = L_g$ 且 $\Gamma = \Gamma_g$ 的情况下满足此假设（这些记号见 §1）。

与 §1 中一样，我们用 $M_{\wedge^k,k}(\Gamma)$ 表示 Γ 的权为 $(\wedge^k,k)$ 的向量值模形式空间，用 $S_l(\Gamma,\det)$ 表示 Γ 的权为 l、特征为 det 的标量值尖点形式空间，并令 $\mathcal{S}_{n,m} = S_n/(S_m \times S_{n-m})$。

定理 2.6. 设 $\pi: X \to B$ 是一个格极化的 K3 族，其周期格 L 的符号差为 (2, d)，其中 $d \geq 3$，且单值群 Γ 满足

(2.12)。那么我们有一个 S_n-等变同构

$$H^0(\bar{X}_n, \Omega^k) \simeq \begin{cases} 0 & 0 < k < d/2 \\ M_{\wedge^k, k}(\Gamma) & d/2 \le k < d \\ 0 & k > d,\ k - d \notin 2\mathbb{Z} \\ S_{d+m}(\Gamma, \det) \otimes \mathbb{C}\mathcal{S}_{n,m} & k = d + 2m,\ 0 \le m \le n \end{cases}$$

证明。当 $k \le d$ 时，根据命题 2.4，我们有 $H^0(\bar{X}_n, \Omega^k) \simeq H^0(\bar{B}, \Omega^k)$。$\bar{B}$ 于是 B 是模簇 $\Gamma\backslash\mathcal{D}$ 的光滑射影模型。根据 Pommerening 的一个定理 [5], , 当 $k < d$ 时，空间 $H^0(\bar{B}, \Omega^k)$ 同构于 Γ-不变的 $\mathcal{D}$ 上全纯 k-形式空间，而后者又可被识别为 $M_{\wedge^k,k}(\Gamma)$，即关于 Γ ([4])、权为 $(\wedge^k, k)$ 的向量值模形式空间。当 L 的 Witt 指数为 2 时，该空间在 $0 < k < d/2$ 时的消失性由定理 1.2 证明；当 L 的 Witt 指数为 ≤ 1 时，则由定理 1.5 (1) 证明。

当 $k > d$ 且 $k \,.\, d \bmod 2$ 时，消失性由命题 2.4 得出。最后，我们考虑 $k = d + 2m$，$0 \le m \le n$ 的情形。由命题 2.4，可得一个自然的 S_n-等变同构

$$H^0(\bar{X}_n, \Omega^{d+2m}) \simeq \bigoplus_{|\sigma|=m} H^0(\bar{X}_\sigma, K_{\bar{X}_\sigma})$$

其中 S_n 对 $\{1, \cdots, n\}$ 的 σ 子集进行置换。这里注意，根据 (2.10)，每个 σ 的稳定子在 $H^0(\bar{X}_\sigma, K_{\bar{X}_\sigma})$ 上的作用都是平凡的。因此，作为一个 S_n-表示，右侧可写为

$$H^0(\bar{X}_m, K_{\bar{X}_m}) \otimes \left(\bigoplus_{|\sigma|=m} \mathbb{C}\sigma \right) \simeq H^0(\bar{X}_m, K_{\bar{X}_m}) \otimes \mathbb{C}\mathcal{S}_{n,m}.$$

最后，由定理 3.1 可得 $H^0(\bar{X}_m, K_{\bar{X}_m}) \simeq S_{d+m}(\Gamma, \text{行列式})$。 □

注 2.7。定理 2.6 中 $k \ge d$ 的情形在 $d = 1, 2$ 时也成立。我们假设 $d \ge 3$，是为了满足 Koecher 原理的要求[5]。因此，实际上只有 Witt 指数为 2 时的情形 $(d, k) = (2, 1)$ 尚未涵盖。

参考文献

[1] Gordon, B. B. 代数循环与 Kuga 纤维簇的霍奇结构。《美国数学会汇刊》336 (1993), no. 2, 933–947.[2]Ma, S. Mukai 模型与 Borcherds 乘积。即将发表于《美国数学杂志》，arXiv:1909.03946.[3] Ma, S. 通用全纯辛簇的 Kodaira 维数。《Jussieu 数学研究所杂志》21 (2022), no.6, 1849–1866.[4] Ma, S. 向量值正交模形式。arXiv:2209.10135.

[5] Pommerening, K. 关于厄米对称空间算术商上微分形式的延拓性。《纯粹与应用数学杂志》356 (1985), 194–220.[6] Shioda, T. 关于椭圆模曲面。日本数学会杂志 24 (1972), 20–59.[7] Shokurov, V. V. 久贺模簇上的高次全纯微分形式。《苏联数学文集》30 (1976), no. 1, 119–142.[8] Voisin, C. 霍奇理论与复代数几何 II。剑桥大学出版社，2003。

东京工业大学数学系，日本东京 152-8551。电子邮箱：ma@math.titech.ac.jp