arXiv:2301.02552v1 [math.DG] 4 Jan 2023

扭曲希格斯对的杨–米尔斯–希格斯流的极限

CHANGPENG PAN、ZHENGHAN SHEN 和 PAN ZHANG

ABSTRACT. 本文研究 K¨ahler 流形上扭曲希格斯对的杨–米尔斯–希格斯流。我们证明，该流收敛到一个自反扭曲希格斯层，且该层定义在余维为 4 的某个闭子集之外；此外，极限扭曲希格斯层同构于与初始扭曲希格斯丛的 Harder–Narasimhan–Seshadri 滤过相关联的分次扭曲希格斯层的双对偶。

1. INTRODUCTION

设 (X,ω) 是一个紧 K¨ahler 流形，(V,h_V) 是其上的一个厄米全纯向量丛。V-扭曲希格斯丛是一个对 (E,ϕ)，其中 E 是一个全纯向量丛，$\phi\colon E\to V\otimes E$ 是一个满足 $0=\phi\wedge\phi\in \mathrm{End}(E)\otimes\wedge^2V$ 的全纯态射。关于非扭曲希格斯丛（即 $V=T^*X$），Hitchin（[23]）最先对黎曼曲面上的情形进行了研究，而 Simpson（[39, 40]）则研究了 K¨ahler 流形上的情形。关于扭曲希格斯丛已有许多有趣的研究（参见 [7, 18, 19, 20, 36], 等）。设 H 是 E 上的一个厄米度量。利用厄米度量 H 和 h_V，我们可以定义一个对偶态射 $\phi^{*H}\colon E\otimes V\to E$。设 $[\phi,\phi^{*H}]=\phi\circ\phi^{*H}-\phi^{*H}\circ\phi\in\mathrm{End}(E)$。若厄米度量 H 满足以下条件，则称其为希格斯–厄米–爱因斯坦度量

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\bar\partial_E,H}+[\phi,\phi^{*H}]=\lambda\cdot\mathrm{Id}_E, \tag{1.1}$$

其中 $F_{\bar\partial_E,\ H}$是陈联络 $D_{\bar\partial_E,\ H}$的曲率形式，而 $\lambda=\frac{2\pi\mu_\omega(E)}{\mathrm{Vol}(X,\omega)}$是一个常数。~~关于扭~~曲希格斯丛的 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理（[2, 8,23, 39]）保证了多稳定情形下希格斯–厄米–爱因斯坦度量的存在。该定理最初由 Narasimhan–Seshadri（[34]）、Donaldson（[15, 16]）和 Uhlenbeck–Yau（[42]）针对全纯丛证明。此外，还有许多有趣且重要的广义 Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理（参见 [4, 5, 6, 9, 25, 31, 32, 33, 37, 44, 45] 及其中的参考文献）。

给定 H on E 上的一个固定厄米度量。令 $\mathcal{A}^{1,1}_H$ 表示可积酉联络空间，$\mathcal{B}_H$ 表示 V-扭曲希格斯对空间。定义在 $\mathcal{B}_H$ 上的杨–米尔斯–希格斯泛函为

$$\mathrm{YMH}(A,\phi)=\int_X(|F_A|^2+2|\partial_{A,V}\phi|^2+|[\phi,\phi^*]|^2-2\langle\phi,\phi\rangle_V)dv_g, \tag{1.2}$$

2020年数学主题分类：53C07，58E15。关键词和短语：杨–米尔斯–希格斯流、扭曲 Higgs 对、Harder–Narasimhan–Seshadri 滤过。

其中 $dv_g = \frac{\omega^n}{n!}$，$\langle\phi,\phi\rangle_V = \mathrm{tr}(\phi\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}\phi^{*H})$。杨–米尔斯–希格斯泛函的临界点满足

$$\begin{cases} D_A^* F_A + (\partial_A - \bar{\partial}_A)[\phi, \phi^{*H}] = 0, \\ [\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A + [\phi, \phi^{*H}], \phi] = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

我们称 $(A,\phi) \in \mathcal{B}_H$ 为杨–米尔斯–希格斯对，若它是杨–米尔斯–希格斯泛函的临界点。由 K¨ahler 恒等式可知，若 (A,ϕ) 满足$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A + [\phi,\phi^{*H}] = \lambda\cdot \mathrm{E}$ 上的恒等映射$_E$，则它是一个杨–米尔斯–希格斯对，且 H 是 (E,∂_A,ϕ) 这一 V-扭曲希格斯丛的 Higgs–¯Hermitian–Einstein 度量。杨–米尔斯–希格斯泛函的梯度流为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A(t)}{\partial t} = -D^*_{A(t)}F_{A(t)} - (\partial_{A(t)} - \bar{\partial}_{A(t)})[\phi(t), \phi^{*H}(t)], \\ \dfrac{\partial \phi(t)}{\partial t} = -[\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A(t)} + [\phi(t), \phi^{*H}(t)], \phi(t)]. \end{cases} \tag{1.4}$$

上述梯度流的长时间解的存在性将在第 2 节讨论。若初始数据 $(A_0,\phi_0) \in \mathcal{B}_H$ 稳定，则热流收敛到一个 V-扭曲 Higgs 对，且极限必定位于初始数据的同一轨道中。本文关注一般情形下此流的收敛性。

¯ ¯设 (E,∂_A,ϕ) 是一个 V 扭曲希格斯丛。存在一个由 ϕ-不变子层给出的 (E,∂_A) 的滤过，称为 Harder–Narasimhan–Seshadri（简称 HNS）滤过。令 $Gr^{HNS}(E,\bar{\partial}_A,\phi)$ 表示 Harder–Narasimhan–Seshadri 滤过的伴随分次对象（稳定商的直和）。对于全纯向量丛，Atiyah–Bott ([1]) 和 Bando–Siu ([3]) 猜想，杨–米尔斯流的极限应当与 $Gr^{HNS}(E,\bar{\partial}_A)$ 的双对偶之间存在对应关系。Daskalopoulos ([13])、Daskalopoulos–Wentworth ([14])、Jacob ([26]) 和 Sibley ([38]) 在不同情形下证明了这一点。对于非扭曲希格斯丛，Wilkin ([43]) 和 Li–Zhang ([28, 29]) 也证明了杨–米尔斯–希格斯流与 $Gr^{HNS}(E,\bar{\partial}_A,\phi)$ 的双对偶之间存在类似的对应关系。在 [30], 中，作者对反身层证明了这一猜想。与此同时，Zhang ([46]) 研究了黎曼曲面上 $T^*X\otimes L$ 扭曲希格斯丛的这一问题，并在该情形下证明了相关的对应关系。在本文中，我们将上述结果推广到 K¨ahler 流形上的 V 扭曲希格斯丛。事实上，我们证明了以下定理。

定理 1.1. 设 $(A(t)\ \phi(t))$ 是杨–米尔斯–希格斯流 (1.4) 的一个解，其初始数据为 $(A_0,\phi_0) \in \mathcal{B}_H$。则有：

(1) 对于每个序列 $t_k \to +\infty$，都存在一个子列 t_{k_j}，使得当 $t_{k_j} \to +\infty$ 时，$(A(t_{k_j})\ \phi(t_{k_j}))$ 在规范变换意义下收敛到一对 (A_∞,ϕ_∞)；该对在厄米向量丛 (E_∞,H_∞) 上满足 (1.3)，并且在 C^∞_{loc} 拓扑下于Σ之外成立，其中 Σ 是一个豪斯多夫余维至少为 4 的闭集。极限¯$(E_\infty,\partial_{A_\infty},\phi_\infty)$ 可扩张到整个 X，成为一个带有全纯正交分裂的反身 V-扭曲希格斯层

$$(E_\infty,H_\infty,\bar{\partial}_{A_\infty},\phi_\infty) = \oplus_{i=1}^l (E^i_\infty,H^i_\infty,\bar{\partial}_{A^i_\infty},\phi^i_\infty), \tag{1.5}$$

其中 H^i_∞ 是反身 V-扭曲希格斯层 $(E^i_\infty, \bar\partial_{A^i_\infty}, \phi^i_\infty)$ 上的可容许希格斯–厄米–爱因斯坦度量。¯(2) 设 $\{E_{i,j}\}$ 为 V-扭曲希格斯丛 $(E, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 的 Harder–Narasimhan–Seshadri 滤过，其伴随分次对象 $Gr^{HNS}(E, A_0, \phi_0) = \oplus_{i=1}^{l} \oplus_{j=1}^{l_i} Q_{i,j}$ 由 (A_0, ϕ_0) 的同构类唯一确定。我们有 $Gr^{HNS}(E, A_0, \phi_0)^{**} \simeq \bar{}(E_\infty, \partial_{A_\infty}, \phi_\infty)$。

为了证明该流的收敛，我们证明了能量不等式、若干量的单调性公式以及 ϵ-正则性。沿用 Hong–Tian 的论证（[24]），并运用 Bando–Siu 的延拓技巧（[3]），我们得到了定理 1.1 的第一部分。定理 1.1 第二部分的证明可分为两个步骤。第一步是证明极限 V-扭曲希格斯层的 Harder–Narasimhan（简称 HN）类型实际上等于 (E, A_0, ϕ_0) 的类型。第二步是构造一个非零的 ϕ-不变全纯映射，从 $Q_{i,\ j}$ 到极限层。证明思路与非扭曲情形（[28, 29]）相同，但在处理某些细节时存在一些差异。

本文组织如下。第 2 节中，我们为扭曲希格斯对的 Donaldson 热流和杨–米尔斯–希格斯流建立一些基本估计。第 3 节中，我们证明杨–米尔斯–希格斯流的单调性不等式和 ϵ-正则性估计，并完成定理 1.1 的第一部分。第 4 节中，我们首先证明极限扭曲希格斯层的 Harder–Narasimhan 类型事实上等于初始扭曲希格斯丛的类型，然后完成定理 1.1 第二部分的证明。

2. Preliminary

设 (X, ω) 是一个 n 维紧 K¨ahler 流形，(E, ϕ) 是 X 上的 V-扭曲希格斯向量丛。我们考虑如下 Donaldson 热流

$$\begin{cases} H^{-1}(t)\dfrac{\partial H(t)}{\partial t} = -2(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)} + [\phi, \phi^{*H(t)}] - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E), \\ H(0) = H_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

这是一个严格抛物型方程，因此标准抛物型理论给出了短时间存在性。至于长时间存在性，可以用 Simpson 的文章 ([39]) 中所采用的相同方法加以证明。下面的引理可通过直接计算得到。

引理 2.1. 设 $H(t)$ 是流 (2.1) 的解，并令 $\Phi(H(t)) = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)} + [\phi, \phi^{*H(t)}] - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E$，则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\mathrm{tr}(\Phi(H(t))) = 0, \tag{2.2}$$

and

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)|\Phi(H(t))|^2_{H(t)} = -4|\bar\partial_E \Phi(H(t))|^2_{\omega, H(t)} - 4|[\phi, \Phi(H(t))]|^2_{h_V, H(t)}. \tag{2.3}$$

设 (E, H_0) 为一个厄米向量丛，$\mathcal{B}_{H_0}$ 为 V-扭曲希格斯对的空间。设 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ （分别为 $\mathcal{G}$）为

(E, H_0) 的复规范群（分别为酉规范群）。复规范群 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ 在 $\mathcal{B}_{H_0}$ 上的作用如下

$$\sigma \cdot (\bar{\partial}_A, \phi) = (\sigma \circ \bar{\partial}_A \circ \sigma^{-1}, \sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}},\ (A, \phi) \in \mathcal{B}_{H_0}. \tag{2.4}$$

按照 [15, 28], 中的方法，我们有如下命题。

命题2.2. 存在一族复规范变换 $\sigma(t) \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$，使得 $(A(t)\ \phi(t)) = \sigma(t) \cdot (A_0, \phi_0)$ 是杨–米尔斯–希格斯流 (1.4) 的长时间解，其初始数据为 (A_0, ϕ_0)，其中 $\sigma^{*H_0}(t)\sigma(t) = H_0^{-1}H(t)$，且 $H(t)$ 是 $(E, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 的 Donaldson 热流 (2.1) 的长时间解。

沿着杨–米尔斯–希格斯流，我们有如下能量恒等式。

命题2.3. 设 $(A(t)\ \phi(t))$ 是杨–米尔斯–希格斯流 (1.4) 的一个解，其初始扭曲 Higgs 对为 (A_0, ϕ_0)。则

$$YMH(A(t), \phi(t)) + 2\int_0^t \int_X \left(\left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right|^2 \right) dv_g dt = YMH(A_0, \phi_0). \tag{2.5}$$

证明。设 (A_t, ϕ_t) 是一族扭曲希格斯对，且 $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A_t, \phi_t) = (\dot{A}, \dot{\phi})$，则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{YMH}(A_t, \phi_t) =& 2\Re \int_X (\langle D_A \dot{A}, F_A \rangle + 2\langle [\dot{A}^{1,0}, \phi] + \partial_{A,V}\dot{\phi}, \partial_{A,V}\phi \rangle \\ &+ \langle [\dot{\phi}, \phi^*] + [\phi, \dot{\phi}^*], [\phi, \phi^*] \rangle - 2\langle \dot{\phi}, \phi \rangle_V) dv_g, \end{aligned}$$

其中

$$\langle [\dot{A}^{1,0}, \phi], \partial_{A,V}\phi \rangle = \langle \dot{A}^{1,0}, [\partial_{A,V}\phi, \phi^*] \rangle = -\overline{\langle \dot{A}^{0,1}, [\phi, \bar{\partial}_{A,V^*}\phi^*] \rangle},$$

$$\langle \dot{\phi}, \partial^*_{A,V}\partial_{A,V}\phi \rangle - \langle \dot{\phi}, \phi \rangle_V = \langle \dot{\phi}, [\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A, \phi] \rangle = -\overline{\langle \dot{\phi}^*, [\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A, \phi^*] \rangle},$$

and

$$\langle [\dot{\phi}, \phi^*], [\phi, \phi^*] \rangle = \langle \dot{\phi}, [[\phi, \phi^*], \phi] \rangle, \quad \langle [\phi, \dot{\phi}^*], [\phi, \phi^*] \rangle = -\langle \dot{\phi}^*, [[\phi, \phi^*], \phi^*] \rangle.$$

由于 $\partial_{A,V}\phi = 0$ 且 $\partial_{A,V^*}\phi^* = 0$，我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{YMH}(A_t, \phi_t) =& 2\int_X (\langle \dot{A}, D_A^* F_A \rangle + \langle \dot{A}, (\partial_A - \bar{\partial}_A)[\phi, \phi^*] \rangle \\ &+ \langle \dot{\phi}, [\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A + [\phi, \phi^*], \phi] \rangle - \langle \dot{\phi}^*, [\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A + [\phi, \phi^*], \phi^*] \rangle) dv_g. \end{aligned}$$

利用杨–米尔斯–希格斯流方程 (1.4)，我们有

$$\frac{d}{dt}\mathrm{YMH}(A(t), \phi(t)) = -2\int_X \left(\left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right|^2 \right) dv_g. \tag{2.6}$$

将上面的等式 (2.6) 从 0 积分到 t，得到 (2.5)。 □

命题 2.4. 设 $(A(t)\ \phi(t))$ 是热流 (1.4) 的一个解，其初始扭曲 Higgs 对为 (A_0, ϕ_0)。则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) |\phi|^2_{H_0, h_V} \leq -2|\partial_{A,V}\phi|^2 - C_3(|\phi|^2 + 1)^2 + C_4(|\phi|^2 + 1), \tag{2.7}$$

其中 C_3、 C_4 是依赖于 $\sup_X |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}|$ 的常数。此外，我们有

$$\sup_X |\phi|^2 \leq \max\{\sup_X |\phi_0|^2, C_4/C_3\}. \tag{2.8}$$

证明。直接计算可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)|\phi|^2_{H_0,h_V} =& -2|\partial_{A,V}\phi|^2 - 2\langle\phi, [[\phi,\phi^*],\phi]\rangle + 2\langle\phi, \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}(\phi)\rangle \\ =& -2|\partial_{A,V}\phi|^2 - 2|[\phi,\phi^*]|^2 + 2\langle\phi, \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}(\phi)\rangle.\end{aligned}$$

设 $\{v^i\}$ 是 V 和 $\phi = \phi_i v^i$ 的局部标准正交标架。由于 $\phi \wedge \phi = 0$，我们有$\phi_i\phi_j = \phi_j\phi_i$ 以及

$$\begin{aligned}|[\phi,\phi^*]|^2 =& \sum_{i,j} \mathrm{tr}([\phi_i,\phi_i^*][\phi_j,\phi_j^*]) = \sum_{i,j} \mathrm{tr}([\phi_i,\phi_j^*][\phi_j,\phi_i^*]) \\ =& \sum_{i,j} |[\phi_i,\phi_j^*]|^2 \geq \sum_i |[\phi_i,\phi_i^*]|^2.\end{aligned}$$

根据 [40], 中的引理 2.7，我们有

$$|[\phi_i,\phi_i]|^2 \geq C_1(|\phi_i|^2+1)^2 - C_2(|\phi_i|^2+1).$$

上述计算即得证。 □

下面我们推导沿流的局部能量单调不等式。设$e_2(A,\phi) = |F_A|^2 + 2|\partial_{A,\ V}\phi|^2$ 以及 $f \in C^\infty(X)$，则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_X f^2 e_2(A,\phi)dv_g =& 2\Re\int_X \left(\left\langle \frac{\partial A}{\partial t}, D_A^*(f^2F_A)\right\rangle + f^2\left\langle \frac{\partial A}{\partial t}, (\partial_A - \bar\partial_A)[\phi,\phi^*]\right\rangle \right. \\ &\left. + 2\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \partial^*_{A,V}(f^2\partial_{A,V}\phi)\right\rangle\right)dv_g,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}D_A^*(f^2F_A) =& \sqrt{-1}[\Lambda_\omega, \bar\partial_A - \partial_A](f^2F_A) \\ =& \sqrt{-1}\Lambda_\omega(\bar\partial - \partial)(f^2)\wedge F_A - f^2D_A^*F_A - (\bar\partial-\partial)(f^2)\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A,\end{aligned}$$

and

$$\partial^*_{A,V}(f^2\partial_{A,V}\phi) = \sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial(f^2)\wedge\partial_{A,V}\phi + f^2\partial^*_{A,V}\partial_{A,V}\phi.$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_X f^2 e_2(A,\phi)dv_g\\
&=2\int_X f^2\bigg(\bigg\langle\frac{\partial A}{\partial t},D_A^*F_A\bigg\rangle+\bigg\langle\frac{\partial A}{\partial t},(\partial_A-\bar\partial_A)[\phi,\phi^*]\bigg\rangle\\
&+\bigg\langle\frac{\partial\phi}{\partial t},[\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A,\phi]\bigg\rangle-\bigg\langle\frac{\partial\phi^*}{\partial t},[\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A,\phi^*]\bigg\rangle\bigg)dv_g\\
&+2\Re\int_X\bigg(\bigg\langle\frac{\partial A}{\partial t},\sqrt{-1}\Lambda_\omega(\bar\partial-\partial)(f^2)\wedge F_A\bigg\rangle-\bigg\langle\frac{\partial A}{\partial t},\sqrt{-1}(\bar\partial-\partial)(f^2)\Lambda_\omega F_A\bigg\rangle\\
&+2\bigg\langle\frac{\partial\phi}{\partial t},\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial(f^2)\wedge\partial_{A,V}\phi\bigg\rangle+2f^2\bigg\langle\frac{\partial\phi}{\partial t},\phi\bigg\rangle\bigg)dv_g.
\end{aligned}$$

令 f 为 $B_{2R}(x_0)$ 上的一个截断函数，满足 $0\le f\le 1$、$f\equiv 1$ 于 $B_R(x_0)$ 上且 $|df|\le\frac{2}{R}$。那么

$$\begin{aligned}
&\bigg|\frac{d}{dt}\int_X f^2e_2(A,\phi)dv_g+2\int_X f^2\bigg(\bigg|\frac{\partial A}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\bigg|^2\bigg)dv_g\bigg|\\
\le&\frac{C_1}{R}\Big(\int_X\bigg(\bigg|\frac{\partial A}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\bigg|^2\bigg)dv_g\Big)^{1/2}+C_2\Big(\int_X\bigg(\bigg|\frac{\partial A}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\bigg|^2\bigg)dv_g\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

其中 C_1、C_2 是依赖于 $\sup_X|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}|$、$\sup_X|\phi_0|$、YMH$(A_0,\phi_0)$ 以及 (X,ω) 的几何的常数。于是有如下命题。

命题 2.5. 设 $(A(t)\ \phi(t))$ 是杨–米尔斯–希格斯流 (1.4) 的一个解，则对于任意 $B_{2R}(x_0)\subset X$, s, τ，有

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R(x_0)}e_2(A,\phi)(\cdot,s)dv_g\\
&\quad\le\int_{B_{2R}(x_0)}e_2(A,\phi)(\cdot,\tau)dv_g+2\int_{\min\{s,\tau\}}^{\max\{s,\tau\}}\int_X\bigg(\bigg|\frac{\partial A}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\bigg|^2\bigg)dv_gdt\\
&\quad+C_1\bigg\{\frac{|s-\tau|}{R^2}\int_{\min\{s,\tau\}}^{\max\{s,\tau\}}\int_X\bigg(\bigg|\frac{\partial A}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\bigg|^2\bigg)dv_gdt\bigg\}^{1/2}\\
&\quad+C_2\bigg\{|s-\tau|\int_{\min\{s,\tau\}}^{\max\{s,\tau\}}\int_X\bigg(\bigg|\frac{\partial A}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\bigg|^2\bigg)dv_gdt\bigg\}^{1/2},
\end{aligned}$$

其中 C_1、C_2 是依赖于 $\sup_X|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}|$、$\sup_X|\phi_0|$、YMH$(A_0,\phi_0)$ 以及 (X,ω) 的几何的常数。

设 $\theta(t)=\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A(t)}+[\phi(t)\ \phi^*(t)]$ 且

$$I(t)=\int_X(|D_{A(t)}\theta(t)|^2_{\omega,H_0}+2|[\phi(t),\theta(t)]|^2_{h_V,H_0})dv_g.$$

于是我们得到以下命题：

命题 2.6。

$$I(t) \to 0, \quad as\ t \to +\infty. \tag{2.9}$$

证明。证明与非扭曲情形（[28]）完全相同，故此处略去。 □

令 $\nabla_{A,V}$ 为 $\Omega^*_X \otimes \mathrm{End}(E) \otimes V$上的诱导联络，由 D_A、D_{h_V}及 TM 上的陈联络诱导；令 ∇_A 为对应于 D_A 的协变导数。

命题 2.7。在杨–米尔斯–希格斯流 (1.4) 下，有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)|\partial_{A,V}\phi|^2 + 2|\nabla_{A,V}\partial_{A,V}\phi|^2 \\ \leq& C_1(|\phi|^2 + |F_A| + |F_{h_V}| + |Ric|)|\partial_{A,V}\phi|^2 + C_2|\partial_A\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}||\phi||\partial_{A,V}\phi|\end{aligned} \tag{2.10}$$

and

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)|F_A|^2 + |\nabla_A F_A|^2 \\ \leq& C_3(|F_A| + |\phi|^2 + |Rm|)|F_A|^2 + C_4|F_A||\partial_{A,V}\phi|^2 + C_5|\phi|^2|F_{h_V}||F_A|,\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中常数 $C_i(i = 1, \cdots, 5)$ 仅依赖于维数 n。

证明。在局部正规坐标中，有

$$\Delta|\partial_{A,V}\phi|^2 = 2|\nabla_{A,V}\partial_{A,V}\phi|^2 + 2\langle\nabla_\alpha\nabla_{\bar\alpha}\partial_{A,V}\phi, \partial_{A,V}\phi\rangle + 2\langle\partial_{A,V}\phi, \nabla_{\bar\alpha}\nabla_\alpha\partial_{A,V}\phi\rangle,$$

其中

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha\nabla_{\bar\alpha}\partial_{A,V}\phi =& \nabla_\alpha\nabla_{\bar\alpha}\nabla_\beta\phi dz^\beta \\ =& -\nabla_\alpha(F_{A,V;\beta\bar\alpha}\phi)dz^\beta \\ =& -\nabla_\alpha(F_{A,V;\beta\bar\alpha})\phi dz^\beta - F_{A,V;\beta\bar\alpha}\nabla_\alpha\phi dz^\beta \\ =& -\nabla_\beta(F_{A,V;\alpha\bar\alpha})\phi dz^\beta - F_{A,V;\beta,\bar\alpha}\nabla_\alpha\phi dz^\beta \\ =& -\partial_A(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A,V})\phi - F_{A,V;\beta,\bar\alpha}\nabla_\alpha\phi dz^\beta \\ =& -[\partial_A(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A), \phi] - \partial_A(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V})\phi - F_{A,V;\beta,\bar\alpha}\nabla_\alpha\phi dz^\beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar\alpha}\nabla_\alpha\partial_{A,V}\phi =& \nabla_{\bar\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi dz^\beta + \nabla_\beta\phi\nabla_{\bar\alpha}\nabla_\alpha dz^\beta \\ =& \nabla_{\bar\alpha}\nabla_\beta\nabla_\alpha\phi dz^\beta + \nabla_\beta\phi\nabla_{\bar\alpha}\nabla_\alpha dz^\beta \\ =& \nabla_\beta\nabla_{\bar\alpha}\nabla_\alpha\phi dz^\beta - F_{A,V;\beta\bar\alpha}\nabla_\alpha\phi dz^\beta + \nabla_\beta\phi\nabla_{\bar\alpha}\nabla_\alpha dz^\beta \\ =& -\partial_A(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A,V}\phi) - F_{A,V;\beta\bar\alpha}\nabla_\alpha\phi dz^\beta + \nabla_\beta\phi\nabla_{\bar\alpha}\nabla_\alpha dz^\beta \\ =& -\partial_A([\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A, \phi] + \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}\phi) - F_{A,V;\beta\bar\alpha}\nabla_\alpha\phi dz^\beta + \nabla_\beta\phi\nabla_{\bar\alpha}\nabla_\alpha dz^\beta \\ =& -[\partial_A\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A, \phi] + [\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A, \partial_A\phi] + (\partial_A\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V})\phi \\ &+ \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}\partial_A\phi - F_{A,V;\beta\bar\alpha}\nabla_\alpha\phi dz^\beta + \nabla_\beta\phi\nabla_{\bar\alpha}\nabla_\alpha dz^\beta.\end{aligned}$$

另一方面，利用热流方程 (1.4)，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\partial_{A,V}\phi|^2_{\omega,h_V,H_0} =&2\Re\bigg(\Big\langle\Big[\frac{\partial A^{1,0}}{\partial t},\phi\Big],\partial_{A,V}\phi\Big\rangle+\Big\langle\partial_{A,V}\frac{\partial\phi}{\partial t},\partial_{A,V}\phi\Big\rangle\bigg)\\ =&-2\Re\big(\langle[\partial_A(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A+[\phi,\phi^*]),\phi],\partial_{A,V}\phi\rangle\\ &+\langle\partial_{A,V}[\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A+[\phi,\phi^*],\phi],\partial_{A,V}\phi\rangle\big)\\ =&-2\Re\big(2\langle[\partial_A(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A+[\phi,\phi^*]),\phi],\partial_{A,V}\phi\rangle\\ &+\langle[\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A+[\phi,\phi^*],\partial_{A,V}\phi],\partial_{A,V}\phi\rangle\big).\end{aligned}$$

于是由上述恒等式可得（2.10）。（2.11）这一另一个方程的证明类似，这里从略。□

3. Convergence of the Yang–Mills–Higgs flow for twisted Higgs pairs

本节中，我们考虑厄米向量丛（E, H_0）上扭曲希格斯对的杨–米尔斯–希格斯流（1.4）的收敛性。我们首先证明该流的单调性不等式和 ϵ-正则性定理。我们将把研究杨–米尔斯流（[10, 11]）以及非扭曲希格斯对的杨–米尔斯–希格斯流（[28]）时所用的相同论证，应用于扭曲希格斯对的杨–米尔斯–希格斯流。

令 $u=(x,t)\in X\times\mathbb{R}$。对于任意 $u_0=(x_0,t_0)\in X\times\mathbb{R}^+$，设

$$\begin{aligned}S_r(u_0)&=X\times\{t=t_0-r^2\},\\ T_r(u_0)&=X\times[t_0-4r^2,t_0-r^2],\\ P_r(u_0)&=B_r(x_0)\times[t_0-r^2,t_0+r^2].\end{aligned}$$

为简便起见，我们用 S_r, T_r, P_r 表示 $S_r(0,0)$ $T_r(0,0)$ $P_r(0,0)$。

奇点位于 $u_0=(x_0,t_0)$ 处的（向后）热方程的基本解为

$$G_{u_0}(x,t)=G_{(x_0,t_0)}(x,t)=\frac{1}{(4\pi(t_0-t))^n}\exp\Big(-\frac{|x-x_0|^2}{4(t_0-t)}\Big),\quad t\le t_0.$$

为简便起见，用 $G(x,t)$ 表示 $G_{(0,0)}(x,t)$。

给定 $0<R\le i_X$，取满足如下条件的 $f\in C_0^\infty(B_R)$：$0\le f\le 1$, $f\equiv 1$ 在 $B_{R/2}$ 上，且 $|\nabla f|\le 2/R$ 在 $B_R\setminus B_{R/2}$ 上。设 $(A(t),\phi(t))$ 是以 (A_0,ϕ_0) 为初值的杨–米尔斯–希格斯流的一个解，并令

$$e_2(A,\phi)=|F_A|^2+2|\partial_{A,V}\phi|^2,$$

$$\Phi(r)=r^2\int_{T_r(u_0)}e_2(A,\phi)f^2G_{u_0}dv_gdt.$$

于是我们得到以下定理。

定理 3.1. 设 $(A(t),\phi(t))$ 是杨–米尔斯–希格斯流 (1.4) 的一个解，其初值为 (A_0,ϕ_0)。对于任意 $u_0=(x_0,t_0)\in X\times[0,T]$ 且 $0<r_1\le r_2\le\min\{R/2,\sqrt{t_0}/2\}$,

我们有

$$\begin{aligned}\Phi(r_1) \leq & C\exp(C(r_2-r_1))\Phi(r_2)+C(r_2^2-r_1^2)\\ & +CR^{2-2n}\int_{P_R(u_0)} e_2(A,\phi)dv_g dt,\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中常数 C 仅取决于 (X,ω) 的几何、$\sup_X|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}|$ 以及初始数据 (A_0,ϕ_0)。

证明。选取正规测地坐标 $\{x^i\}_{i=1}^{2n}$，使其位于测地球 $B_R(x_0)$ 中，则可得

$$|g_{ij}(x)-\delta_{ij}|\leq C|x|^2,\quad |\partial_k g_{ij}(x)|\leq C|x|,\quad \forall x\in B_r(x_0), \tag{3.2}$$

其中 C 是一个仅取决于 x_0 的正常数。

令 $x=r\tilde{x}$, $t=t_0+r^2\tilde{t}$。有

$$\begin{aligned}\Phi(r)&=r^2\int_{T_r(u_0)} e_2(A,\phi)f^2G_{u_0}dv_g dt\\ &=r^2\int_{t_0-4r^2}^{t_0-r^2}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e_2(A,\phi)(x,t)f^2(x)G_{u_0}(x,t)\sqrt{\det(g_{ij})}(x)dxdt\\ &=r^4\int_{-4}^{-1}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e_2(A,\phi)(r\tilde{x},t_0+r^2\tilde{t})f^2(r\tilde{x})G(\tilde{x},\tilde{t})\sqrt{\det(g_{ij})}(r\tilde{x})d\tilde{x}d\tilde{t}.\end{aligned}$$

于是可见,

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(r)}{dr}&=4r^3\int_{-4}^{-1}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e_2(A,\phi)(r\tilde{x},t_0+r^2\tilde{t})f^2(r\tilde{x})G(\tilde{x},\tilde{t})\sqrt{\det(g_{ij})}(r\tilde{x})d\tilde{x}d\tilde{t}\\ &+r^3\int_{-4}^{-1}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\{x^i\partial_i e_2(A,\phi)(r\tilde{x},t_0+r^2\tilde{t})\}f^2(r\tilde{x})G(\tilde{x},\tilde{t})\sqrt{\det(g_{ij})}(r\tilde{x})d\tilde{x}d\tilde{t}\\ &+r^3\int_{-4}^{-1}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\{2(t-t_0)\partial_t e_2(A,\phi)(r\tilde{x},t_0+r^2\tilde{t})\}f^2(r\tilde{x})G(\tilde{x},\tilde{t})\sqrt{\det(g_{ij})}(r\tilde{x})d\tilde{x}d\tilde{t}\\ &+r^4\int_{-4}^{-1}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e_2(A,\phi)(r\tilde{x},t_0+r^2\tilde{t})\frac{d}{dr}\{f^2(r\tilde{x})\sqrt{\det(g_{ij})}(r\tilde{x})\}G(\tilde{x},\tilde{t})d\tilde{x}d\tilde{t}\\ =&I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

对于第二项 I_2，有

$$I_2=r\int_{T_r(u_0)}\{x^i\partial_i e_2(A,\phi)(x,t)\}f^2(x)G_{u_0}(x,t)\sqrt{\det(g_{ij})}(x)dxdt,$$

其中

$$x^i\partial_i e_2(A,\phi)=2\Re(\langle x^i\nabla_i F_A,F_A\rangle+2\langle x^i\nabla_i\partial_{A,V}\phi,\partial_{A,V}\phi\rangle).$$

由比安基恒等式可得

$$\begin{aligned}2\langle x^i\nabla_i F_A, F_A\rangle =&\langle x^i\nabla_i F_A(\partial_j,\partial_k)dx^j\wedge dx^k, F_A\rangle\\ =&\langle x^i\nabla_j F_A(\partial_i,\partial_k)dx^j\wedge dx^k, F_A\rangle+\langle x^i\nabla_k F_A(\partial_j,\partial_i)dx^j\wedge dz^k, F_A\rangle\\ =&2\langle x^i D_A(F_{A,ik}dx^k)-x^i(F_A(\nabla_j\partial_i,\partial_k)+F_A(\partial_i,\nabla_j\partial_k))dx^j\wedge dx^k, F_A\rangle\\ =&2\langle D_A(x^iF_{A,ik}dx^k)-x^iF_A(\nabla_j\partial_i,\partial_k)dx^j\wedge dx^k, F_A\rangle-4|F_A|^2.\end{aligned}$$

Set

$$x\odot F_A=\frac{1}{2}x^iF_{A,ij}dx^j,$$

我们有

$$\Re\langle x\odot F_A, D_A^*F_A\rangle=-\Re\langle x\odot F_A,\frac{\partial A}{\partial t}\rangle+\Re\langle x\odot F_A,(\bar\partial_A-\partial_A)[\phi,\phi^*]\rangle. \tag{3.3}$$

此外,

$$\begin{aligned}\langle x^i\nabla_i\nabla_{A,V}\phi,\nabla_{A,V}\phi\rangle =&\langle x^i\nabla_i(\nabla_j\phi dx^j),\nabla_{A,V}\phi\rangle\\ =&\langle x^i\nabla_j\nabla_i\phi dx^j,\nabla_{A,V}\phi\rangle+\langle x^iF_{A,V;ij}\phi dx^j,\nabla_{A,V}\phi\rangle\\ &+\langle x^i\nabla_j\phi\nabla_i dx^j),\nabla_{A,V}\phi\rangle\\ =&\langle D_{A,V}(x^i\nabla_i\phi),\nabla_{A,V}\phi\rangle-\langle x^i\nabla_{A,V}\phi(\nabla_i\partial_j)dx^j),\nabla_{A,V}\phi\rangle\\ &+\langle x^iF_{A,V;ij}\phi dx^j,\nabla_{A,V}\phi\rangle-|\nabla_{A,V}\phi|^2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\langle x^i\nabla_i\phi,\partial^*_{A,V}\partial_{A,V}\phi\rangle =&\langle x^i\nabla_i\phi,[\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_A,\phi]+\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}\phi\rangle\\ =&-\langle x^i\nabla_i\phi,\frac{d\phi}{dt}\rangle-\langle x^i\nabla_i\phi,[[\phi,\phi^*],\phi]+\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}\phi\rangle.\end{aligned}$$

注意，对于任意 $\alpha\in\Omega^1(\mathrm{End}(E))$ $\alpha^*=-\alpha$，都有

$$\Re\langle\alpha,(\bar\partial_A-\partial_A)[\phi,\phi^*]]\rangle+2\Re\langle[\alpha,\phi],\partial_{A,V}\phi\rangle=0.$$

令 $x\odot\nabla_{A,\ V}\phi=\frac{1}{2}x^i\nabla_{A,\ V;\ i}\phi$。由于 $G_{u_0}>0$，我们有

$$\begin{aligned}
I_1+I_2=&4r\int_{T_r(u_0)}|\partial_{A,V}\phi|^2f^2G_{u_0}dv_gdt\\
&-4r\Re\int_{T_r(u_0)}\langle d(f^2G_{u_0})\wedge x\odot F_A,F_A\rangle dv_gdt\\
&-8r\Re\int_{T_r(u_0)}\langle d(f^2G_{u_0})x\odot\nabla_{A,V}\phi,\nabla_{A,V}\phi\rangle dv_gdt\\
&-4r\Re\int_{T_r(u_0)}\langle x\odot F_A,\frac{dA}{dt}\rangle f^2G_{u_0}dv_gdt\\
&-8r\Re\int_{T_r(u_0)}\langle x\odot\nabla_{A,V}\phi,\frac{d\phi}{dt}\rangle f^2G_{u_0}dv_gdt\\
&-8r\Re\int_{T_r(u_0)}\langle x\odot\nabla_{A,V}\phi,[[\phi,\phi^*],\phi]+\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}\phi\rangle f^2G_{u_0}dv_gdt\\
&-2r\Re\int_{T_r(u_0)}\langle x^iF_A(\nabla_j\partial_i,\partial_k)dx^j\wedge dx^k,F_A\rangle f^2G_{u_0}dv_gdt\\
&-4r\Re\int_{T_r(u_0)}\langle x^i\nabla_{A,V}\phi(\nabla_j\partial_i)dx^j,\nabla_{A,V}\phi\rangle f^2G_{u_0}dv_gdt\\
&+8r\Re\int_{T_r(u_0)}\langle x\odot F_V\phi,\nabla_{A,V}\phi\rangle f^2G_{u_0}dv_gdt.
\end{aligned}$$

对于第二项 I_3，我们有

$$I_3=2r\int_{T_r(u_0)}(t-t_0)\partial_te_2(A,\phi)(x,t)f^2(x)G_{u_0}(x,t)\sqrt{\det(g_{ij})}(x)dxdt,$$

其中

$$\partial_te_2(A,\phi)=2\Re\bigg(\bigg\langle D_A\bigg(\frac{\partial A}{\partial t}\bigg),F_A\bigg\rangle+2\bigg\langle\bigg[\frac{\partial A^{1,0}}{\partial t},\phi\bigg],\partial_{A,V}\phi\bigg\rangle+2\bigg\langle\partial_{A,V}\frac{\partial\phi}{\partial t},\partial_{A,V}\phi\bigg\rangle\bigg).$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
I_3=&-4r\Re\int_{T_r(u_0)}(t-t_0)\Big(\Big|\frac{\partial A}{\partial t}\Big|^2+2\Big|\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|^2\Big)f^2G_{u_0}dv_gdt\\
&-4r\Re\int_{T_r(u_0)}(t-t_0)\bigg\langle d(f^2G_{u_0})\wedge\frac{\partial A}{\partial t},F_A\bigg\rangle dv_gdt\\
&-8r\Re\int_{T_r(u_0)}(t-t_0)\bigg\langle d(f^2G_{u_0})\frac{\partial\phi}{\partial t},\nabla_{A,V}\phi\bigg\rangle dv_gdt\\
&-8r\Re\int_{T_r(u_0)}(t-t_0)\bigg\langle\frac{\partial\phi}{\partial t},[[\phi,\phi^*],\phi]+\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}\phi\bigg\rangle f^2G_{u_0}dv_gdt.
\end{aligned}$$

注意， $\partial_i G_{u_0} = \frac{x^i G_{u_0}}{2\ t-t_0}$。令

$$x \cdot F_A = \frac{1}{2} g^{ij} x^j F_{A,ik} dx^k, \quad x \cdot \nabla_{A,V} \phi = \frac{1}{2} x^j g^{ij} \nabla_{A,V;i} \phi,$$
$$\nabla f \cdot F_A = 2 g^{ij} f^{-1} \partial_j f F_{A;ik}, \quad \nabla f \cdot \nabla_{A,V} \phi = 2 g^{ij} f^{-1} \partial_j f \nabla_i \phi.$$

对于任意 $\alpha \in \Omega^1(\mathrm{End}(E))$、$\beta \in \Gamma(V \otimes \mathrm{End}(E))$，我们有

$$\langle d(f^2 G_{u_0}) \wedge \alpha, F_A \rangle = \langle \alpha, \nabla f \cdot F_A \rangle f^2 G_{u_0} + \frac{1}{t-t_0} \langle \alpha, x \cdot F_A \rangle f^2 G_{u_0},$$

and

$$\langle d(f^2 G_{u_0}) \beta, \nabla_{A,V} \phi \rangle = \langle \beta, \nabla f \cdot \nabla_{A,V} \phi \rangle f^2 G_{u_0} + \frac{1}{t-t_0} \langle \beta, x \cdot \nabla_{A,V} \phi \rangle f^2 G_{u_0}.$$

结合上述不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&I_1 + I_2 + I_3 \\
&= 4r \int_{T_r(u_0)} \frac{1}{|t-t_0|} \Big| |t-t_0| \frac{\partial A}{\partial t} - x \odot F_A \Big|^2 f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&+ 4r \Re \int_{T_r(u_0)} \frac{1}{|t-t_0|} \Big\langle x \cdot F_A - x \odot F_A, x \odot F_A - |t-t_0| \frac{\partial A}{\partial t} \Big\rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&+ 4r \Re \int_{T_r(u_0)} \Big\langle |t-t_0| \frac{\partial A}{\partial t} - x \odot F_A, \nabla f \cdot F_A \Big\rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&+ 8r \int_{T_r(u_0)} \frac{1}{|t-t_0|} \Big| |t-t_0| \frac{\partial \phi}{\partial t} - x \odot \nabla_{A,V} \phi \Big|^2 f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&+ 8r \Re \int_{T_r(u_0)} \frac{1}{|t-t_0|} \Big\langle x \cdot \nabla_{A,V} \phi - x \odot \nabla_{A,V} \phi, x \odot \nabla_{A,V} \phi - |t-t_0| \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big\rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&+ 8r \Re \int_{T_r(u_0)} \Big\langle |t-t_0| \frac{\partial \phi}{\partial t} - x \odot \nabla_{A,V} \phi, \nabla f \cdot \nabla_{A,V} \phi \Big\rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&- 8r \Re \int_{T_r(u_0)} \langle x \odot \nabla_{A,V} \phi, [[\phi, \phi^*], \phi] + \sqrt{-1} \Lambda_\omega F_{h_V} \phi \rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&- 2r \Re \int_{T_r(u_0)} \langle x^i F_A(\nabla_j \partial_i, \partial_k) dx^j \wedge dx^k, F_A \rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&- 4r \Re \int_{T_r(u_0)} \langle x^i \nabla_{A,V} \phi (\nabla_j \partial_i) dx^j, \nabla_{A,V} \phi \rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&+ 8r \Re \int_{T_r(u_0)} \langle x \odot F_V \phi, \nabla_{A,V} \phi \rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&- 8r \Re \int_{T_r(u_0)} (t-t_0) \Big\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, [[\phi, \phi^*], \phi] + \sqrt{-1} \Lambda_\omega F_{h_V} \phi \Big\rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
&+ 4r \int_{T_r(u_0)} |\partial_{A,V} \phi|^2 f^2 G_{u_0} dv_g dt.
\end{aligned}$$

根据引理 2.1 和命题 2.4，我们得到

$$\Big|\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|^2 \leq C, \quad |\phi|^2 \leq C,$$

其中常数 C 取决于初始数据（A_0, ϕ_0）和 $\sup_X |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}|$。由于$r \leq R \leq i_X$。根据杨不等式，我们有

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 + I_3 \geq & - Cr \int_{T_r(u_0)} \frac{1}{|t-t_0|} |x \cdot F_A - x \odot F_A|^2 f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
& - Cr \int_{T_r(u_0)} |t-t_0| |\nabla f \cdot F_A|^2 f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
& - Cr \int_{T_r(u_0)} \frac{1}{|t-t_0|} |x \cdot \nabla_{A,V}\phi - x \odot \nabla_{A,V}\phi|^2 f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
& - Cr \int_{T_r(u_0)} |t-t_0| |\nabla f \cdot \nabla_{A,V}\phi|^2 f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
& - Cr \int_{T_r(u_0)} |x|^2 |\nabla_{A,V}\phi|^2 f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
& - 2r\Re \int_{T_r(u_0)} \langle x^i F_A(\nabla_j \partial_i, \partial_k) dx^j \wedge dx^k, F_A \rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
& - 4r\Re \int_{T_r(u_0)} \langle x^i \nabla_{A,V}\phi (\nabla_j \partial_i) dx^j, \nabla_{A,V}\phi \rangle f^2 G_{u_0} dv_g dt \\
& - Cr,
\end{aligned}$$

其中常数 C 取决于初始数据（A_0, ϕ_0）和 $\sup_X |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}|$。对于最后一项 I_4，我们有

$$\begin{aligned}
I_4 =& r \int_{T_r(u_0)} e_2(A,\phi) x^i \partial_i (f^2 \sqrt{\det(g_{ij})}) G_{u_0} dx dt \\
=& r \int_{T_r(u_0)} e_2(A,\phi) 2x^i f \partial_i(f) G_{u_0} dv_g dt + r \int_{T_r(u_0)} e_2(A,\phi) f^2 x^i \partial_i (\sqrt{\det(g_{ij})}) G_{u_0} dx dt \\
=& r \int_{T_r(u_0)} e_2(A,\phi) 2x^i f \partial_i(f) G_{u_0} dv_g dt + \frac{r}{2} \int_{T_r(u_0)} e_2(A,\phi) x^i \mathrm{tr}(g^{-1}\partial_i g) f^2 G_{u_0} dv_g dt.
\end{aligned}$$

由于

$$|g_{ij} - \delta_{ij}| \leq C|x|^2, \quad |\partial_i g_{jk}| \leq C|x|, \quad |\Gamma_{ij}^k| \leq C|x|,$$

then

$$\begin{aligned}
|x \cdot F_A - x \odot F_A|^2 &\leq C|x|^6 |F_A|^2, \\
|x \cdot \nabla_{A,V}\phi - x \odot \nabla_{A,V}\phi|^2 &\leq C|x|^6 |\nabla_{A,V}\phi|^2, \\
\langle x^i F_A(\nabla_k \partial_i, \partial_j) dx^j \wedge dx^k, F_A \rangle &\leq C|x|^2 |F_A|^2, \\
\mathrm{tr}(g^{-1}\partial_i g) &\leq C|x|.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(r)}{dr} \geq & -Cr\int_{T_r(u_0)}\frac{|x|^6}{|t-t_0|}e_2(A,\phi)f^2G_{u_0}dv_gdt\\ & -Cr\int_{T_r(u_0)}|t-t_0||\nabla f\cdot F_A|^2f^2G_{u_0}dv_gdt\\ & -Cr\int_{T_r(u_0)}|t-t_0||\nabla f\cdot\nabla_{A,V}\phi|^2f^2G_{u_0}dv_gdt\\ & -Cr\int_{T_r(u_0)}|x|^2e_2(A,\phi)f^2G_{u_0}dv_gdt\\ & -Cr\int_{T_r(u_0)}f|\nabla f||x|e_2(A,\phi)G_{u_0}dv_gdt\\ & -Cr.\end{aligned}$$

˜根据 Chen–Struwe 在 [12], 中的论证，我们知道存在一个常数 $C_4>0$，使得

$$\begin{aligned}&r^{-1}|t-t_0|\cdot|x|^6G_{u_0}\leq\tilde{C}_4(1+G_{u_0}),\\ &r^{-1}|x|^2G_{u_0}\leq\tilde{C}_4(1+G_{u_0})\end{aligned}$$

在 $T_r(u_0)$ 上。因此可得

$$\begin{aligned}&-Cr\int_{T_r(u_0)}\Big(\frac{|x|^6}{|t-t_0|}+|t-t_0|+|x|^2\Big)e_2(A,\phi)f^2G_{u_0}dv_gdt\\ &\geq -C\Phi(r)-Cr\mathrm{YMH}(A_0,\phi_0),\end{aligned}$$

根据 [35, P. 1384], 中的论证，我们有

$$\begin{aligned}-r\int_{T_r(u_0)}|t-t_0|\cdot|\nabla f\cdot F_A|^2f^2G_{u_0}dv_gdt&\geq-\frac{C(n)r}{R^{2n}}\int_{P_R(u_0)}|F_A|^2dv_gdt,\\ -r\int_{T_r(u_0)}|t-t_0|\cdot|\nabla f\cdot\nabla_{A,V}\phi|^2f^2G_{u_0}dv_gdt&\geq-\frac{C(n)r}{R^{2n}}\int_{P_R(u_0)}|\nabla_{A,V}\phi|^2dv_gdt,\\ -2r\int_{T_r(u_0)}|x|\cdot|\nabla f|\cdot|f|\cdot e_2(A,\phi)G_{u_0}dv_gdt&\geq-\frac{C(n)r}{R^{2n}}\int_{P_R(u_0)}e_2(A,\phi)dv_gdt.\end{aligned}$$

综合以上不等式，可得

$$\frac{d\Phi(r)}{dr}\geq-C\Phi(r)-Cr-\frac{Cr}{R^{2n}}\int_{P_R(u_0)}e_2(A,\phi)dv_gdt,\tag{3.4}$$

其中，常数 C 取决于 (X,ω) 的几何、$\sup_X|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}|$ 以及初始数据 (A_0,ϕ_0)。对 r 上述不等式 (3.4) 进行积分，即得证明。□

定理 3.2. 设 $(A(t)\ \phi(t))$ 是杨–米尔斯–希格斯流 (1.4) 的一个解。存在正常数 $\epsilon_0, \delta_0 < 1/4$, 使得若

$$R^{2-2n}\int_{P_R(u_0)} e_2(A,\phi)dv_g dt < \epsilon_0 \tag{3.5}$$

对某个 $0 < R \le \min\{i_X/2, \sqrt{t_0}/2\}$ 成立，则对任意 $\delta \in (0, \delta_0)$，有

$$\sup_{P_{\delta R}(u_0)} e_2(A,\phi) \le \frac{16}{(\delta R)^4}. \tag{3.6}$$

证明。对任意 $\delta \in (0, 1/4]$，我们定义函数

$$f(r) = (2\delta R - r)^4 \sup_{P_r(x_0,t_0)} e_2(A,\phi).$$

由于 $f(r)$ 连续，且 $f(2\delta R) = 0$，我们知道 $f(r)$ 在某个¯点 $r_0 \in [0, 2\delta R)$ 处取得最大值。设 $(x_1, t_1) \in P_{r_0}(x_0, t_0)$ 是满足下式的点

$$e_2(A,\phi)(x_1,t_1) = \sup_{P_r(x_0,t_0)} e_2(A,\phi).$$

我们断言，当 ϵ_0, δ_0 足够小时， $f(r_0) \le 16$。否则，有

$$\rho_0 := e_2(A,\phi)(x_1,t_1)^{-1/4} = (2\delta R - r_0) f(r_0)^{-1/4} < \delta R - \frac{r_0}{2}.$$

对黎曼度量 $\tilde{g} = \rho_0^{-2} g$ 重新缩放 $\tilde{h}_V = \rho_0^2 h_V$ 和 $t = t_1 + \rho_0^2 \tilde{t}$，得到

$$|F_A|^2_{\tilde{g}} = \rho_0^4 |F_A|^2_g,$$
$$|\partial_{A,V}\phi|^2_{\tilde{g},\tilde{h}_V} = \rho_0^4 |\partial_{A,V}\phi|^2_{g,h_V}.$$

Set

$$e_{\rho_0}(x,\tilde{t}) = |F_A|^2_{\tilde{g}} + 2|\partial_{A,V}\phi|^2_{\tilde{g},\tilde{h}_V} = \rho_0^4 e_2(A,\phi)(x, t_1 + \rho_0^2\tilde{t}),$$
$$\tilde{P}_{\tilde{r}}(x_1, 0) = B_{\rho_0\tilde{r}}(x_1) \times [-\tilde{r}^2, \tilde{r}^2].$$

于是我们有 $e_{\rho_0}(x_1, 0) = \rho_0^4 e(A,\phi)(x_1,t_1) = 1$，并且

$$\begin{aligned}\sup_{\tilde{P}_1(x_1,0)} e_{\rho_0} &= \rho_0^4 \sup_{P_{\rho_0}(x_1,t_1)} e(A,\phi) \le \rho_0^4 \sup_{P_{\delta R + r_0/2}(x_0,t_0)} e(A,\phi) \\ &\le \rho_0^4 f(\delta R + r_0/2)(\delta R - r_0/2)^{-4} \le 16.\end{aligned}$$

Thus

$$|F_A|^2_{\tilde{g}} + 2|\partial_{A,V}\phi|^2_{\tilde{g},\tilde{h}_V} \le 16, \quad on\ \ \tilde{P}_1(x_1,0). \tag{3.7}$$

将上述不等式与命题 2.7 结合可得 t

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{t}} - \Delta_{\tilde{g}}\right) e_{\rho_0} &= \rho_0^6 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_g\right) e_2(A,\phi) \\ &\le C_1\rho_0^6(|\phi|^2 + |F_A| + |F_{h_V}| + |Ric|)|\partial_{A,V}\phi|^2 + C_2\rho_0^6|\partial_A\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_V}||\phi||\partial_{A,V}\phi| \\ &\quad + C_3\rho_0^6(|F_A| + |\phi|^2 + |Rm|)|F_A|^2 + C_4\rho_0^6|F_A||\partial_{A,V}\phi|^2 + C_5\rho_0^6|\phi|^2|F_{h_V}||F_A| \\ &\le C_6(e_{\rho_0} + \rho_0^8)\end{aligned}$$

˜在 $P_1(x_1, 0)$ 上，其中常数 C_6 仅取决于 (X, ω) 的几何、 F_{h_V} 以及 $\sup_X |\phi_0|_{H^0}$。接着，由抛物型平均值不等式可知

$$\begin{aligned} 1 < \sup_{\tilde{P}_{1/2}(x_1,0)} (e_{\rho_0} + \rho_0^8) &\le C \int_{\tilde{P}_1(x_1,0)} (e_{\rho_0} + \rho_0^8) dv_{\tilde{g}} d\tilde{t} \\ &= C_7 \rho_0^{2-2n} \int_{P_{\rho_0}(x_1,t_1)} e_2(A,\phi) dv_g dt + C_7 \rho_0^8, \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中常数 C_7 仅取决于 (X, ω) 的几何、 F_{h_V} 以及 $\sup_X |\phi_0|_{H^0}$。

我们选取以 x_1 为中心的正规测地坐标，并令 $f \in C_0^\infty(B_{R/2}(x_1))$ 为一个光滑截断函数，使得在 $B_{R/4}(x_1)$ 上 $0 \le f \le 1$, $f \equiv 1$ ，而在$B_{R/2}(x_1)$ 上 $|df| \le 8/R$ $\setminus B_{R/4}(x_1)$。取 $r_1 = \rho_0$ 和 $r_2 = \delta_0 R$，并应用单调性不等式，得到

$$\begin{aligned} &\rho_0^{2-2n} \int_{P_{\rho_0}(x_1,t_1)} e_2(A,\phi) dv_g dt \\ \le& C\rho_0^2 \int_{P_{\rho_0}(x_1,t_1)} e_2(A,\phi) G_{(x_1,t_1+2\rho_0^2)} f^2 dv_g dt \\ \le& C\rho_0^2 \int_{T_{\rho_0}(x_1,t_1+2\rho_0^2)} e_2(A,\phi) G_{(x_1,t_1+2\rho_0^2)} f^2 dv_g dt \\ \le& C_* r_2^2 \int_{T_{r_2}(x_1,t_1+2\rho_0^2)} e_2(A,\phi) G_{(x_1,t_1+2\rho_0^2)} f^2 dv_g dt + C_* C_{10} \delta_0^2 R^2 \\ &+ C_* (R/2)^{2-2n} \int_{P_{R/2}(x_1,t_1)} e_2(A,\phi) dv_g dt \\ \le& C_* \delta_0^{2-2n} R^{2-2n} \int_{P_R(x_0,t_0)} e_2(A,\phi) dv_g dt + C_* C_{10} \delta_0^2 R^2 \\ \le& C_8 (\delta_0^{2-2n} \epsilon_0 + \delta_0^2 R^2), \end{aligned}$$

其中常数 C_8 仅取决于 (X, ω) 的几何、 F_{h_V} 以及 $\sup_X |\phi_0|_{H^0}$。选取足够小的 ϵ_0, δ_0，使得 $\tilde{C}_4 \tilde{C}_5 (\delta_0^{2-2n} \epsilon_0 + \delta_0^2 R^2) + \tilde{C}_4 \delta_0^8 R^8 < 1$，则会导出矛盾。因此我们有 $f(r_0) \le 16$，这意味着

$$\sup_{P_{\delta R}(u_0)} e_2(A,\phi) \le 16/(\delta R)^4.$$

□

利用上述 ϵ 正则性定理，并遵循 Hong 和 Tian（[24]）对杨–米尔斯流情形所采用的论证，我们给出定理 1.1 第一部分的证明。

证明　　定理 1.1 (1). 根据命题2.3，对于任意 $t_k \to +\infty$ 和 $a > 0$，我们有　　e

$$\int_{t_k-a}^{t_k+a} \int_X \left(\left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right|^2 \right) dv_g dt \to 0, \quad t_k \to +\infty.$$

因此，对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个常数 K，当 $k > K$ 时，有

$$\int_{t_k-a}^{t_k+a}\int_X \Big(\Big|\frac{\partial A}{\partial t}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial \phi^*}{\partial t}\Big|^2\Big)dv_g dt \le \epsilon.$$

Let

$$\Sigma = \bigcap_{0<r<i_X} \{x \in X,\ \liminf_{k\to+\infty} r^{4-2n}\int_{B_r(x)} e_2(A,\phi)(\cdot,t_k)dv_g \ge \epsilon_1\},$$

其中 ϵ_1 将在稍后选取。对于 $x_1 \in X\setminus\Sigma$，存在 r_1，以及 $\{t_k\}$ 的子列（仍记为 $\{t_k\}$），使得

$$r_1^{4-2n}\int_{B_{r_1}(x_1)} e_2(A,\phi)(\cdot,t_k)dv_g < \epsilon_1.$$

对任意 $t \in [s,\tau]$，令 $s = t_k - r_1^2$、$\tau = t_k + r_1^2$，由命题 2.5 可得

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_1/2}(x_1)} e_2(A,\phi)(\cdot,t)dv_g \le& \int_{B_{r_1}(x_1)} e_2(A,\phi)(\cdot,t_k)dv_g\\ &+ 2\int_{t_k-r_1^2}^{t_k+r_1^2}\int_X \Big(\Big|\frac{\partial A}{\partial t}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial \phi^*}{\partial t}\Big|^2\Big)dv_g dt\\ &+ C_1\Big(\int_{t_k-r_1^2}^{t_k+r_1^2}\int_X \Big(\Big|\frac{\partial A}{\partial t}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial \phi^*}{\partial t}\Big|^2\Big)dv_g dt\Big)^{1/2}\\ \le& \int_{B_{r_1}(x_1)} e_2(A,\phi)(\cdot,t_k)dv_g + C_2\epsilon + C_3\epsilon^{1/2},\end{aligned}$$

其中 C_1、C_2 和 C_3 是常数。因此我们有

$$\begin{aligned}r_1^{2-2n}\int_{P_{r_1/2}(x_1,t_k)} e_2(A,\phi)dv_g dt \le& r_1^{2-2n}\int_{t_k-(r_1/2)^2}^{t_k+(r_1/2)^2}\int_{B_{r_1}(x_1)} e_2(A,\phi)(\cdot,t_k)dv_g dt\\ &+ (C_1\epsilon + C_2\epsilon^{1/2})r_1^{2-2n}\int_{t_k-(r_1/2)^2}^{t_k+(r_1/2)^2} dt\\ \le& \frac{1}{2}r_1^{4-2n}\int_{B_{r_1}(x_1)} e_2(A,\phi)(\cdot,t_k)dv_g + \frac{1}{2}(C_1\epsilon + C_2\epsilon^{1/2})r_1^{4-2n},\end{aligned}$$

选取 $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{2^{2n-2}}$，并令 ϵ 足够小，使得

$$(C_1\epsilon + C_2\epsilon^{1/2})r_1^{4-2n}2^{2n-3} \le \epsilon_0/2,$$

于是我们有

$$\Big(\frac{r_1}{2}\Big)^{2-2n}\int_{P_{r_1/2}(x_1,t_k)} e_2(A,\phi)dv_g dt < \epsilon_0.$$

由 ϵ-正则性可知,

$$\sup_{P_{\delta_0 r_1}(x_1,t_k)} e_2(A,\phi) \le \frac{16}{(\delta_0 r_1)^4}. \tag{3.9}$$

Σ 闭：对于任意 $x \in B_{\delta_0 r_1}(x_1)$，我们选取足够小的 r_x ，使得 $B_{r_x}(x) \subset B_{\delta_0 r_1}(x_1)$，并且

$$r_x^{4-2n} \int_{B_{r_x}(x)} e_2(A,\phi)(\cdot,t_k)dv_g \leq r_x^{4-2n} r_x^{2n} \frac{16}{(\delta_0 r_1)^4} \leq \frac{16 r_x^4}{(\delta_0 r_1)^4} < \epsilon_1,$$

也就是说， $B_{\delta_0 r_1}(x_1) \subset X \setminus \Sigma$。因此 Σ 是闭的。

$\mathcal{H}^{2n-4}(\Sigma)$：由于 Σ 是闭的，对任意 $\delta > 0$，存在有限个测地球 $\{B_{r_i}(x_i)\}, r_i < \delta$，使得 $\{B_{r_i}(x_i)\}$ 构成 Σ的覆盖，其中 $x_i \in \Sigma$ 且对任意 $i \neq j$， $B_{r_i/2}(x_i) \cap B_{r_j/2}(x_j) = \emptyset$。由于 $x_i \in \Sigma$，因此

$$r_i^{4-2n} \int_{B_{r_i/2}(x_i)} e_2(A,\phi)(\cdot,t_k)dv_g > 2^{4-2n}\epsilon_1$$

当 k充分大时。也就是说,

$$r_i^{2n-4} < 2^{2n-4}\epsilon_1^{-1} \int_{B_{r_i/2}(x_i)} e_2(A,\phi)(\cdot,t_k)dv_g,$$

$$\sum_i r_i^{2n-4} < 2^{2n-4}\epsilon_1^{-1} \int_{\cup_i B_{r_i/2}(x_i)} e_2(A,\phi)(\cdot,t_k)dv_g < +\infty.$$

这意味着 $\mathcal{H}^{2n-4}(\Sigma) < +\infty$。

收敛：由前面的论证可知，对任意 $x_0 \in X \setminus \Sigma$，存在 r_0 和$\{t_k\}$，使得

$$\sup_{P_{r_0}(x_0,t_k)} e_2(A,\phi) \leq C.$$

根据 Uhlenbeck 弱紧性定理，存在子列 $\{t_{k'}\}$ 和规范变换 $\{\sigma(k')\}$，使得 $\sigma(k') \cdot (A(t_{k'}) \ \phi(t_k'))$ 在 $W^{1,\ 2}_{loc}(X \setminus \Sigma)$ 中弱收敛到定义在 (E_∞, H_∞) 上的 V-扭曲 Higgs 对 (A_∞, ϕ_∞)，并且 (A_∞, ϕ_∞) 在 Σ 之外是方程 (1.3) 的解。根据标准抛物估计并运用 Hong–Tian 论证（见 [23] 中的命题 6），我们知道 $\sigma(k') \cdot (A(t_{k'}) \ \phi(t_k'))$ 在 Σ 之外以 C^∞_{loc} 拓扑收敛到 (A_∞, ϕ_∞)。

全纯正交分解：由方程 (1.3)，我们有

$$D_{A_\infty}\theta_\infty = 0, \quad [\theta_\infty, \phi_\infty] = 0,$$

其中 $\theta_\infty = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_\infty} + [\phi_\infty, \phi_\infty^{*H_\infty}]$。由于 θ_∞ 是平行的且 $\theta_\infty^{*H_\infty} = \theta_\infty$，我们可以根据 θ_∞ 的特征值对 E_∞ 和 ϕ_∞ 进行分解。因此，我们可以得到一个全纯正交分解

$$E_\infty = \oplus_{i=1}^l E_\infty^i,$$

and

$$\phi_\infty^i : E_\infty^i \to V \otimes E_\infty^i.$$

令 $H_\infty^i, \phi_\infty^i$为 H_∞, ϕ_∞ 在 E_∞^i上的限制，则 $(A_\infty^i, \phi_\infty^i)$ 是 (E_∞^i, H_∞^i) 上的一个 V-扭曲 Higgs 对，并且满足

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_\infty^i} + [\phi_\infty^i, (\phi_\infty^i)^{*H_\infty^i}] = \lambda_i Id_{E_\infty^i}.$$

延拓为反身层：由于 $\phi(t)$ 有界，因此我们有

$$\int_{X\setminus\Sigma} |F_{A_\infty}|^2_{H_\infty} dv_g \le C.$$

由于 $\mathcal{H}^{2n-4}(\Sigma) < +\infty$, ϕ_∞ 是全纯且 C^0 有界，并且每个度量 H^i_∞ 都满足希格斯–厄米–爱因斯坦方程，根据 Bando 和 Siu 的文章（[3]）中的定理 2，我们知道每个 $(E^i_\infty, \bar\partial_{A^i_\infty})$ 都可以延拓到整个 X 上，成为一个反身层（为简便起见，也记为 $(E^i_\infty, \bar\partial_{A^i_\infty})$）； ϕ^i_∞ 并且 H^i_∞ 可以在层 $(E^i_\infty, \bar\partial_{A^i_\infty})$ 局部自由处光滑延拓。□

推论 3.3. 设 $(A(t_k)\ \phi(t_k))$ 是沿杨–米尔斯–希格斯流的一列 V-扭曲希格斯对，其极限为 (A_∞, ϕ_∞)。那么

(1) $\theta(A(t_k)\ \phi(t_k)) \to \theta(A_\infty, \phi_\infty)$ 在 L^p 中强收敛于 $k \to +\infty$，对所有 $1 \le p < +\infty$ 均成立，且 $\lim_{t\to+\infty} \|\theta(A(t)\ \phi(t))\|^2_{L^2} = \|\theta(A_\infty, \phi_\infty)\|^2_{L^2\infty}$ (2) $\|\theta(A_\infty, \phi_\infty)\|_{L^\infty} \le \|\theta(A(t_k)\ \phi(t_k))\|_{L^\infty} \le \|\theta(A(t_0)\ \phi(t_0))\|_{L^\infty}$，当 $0 \le t_0 \le t_k$ 时成立。

4. Isomorphism of the limit object and $Gr^{HNS}(E, \bar\partial_{A_0}, \phi_0)$

4.1. 扭曲希格斯丛的 HNS 滤过与 L^p-δ-近似临界厄米度量。本小节将证明，极限 V-扭曲希格斯层的 Harder–Narasimhan 类型与初始的 V-扭曲希格斯丛一致。证明的关键在于得到 L^p-δ-近似临界厄米度量的存在性。首先，回顾 V-扭曲希格斯丛的 Harder–Narasimhan–Seshadri 滤过。证明与全纯丛情形中所用的证明几乎相同（[27, 第 7.15、7.17、7.18] 节）。

¯引理 4.1. 设 (E, ∂_A, ϕ) 是 K ¨ahler 流形 (X, ω) 上的 V 扭曲希格斯丛。则存在由 ϕ-不变相干子层构成的 E 滤过

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_l = E, \tag{4.1}$$

¯称为 V 扭曲希格斯丛 (E, ∂_A, ϕ) 的 Harder–Narasimhan滤过，使得 $Q_i = E_i/E_{i-1}$ 无挠且半稳定。此外， $\mu_\omega(Q_i) > \mu_\omega(Q_{i+1})$。

引理 4.2. 设 (F, ϕ_F) 是 K ¨ahler 流形 (X, ω) 上的半稳定 V 扭曲希格斯层。则存在由 ϕ_F-不变相干子层构成的 F 滤过

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_l = F, \tag{4.2}$$

称为 V 扭曲希格斯丛 (F, ϕ_F) 的 Seshadri 滤过，使得 $Q_i = F_i/F_{i-1}$ 无挠且稳定。此外，$\mu_\omega(Q_i) = \mu_\omega(F)$。

¯命题 4.3. 设 (E, ∂_A, ϕ) 是 K ¨ähler 流形 (X, ω) 上的一个 V-扭曲希格斯丛。则存在 E 的一个双重滤过 $\{E_{i,j}\}$，称为 ϕ- 不变的 Harder–Narasimhan–Seshadri 滤过，其中 $\{E_i\}_{i=1}^l$ 是 HN 滤过，而 $\{E_{i,j}\}_{j=1}^{l_i}$ 是 E_i/E_{i-1} 的 Seshadri 滤过。令 $Q_{i,\ j} = E_{i,\ j}/E_{i,\ j-1}$, 则伴随分次对象 $Gr^{HNS}(E, \bar\partial_A, \phi) = \oplus_i^l \oplus_{j=1}^{l_i} Q_{i,\ j}$ 由 $(E, \bar\partial_A, \phi)$ 的同构类唯一确定。

¯定义 4.4. 对于秩为 r 的 V-扭曲希格斯丛 (E, ∂_A, ϕ)，通过如下方式从 HN 滤过构造一个非递增的 r 元组：

$$\vec\mu(E, \bar\partial_A, \phi) = (\mu_1, \cdots, \mu_r) \tag{4.3}$$

令 $\mu_i = \mu_\omega(Q_j)$，其中 $rank(E_{j-1}) + 1 \leq i \leq rank(E_j)$。我们称 (E, ∂_A, ϕ) 的 Harder–Narasimhan 型为 $\vec{\mu}(E, \partial_A, \phi)$。

注意到 $\vec{\mu}(E_\infty, \bar{\partial}_{A_\infty}, \phi_\infty) = \mathrm{Vol}_{2\pi}^{(X,\omega)} \vec{\lambda}_\infty = \mathrm{Vol}_{2\pi}^{(X,\omega)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$。下文中，我们假设 $\mathrm{Vol}(X, \omega) = 2\pi$。

对于任意 ϕ-不变子层 S of $(E, \bar{\partial}_A, \phi)$，令 H 为 E上的一个度量，$\pi_S^H \colon E \to E$ 为 E 到 S的诱导投影映射。不难得到

$$\deg_\omega(S) = \frac{1}{2\pi} \int_X \mathrm{tr}((\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H + [\phi, \phi^{*H}])\pi_S^H) dv_g - \frac{1}{2\pi} \int_X (|\bar{\partial}_A \pi_S^H|^2 + |[\phi, \pi_S^H]|^2) dv_g. \tag{4.4}$$

令 $\mathcal{G}$ 为 E的酉规范群，其李代数记为 $\mathfrak{u}(E)$。下面的命题可直接由方程 (4.4) 推出。

命题4.5。设 $g_j \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$和 $(A_j, \phi_j) = g_j \cdot (A_0, \phi_0)$ 是复向量丛 E 上的一列秩为 r的复规范等价 V-扭曲 Higgs 结构，S 为 $(E, \bar{\partial}_{A_0}, \phi_0)$ 的一个 ϕ_0-不变子层。假设 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_j} + [\phi_j, \phi_j^*] \to a$属于 L^1，且满足 $j \to +\infty$，其中 $a \in L^1(\sqrt{-1}\mathfrak{u}(E))$，并且 $\frac{1}{2\pi}a$ 的特征值 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$为常数。那么 $\deg_\omega(S) \leq \sum_{i \leq rank(S)} \lambda_i$。

根据引理 2.1 中的 (2.2)，我们有

$$\sum_{i=1}^r \mu_i = \deg_\omega(E, \bar{\partial}_A) = \deg_\omega(E_\infty, \bar{\partial}_{A_\infty}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i. \tag{4.5}$$

设 $\{E_i\}_{i=1}^l$ 是 $(E, \bar{\partial}_{A_0}, \phi_0)$ 的 HN 滤过。根据推论 3.3 和命题 4.5，我们有

$$\sum_{\alpha \leq rank(E_i)} \mu_\alpha = \deg_\omega(E_i) \leq \sum_{\alpha \leq rank(E_i)} \lambda_\alpha. \tag{4.6}$$

也就是说，

$$\vec{\mu}(E, \bar{\partial}_{A_0}, \phi_0) \leq \vec{\lambda}_\infty. \tag{4.7}$$

设 $\mathfrak{u}(r)$ 是酉群 $U(r)$ 的李代数。固定一个实数 $\alpha \geq 1$，对于任意 $a \in \mathfrak{u}(r)$，我们定义函数 $\varphi_\alpha \colon \mathfrak{u}(r) \to \mathbb{R}$，其定义为

$$\varphi_\alpha(a) = \sum_{j=1}^r |\lambda_j|^\alpha,$$

其中 $\sqrt{-1}\lambda_j$ 是 a的特征值。容易证明，存在一族光滑凸伴随不变函数 $\varphi_{\alpha,\rho}$, $0 < \rho \leq 1$, 使得 $\varphi_{\alpha,\rho} \to \varphi_\alpha$ 在 $\mathfrak{u}(r)$ 的紧子集上一致收敛，当 $\rho \to 0$时。因此，由 [1, 命题 12.16], 可知，φ_α 是凸函数。对于任意实数 N，我们定义

$$\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A, \phi) = \int_X \varphi_\alpha(\sqrt{-1}(\theta(A, \phi) + N \cdot \mathrm{Id}_E)) dv_g. \tag{4.8}$$

对于任意 $\vec{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_r)$，令 $\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\mu)=2\pi\varphi_\alpha(\sqrt{-1}(\vec{\mu}+N))$。那么对于任意光滑凸伴随不变函数 φ，有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\varphi(\sqrt{-1}(\theta(A(t),\phi(t))+N\cdot \mathrm{Id}_E))\geq 0, \tag{4.9}$$

其证明见 [14, 28]。由于我们可以用光滑凸伴随不变函数 $\varphi_{\alpha,\rho}\to\varphi_\alpha$ 逼近 φ_α，由 (4.9) 可知，$\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A(t),\phi(t))$ 沿流单调不增。根据推论 3.3，我们可以选取一个序列 $t_j\to+\infty$，使得 $\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A(t_j),\phi(t_j))\to\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A_\infty,\phi_\infty)$。于是我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A(t),\phi(t))=\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A_\infty,\phi_\infty) \tag{4.10}$$

对于任意 $\alpha\geq 1$ 和任意 N。

引理 4.6（[14]）。泛函 $a\to(\int_X\varphi_\alpha(a)dv_g)^{1/\alpha}$ 在 $L^\alpha(\mathfrak{u}(E))$ 上定义了一个与 L^α 范数等价的范数。

引理 4.7（[14]）。(1) 若 $\vec{\mu}\leq\vec{\lambda}$，则对所有 $\alpha\geq 1$，都有 $\varphi_\alpha(\sqrt{-1}\vec{\mu})\leq\varphi_\alpha(\sqrt{-1}\vec{\lambda})$。(2) 假设 $\mu_r\geq 0$ 且 $\lambda_r\geq 0$。若对于某个具有极限点的集合 $S\subset[1,+\infty)$ 中的所有 α，都有 $\varphi_\alpha(\sqrt{-1}\vec{\mu})=\varphi_\alpha(\sqrt{-1}\vec{\lambda})$，则 $\vec{\mu}=\vec{\lambda}$。

令 $\{E_i\}$ 为 E的 HN 滤过。给定 E上的厄米度量 H，我们可以定义一个 L_1^2-厄米自同态

$$\Psi^{HN}(E,\phi,H)=\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\pi_i^H-\pi_{i-1}^H),$$

其中，π_i^H是从 E 到 E_i的投影映射。更一般地，给定 E 的一个滤过 $F=\{F_i\}$ 以及实数 $\{\mu_i\}_{i=1}^l$，我们也可以定义一个 L_1^2- 厄米自同态 $\Psi(F,(\mu_1,\cdots,\mu_l)H)=\sum_{i=1}^l\mu_i(\pi_i^H-\pi_{i-1}^H)$。

定义 4.8。固定 $0<p<+\infty$ 和 $\delta>0$。V-扭曲希格斯丛 (E,ϕ) 上的 L^p-δ-近似临界 Hermitian 度量是满足下式的光滑度量 H：

$$\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_H}+[\phi,\phi^{*H}]-\Psi^{HN}(E,\phi,H)\|_{L^p}\leq\delta, \tag{4.11}$$

其中，A_H 是由 (∂_E,H) 确定的陈联络。

Let $\{E_{i,j}\}$ 为 V-扭曲希格斯丛 (E,∂_A,ϕ) 的 HNS 滤过。令

$$\Sigma_{alg}=\cup_{i,j}\{Sing(E_{i,j})\cup Sing(Q_{i,j})\}. \tag{4.12}$$

众所周知，Σ_{alg} 是一个复解析子集，其复余维至少为二。我们称其为 HNS 滤过的奇异集。由于在奇异集 Σ_{alg} 上，HNS 滤过无法由子丛给出，因此难以进行分析。

当 $\Sigma_{alg}=\emptyset$ 时，很容易证明，对于任意 $\delta>0$，都存在 L^∞-δ-近似临界厄米度量。一般情况下，Sibley 使用 Hironaka消奇点定理（[21, 22]）消解奇点 Σ_{alg}，并得到一个子丛滤过。

命题 4.9（[38]）。设 $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{l-1} \subset E_l = E$ 是复流形 X 上全纯向量丛 E 的一个由饱和子层构成的滤过，并设 $Q_i = E_i/E_{i-1}$。那么，存在一个沿 $\sim X$ 的复子流形进行爆破的有限序列，其复合映射 $\pi\colon X \to X$ 具有以下性质。存在一个滤过

$$0 = \tilde{E}_0 \subset \tilde{E}_1 \subset \cdots \subset \tilde{E}_{l-1} \subset \tilde{E}_l = \tilde{E} \tag{4.13}$$

~ ~ ~ ~通过子丛使得 E_i 是 $\pi^* E_i$的饱和化。如果 $Q_i = E_i/E_{i-1}$，则我们有正合列:

$$0 \to E_i \to \pi_* \tilde{E}_i \to T_i \to 0 \tag{4.14}$$

and

$$0 \to Q_i \to \pi_* \tilde{Q}_i \to T_i' \to 0, \tag{4.15}$$

其中， T_i 和 T_i' 是分别支撑在 E_i 和 Q_i的奇异集上的挠层，并且还有 $\pi_* E_i = E_i$ 和 $Q_i^{**} =(\pi_* Q_i)^{**}$。

¯ ~设 $\phi \in \Gamma$(End(E) $\otimes V$) 是全纯丛 (E, ∂_A) 上的扭曲 Higgs 场， $V =$

~ ~ ~ ~$\pi^* V$且 $\phi = \pi^* \phi \in \Gamma$(End($E$) $\otimes V$) 是 E上的拉回扭曲 Higgs 场。如果滤过 $\{E_i\}_{i=1}^l$ 是由 ϕ-不变子层构成的，那么上述命题中的滤过 $\{\tilde{E}_i\}_{i=1}^l$ 是由 ϕ-不变子丛构成的。因此，我们有以下命题。

¯命题 4.10. 设 $\{E_{i,j}\}$ 是复流形 X 上一个 V-扭曲希格斯丛 (E, ∂_A, ϕ) 的 HNS 滤过，并设 $Q_{i,j} = E_{i,j}/E_{i,j-1}$。那么，存在一列沿 X 的复子流形进行的爆破 ~，其复合映射 $\pi\colon X \to X$ 具有以下~ ~ ~性质。存在一个由 ϕ-子丛构成的滤过 $\{E_{i,j}\}$，使得 $E_{i,j}$ 是

~ ~ ~$\pi^* E_{i,j}$, $\pi_* E_{i,j} = E_{i,j}$ 的饱和化，并且 $Q_i^{**},_j =(\pi_* Q_{i,j})^{**}$，其中 $\phi = \pi^* \phi$。

~由于爆破 X 也是 K¨ahler 的，我们在其上有一族由$\omega_\epsilon = \pi^* \omega + \epsilon \eta$ 给出的 K¨ahler 度量，其中 η 是某个 K¨ahler 度量。

~ ~定理 4.11（[38]）。设 S 是 X 上全纯

~ ~ ~向量丛 E 的一个子层（其无挠商层为 Q），其中 $\pi\colon X \to X$ 是沿余维为 ≥ 2 的复 ~ 子流形进行的一系列爆破。则存在一个与 S 无关的统一常数 C，使得 S 和 Q 关于 ω_ϵ 的次数满足:

$$\deg_{\omega_\epsilon}(\tilde{S}) \leq \deg_\omega(\pi_* \tilde{S}) + \epsilon C, \quad and \quad \deg_{\omega_\epsilon}(\tilde{Q}) \geq \deg_\omega(\pi_* \tilde{Q}) - \epsilon C. \tag{4.16}$$

~ ~ ~ ~推论 4.12。设 (E, ϕ) 是 X 上的 V-扭曲希格斯丛，(E, ϕ) 是 X 上的 V-扭曲~ ~希格斯丛，满足 $E = \pi_* E$ 和 $\phi = \pi^* \phi$。若 (E, ϕ) 是 ω-稳定的，则存在一个

~ ~ ~ ~ ~ϵ_1，使得对所有 $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$，$(E, \phi)$ 都是 ω_ϵ-稳定的。设 $\vec{\mu}_\epsilon(E, \phi)$ 是 (E, ϕ) 关于 ω_ϵ 的 Harder–Narasimhan 类型~ ~，则当 $\epsilon \to 0$ 时， $\vec{\mu}_\epsilon(E, \phi) \to \vec{\mu}(E, \phi)$。

引理 4.13 ([38])。设 (X, ω) 是一个复维数为 $\sim n$ 的紧致 K ¨ahler 流形，且 $\pi\colon X \to X$ 是沿着复余维为 $k \geq 2$ 的光滑复子流形 Σ 的爆破。设 η 是 X 上的 K ¨ahler 度量，并考虑 K ¨ahler 度量族 $\omega_\epsilon = \pi^* \omega + \epsilon \eta$, $0 < \epsilon < \epsilon_1$。那么，对任意满足 $1 < \alpha < 1 + \frac{1}{2}$ $\overline{(k-1)}$ 和 $1-2\ \overset{\alpha}{k-1}()(\alpha-1) < \tilde{\alpha} < +\infty$ 的 α 和 $\tilde{\alpha}$，设 $s = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}-\alpha}$，则有 $\frac{\eta^n}{\omega_\epsilon^n} \in L^{2(\alpha-1)s}(\tilde{X}, \eta)$，且 $\frac{\eta^n}{\omega_\epsilon^n}$ 的 $L^{2(\alpha-1)s}$-范数关于 ϵ 一致有界。

引理 4.14 ([38])。设 $\pi : X \to X$ 是沿着复余维为 k 的光滑复子流形 Σ 的爆破，且度量族 ω_ϵ 与前一个引理中的相同。设 F 是一个取值于 End($\tilde{E}$) 的 (1, 1)-形式。设 $1 < \alpha < 1 + \frac{1}{4k(k-1)}$ 和 $1 - 2\frac{\alpha}{k-1}(\alpha-1) < \tilde{\alpha} < 1 + \frac{1}{2(k-1)}$。那么存在一个数 κ_0，使得对任意 $0 < \kappa \leq \kappa_0$，存在一个与 ϵ, ϵ_1 和 κ 无关的常数 C，以及一个常数 $C(\kappa)$，使得：

$$\|\Lambda_{\omega_\epsilon} F\|_{L^\alpha(\tilde{X},\omega_\epsilon)} \leq C(\|\Lambda_{\omega_{\epsilon_1}} F\|_{L^{\tilde{\alpha}}(\tilde{X},\omega_{\epsilon_1})} + \kappa\|F\|_{L^2(\tilde{X},\omega_{\epsilon_1})}) + \epsilon_1 C(\kappa)\|F\|_{L^2(\tilde{X},\omega_{\epsilon_1})}. \quad (4.17)$$

利用 Donaldson 的论证，我们可以得到以下命题。

命题 4.15. 设 (E, ϕ) 是光滑 K¨ahler 流形 (X, ω) 上的 V-扭曲希格斯丛，且 $F = \{E_i\}_{i=1}^l$ 是由饱和子层构成的 (E, ϕ) 的一个滤过。设 π: $\tilde{X} \to X$ 是沿光滑复子流形的爆破，度量族 ω_ϵ 与前一个引理中的相同。设 (E, ϕ) 是拉回的 V-扭曲希格斯丛，且 $\tilde{F} = \{\tilde{E}_i\}_{i=1}^l = \{Sat_{\tilde{E}}(\pi^* E_i)\}_{i=1}^l$ 是 $(\tilde{E}, \tilde{\phi})$ 的滤过。假设 $\tilde{E}_i$ 是子丛，且 $Q_i = E_i/E_{i-1}$ 对所有 $0 < \epsilon \leq \epsilon_*$ 都是 ω_ϵ-稳定的。那么对于任意 $\delta > 0$, $1 \leq p \leq +\infty$ 和 $0 < \epsilon \leq \epsilon_*$，在 E 上存在一个光滑厄米度量 H，使得

$$\|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_\epsilon} F_{\bar{\partial}_{\tilde{E}}, \tilde{H}} + [\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^{*\tilde{H}}] - \Psi(\tilde{F}, (\mu_{1,\epsilon}, \cdots, \mu_{l,\epsilon}), \tilde{H})\|_{L^p} \leq \delta, \quad (4.18)$$

其中 $\mu_{i,\epsilon}$ 是相对于度量 ω_ϵ的商丛 Q_i 的斜率。

在接下来的证明中，我们还需要以下命题。

命题 4.16. 设 (E, ϕ) 是光滑 K¨ahler 流形 (X, ω) 上的一个 V-扭曲希格斯丛，且 $F = \{E_i\}_{i=1}^l$ 是由饱和子层构成的 (E, ϕ) 的一个滤过。设 π:$X \to X$ 是沿复余维为 k 的光滑复子流形的爆破，并且度量族 ω_ϵ 与前一个引理中的相同。设 (E, ϕ) 是拉回$\tilde{V}$-扭曲希格斯丛，且 $\tilde{F} = \{\tilde{E}_i\}_{i=1}^l = \{Sat_{\tilde{E}}(\pi^* E_i)\}_{i=1}^l$ 是 $(\tilde{E}, \tilde{\phi})$ 的滤过。假设对任意 $\delta > 0$ 和任意 $0 < \epsilon \leq \epsilon_*$，都存在 E上的光滑厄米度量 H，使得

$$\|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_\epsilon} F_{\bar{\partial}_{\tilde{E}}, \tilde{H}} + [\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^{*\tilde{H}}] - \Psi(\tilde{F}, (\mu_{1,\epsilon}, \cdots, \mu_{l,\epsilon}), \tilde{H})\|_{L^2(\omega_\epsilon)} \leq \tilde{\delta}, \quad (4.19)$$

那么，对于任意 $\delta' > 0$ 和任意 $1 < p < 1 + \frac{1}{4k(k-1)}$，存在 E 上的光滑厄米度量 H，使得

$$\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\bar{\partial}_E, H} + [\phi, \phi^{*H}] - \Psi(F, (\mu_1, \cdots, \mu_l), H)\|_{L^p(\omega)} \leq \delta', \quad (4.20)$$

其中 μ_i 是层 Q_i的 ω-斜率。

证明。步骤 1：令 $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_*)$，根据条件，我们可以选取一个光滑度量 H_1，使其满足 ϵ_1 和 δ 的条件 (4.19)，其中 δ 稍后将取足够小。为简单起见，我们

记作 $\Theta_1 = \sqrt{-1}F_{\bar{\partial}_{\tilde{E}},\ \tilde{H}_1}$。于是

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_\epsilon}F_{\bar{\partial}_{\tilde{E}},\tilde{H}_1} + [\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_1}] - \Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_1)\|_{L^p(\omega_\epsilon)} \\
&\quad \leq \Big\|\Lambda_{\omega_\epsilon}\{\Theta_1 + \frac{\omega_{\epsilon_1}}{n}[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_1}] - \frac{\omega_{\epsilon_1}}{n}\Psi(\tilde{F},(\mu_{1,\epsilon_1},\cdots,\mu_{l,\epsilon_1}),\tilde{H}_1)\}\Big\|_{L^p(\omega_\epsilon)} \\
&\qquad + \Big\|\frac{1}{n}\Lambda_{\omega_\epsilon}(\omega_\epsilon - \omega_{\epsilon_1})\{[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_1}] - \Psi(\tilde{F},(\mu_{1,\epsilon_1},\cdots,\mu_{l,\epsilon_1}),\tilde{H}_1)\}\Big\|_{L^p(\omega_\epsilon)} \\
&\qquad + \|\Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_1) - \Psi(\tilde{F},(\mu_{1,\epsilon_1},\cdots,\mu_{l,\epsilon_1}),\tilde{H}_1)\|_{L^p(\omega_\epsilon)}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Set

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_{\epsilon_1} =& [\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_1}] - \Psi(\tilde{F},(\mu_{1,\epsilon_1},\cdots,\mu_{l,\epsilon_1}),\tilde{H}_1), \\
\Theta_2 =& \Theta_1 + \frac{\omega_{\epsilon_1}}{n}\tilde{\Psi}_{\epsilon_1},\quad \Theta_3 = (\omega_\epsilon - \omega_{\epsilon_1})\tilde{\Psi}_{\epsilon_1},
\end{aligned}$$

其中 $\|\Psi_{\epsilon_1}\|_{L^2(\omega_{\epsilon_1})}$ 在 ϵ_1中一致有界。将引理 4.14 应用于 Θ_i, $i = 2, 3$，可得

$$\|\Lambda_{\omega_\epsilon}\Theta_i\|_{L^p(\omega_\epsilon)} \leq C(\|\Lambda_{\omega_{\epsilon_1}}\Theta_i\|_{L^{\tilde{p}}(\omega_{\epsilon_1})} + \kappa\|\Theta_i\|_{L^2(\omega_{\epsilon_1})}) + \epsilon_1 C(\kappa)\|\Theta_i\|_{L^2(\omega_{\epsilon_1})}. \tag{4.22}$$

按照 Sibley 的文章（[38, 第 35] 页）中的论证，若我们选择足够小的 κ 和 ϵ_1，则有

$$\|\Lambda_{\omega_\epsilon}\Theta_i\|_{L^p(\omega_\epsilon)} \leq \frac{\delta}{3}. \tag{4.23}$$

另一方面，由于 $\mu_{i,\epsilon} \to \mu_i$ 当 $\epsilon \to 0$ 时，我们可以选择足够小的 ϵ_1，使得 (4.21) 中的第三项也小于 $\delta/3$。于是，对于任意 $\delta > 0$ 和 $1 < p < 1 + {}_{4k}{}^{1}{}_{(k-1)}$，有

$$\|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_\epsilon}F_{\bar{\partial}_{\tilde{E}},\tilde{H}_1} + [\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_1}] - \Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_1)\|_{L^p(\omega_\epsilon)} \leq \delta \tag{4.24}$$

对于任意 $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$，其中 μ_i 是 Q_i 关于度量 ω 的斜率。

步骤 2：为了在 E 上获得光滑度量，我们需要使用截断论证。由于 Σ 是光滑复子流形，法丛 N_Σ 中的开集 $\{(x,v) \in N_\Sigma | \ |v| < R\}$ 与 Σ 的开邻域 U_R 微分同胚，其中 R 足够小。对于任意小的 R，我们可以选择一个光滑截断函数 ψ_R，使其满足 $\mathrm{supp}\psi_R \subset U_R$, $\psi_R = 1$ 在 $U_{R/2}$, $0 \leq \psi_R \leq 1$ 上，并且还有 $|\partial\psi_R|^2_\omega + |\partial\bar{\partial}\psi_R|_\omega \leq CR^{-2}$，其中 C 是一个与 R 无关的正常数。

设 H_D 是丛 E 上的光滑厄米度量，H_1 是 E 上的度量，使得对于所有满足 $\delta \leq \frac{\delta'}{4}$ 的 $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$，式 (4.24) 都成立。注意到 E 在 Σ 之外同构于 $\tilde{E}$，我们可以定义

$$H_R = (1 - \psi_R)\tilde{H}_1 + \psi_R H_D \tag{4.25}$$

在丛 E 上，$H_R = \pi^* H_R$ 和 $H_D = \pi^* H_D$ 在丛 E 上。

令 $\Theta(\tilde{H}_R)=\sqrt{-1}F_{\tilde{\partial}_{\tilde{E}},\ \tilde{H}_R}$，则有

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{X}}|\Lambda_{\omega_\epsilon}\Theta(\tilde{H}_R)+[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_R}]-\Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_R)|^p_{\tilde{H}_R}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\\
&\quad\leq\int_{\pi^{-1}(U_{R/2})}|\Lambda_{\omega_\epsilon}\Theta(\tilde{H}_D)+[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_D}]-\Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_D)|^p_{\tilde{H}_D}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\\
&\qquad+\int_{\tilde{X}\setminus\pi^{-1}(U_R)}|\Lambda_{\omega_\epsilon}\Theta(\tilde{H}_1)+[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_1}]-\Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_1)|^p_{\tilde{H}_1}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\\
&\qquad+C(p)\int_{\pi^{-1}(U_R\setminus U_{R/2})}|\Lambda_{\omega_\epsilon}(\Theta(\tilde{H}_R)-\Theta(\tilde{H}_1))|^p_{\tilde{H}_R}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\\
&\qquad+C(p)\int_{\pi^{-1}(U_R\setminus U_{R/2})}|\Lambda_{\omega_\epsilon}\Theta(\tilde{H}_1)+[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_R}]-\Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_R)|^p_{\tilde{H}_R}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}.
\end{aligned}\tag{4.26}$$

对于第一项，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi^{-1}(U_{R/2})}|\Lambda_{\omega_\epsilon}\Theta(\tilde{H}_D)+[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_D}]-\Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_D)|^p_{\tilde{H}_D}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\\
&\qquad\leq C_1\int_{\pi^{-1}(U_{R/2})}\Big(\frac{\eta^n}{\omega_\epsilon^n}\Big)^{p-1}\frac{\eta^n}{n!}\\
&\qquad\quad+C_2\int_{\pi^{-1}(U_{R/2})}|[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_D}]-\Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_D)|^p_{\tilde{H}_D}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!},
\end{aligned}\tag{4.27}$$

其中 C_1 和 C_2 是与 ϵ 和 R 无关的常数。

对于第三项，我们有

$$|\Lambda_{\omega_\epsilon}(F_{\tilde{H}_R}-F_{\tilde{H}_1})|_{\tilde{H}_R}\leq\Big(\frac{C_3}{R^2}+C_4\Big)\frac{\eta^n}{\omega_\epsilon^n},\tag{4.28}$$

其中 C_3 和 C_4 与 ϵ 和 R 无关。由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi^{-1}(U_R\setminus U_{R/2})}|\Lambda_{\omega_\epsilon}(\Theta(\tilde{H}_R)-\Theta(\tilde{H}_1))|^p_{\tilde{H}_R}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\\
&\qquad\leq\Big(\int_{\pi^{-1}(U_R\setminus U_{R/2})}\Big(\frac{\eta^n}{\omega_\epsilon^n}\Big)^{(1-p)s}\frac{\eta^n}{n!}\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\int_{\pi^{-1}(U_R\setminus U_{R/2})}\Big(\frac{C_3}{R^{2\tilde{p}}}+C_4\Big)\frac{\eta^n}{n!}\Big)^{\frac{p}{\tilde{p}}},
\end{aligned}\tag{4.29}$$

其中 s 和 $\tilde{p}$ 是引理 4.13 中的常数。因此

$$\int_{\pi^{-1}(U_R\setminus U_{R/2})}\Big(\frac{C_3}{R^{2\tilde{p}}}+C_4\Big)\frac{\eta^n}{n!}\leq C_3R^{2n-2\tilde{p}}+C_4R^{2n}.\tag{4.30}$$

由于 $p<1+\frac{1}{4k-(k-1)}$、$\frac{p}{1-2(k-1)(p-1)}<\frac{2k}{2k-1}(1+\frac{1}{4k-(k-1)})\leq\frac{3}{2}$，我们可以选择 $\tilde{p}<2$。此外，我们还有

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi^{-1}(U_R)}|[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_D}]-\Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_D)|^p_{\tilde{H}_D}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\to0,\\
&\int_{\pi^{-1}(U_R)}|[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_R}]-\Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_R)|^p_{\tilde{H}_R}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\to0
\end{aligned}\tag{4.31}$$

与 $R\to 0$ 一样，关于 ϵ 一致成立。

由上述公式和引理 4.13，取 R 足够小，我们有

$$\int_{\tilde{X}}|\Lambda_{\omega_\epsilon}\Theta(\tilde{H}_R)+[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{*\tilde{H}_R}]-\Psi(\tilde{F},(\mu_1,\cdots,\mu_l),\tilde{H}_R)|^p_{\tilde{H}_R}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\leq\delta' \tag{4.32}$$

对所有 $0<\epsilon\leq\epsilon_1$ 均成立。现在令 $\epsilon\to 0$，我们有

$$\int_X|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\bar{\partial}_E,H_R}+[\phi,\phi^{*H_R}]-\Psi(F,(\mu_1,\cdots,\mu_l),H_R)|^p_{H_R}\frac{\omega^n}{n!}\leq\delta'. \tag{4.33}$$

□

¯定理 4.17. 设 $(E,\partial_{A_0},\phi_0)$ 是光滑 K¨ahler 流形 (X,ω) 上的一个 V-扭曲希格斯丛，且 $(A(t)\ \phi(t))$ 是厄米向量丛 (E,H_0) 上杨–米尔斯–希格斯流的光滑解，其初始数据为 (A_0,ϕ_0)。假设对于任意 $\delta'>0$ 和任意 $\bot<p<p_0$，在 $(E,\partial_{A_0},\phi_0)$ 上存在一个光滑度量 H，使得 (4.20) 成立，其中 $\vec{\mu}_0$ 是 $(E,\partial_{A_0},\phi_0)$ 的 Harder–Narasimhan 类型。设 (A_∞,ϕ_∞) 是 (A_t,ϕ_t) 的一个 Uhlenbeck 极限，且 (E_∞,H_∞) 是相应的、定义在 Σ_{an} 之外的厄米向量丛。那么

$$HYM_{\alpha,N}(A_\infty,\phi_\infty)=\lim_{t\to\infty}HYM_{\alpha,N}(A(t),\phi(t))=HYM_{\alpha,N}(\vec{\mu}_0) \tag{4.34}$$

¯对所有 $1<\alpha<p_0$ 和所有 $N\in\mathbb{R}$ 均成立；此外，$(E,\partial_{A_0},\phi_0)$ 的 Harder–Narasimhan 类型等于¯$(E_\infty,\partial_{A_\infty},\phi_\infty)$ 的 Harder–Narasimhan 类型。

证明。证明与 [28, 29], 相同。为方便读者，我们在此写出证明的主要部分。首先，由三角不等式和引理 4.6，我们有

$$\begin{aligned}
&|(\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A_0,\phi_0,H))^{1/\alpha}-(\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu}_0))^{1/\alpha}|\\
\leq&\Big(\int_X|(\varphi_\alpha(\sqrt{-1}(\theta(A_0,\phi_0,H)+N\cdot\mathrm{Id}_E)))^{1/\alpha}-(\varphi_\alpha(\sqrt{-1}(\vec{\mu}_0+N)))^{1/\alpha}|^\alpha dv_g\Big)^{1/\alpha}\\
\leq&\Big(\int_X\varphi_\alpha(\sqrt{-1}(\theta(A_0,\phi_0,H)-\Psi(F,(\mu_1,\cdots,\mu_l),H)))dv_g\Big)^{1/\alpha}\\
\leq&C(\alpha)\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\bar{\partial}_{A_0},H}+[\phi_0,\phi_0^{*H}]-\Psi(F,(\mu_1,\cdots,\mu_l),H)\|_{L^\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

结合条件 (4.20)，可知对任意 $\delta>0$ 和任意 $1<\alpha<p_0$，存在一个度量 H 使得

$$\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A_0,\phi_0,H)\leq\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu}_0)+\delta. \tag{4.36}$$

由于线丛上的度映射像是离散的，对于固定的 α $(1<\alpha\leq p_0)$ 和固定的 N，我们可以定义 $\delta_0>0$ 使得

$$2\delta_0+\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu}_0)=\min\{\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu}):\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu})>\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu}_0)\}, \tag{4.37}$$

其中 $\vec{\mu}$ 遍历秩为 r 的 V-扭曲 Higgs 层的所有可能的 Harder–Narasimhan 类型。

设 H 是复向量丛 E上的厄米度量，且 $(A^H(t)\ \phi^H(t))$ 是厄米向量丛 (E,H) 上杨–米尔斯–希格斯流的解，其初始对为 $(A_0^H,\phi_0)\in\mathcal{B}_H$，其中 A_0^H是与 $(\bar{\partial}_{A_0},H)$ 相关联的陈联络。设 (A_∞^H,ϕ_∞) 是沿该流得到的一个 Uhlenbeck 极限。我们可以选取度量 H 使得

$$\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A_0,\phi_0,H)\leq\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu}_0)+\delta_0. \tag{4.38}$$

由 (4.7)、(4.10) 和引理 4.6 可知

$$\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu}_0) \leq \mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A^H_\infty, \phi_\infty) \leq \mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu}_0) + \delta_0. \tag{4.39}$$

因此，根据 δ_0 的定义，我们必有 $\mathrm{HYM}_{\alpha,\ N}(A^H_\infty, \phi_\infty) = \mathrm{HYM}_{\alpha,\ N}(\vec{\mu}_0)$。这表明，当度量 H_0 满足 (4.38) 时，结论成立。

设 $\mathscr{H}(E)$ 为 E 上所有光滑度量构成的空间。对任意固定的 δ，我们定义 $\mathscr{H}(E)$ 的一个子集，记作 $\mathscr{H}_\delta$，如下：$H \in \mathscr{H}_\delta$ 若存在某个 $T \geq 0$ 使得

$$\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A^H(t), \phi^H(t)) < \mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu}_0) + \delta \tag{4.40}$$

对所有 $t \geq T$ 均成立。在证明中，我们可以假设 $0 < \delta \leq \frac{\delta_0}{2}$。显然，$\mathscr{H}_\delta$ 非空。按照 [14, 引理 4.3]（或 [28, 定理 5.13]）中的论证，我们可以证明 $\mathscr{H}_\delta$ 在 $\mathscr{H}(E)$ 中既闭又开。由于 $\mathscr{H}(E)$ 是连通的，我们得到 $\mathscr{H}(E) = \mathscr{H}_\delta$。由前面的讨论可知

$$\mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A_\infty, \phi_\infty) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{HYM}_{\alpha,N}(A(t), \phi(t)) = \mathrm{HYM}_{\alpha,N}(\vec{\mu}_0). \tag{4.41}$$

设 $\vec{\lambda}_\infty$ 为 $(E_\infty, \bar{\partial}_{A_\infty}, \phi_\infty)$ 的 HN 类型，由 (4.41) 可得，对于所有 $1 < \alpha < p_0$ 和所有 N，有 $\varphi_\alpha(\sqrt{-1}(\vec{\mu}_0 + N)) = \varphi_\alpha(\sqrt{-1}(\vec{\lambda}_\infty + N))$。取足够大的 N，由引理 4.7，得到 $\vec{\mu}_0 = \lambda_\infty$。□

设 $\{\pi_i\}_{i=1}^l$ 为 (E, A_0, ϕ_0) 的一个 HN 滤过，作用 g^j 生成 (E, A_j, ϕ_j) 的 HN 滤过 $\{\pi_i^{(j)}\}$。于是

引理 4.18. 设 $(E, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 是光滑 Kähler 流形 (X, ω) 上的一个 V-扭曲希格斯丛，并满足与定理 4.17 相同的假设。

(1) 设 $\{\pi_i^\infty\}$ 为 $(E_\infty, \partial_\infty, \phi_\infty)$ 的 HN 滤过，则 HN 滤过 $\{\pi_i^{(j)}\}$ 存在一个子列收敛到滤过 $\{\pi_i^\infty\}$，且在 $L^p \cap L^2_{1,loc}$ 之外，对所有 $1 \leq p < +\infty$，均在 $L^p \cap L^2_1$ 中强收敛。（2）假设 V-扭曲希格斯丛 $(E, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 是半稳定的，且 $\{E_{s,i}\}$ 是 $(E, \bar{\partial}_{A_0}, \phi_0)$ 的 Seshadri 滤过，则经过取子列后，$\{\pi^{(j)}_{s,i}\}$收敛到滤过 $\{\pi^\infty_{s,i}\}$，且在 $L^p \cap L^2_{1,loc}$ 之外，对所有 $1 \leq p < +\infty$，均在 $L^p \cap L^2_1$ 中强收敛；对所有 i 和 j，π_i^∞的秩和次数分别等于 $\pi^{(j)}_{s\,i}$,的秩和次数。

证明。详情请参见（[14, 29]）。 □

结合前述引理 4.18、推论 3.3 以及以下事实

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_\infty} + [\phi_\infty, (\phi_\infty)^{*H_\infty}] = \Psi^{HN}(A_\infty, \phi_\infty, H_\infty), \tag{4.42}$$

可得以下命题。

命题 4.19. 设 $(E, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 是紧致 Kähler 流形 (X, ω) 上的一个 V-扭曲希格斯丛，并满足与定理 4.17 相同的假设。那么对于任意$\delta > 0$ 和 $1 \leq p < \infty$，(E, A_0, ϕ_0) 都存在一个 L^p-δ-近似临界厄米度量。

根据命题 4.10，我们可以通过沿复子流形进行有限次爆破来消解奇点 Σ_{alg}，也就是说，我们有一列爆破

$$X_m \xrightarrow{\pi_m} X_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X. \tag{4.43}$$

有限次应用命题 4.16、定理 4.17 和命题 4.19 后，我们得到以下定理。

定理 4.20. 设 $(E, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 是紧致 Kähler 流形 (X, ω) 上的一个 V-扭曲希格斯丛。那么对于任意 $\delta > 0$ 和 $1 \leq p < +\infty$，$(E, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 存在一个 L^p- δ-近似临界 Hermitian 度量。

定理 4.21. 设 $(A(t)\ \phi(t))$ 是厄米向量丛 (E, H_0) 上杨–米尔斯–希格斯流的一个光滑解，其初始扭曲 Higgs 对为 (A_0, ϕ_0)，且 (A_∞, ϕ_∞) 是一个 Uhlenbeck 极限。令 E_∞ 表示如定理 1.1 中由 (A_∞, ϕ_∞) 得到的向量丛。那么，扩张的自反 V-扭曲 Higgs 层 $(E_\infty, \partial_{A_\infty}, \phi_\infty)$ 的 Harder–Narasimhan 型与原始 V-扭曲希格斯丛 $(E, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 的 Harder–Narasimhan 型相同，即 $\lambda_\infty = \vec{\mu}_0$。

4.2. 非平凡全纯映射的构造。设 $\{E_{i,j}\}$ 为 V-扭曲希格斯丛 $(E, \bar{\partial}_{A_0}, \phi_0)$ 的 HNS 滤过，则伴随分次对象 $Gr^{HNS}(E, \bar{\partial}_{A_0}, \phi_0)$ 由 (∂_{A_0}, ϕ_0) 的同构类唯一确定。设 $(E_\infty, \partial_{A_\infty}, \phi_\infty)$ 为极限 V- 扭曲希格斯层。在本小节中，我们希望证明 $Gr^{HNS}(E, \bar{\partial}_{A_0}, \phi_0)^{**} \simeq (E_\infty, \partial_{A_\infty}, \phi_\infty)$。关键在于构造从 $(E, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 的 HNS 滤过中的子 Q 层到 $(E_\infty, \partial_{A_\infty}, \phi_\infty)$ 的非零全纯映射。该结论可通过对 HNS 滤过的长度作归纳法证明。关于层 Q 的归纳假设如下：

(1) 存在一列定义在 Q 上的 V-扭曲 Higgs 结构 (A_j^Q, ϕ_j^Q)，使得 $(A_j^Q, \phi_j^Q) \to (A_\infty^Q, \phi_\infty^Q)$ 在 C^∞_{loc} 中除 $\Sigma_{alg} \cup \Sigma_{an}$ 外成立；(2) 对某个 $g_j \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}(Q)$，$(A_j^Q, \phi_j^Q) = g_j(A_0^Q, \phi_0^Q)$；(3) $(Q, \bar{\partial}_{A_0^Q}, \phi_0^Q)$ 和 $(Q_\infty, \bar{\partial}_{A_\infty^Q}, \phi_\infty^Q)$ 延拓到 X，成为具有相同 Harder–Narasimhan 类型的反身 V-扭曲 Higgs 层；(4) $\|\phi_j^Q\|_{C^0}$ 和 $\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{A_j^Q})\|_{L^1(\omega)}$ 在 j 中一致有界。

下面的命题至关重要，其证明与 ([29]) 中命题 4.1 的证明相同。

命题 4.22（[29]）。设（X, ω）为 Kähler 流形，（$E, \partial_{A_0}, \phi_0$）为 X 上带厄米度量 H_0 的 V- 扭曲希格斯层，S 为（$E, \partial_{A_0}, \phi_0$）的一个 V- 扭曲希格斯子层，并且（A_j, ϕ_j）$= g_j$（A_0, ϕ_0）是 E 上一列 V-扭曲希格斯对，其中 g_j 是一列复规范变换。假设存在一列爆破：π_i：$X_i \to X_{i-1}$, $i = 1, \cdots, r$（其中 $X_0 = X$，每个 π_i 都是以非奇异中心为中心的爆破；记作 $\pi = \pi_r \circ \cdots \circ \pi_1$）；使得 π^*E 和 π^*S 为向量丛，拉回的几何对象 π^*（A_0, ϕ_0）、π^*g_j 和 π^*H_0 可在整个 X_r 上光滑延拓。假设（A_j, ϕ_j）在 Hausdorff 复余维为 2 的闭子集 Σ_{an} 之外收敛到（A_∞, ϕ_∞），且 $|\Lambda_\omega（F_{A_j}）|_{H_0}$ 在 L^1 的 j 中一致有界（ω_0）。令 i_0：$(S, \partial_{A_0}) \to (E, \partial_{A_0})$ 为全纯嵌入，则 $g_j \circ i_0$ 存在一个子列，经适当缩放后收敛到一个非零全纯映射 f_∞：$(S, \partial_{A_0}) \to (E_\infty, \partial_{A_\infty})$，该映射在 $\Sigma \cup \Sigma_{an}$ 之外的 C^∞_{loc} 中收敛，且 $f_\infty \circ \phi_0 = \phi_\infty \circ f_\infty$，其中 Σ 是 S 和 E 的奇异集。

以下引理的证明是标准的，可见 [27]。

引理 4.23. 设 (E_1, ϕ_1) 和 (E_2, ϕ_2) 是半稳定的 V-扭曲 Higgs 层，满足 $rank(E_1) = rank(E_2)$ 且 $\deg(E_1) = \deg(E_2)$，并设 $f: E_1 \to E_2$ 是满足 $f \circ \phi_1 = \phi_2 \circ f$ 的非零层同态。若 (E_1, ϕ_1) 是稳定的，则 f 是一个同构。

定理 1.1 (2) 的证明。证明与 [29, 第 5], 节中的相同，为方便读者，我们在此给出证明。

设 $S = E_1$,1 是与 $(E, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 的 HNS 滤过 $\{E_{i,j}\}$ 相对应的第一个稳定的 V-扭曲希格斯子层，$\pi: X \to X$ 为奇点消解 Σ_{alg}. 那么，$E = \pi^* E$ 的滤过由子丛 $E_{i,j}$给出，它们在$\tilde{\Sigma} = \pi^{-1}(\Sigma_{alg})$之外同构于 $E_{i,j}$ 。令 $(\tilde{A}_j, \tilde{\phi}_j) = \pi^*(A_j, \phi_j)$ 且 $\tilde{g}_j = \pi^* g_j$, 则有 $(\tilde{A}_j, \tilde{\phi}_j) = \tilde{g}_j(A_0, \phi_0)$。由定理 1.1 可知，$(A_j, \phi_j)$ 在 $\pi^{-1}(\Sigma_{alg} \cup \Sigma_{an})$ 之外的 C^∞_{loc} 拓扑下收敛到 (A_∞, ϕ_∞)。由推论 3.3 以及关于 $\phi(t)$ 的一致 C^0 界，我们有 $\|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_0}(F_{\tilde{A}_j})\|_{L^\infty}$，特别地，$\|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_0}(F_{\tilde{A}_j})\|_{L^1}$在 j 中一致有界，其中 $\omega_0 = \pi^* \omega$。

根据命题 4.22，我们有一个非零光滑 $\tilde{\phi}$-不变全纯映射 $f_\infty : \tilde{S} \to \tilde{E}_\infty$ 在 $\pi^{-1}(\Sigma_{alg} \cup \Sigma_{an})$ 上。由于 $\tilde{S}$ 与 S 在 $\tilde{\Sigma}$ 上同构，因此我们在 $X \setminus \Sigma_{an} \cup \Sigma_{alg}$ 上得到一个非零光滑的 ϕ-不变全纯映射 $f_\infty: S \to (E_\infty, \partial_{A_\infty})$。根据 Hartogs 定理，$f_\infty$ 可延拓为 V-扭曲希格斯层同态 $f_\infty : (S, \phi_0) \to (E_\infty, \partial_{A_\infty}, \phi_\infty)$，定义在 X 上。

令 $\pi_1^{(j)}$ 表示到 $g_j(S)$ 的投影。根据引理 4.18，我们知道 $\pi_1^{(j)} \to \pi_1^\infty$ 属于 $L^p \cap L^2_{1,\,loc}$在 Σ_{an} 上，并且 π_1^∞ 确定了一个 V-扭曲希格斯子层 $E_1^{\infty,\,1}$，它是 $(E_\infty, \bar{\partial}_{A_\infty}, \phi_\infty)$, 的子层，且 $rank(E_1^{\infty,\,1}) = rank(S)$，以及 $\mu(E_1^{\infty,\,1}) = \mu(S)$。由于 $(E_\infty, \partial_{A_\infty}, \phi_\infty)$ 和 $(E_0, \partial_{A_0}, \phi_0)$ 具有相同的 Harder–Narasimhan 类型，因此我们有扭曲希格斯子层 $(E_1^{\infty,\,1}, \phi_\infty)$ 是半稳定的，并且

$$f_\infty : S \to E^\infty_{1,1}. \tag{4.44}$$

回顾一下，$S = E_{1,1}$ 是 V-扭曲 Higgs 稳定的。由引理 4.23 可知，非零全纯映射 f_∞ 在 $X \setminus \Sigma_{an} \cup \Sigma_{alg}$ 上必为单射，而$E_1^{\infty,1}$ 必为 $(E_\infty, \partial_{A_\infty}, \phi_\infty)$ 的一个稳定 V-扭曲 Higgs 子层。

设 $\{e_\alpha\}$是 S的一个局部标架，且 $H_{j,\alpha\bar{\beta}} = \langle g_j(e_\alpha)\ g_j(e_\beta)\rangle_{H_0}$。我们可将正交投影 $\pi_1^{(j)}$ 写为

$$\pi_1^{(j)}(X) = \langle X, g_j(e_\beta)\rangle_{H_0} H_j^{\alpha\bar{\beta}} g_j(e_\alpha) \tag{4.45}$$

对任意 $X \in \Gamma(E)$，其中 $(H_j^{\alpha\bar{\beta}})$ 是矩阵 $(H_{j,\alpha\bar{\beta}})$ 的逆。由于 $g_j \circ i_0 \to f_\infty$属于 $C^\infty(\Omega)$，且 f_∞ 在 $X \setminus \Sigma_{an} \cup \Sigma_{alg}$上是单射，因此我们可以证明 $\pi_1^{(j)} \to \pi_1^\infty$属于$C^\infty_{loc}$ off $\Sigma_{an} \cup \Sigma_{alg}$。

设 $Q = E/S$，则有 $Gr^{HNS}(E, \bar{\partial}_{A_0}, \phi_0) = S \oplus Gr^{HNS}(Q, \bar{\partial}_{A_0^Q}, \phi_0^Q)$。写出正交全纯分解 $(E^\infty, \bar{\partial}_{A_\infty}, \phi_\infty) = E_1^\infty \oplus Q_\infty$，其中 $Q_\infty = (E_1^\infty)^\perp$。利用 [13], 中的引理 5.12，我们可以选取一列酉规范变换u_j，使得 $\pi_1^{(j)} = u_j \tilde{\pi}_j u_j^{-1}$，其中 $\tilde{\pi}_j(E) = \pi_1^\infty(E) = E_1^\infty$，且 $u_j \to Id_E$在$X \setminus (\Sigma_{alg} \cup \Sigma_{an})$上的 C^∞_{loc}中。容易验证 $u_j(Q_\infty) = (\pi_1^{(j)}(E))^\perp$。令 $p: Q \to S^\perp$ 为奇异集之外的C^∞ 丛同构。注意到该酉规范变换

$u_0 : Q_\infty \to S^\perp$，并考虑 Q 上由 V-扭曲的 Higgs 对，其定义为

$$\begin{aligned} D_{A_j^Q} =& p^{-1} \circ u_0 \circ u_j^{-1} \circ \pi_j^\perp \circ D_{A_j} \circ \pi_j^\perp \circ u_j \circ u_0^{-1} \circ p, \\ \phi_j^Q =& p^{-1} \circ u_0 \circ u_j^{-1} \circ \pi_j^\perp \circ \phi_j \circ \pi_j^\perp \circ u_j \circ u_0^{-1} \circ p \in \Gamma(V \otimes \mathrm{End}(Q)). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Let

$$h_j = p^{-1} \circ u_0 \circ u_j^{-1} \circ \pi_j^\perp \circ g_j \circ \pi_0^\perp \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}(Q). \tag{4.47}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} \bar\partial_{A_j^Q} =& h_j \circ \bar\partial_{A_0^Q} \circ h_j^{-1}, \\ \partial_{A_j^Q} =& (h_j^*)^{-1} \circ \partial_{A_0^Q} \circ h_j^*, \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\phi_j^Q = h_j \circ \phi_0^Q \circ h_j^{-1}, \tag{4.49}$$

and

$$\bar\partial_{A_j^Q} \phi_j^Q = 0, \quad \phi_j^Q \wedge \phi_j^Q = 0, \tag{4.50}$$

其中我们用到了 $h_j^{-1} = \pi_0^\perp \circ g_j^{-1} \circ \pi_j^\perp \circ u_j \circ u_0^{-1} \circ p$。另一方面，根据定义，容易验证 $u_0^* p(A_j^Q, \phi_j^Q) \to (A_\infty^Q, \phi_\infty^Q)$ 在 C^∞_{loc} 中。现在我们来验证归纳假设中的第三个陈述。考虑 $(\pi_1^{(j)}(E))^\perp \simeq Q^j$ 上的高斯–科达齐方程，

$$\begin{aligned} F_{A_{Q^j}} =& (\pi_1^{(j)})^\perp \circ F_{A_j} \circ (\pi_1^{(j)})^\perp + \partial_{A_j} \pi_1^{(j)} \wedge \bar\partial_{A_j} \pi_1^{(j)}, \\ [\phi_j^Q, (\phi_j^Q)^*] =& (\pi_1^{(j)})^\perp \circ [\phi_j, (\phi_j)^*] \circ (\pi_1^{(j)})^\perp + [\pi_1^{(j)}, \phi_j^*] \circ [\phi_j, \pi_1^{(j)}], \end{aligned} \tag{4.51}$$

其中 $D_{A_{Q^j}} = (\pi_1^{(j)})^\perp \circ D_{A_j} \circ (\pi_1^{(j)})^\perp$。令 V-扭曲 Higgs 场 $\phi_{Q^j} = (\pi_1^{(j)})^\perp \circ \phi_j \circ (\pi_1^{(j)})^\perp$，则有

$$\begin{aligned} &\int_X |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_j^Q} + [\phi_j^Q, (\phi_j^Q)^*] - \Psi^{HN}(A_j^Q, \phi_j^Q, H_0)| \frac{\omega^n}{n!} \\ &\quad = \int_X |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_{Q^j}} + [\phi_{Q^j}, (\phi_{Q^j})^*] - \Psi^{HN}(A_{Q^j}, \phi_{Q^j}, H_0)| \frac{\omega^n}{n!} \\ &\quad = \int_X |(\pi_1^{(j)})^\perp \{\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_j} + [\phi_j, (\phi_j)^*] - \Psi^{HN}(A_j, \phi_j, H_0)\} (\pi_1^{(j)})^\perp \\ &\qquad + \sqrt{-1}\Lambda_\omega (\partial_{A_j} \pi_1^{(j)} \wedge \bar\partial_{A_j} \pi_1^{(j)}) + [\pi_1^{(j)}, \phi_j^*] \circ [\phi_j, \pi_1^{(j)}]| \frac{\omega^n}{n!} \\ &\quad \le \int_X |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_j} + [\phi_j, (\phi_j)^*] - \Psi^{HN}(A_j, \phi_j, H_0)| + |\bar\partial_{A_j} \pi_1^{(j)}|^2 \\ &\qquad + |[\phi_j, \pi_1^{(j)}]|^2 \frac{\omega^n}{n!} \\ &\quad \to 0. \end{aligned} \tag{4.52}$$

由于 C^0 范数 ϕ_j 一致有界，因此 $\|\phi_j^Q\|_{C^0}$ 和 $\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega (F_{A_j^Q})\|_{L^1(\omega)}$ 在 j 中一致有界。因此，(Q, A_j^Q, ϕ_j^Q) 满足归纳假设。由于我们可以通过有限次以非奇异中心进行爆破来消解奇异集 Σ_{alg}，且 HNS 滤过的拉回由子丛给出。层 Q 以及每个

我们所考虑的几何对象均由 HNS 滤过诱导，因此它们的拉回都是光滑的。再次使用命题 4.22，通过归纳法可得

$$E_\infty \simeq Gr^{HNS}(E, \bar{\partial}_{A_0}, \phi_0) = \oplus_{i=1}^{l} \oplus_{j=1}^{l_i} Q_{i,j} \tag{4.53}$$

¯在 $X \setminus (\Sigma_{alg} \cup \Sigma_{an})$上。根据定理 1.1，我们知道$(E_\infty, \partial_{A_\infty}, \phi_\infty)$可以延拓到整个 X 上，成为一个反身 V-扭曲希格斯层。根据[41], 中反身延拓的唯一性，我们知道存在一个层同构

$$f : Gr^{HNS}(E, \overline{\partial}_{A_0}, \phi_0)^{**} \to (E_\infty, \bar{\partial}_{A_\infty}, \phi_\infty) \tag{4.54}$$

在 X上。这就完成了证明。 □

致谢：作者感谢张曦教授一直以来的鼓励。本研究得到国家重点研发计划“2020YFA0713100”的资助。第一和第二作者得到国家自然科学基金 [（项目编号：12141104和 11721101]）的部分资助。第三作者得到国家自然科学基金 [（项目编号：12201001],）、安徽省自然科学基金 [（项目编号：2108085QA17],）以及安徽省高校自然科学基金 [（项目编号：KJ2020A0009]）的资助。

利益冲突：作者声明不存在任何利益冲突。

References

[1] M.F. Atiyah 和 R. Bott，黎曼曲面上的杨–米尔斯方程，《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑 308 (1983)，第1505期，523-615页。[2] L. ´Alvarez-C´onsul 和 O. Garc´ıa-Prada，Hitchin–Kobayashi 对应、箭图与涡旋，《数学物理通讯》238 (2003)，第1-2期，1-33页。[3] S. Bando 和 Y.T. Siu，稳定层与爱因斯坦–厄米度量，载于《复流形上的几何与分析》，39-50页，世界科学出版社，里弗埃奇，新泽西州，1994年。[4] I. Biswas、J. Loftin、M. Stemmler，仿射流形上的涡旋方程，《美国数学会汇刊》366 (2014)，3925-3941页。[5] O. Biquard 和 O. Garc´ıa-Prada，抛物型涡旋方程与无穷能量瞬子，《几何与物理杂志》21 (1997)，238-254页。[6] O. Biquard、O. Garc´ıa-Prada 和 I. Mundet i Riera，抛物希格斯丛与穿孔曲面的基本群到实群的表示，《数学进展》372 (2020)，107305。[7] F. Bottacin，将希格斯丛推广到高维簇，《数学杂志》233 (2000)，第2期，219-250页。[8] S.B. Bradlow、O. Garc´ıa-Prada 和 I. Mundet i Riera，主对的相对 Hitchin–Kobayashi 对应，《数学季刊》54 (2003)，171-208页。[9] U. Bruzzo、B.G. Otero，半稳定和数值有效希格斯丛上的度量，《纯粹与应用数学杂志》612 (2007)，59-79页。[10] Y.M. Chen 和 C.L Shen，高维杨–米尔斯流的单调性公式与小作用量正则性，《变分学与偏微分方程》2 (1994)，第4期，389-403页。[11] Y.M. Chen 和 C.L Shen，四维流形上的杨–米尔斯流演化问题，载于《非线性分析中的变分方法》（埃里切，1992），Gordon and Breach，巴塞尔，63-66页，1995年。[12] Y.M. Chen 和 M. Struwe，调和映射热流的存在性与部分正则性结果，《数学杂志》201 (1989)，第1期，83-103页。[13] G.D. Daskalopoulos，紧黎曼曲面上稳定丛空间的拓扑，《微分几何杂志》36 (1992)，第3期，699-746页。[14] G.D. Daskalopoulos 和 R.A. Wentworth，K ¨ahler 曲面上杨–米尔斯流的收敛性质，《纯粹与应用数学杂志》575 (2004)，69-99页。

[15] S.K. Donaldson，复代数曲面上的反自对偶杨–米尔斯联络与稳定向量丛，《伦敦数学会会刊》50 (1985)，第1期，1-26页。[16] S.K. Donaldson，无穷行列式、稳定丛与曲率，《杜克数学杂志》54 (1987)，第1期，231-247页。[17] S.K. Donaldson 和 P.B. Kronheimer，《四维流形的几何》，牛津数学专著丛书。牛津科学出版物。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1990年。[18] G. Gallego、O. Garc´ıa-Prada 和 M.S. Narasimhan，由向量丛扭曲的希格斯丛，arXiv:2105.05543，2021年。[19] M. Garc´ıa-Fernandez 和 J. Ross，扭曲希格斯丛上的平衡度量，《数学年刊》367 (2017)，第3-4期，1429-1471页。[20] O. Garc´ıa-Prada、S. Ramanan，扭曲希格斯丛与紧 K ¨ahler 流形的基本群，《数学研究快报》7 (2000)，第4期，517-535页。[21] H. Hironaka，特征零域上代数簇的奇点消解。I，《数学年刊》79 (1964)，109-203页。[22] H. Hironaka，特征零域上代数簇的奇点消解。II，《数学年刊》79 (1964)，205-326页。[23] N.J. Hitchin，黎曼曲面上的自对偶方程，《伦敦数学会会刊》55 (1987)，第1期，59-126页。[24] M.C. Hong 和 G. Tian，杨–米尔斯流的渐近行为与奇异杨–米尔斯联络，《数学年刊》330 (2004)，第3期，441-472页。[25] I.M. i Riera，K ¨ahler 纤维化的 Hitchin–Kobayashi 对应，《纯粹与应用数学杂志》528 (2000)，41-80页。[26] A. Jacob，紧 K ¨ahler 流形上的杨–米尔斯流与 Atiyah–Bott 公式，《美国数学杂志》138 (2016)，第2期，329-365页。[27] S. Kobayashi，《复向量丛的微分几何》，日本数学会出版物，第15卷。Kano 纪念讲座，第5卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州（1987年）。[28] J.Y. Li 和 X. Zhang，希格斯对的梯度流，《欧洲数学会杂志》（JEMS）13 (2011)，第5期，1373-1422页。[29] J.Y. Li 和 X. Zhang，希格斯丛上杨–米尔斯–希格斯流的极限，《国际数学研究通知》（IMRN）2017年，第1期，232-276页。[30] J.Y. Li、C.J. Zhang 和 X. Zhang，反身层上 Hermitian–Yang–Mills 流的极限，《数学进展》325 (2018)，165-214页。[31] J. Li、S.-T. Yau，非 K ¨ahler 流形上的 Hermitian–Yang–Mills 联络，载于《弦理论的数学方面》，世界科学出版社，1987年，第560-573页。[32] M. L ¨ubke 和 A. Teleman，《Kobayashi–Hitchin 对应》，世界科学出版公司，里弗埃奇，新泽西州，1995年。x+254pp。[33] T. Mochizuki，解析稳定丛的 Kobayashi–Hitchin 对应，《美国数学会汇刊》373 (2020)，551-596页。[34] M.S. Narasimhan 和 C.S. Seshadri，紧黎曼曲面上的稳定酉向量丛，《数学年刊》82 (1965)，540-567页。[35] Y.C. Nie 和 X. Zhang，紧非 K ¨ahler 流形上 Hermitian–Yang–Mills 流的极限行为，《中国科学：数学》63 (2020)，第7期，1369-1390页。[36] N. Nitsure，曲线上半稳定对的模空间，《伦敦数学会会刊》62 (1991)，第2期，275-300页。[37] Z. Shen、C. Zhang、X. Zhang，非紧仿射 Gauduchon 流形上的平坦希格斯丛，《几何与物理杂志》175 (2022)，104475。[38] B. Sibley，K ¨ahler 流形上全纯向量丛的杨–米尔斯流渐近行为：极限的典范结构，《纯粹与应用数学杂志》706 (2015)，123-191页。[39] C. Simpson，利用杨–米尔斯理论构造霍奇结构变分及其在一致化中的应用，《美国数学会杂志》1 (1988)，第4期，867-918页。[40] C. Simpson，希格斯丛与局部系统，《高等科学研究所数学出版物》75 (1992)，5-95页。

[41] Y.T. Siu，关于相干解析层的 Hartogs 型延拓定理，《数学年刊》93（1971），166-188。[42] K.K. Uhlenbeck and S.T. Yau，关于稳定向量丛上 Hermitian–Yang–Mills 联络的存在性，《纯粹与应用数学通讯》39（1986），S257-S293。[43] G. Wilkin，希格斯丛空间的莫尔斯理论，《分析与几何通讯》16（2008），283-332。[44] D. Wu, X. Zhang，叶状流形上的希格斯丛，《中国科学：数学》64（2021），399-420。[45] C. Zhang, P. Zhang, X. Zhang，非紧 Gauduchon 流形上的希格斯丛，《美国数学会汇刊》374（2021），3735-3759。[46] W. Zhang，黎曼曲面上扭曲希格斯对的杨–米尔斯–希格斯流的收敛，《中国科学：数学》57（2014），1657-1670。Changpeng Pan,
School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Scienceand Technology,
Nanjing, 210094,P.R. China,电子邮箱：mathpcp@njust.edu.cnZhenghan Shen,
School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Scienceand Technology,
Nanjing, 210094,P.R. China,电子邮箱：mathszh@njust.edu.cn

Pan Zhang, School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei, 230601,
P.R.China, 电子邮箱：panzhang20100@ahu.edu.cn