arXiv:2301.02566v1 [math.RA] 6 Jan 2023

# $UT_n(E)$ 的余特征

LUCIO CENTRONE、VESSELIN DRENSKY 和 DANIELA MARTINEZ CORREA

Abstract. 设 $F$ 是一个特征为 0 的域， $E$ 是其上的无限维格拉斯曼代数。本文第一部分给出一种算法，用于计算固定宽度条带内、以 $E$ 中元素为项的 $n \times n$ 上三角矩阵代数 $UT_n(E)$ 的余特征序列的生成函数。第二部分计算 $E$ 的双希尔伯特级数 $H(E; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)$，随后定义任意 PI-代数的 $(k,l)$-重数级数。作为应用，我们从 $H(E; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)$ 推导出一种简便算法，用于确定 $UT_n(E)$ 的 $(k,l)$- 重数级数。

## 1. Introduction

我们固定一个特征为 0 的域 $F$，并且认为 $F$ 上的任意代数都是含幺结合代数。令 $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ 为一个可数的不定元集合。记 $F\langle X\rangle$ 为由 $X$ 在 $F$ 上自由生成的自由代数。设 $A$ 为满足一个多项式恒等式的 $F$ 上的代数，即 PI-代数。众所周知，其多项式恒等式集 $T(A)$ 是 $F\langle X\rangle$ 的一个 $T$-理想，也就是说，它是一个在 $F\langle X\rangle$ 的所有自同态下保持不变的理想。

由于 $F$ 是一个特征为 0 的域，所有多项式恒等式都可由多线性恒等式推出。Kemer 的一个著名定理 [32] 指出，若 $A$ 是一个 PI-代数，则其 $T$-理想是有限生成的；但值得注意的是，只有少数代数的 $T$-理想的完整有限生成元集是已知的。

根据 Regev 的结果 [44], ，研究某个代数中（在一定意义上）不是多项式恒等式的多线性多项式集合，似乎更有效。更确切地说，若 $P_n$ 是变量 $\{x_1, \ldots, x_n\}$中的多线性多项式所构成的向量空间，我们便对每个 $n$ 研究商空间 $P_n(A) := P_n/(P_n \cap T(A))$。我们回顾一下， $P_n$ 在对称群$S_n$的典范左作用下，也是一个左 $S_n$-模。由于 $P_n(A)$继承了 $P_n$上的 $S_n$-作用，它对应一个 $S_n$-特征 $\chi_n(A)$，称为 $A$的第 $n$个余特征。序列（$\chi_n(A)$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 $A$的余特征序列。我们还注意到， $P_n(A)$是一个有限维向量空间，其维数称为 $A$ 的第 $n$个余维数（或记作 $c_n(A)$），而序列（$c_n(A)$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 $A$的余维数序列。

In [28], [29], 另见 [30], Giambruno 和 Zaicev 证明，总是存在极限

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

且它是一个非负整数，称为 $A$的 PI-指数。若使用簇的语言，我们称由代数 $A$ 生成的簇是类

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(A) = \{B \text{ associative algebra} \mid T(A) \subseteq T(B)\}.$$

当且仅当对 $\mathcal{V}$ 的任意真子簇 $\mathcal{U}$，都有 $\exp(\mathcal{U}) < \exp(\mathcal{V})$时，我们称代数簇 $\mathcal{V}$ 关于其指数是极小的。若一个 PI-代数生成一个极小簇，则称它是极小的。

若 $S$ 是任意含幺交换环，我们用 $UT_n(S)$ 表示元素取自 $S$ 的上三角矩阵环。令 $E$ 为 $F$ 上的无限维格拉斯曼代数。Drensky [19] 证明了，代数 $UT_n(F)$ 和 $UT_n(E)$ 的 $T$-理想是具有给定余维数列指数的极大 $T$- 理想的例子（相应的代数簇是该指数下的极小簇）。在 Kemer 的研究成果问世前数年，Genov 在 [25] 以及 Genov 和 Latyshev 在 [36] 证明，属于 $\mathcal{V}(UT_n(F))$ 的每个代数都有有限个多项式恒等式基。Latyshev 在 [37] 和 Popov

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16R10；05A15；05E05；05E10；15A75；16R40；20C30。

*Key words and phrases.* 具有多项式恒等式的代数；分块上三角矩阵；格拉斯曼代数；余特征序列；重数；重数级数。D.M. Correa 的部分研究经费由巴西高等教育人员改进协调会提供。财务代码 001。

在 [42] 将先前的结果推广到了满足以下多项式恒等式的 PI-代数

$$[x_1, x_2, x_3] \cdots [x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}]$$

它生成代数 $UT_n(E)$ 的 $T$-理想 $T(UT_n(E)) = T(E)^n$。很长一段时间里，在 Kemer 提出其结构理论之前，Genov、Latyshev 和 Popov 的结果涵盖了所有已知的具有有限基性质的 PI-代数类实例。

Volichenko 和 Zalesskii 在 [46] 中证明，T-理想 $T(UT_n(F))$ 和 $T(UT_n(E))$ 还具有另一项有趣性质。设代数 $A$ 满足多线性多项式恒等式 $f(x_1, \ldots, x_m)$，该恒等式生成一个特征为 $\chi_\lambda$ 的不可约 $S_m$-模，其中 $\chi_\lambda$ 是与分拆 $\lambda$ 相关联的不可约 $S_m$-特征。那么， $\lambda$ 的杨图中第一行下方的方格数少于 $n$ ，当且仅当 $f(x_1, \ldots, x_m)$ 在 $UT_n(F)$ 中不成立。类似地， $\lambda$ 的杨图中第一列右侧的方格数少于 $n$，当且仅当 $f(x_1, \ldots, x_m)$ 在 $UT_n(E)$ 中不成立。对于格拉斯曼代数，这意味着代数 $A$ 满足一个标准恒等式，当且仅当 $T(A)$ 不包含于 $T(E)$ 中。证明可见 Giambruno 和 Zaicev 的著作 [30, 定理 7.2.1]。

Let

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(A)\chi_\lambda, \quad n \in \mathbb{N},$$

是 $A$ 的余特征序列。令 $X_d := \{x_1, \ldots, x_d\}$，并考虑

$$F_d(A) := F\langle X_d\rangle / (F\langle X_d\rangle \cap T(A)).$$

此外，如果 $\mathrm{T} = \{t_1, \ldots, t_d\}$ 是一组交换变量，那么 $F_d(A)$ 的希尔伯特级数 $H(F_d(A); T_d)$ 可分解为

$$H(F_d(A); \mathrm{T}_d) = \sum_\lambda m_\lambda(A) S_\lambda(\mathrm{T}_d),$$

其中， $\lambda$ 是一个至多含 $d$ 个部分的分拆，而 $S_\lambda(\mathrm{T}_d)$ 是与 $\lambda$ 对应的舒尔函数，其变量取自 $\mathrm{T}_d$。我们将 $H(F_d(A); \mathrm{T}_d)$ 称为 $A$ 的希尔伯特级数，并用 $H(A, \mathrm{T}_d)$ 表示 $H(F_d(A); \mathrm{T}_d)$。根据 Berele 和 Drensky 的一个结果（见 [4] 和 [17]）， $m_\lambda(A)$ 与 $A$ 的余特征序列中的相同。因此，原则上，知道 $A$ 的希尔伯特级数，就能得到 $A$ 的余特征序列的重数 $m_\lambda(A)$，其中 $\lambda$ 是一个至多含 $d$ 个部分的分拆。因此，如果 $A$ 是有限维的，使用足够大的变量集合就足以确定所有重数。对于无限维代数，情况则不再如此。还需指出，Belov 在 [3] 中证明，PI-代数 A 的相对自由代数在 $d$ 个变量下的希尔伯特级数是一个有理函数。

目前仅在少数情况下知道 PI-代数的余特征序列中重数的显式形式。其中包括无限维格拉斯曼代数 $E$ （Olsson 和 Regev [41]）、 $2 \times 2$ 矩阵代数 $M_2$（Formanek [23] 和 Drensky [18]）、 $UT_2(F)$ 的 $2 \times 2$ 上三角矩阵代数（Mishchenko 等人 [40], 基于 Berele 和 Regev 的方法 [10], ，另见 [20]）、格拉斯曼代数的张量平方 $E \otimes E$ （Popov [43], 、Carini 和 Di Vincenzo [13]）、 $UT_2(E)$ 的 $2 \times 2$上三角矩阵代数，其元素来自格拉斯曼代数 $E$（Centrone [14]）、 $UT_n(F)$ 的$n \times n$ 上三角矩阵代数（Boumova 和 Drensky [12]）、代数 $R_{p,q}(F)$ 的上块三角（$p + 2q$） $\times$ ($p + 2q$)，其中 $p$ 和 $q$ 取较小值（Drensky 和 Kostadinov [22]）。

在 [21] Drensky 和 Genov 定义了 PI-代数 $A$的重数级数，即余特征序列的生成函数；它对应于重数 $m_\lambda(A)$，其中 $\lambda$ 是一个至多有 $d$ 个部分的分拆。接着，回到上三角矩阵及其在 PI-理论中的核心作用， [12] Boumova 和 Drensky 找到了一个简单的算法：输入为对称函数的重数级数，输出为其杨导出的重数级数。应用这一算法，他们得到了 $UT_n(F)$希尔伯特级数的重数级数的显式形式。沿着这一研究思路，在本文的第一部分，我们研究 $UT_n(E)$，并计算其关于 $d$ 个变量的重数级数。

由于 $E$ 是无限维的，为了得知 $UT_n(E)$的所有重数，我们需要使用比 Boumova 和 Drensky 所用方法更多的工具。借鉴 Berele 的思路（见 [7]），我们使用双希尔伯特级数，而不是 PI-代数的希尔伯特级数。由于 Berele 和 Drensky 关于双希尔伯特级数的结果的类似结论，为了得到 $UT_n(E)$的余特征序列的显式形式，只需研究$UT_n(E)$的双希尔伯特级数的分解。在本文第二部分，我们推广了 PI-代数的重数级数的定义，定义了一个（$k, l$）-重数级数，它控制三组互不相交的变量，其中（$k, l$）表示分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

满足条件 $\lambda_{k+1} \leq l$。换言之，它们的杨图 $D_\lambda$ 位于一个钩形内，该钩形的臂高为 $k$ ，腿宽为 $l$ 。根据 Amitsur 和 Regev 的一个结果 [2] ，PI-代数 $A$ 的所有非零重数 $m_\lambda(A)$都集中在足够大的钩形内的杨图上。因此，关于 $A$ 的重数的信息包含在与钩形（$k, l$）相关的重数级数中。

接着，我们计算 $E$ 的双希尔伯特级数，并由此构建一个算法，其输出为 $UT_n(E)$ 的 $(k, l)$-重数级数。按照 [14] 的思路，我们计算 $UT_2(E)$ 的 (2, 3)-重数级数，其中包含 $UT_2(E)$ 余特征序列的所有重数；最后，我们计算 $UT_3(E)$ 的 (1, 1)-重数级数。

## 2. Preliminaries

**2.1.** 对称函数。固定一个正整数 $d$ ，并考虑代数

$$\mathbb{C}[[\mathrm{T}_d]] = \mathbb{C}[[t_1, \ldots, t_d]]$$

由 $d$ 个交换变量构成的形式幂级数代数。令 $\mathrm{C}[[\mathrm{T}_d]]^{S_d} \subseteq \mathrm{C}[[\mathrm{T}_d]]$ 为对称函数子代数。每个对称函数 $g(\mathrm{T}_d)$ 都可以表示为

$$g(\mathrm{T}_d) = \sum_\lambda m_\lambda S_\lambda(\mathrm{T}_d), m_\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d),$$

其中 $S_\lambda(\mathrm{T}_d)$ 是与分拆 $\lambda$ 相关的舒尔函数，该分拆至多有 $d$ 个部分。关于舒尔函数理论的详情，参见 [39]。

定义舒尔函数有几种方法。对我们的目的而言，最方便的方法是将其定义为范德蒙型行列式的分式：

$$S_\lambda(\mathrm{T}_d) = \frac{V(\lambda + \delta, \mathrm{T}_d)}{V(\delta, \mathrm{T}_d)},$$

其中 $\delta = (d-1, \ldots, 2, 1)$，且对于 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$

$$V(\mu, \mathrm{T}_d) = \begin{vmatrix} t_1^{\mu_1} & t_2^{\mu_1} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_1} & t_m^{\mu_1} \\ t_1^{\mu_2} & t_2^{\mu_2} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_2} & t_m^{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_1^{\mu_{m-1}} & t_2^{\mu_{m-1}} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_{m-1}} & t_m^{\mu_{m-1}} \\ t_1^{\mu_m} & t_2^{\mu_m} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_m} & t_m^{\mu_m} \end{vmatrix}.$$

设 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ 是一个自然数的分拆。与 $\lambda$ 对应的杨图 $D_\lambda$ 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的子集，定义为 $D_\lambda = \{(i, j) \mid i = 1, \ldots, d,\ j = 1, \ldots, \lambda_i\}$。在图示中，我们用方格代替节点来绘制图形，并采用与矩阵相同的约定：第一个坐标 $i$ （行指标）沿向下方向递增，第二个坐标 $j$ （列指标）沿从左到右的方向递增。每一行最左边的方格彼此上下对齐，第 $i$ 行包含 $\lambda_i$ 个方格。我们用 $\lambda'_j$ 表示 $D_\lambda$ 的第 $j$ 列的长度。分拆 $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ 及其图形 $D_{\lambda'}$ 分别称为 $\lambda$ 和 $D_\lambda$ 的共轭。

对于分拆 $\lambda$，如果杨表 $T_\lambda$ 的内容为 $\alpha = \alpha(T_\lambda) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$，则称其为 $\lambda$-杨表；也就是说，整数 $i = 1, \ldots, d$ 在该杨表中恰好各出现 $\alpha_i$ 次。回顾一下， $\lambda$-杨表 $T_\lambda$ 是半标准的，是指其行中的元素从左到右不递减，并且列中的元素从上到下严格递增。

舒尔函数的另一种定义是通过半标准杨表给出的：

$$S_\lambda(\mathrm{T}_d) = \sum \mathrm{T}_d^{\alpha(T_\lambda)},$$

其中求和遍历所有半标准 $\lambda$-杨表。

回顾初等对称多项式的定义。给定 $0 \leq m \leq d$， $d$ 变量 $t_1$，…， $t_d$ 中的 $m$ 次初等对称多项式定义为

$$e_m(\mathrm{T}_d) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq d} t_{i_1} \cdots t_{i_m}.$$

本文中将多次用到这些多项式。容易证明， $e_m(\mathrm{T}_d) = S_{(1^m)}(\mathrm{T}_d)$。

对于每个分拆 $\mu$ of $n$，我们分别用 $M_\mu$ 和 $\chi_\mu$ 表示相应的不可约 $S_n$-模及其特征。杨氏规则是开展这项工作的一项非常有用的工具。该规则用杨图的语言描述了与模 $M_{(m)} \otimes M_\mu$ 和 $M_{(1^m)} \otimes M_\mu$ 相关的 $S_m \times S_n$-特征 $\chi_{(m)} \otimes \chi_\mu$ and$\chi_{(1^m)} \otimes \chi_\mu$, $\mu \vdash n$ 的诱导 $S_{m+n}$-特征。这些模的诱导 $S_{m+n}$-特征记为 We denote them by $\chi_{(m)} \widehat{\otimes} \chi_\mu$ and $\chi_{(1^m)} \widehat{\otimes} \chi_\mu$，分别表示。在特殊情形 $m = 1$ 下，杨氏规则等价于关于 $\chi_\mu$, $\mu \vdash n$ 的诱导 $S_{n+1}$-特征的分支规则。用舒尔函数的语言表述，杨氏规则如下：

情形 1. 设 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ 是一个分拆，且 $m \in \mathbb{N}$。则

$$S_{(m)}(\mathrm{T}_d) S_\mu(\mathrm{T}_d) = \sum_\lambda S_\lambda(\mathrm{T}_d)$$

其中求和遍历所有满足以下条件的分拆 $\lambda$

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_d = \mu_1 + \cdots + \mu_d + m,$$

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq \mu_d.$$

这意味着 Y oung 图形 $D_\lambda$ 可由图形 $D_\mu$ 添加 $m$ 个方格得到，使得任意两个新方格不能位于同一列 o 新方格不能位于其中 $D_\lambda$ 的同一列中。

情形 2. 设 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ 和 $(1^m)$ 是满足 $m \leq d$ 的分拆。那么

$$S_{(1^m)}(\mathrm{T}_d) S_\mu(\mathrm{T}_d) = \sum_\lambda S_\lambda(\mathrm{T}_d)$$

其中求和遍及所有满足下列条件的分拆 $\lambda$

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_d = \mu_1 + \cdots + \mu_d + m,$$

$$\mu_i = \lambda_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i = 0, 1.$$

换言之，杨图 $D_\lambda$ 是通过向图形 $D_\mu$ 添加 $m$ 个方格得到的，且新增方格不能位于同一行。

设 $g(\mathrm{T}_d) = \sum m_\lambda S_\lambda(\mathrm{T}_d)$ 是一个对称函数，则定义其重数级数为 $\lambda$

$$M(g; \mathrm{T}_d) = \sum_\lambda m_\lambda \mathrm{T}_d^\lambda = \sum_\lambda m_\lambda t_1^{\lambda_1} \cdots t_d^{\lambda_d} \in \mathbb{C}[[\mathrm{T}_d]].$$

考虑新变量集合 $\mathrm{V}_d = \{v_1, \ldots, v_d\}$ 上形式幂级数的子代数 $\mathbb{C}[[\mathrm{V}_d]] \subseteq \mathbb{C}[[\mathrm{T}_d]]$ 也很方便，其中

$$v_1 = t_1, v_2 = t_1 t_2, \ldots, v_d = t_1 \cdots t_d.$$

于是，重数级数 $M(g; \mathrm{T}_d)$ 可写为

$$M'(g; \mathrm{V}_d) = \sum_\lambda m_\lambda v_1^{\lambda_1 - \lambda_2} \cdots v_{d-1}^{\lambda_{d-1} - \lambda_d} v_d^{\lambda_d} \in \mathbb{C}[[\mathrm{V}_d]].$$

我们也称 $M'(g; \mathrm{V}_d)$ 为 $g$ 的重数级数。映射 $M' \colon \mathbb{C}[[\mathrm{T}_d]]^{S_d} \longrightarrow \mathbb{C}[[\mathrm{V}_d]]$，由 $g(\mathrm{T}_d) \to M'(g; \mathrm{V}_d)$ 定义，其优点在于它是一个双射。

函数 $g(\mathrm{T}_d) \in \mathbb{C}[[\mathrm{T}_d]]^{S_d}$ 和 $M(g; \mathrm{T}_d)$ 之间存在以下等式关系。

引理 2.1（Berele [6]）。如果

$$g(\mathrm{T}_d) \prod_{i<j} (t_i - t_j) = \sum_{p_i \geq 0} b(p_1, \ldots, p_d) t_1^{p_1} \cdots t_d^{p_d}, \quad b(p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{C},$$

*then*

$$M(g; \mathrm{T}_d) = \frac{1}{t_1^{d-1} t_2^{d-2} \cdots t_{d-1}} \sum_{p_i > p_{i+1}} b(p_1, \ldots, p_d) t_1^{p_1} \cdots t_d^{p_d}$$

其中，后一个等式中的求和遍及所有满足 $p_1 > p_2 \cdots > p_d$ 的 $p = (p_1, .., p_d)$。

一般情况下，即使我们知道 $g(\mathrm{T}_d)$，也很难求出 $M(g; \mathrm{T}_d)$。但要检验形式幂级数

$$h(\mathrm{T}_d) = \sum h(q_1, \ldots, q_d) t_1^{q_1} \cdots t_d^{q_d}, \quad q_1 \geq \cdots \geq q_d,$$

是否等于 $f(\mathrm{T}_d)$的重数级数 $M(f; \mathrm{T}_d)$，则非常容易，因为 $h(\mathrm{T}_d) = M(f; \mathrm{T}_d)$当且仅当

$$f(\mathrm{T}_d) \prod_{i<j} (t_i - t_j) = \sum_{\sigma \in S_d} t_{\sigma(1)}^{d-1} t_{\sigma(2)}^{d-2} \cdots t_{\sigma(d-1)} h(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(d)}).$$

后一等式可用于验证有关重数的计算结果 .

2.2. PI-代数。设 $F$ 是特征为 0 的域， $A$ 是带单位元的结合 $F$-代数，且$X = \{x_1, x_2, \ldots\}$是一个可数变量集。我们用 $F\langle X\rangle$ 表示由 $X$ 在 $F$ 上生成的自由结合代数，其元素称为多项式。令 $T(A)$为所有同态 $F\langle X\rangle \to A$ 的核的交集。那么， $T(A)$是 $F\langle X\rangle$ 的双边理想，其元素称为代数 $A$的多项式恒等式。若 $T(A)$非平凡，则称 $A$ 为PI-代数。注意， $T(A)$在 $F\langle X\rangle$的任意自同态作用下保持不变。具有此性质的代数 $F\langle X\rangle$ 的任意理想称为T-理想。显然，任意T-理想 $I$ 都是代数$F\langle X\rangle/I$的多项式恒等式理想。根据Kemer [32], 的著名定理，已知在特征零下，每个 $T$-理想都是有限生成的。

若 $n \in \mathbf{N}$，则向量空间

$$P_n := \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$$

称为次数为 $n$ 的多线性多项式空间。

由于域 $F$ 的特征为零，多线性化的标准过程表明， $T(A)$ 作为一个 $T$-理想由子空间 $P_n \cap T(A)$ 生成。实际上，研究商空间更为有效:

$$P_n(A) := P_n/(P_n \cap T(A)).$$

当 $n$ 充分大时， $P_n \cap T(A)$ 的维数按阶乘速度增长，但 Regev 在 [44] 中证明， $P_n(A)$ 的维数至多按指数速度增长。对 $P_n(A)$ 的研究，一个有效工具是对称群的表示论。事实上，可以注意到 $P_n(A)$ 是一个具有自然左作用的 $S_n$-模，而 $P_n \cap T(A)$ 是 $P_n$ 的一个 $S_n$-子模。因此， $P_n(A)$ 也是一个 $S_n$-模。我们将 $\chi_n(A)$ 记为 $P_n(A)$ 的 $S_n$-特征，并称其为 $A$ 的第 $n$ 个余特征。

由于我们在特征零下讨论，对称群的表示完全可约。因此

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(A) \chi_\lambda$$

其中，求和遍及所有的分拆 $\lambda$ ，满足 $n$； $\chi_\lambda$ 是对称群 $S_n$ 的相应不可约特征，且 $m_\lambda(A) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$。整数 $m_\lambda(A)$称为重数。

第 $n$个余特征 $\chi_n(A)$与另一种重要的群作用有关，即一般线性群 $GL_d = GL_d(F)$在代数簇 $\mathcal{V}(A)$中的秩为 $d$ 的相对自由代数 $F_d(A)$上的作用，其中

$$F_d(A) = F\langle X_d\rangle/(F\langle X_d\rangle \cap T(A)) = F\langle x_1, \ldots, x_d\rangle/(F\langle x_1, \ldots, x_d\rangle \cap T(A)).$$

代数 $F_d(A)$是Z-分次代数，其分次由下式定义:

$$\deg(x_1) = (1, 0, \ldots, 0), \deg(x_2) = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \deg(x_d) = (0, 0, \ldots, 1).$$

$F_d(A)$的希尔伯特级数

$$H(A; \mathrm{T}_d) := \sum_{n_i \geq 0} \dim(F_d^{(n_1, \ldots, n_d)}(A)) t_1^{n_1} \cdots t_d^{n_d}$$

其中， $F^{(n_1,\ldots,n_d)}{}_d(A)$ 是 $F_d(A)$ 中多次数度为 $(n_1, \ldots, n_d)$ 的齐次分量，是一种对称函数，起到相应 $GL_d$-表示的特征的作用。舒尔函数$S_\lambda(\mathrm{T}_d)$ 是不可约 $GL_d$-子模 $W_d(\lambda)$ 的特征，其中 $W_d(\lambda)$ 是 $F_d(A)$ 的子模，因此

$$H(A; \mathrm{T}_d) = \sum_\lambda m'_\lambda(A) S_\lambda(\mathrm{T}_d),$$

其中求和遍及所有至多有 $d$ 个部分的分拆 $\lambda$。根据 Berele [4] 和 Drensky [17]的一个结果，$m'_\lambda(A) = m_\lambda(A)$。因此，原则上，如果我们知道希尔伯特级数 $H(A;\mathrm{T}_d)$，就能求出那些至多有 $d$ 个部分的 $\lambda$ 对应的重数 $m_\lambda(A)$。

因此，如果 $A$ 是一个 PI-代数，我们有

$$H(A;\mathrm{T}_d) = \sum_\lambda m_\lambda(A) S_\lambda(\mathrm{T}_d),$$

其中 $\lambda$ 至多有 $d$ 个部分，且 $m_\lambda(A)$是 $A$的余特征序列中与 $\chi_\lambda$ 对应的重数。

下面的命题用两个 $T$-理想的希尔伯特级数表示其乘积的希尔伯特级数，并给出相应的相对自由代数的希尔伯特级数关系。

命题2.2（Formanek [24], Halpin [31]）。设 $A_1$、 $A_2$ 和 $A$ 为 PI-代数，满足 $T(A) = T(A_1)T(A_2)$。（i）那么， $T(A_1)$、 $T(A_2)$和 $T(A)$的希尔伯特级数满足

$$H(F\langle X_d\rangle;\mathrm{T}_d)H(F\langle X_d\rangle \cap T(A);\mathrm{T}_d) = H(F\langle X_d\rangle \cap T(A_1);\mathrm{T}_d)H(F\langle X_d\rangle \cap T(A_2);\mathrm{T}_d).$$

（ii） $F_d(A)$、 $F_d(A_1)$、 $F_d(A_2)$的希尔伯特级数满足

$$H(A;\mathrm{T_d}) = H(A_1;\mathrm{T_d}) + H(A_2;\mathrm{T_d}) + (t_1 + \cdots + t_d - 1)H(A_1;\mathrm{T_d})H(A_2;\mathrm{T_d}).$$

推论 2.3. 设 $A$ 和 $A_1$ 是 PI-代数，使得 $T(A) = T(A)^n$. 那么

$$H(A;\mathrm{T_d}) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (t_1 + \cdots + t_d - 1)^{j-1} H(A_1;\mathrm{T_d})^j.$$

对于 PI-代数 $A$，我们定义 $d$ 个变量中的 $A$ 的重数级数如下

$$M(A;\mathrm{T}_d) = \sum_\lambda m_\lambda(A)\mathrm{T}_d^\lambda = \sum_\lambda m_\lambda(A) t_1^{\lambda_1} \cdots t_d^{\lambda_d}.$$

注意，如果我们知道 $A$ 的重数级数，就可以求出重数 $m_\lambda(A)$，其中 $\lambda$ 是一个至多有 $d$ 个部分的分拆。

2.3. 无限维格拉斯曼代数。

定义 2.4. 设 $W$是在特征零域 $F$上的无限维向量空间，其基为 $\{e_1, e_2, \ldots\}$。格拉斯曼（或外）代数 $E = E(W)$ 是由$\{e_1, e_2, \ldots\}$ 生成、并满足定义关系 $e_i e_j + e_j e_i = 0$（对所有 $i, j \in \mathbb{N}$）的结合代数。

注意， $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$ 其中

$$E^{(0)} := \mathrm{span}_F\{1, e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k}\ k > 0\},$$

$$E^{(1)} := \mathrm{span}_F\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_{2k+1}\ k \ge 0\}.$$

容易验证 $E^{(0)}E^{(0)} + E^{(1)}E^{(1)} \subseteq E^{(0)}$和 $E^{(0)}E^{(1)} + E^{(1)}E^{(0)} \subseteq E^{(1)}$。因此，分解$E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$ 是 $E$的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次。注意， $E^{(0)}$ 与 $E$的中心重合。

下述事实众所周知。

命题 2.5. 格拉斯曼代数 $E$ 满足多项式恒等式

$$[[x_1, x_2], x_3],$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 是李交换子，即 $[w, y] := wy - yw$，对任意 $w$、 $y \in F\langle X\rangle$均成立。

当域为无限域且特征不等于 2 时，三重交换子是 $T(E)$的唯一生成元。特征零情形下，这一事实由 Krakowski 和 Regev 在 [33]中证明。它也可由 Latyshev 在 [34] 和 [35] 中的结果推出（但他们并未明确陈述）。在正特征情形下，读者可在 [27]中找到证明。

定理 2.6。 $E$ 的 $T$ 理想由以下多项式生成

$$[x_1, x_2, x_3].$$

Olsson 和 Regev 的以下定理给出了 $E$ 的余特征序列。

定理 2.7（Olsson 和 Regev [41]）。设 $E$ 是特征零域上的无限维格拉斯曼代数。那么，对于任意 $n \geq 1$， $E$ 的余特征序列由下式给出：

$$\chi_n(E) = \sum_{p=1}^{n} \chi_{(p,1^{n-p})}.$$

下面的结果给出了 $F_d(E)$ 的希尔伯特级数表达式。其证明见 [20]。

命题 2.8。设 $E$ 是特征零域上的无限维格拉斯曼代数。 $F_d(E)$ 关于 $d$ 个变量的希尔伯特级数由下式给出：

$$H(E;\mathrm{T}_d) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}\frac{1+t_i}{1-t_i}.$$

下一个定理讨论 $n \times n$ 个上三角矩阵构成的、以格拉斯曼代数 $E$ 为系数的 $F$-代数 $UT_n(E)$ 的多项式恒等式。另请参见 [15]，其中讨论了正特征下的 $UT_2(E)$。

定理 2.9（Abakarov [1]）。 $T(E)$ 的 $UT_n$-理想由以下多项式生成：

$$[x_1, x_2, x_3]\cdots[x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}].$$

## 3. The operator $\widehat{Y}$

本节将介绍用于开发算法的工具，该算法用于计算特征零域 $F$ 上、以格拉斯曼代数 $E$ 中元素为矩阵项的 $n \times n$ 上三角矩阵代数 $UT_n(E)$ 的余特征序列中的重数。

我们沿用 [12] 中提出的思路。首先用重数级数的语言研究两个基本算子（文中记作 $Y$ 和 $Y$）的作用。然后，计算 $UT_n(E)$ 的希尔伯特级数，并求出其重数级数的表达式。我们将描述哪些分拆 $\lambda$ 对应的重数 $m_\lambda$ 在 $UT_n(E)$ 的余特征序列中非零。最后，对于 $UT_n(E)$，我们计算重数 $m_\lambda$，其中 $1 \leq n \leq 3$ 和 $\lambda$ 是至多含两个部分的分拆。

定义 3.1。设 $Y$ 是 $\mathrm{C}[[\mathrm{V}_d]]$ 中的线性算子，它将对称函数的重数级数映射为其杨导出的重数级数。也就是说，若 $g(T_d)$ 是一个对称函数，则

$$Y(M(g);\mathrm{T}_d) = M\left(\left(\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{(1-t_i)}\right)g(\mathrm{T}_d);\mathrm{T}_d\right).$$

该算子 $Y$ 称为杨导出算子。

定义 3.2. 若 $g(\mathrm{T}_d) \in \mathrm{C}[[\mathrm{T}_d]]^{S_d}$，则我们将线性算子 $\widehat{Y}\,\mathrm{in}\,\mathrm{C}[[\mathrm{V}_d]] \subseteq \mathrm{C}[[\mathrm{T}_d]]$ 定义为

$$\widehat{Y}(M(g);\mathrm{T}_d) := M\left(g(\mathrm{T}_d)\left[\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1-t_i) + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1+t_i)\right];\mathrm{T}_d\right).$$

以下命题是众所周知的，它描述了 $Y$ 在 $\mathbf{1}$ 上的多重作用。证明见 [12]。

命题 3.3. 对于 $d \geq k \geq 1$，有以下分解

$$\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{(1-t_i)^k} = \sum_{\mu}\eta_\mu S_\mu(\mathrm{T}_d),$$

其中求和遍及所有分拆 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$，并且

$$\eta_\mu = S_\mu\underbrace{(1,\ldots,1)}_{k\ times} = \dim W_k(\mu).$$

等价地，对于 $k \geq 1$

在一般情况下，有一个简单公式，可以用重数级数的语言来表达 $Y$ 在 $g(\mathrm{T}_d)$ 上的作用。

命题 3.4（Drensky 和 Genov [21]）。设 $g(\mathrm{T}_d) \in \mathrm{C}[[\mathrm{T}_d]]^{S_d}$。则

$$Y(M(g;\mathrm{T}_d)) = \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{1-t_i} \sum (-t_2)^{\varepsilon_2} \cdots (-t_d)^{\varepsilon_d} M(g; t_1 t_2^{\varepsilon_2}, t_2^{1-\varepsilon_2} t_3^{\varepsilon_3}, \ldots, t_{d-1}^{1-\varepsilon_{d-1}} t_d^{\varepsilon_d}, t_d^{1-\varepsilon_d}),$$

其中求和遍历所有 $\varepsilon_2$、……、$\varepsilon_d \in \{0,1\}$。

$\widehat{}$考虑算子 $Y$，并注意到

$$\widehat{Y}^j(M(1);\mathrm{T}_d) = \left( \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{d} (1-t_i) + \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{d} (1+t_i) \right)^j.$$

现在，我们想知道哪些舒尔函数参与了 $\widehat{Y}^j(M(1);\mathrm{T}_d)$ 的分解，也就是说，我们希望将 $\widehat{Y}^j(M(1);\mathrm{T}_d)$ 表示为舒尔函数的线性组合。下面的结论直接由杨氏规则得到。

命题 3.5。设 $j \geq 1$ 并且

$$\left( \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{d} (1-t_i) + \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{d} (1+t_i) \right)^j = \sum_{\rho} m_\rho S_\rho(\mathrm{T}_d).$$

若 $m_\rho \neq 0$，则对于某些 $n_1, \ldots, n_j$ 整数，$\rho = (j^{s_1}, (j-1)^{s_2}, \ldots, 1^{s_j}) \vdash 2(n_1 + \cdots + n_j)$，且 $(s_1, \ldots, s_j) \in \mathrm{Z}^j_{\geq 0}$。等价地，若 $m_\rho \neq 0$，则 $\rho$ 至多有 $j$ 列。

下面的引理使我们能够用重数级数$M'(f(\mathrm{T}_d); \mathrm{V}_d)$来描述 $M'(f(\mathrm{T}_d)S_{(1^2)}(T_d); \mathrm{V}_d)$，其中 $f(\mathrm{T}_d)$ 是一个对称函数。

引理 3.6。设 $f(\mathrm{T}_d) \in \mathrm{C}[[\mathrm{T}_d]]^{S_d}$。则

$$\begin{aligned} M'(f(\mathrm{T}_d)S_{(1^2)}(\mathrm{T}_d); \mathrm{V}_d) =& v_2 M'(f(\mathrm{T}_d; \mathrm{V}_d) + v_1 \sum_{j=2}^{d-1} \frac{v_{j+1}}{v_j} g_j((M'(f(\mathrm{T}_d); v_1, \ldots, v_d)) \\ &+ \sum_{i=1}^{d-2} \frac{v_{i+2}}{v_i} g_i((M'(f(\mathrm{T}_d); v_1, \ldots, v_d)) \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq d-1 \\ i+1<j}} \frac{v_{i+1}}{v_i} \frac{v_{j+1}}{v_j} g_{ij}((M'(f(\mathrm{T}_d); v_1, \ldots, v_d)), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} g_j((M'(f(\mathrm{T}_d); \mathrm{V}_d)) &= M'(f(\mathrm{T}_d); v_1, \ldots, v_d) - M'(f(\mathrm{T}_d); v_1, \ldots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \ldots, v_d), \\ g_{ij}((M'(f(\mathrm{T}_d); \mathrm{V}_d)) =& M'(f(\mathrm{T}_d); v_1, \ldots, v_d) \\ &+ M'(f(\mathrm{T}_d); v_1, \ldots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \ldots, v_j, 0, v_{j+1}, \ldots, v_d) \\ &- M'(f(\mathrm{T}_d); v_1, \ldots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \ldots, v_d) \\ &- M'(f(\mathrm{T}_d); v_1, \ldots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \ldots, v_d). \end{aligned}$$

证明。注意，只需对 $f(\mathrm{T}_d) = S_\mu(\mathrm{T}_d)$ 证明该引理，其中 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ 是一个至多有 $d$ 个部分的分拆。将 $M'(S_\mu(\mathrm{T}_d; \mathrm{V}_d))$ 重写为

$$M'(S_\mu(\mathrm{T}_d); \mathrm{V}_d) = v_1^{p_1} \cdots v_d^{p_d}$$

其中 $p_i = \mu_i - \mu_{i+1}$, $i = 1, \ldots, d-1$ 和 $p_d = \mu_d$，根据杨氏规则，我们有 $S_\mu(\mathrm{T}_d)S_{(1^2)}(\mathrm{T}_d)$ 是 $S_\lambda(\mathrm{T}_d)$ 的线性组合，其中

- $\lambda = (\mu_1 + 1, \mu_2 + 1, \mu_3, \ldots, \mu_d)$;

若 $\mu_j > \mu_{j+1}$ 和 $j \geq 2$，则 • $\lambda = (\mu_1 + 1, \ldots, \mu_j, \mu_{j+1} + 1, \ldots, \mu_d)$;

若 $\mu_i > \mu_{i+1}$，则 • $\lambda = (\mu_1, \ldots, \mu_i, \mu_{i+1} + 1, \mu_{i+2} + 1, \ldots, \mu_d)$;

- $\lambda = (\mu_1 + 1, \ldots, \mu_i, \mu_{i+1} + 1, \ldots, \mu_j, \mu_{j+1} + 1, \ldots, \mu_d)$，若 $\mu_i > \mu_{i+1}$, $\mu_j > \mu_{j+1}$ 且 $i + 1 < j$。

用重数级数的语言来说，这意味着 $M'(S_\mu(\mathrm{T}_d)S_{(1,1)}(\mathrm{T}_d))$ 是以下各项的线性组合

- $v_2(v_1^{p_1}\cdots v_d^{p_d}) = v_2M'(S_\mu(\mathrm{T}_d;\mathrm{V}_d))$;
- $v_1\dfrac{v_{j+1}}{v_j}M'(S_\mu(\mathrm{T}_d;\mathrm{V}_d))$, if $\mu_j > \mu_{j+1}$ and $j \geq 2$;
- $\dfrac{v_{i+2}}{v_i}M'(S_\mu(\mathrm{T}_d,\mathrm{V}_d))$, if $\mu_i > \mu_{i+1}$;
- $\dfrac{v_{i+1}}{v_i}\dfrac{v_{j+1}}{v_j}M'(S_\mu(\mathrm{T}_d,\mathrm{V}_d))$, if $\mu_i > \mu_{i+1}$, $\mu_j > \mu_{j+1}$ and $i+1 < j$.

现在，注意到

$$g_j((M'(f(\mathrm{T}_d);\mathrm{V}_d)) = \begin{cases} M'(f(\mathrm{T}_d);\mathrm{V}_d), & if \quad p_j > 0, \\ 0, & if \quad p_j = 0; \end{cases}$$

$$g_{ij}((M'(f(\mathrm{T}_d);\mathrm{V}_d)) = \begin{cases} M'(f(\mathrm{T}_d);\mathrm{V}_d), & if \quad p_i > 0,\ p_j > 0, \\ 0, & for \quad \text{all other cases.} \end{cases}$$

于是，结论显然成立。 □

由引理 3.6，得到以下推论。

推论 3.7. 若 $f(\mathrm{T}_2) \in \mathrm{C}[[\mathrm{T}_2]]^{S_2}$，则

$$\widehat{Y}(M(f;\mathrm{T}_2)) = (1+t_1t_2)M(f;T_2) = \left[\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{2}(1-t_i) + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{2}(1+t_i)\right]M(f;T_2).$$

注意，若要用重数级数 $M'(S_\lambda(\mathrm{T}_d)$ 来描述 $M'(S_\lambda(\mathrm{T}_d)S_{(1^k)}(T_d);\mathrm{V}_d)$，其中 $\lambda$ 是至多含 $d$ 个部分的分拆，且 $k \leq d$ 是一个正整数，则我们需要从 $M'(S_\lambda((T)_d);\mathrm{V}_d)$ 得到使 $v_{j_1} = v_{j_2} = \cdots = v_{j_r} = 0$ 成立的表达式，其中 $1 \leq r \leq s$ 且 $j_1 \leq \cdots \leq j_r$。

## 4. Hilbert series and multiplicity series of $UT_n(E)$

本节给出一种算法，用于计算 $UT_n(E)$ 的余特征序列中的重数。我们沿用 [12] 中提出的思路。

下一个结果由推论 2.3、定理 2.9 和命题 2.8 得出。

定理 4.1. 代数 $F_d(UT_n(E))$ 的希尔伯特级数 $H(UT_n(E);\mathrm{T}_d)$ 为

$$H(UT_n(E));\mathrm{T}_d) = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}\frac{1+t_i}{1-t_i}\right)^j(t_1+\cdots t_d-1)^{j-1}.$$

由定义 3.1 和定义 3.2 可得

$$\begin{aligned} Y(\widehat{Y}(M(g);T_d)) &= Y\left(M\left(g(T_d)\left[\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1-t_i)+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1+t_i)\right]\right);\mathrm{T_d}\right) \\ &= M\left(\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{1-t_i}g(T_d)\left[\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1-t_i)+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1+t_i)\right];\mathrm{T_d}\right) \\ &= M\left(g(\mathrm{T}_d)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}\frac{1+t_i}{1-t_i}\right];\mathrm{T}_d\right). \end{aligned}$$

注意，$Y(\widehat{Y}(M(g);T_d))$ 是良定义的，因为 $g(\mathrm{T}_d)$ 和 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}\dfrac{1+t_i}{1-t_i}$ 都是对称函数。因此，$g(\mathrm{T}_d)$ $\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}\dfrac{1+t_i}{1-t_i}\right]$ 是对称的。此外，我们也有 $Y\circ\widehat{Y} = \widehat{Y}\circ Y$。

利用前面的结果，我们可以得到 $UT_n(E)$ 的重数级数表达式。这就是下面推论的内容。

推论 4.2。 $UT_n(E)$ 的重数级数为

$$M(UT_n(E);\mathrm{T}_d)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{\lambda\vdash q}(-1)^{j-1-q}\binom{n}{j}\binom{j-1}{q}d_\lambda Z^j(\mathrm{T}_d^\lambda),$$

*where* $d_\lambda$ 是不可约 $S_n$-特征 $\chi_\lambda$ 的次数，$\mathrm{T}_d = t_1^{\lambda_1}\cdots t_d^{\lambda_d}$和 $Z = Y\circ\widehat{Y}$。

证明。注意到

$$(t_1+\cdots+t_d-1)^{j-1} = \sum_{q=0}^{j-1}(-1)^{j-1-q}\binom{j-1}{q}(t_1+\cdots+t_d)^q$$

并将命题 4.1 中 $H(U_k(E);\mathrm{T}_d)$ 的表达式展开，得到

$$H(UT_n(E);\mathrm{T}_d) = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}\frac{1+t_i}{1-t_i}\right)^j\sum_{q=0}^{j-1}(-1)^{j-1-q}\binom{j-1}{q}(t_1+\cdots+t_d)^q.$$

利用众所周知的等式

$$(t_1+\cdots+t_d)^q = S_{(1)}^q(\mathrm{T}_d) = \sum_{\lambda\vdash q}d_\lambda S_\lambda(\mathrm{T}_d),$$

其中 $d_\lambda$ 是不可约 $S_q$-特征 $\chi_\lambda$ 的次数，我们有

$$\begin{aligned}H(UT_n(E);\mathrm{T}_d) &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}\frac{1+t_i}{1-t_i}\right)^j\sum_{q=0}^{j-1}(-1)^{j-1-q}\binom{j-1}{q}\sum_{\lambda\vdash q}d_\lambda S_\lambda(\mathrm{T}_d)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{\lambda\vdash q}(-1)^{j-1-q}\binom{n}{j}\binom{j-1}{q}d_\lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}\frac{1+t_i}{1-t_i}\right)^j S_\lambda(\mathrm{T}_d).\end{aligned}$$

事实上， $S_\lambda(\mathrm{T}_d)$ 的重数级数为

$$M(S_\lambda(\mathrm{T}_d);\mathrm{T}_d) = t_1^{\lambda_1}\cdots t_d^{\lambda_d} = \mathrm{T}_d^\lambda.$$

Then

$$M\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}\frac{1+t_i}{1-t_i}\right)^j S_\lambda(\mathrm{T}_d);\mathrm{T}_d\right) = Z^j(M(S_\lambda(\mathrm{T}_d);\mathrm{T}_d)) = Z^j(\mathrm{T}_d^\lambda).$$

因此， $UT_n(E)$ 的重数级数为

$$M(H(UT_n(E);\mathrm{T}_d)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{\lambda\vdash q}(-1)^{j-1-q}\binom{n}{j}\binom{j-1}{q}d_\lambda Z^j(\mathrm{T}_d^\lambda).$$

□

我们希望描述满足 $m_\lambda(U_k(E)) \neq 0$ 的那些分拆 $\lambda$。因此，我们得到关于 $\lambda$ 高度的一个加强结果。

定理 4.3. 若 $m_\lambda(UT_n(E)) \neq 0$，且 $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$，则 $\lambda_{n+1} \leq 2n-1$。

证明。根据定理 4.1，并沿用推论 4.2 的思路， $UT_n(E)$ 的余特征序列中的非零重数 $m_\lambda(UT_n(E))$ 来自如下分解

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}\frac{1+t_i}{1-t_i}\right)^j(t_1+\cdots+t_d)^q = \left(\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{1-t_i}\right)^j\left(\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1-t_i)+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1+t_i)\right)^j S_{(1)}(\mathrm{T}_d)^q,$$

$j \leq n$ 和 $q \leq n-1$，表示为舒尔函数的线性组合。

根据命题 3.5，参与乘积的舒尔函数 $S_\pi(\mathrm{T}_d)$

$$\left(\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1-t_i)+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1+t_i)\right)^j$$

由至多有 $j \le n$ 列的分拆 $\pi$ 来标记。根据分支规则，将$S_\pi(\mathrm{T}_d)$与 $S_{(1)}(T_d)$ 相乘，所得是 $S_\rho(\mathrm{T}_d)$ 的线性组合，其中 $\rho$ 的图形由 $\pi$ 的图形添加一个方格得到。将 $q$ 乘以 $S_{(1)}(\mathrm{T}_d)$，我们在 $\pi$ 的图形中添加的方格不会超过 $q \le n-1$ 个，且都位于第一行。

$$\left(\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1-t_i)+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{d}(1+t_i)\right)^{j} S_{(1)}(\mathrm{T}_d)^q,$$

第一行至多有 $j+q \le 2n-1$ 个方格。

由于这一事实，即

$$\left(\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{1-t_i}\right)^{j} = \sum_{n_i \ge 0} S_{(m_1)}(\mathrm{T}_d)\cdots S_{(m_j)}(\mathrm{T}_d),$$

反复应用 杨氏规则，可以推出：若分拆 $\lambda$ 出现在分解中 of

$$\left(\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{1-t_i}\right)^{j} S_\rho(\mathrm{T}_d)$$

那么 $\lambda$的形式为 $(m_1,\dots,m_j,(j+q)^{s_1},\dots,1^{s_{j+q}})$ ，其中 $m_1,\dots,m_j,s_1,\dots,s_{j+q}$均为非负数。因此$\lambda_{j+1} \le j+q$。

因此，如果 $m_\lambda(UT_n(E)) \ne 0$，那么 $\lambda_{k+1} \le 2n-1$。 □

值得一提的是，关于 $E$ 和 $U_2(E)$ 的余特征序列的结果满足前一定理给出的界。Olsson 和 Regev 在 [41] 证明了

$$\chi_n(E) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{(n-k,1^k)}.$$

注意，分拆 $\lambda=(n-k,1^k)$ 的图形在第二列至多有一个方格，也就是说，$\lambda_2 \le 1$。因此，它与定理 4.3 一致。

在 [14] Centrone 证明了

$$H(UT_2(E);\mathrm{T}_d) = \sum m_\lambda(U_2(E))S_\lambda(\mathrm{T}_d),$$

其中 $\lambda=(m_1,m_2,3,2^m,1^l)$ 或 $\lambda=(m_1,m_2,2^m,1^l)$。因此，分拆 $\lambda$ 的图形在第三行至多有 3 个方格，也就是说，$\lambda_3 \le 3$。

## 5. Some applications of the multiplicity series of $UT_n(E)$

在本节中，我们将计算 $n \in \{1,2,3\}$ 的 $UT_n(E)$ 在两个变量下的重数级数。因此，我们得到 $UT_n(E)$ 的余特征序列中的重数 $m_\lambda$，其中 $1 \le n \le 3$，且 $\lambda$ 是一个至多含 2 个部分的分拆。

命题 5.1. 设代数 $E$ 和 $UT_2(E)$，则

(i) $E$ 在两个变量下的重数级数为

$$M'(E;\mathrm{V}_2) = \frac{1+v_2}{1-v_1}. \tag{1}$$

(ii) $UT_2(E)$ 在两个变量下的重数级数为

$$M'(UT_2(E);\mathrm{V}_2) = \frac{2(1+v_2)}{1-v_1} + \frac{(1+v_2)^2(-1+v_1+2v_2-v_1v_2)}{(1-v_1)^2(1-v_2)}. \tag{2}$$

证明。（i）此情形可直接由 Olsson 和 Regev 的结果得出 [41]，因为

$$m_\lambda = \begin{cases} 1 \text{ for } \lambda=(k,1^{n-k}), \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

and

$$M(E;\mathrm{T}_2) = \sum_{n\ge 0} t_1^n + \sum_{n\ge 2} t_1^{n-1}t_2.$$

我们将用推论 4.2 的表述重述这一证明,

由推论 4.2，得到

$$M(E;\mathrm{T}_2) \quad = \quad Z(1;\mathrm{T}_2).$$

由于 $Z = Y \circ Y$，应用命题 3.4 和推论 3.7，我们有

$$M(E;\mathrm{T}_2) = \frac{1+t_1t_2}{1-t_1}.$$

回想一下， $v_1 = t_1$ 且 $v_2 = t_1t_2$。因此

$$M'(E;\mathrm{V}_2) \quad = \quad \frac{1+v_2}{1-v_1}.$$

(ii) 由推论 4.2，我们有

$$M(UT_2(E);\mathrm{T}_2) \quad = \quad 2Z(1) - Z^2(1) + Z^2(t_1).$$

Now，我们将利用命题 3.4 和推论 3.7 计算 $2Z(1)$ $Z^2(1)$ 和 $Z^2(t_1)$

- $2Z(1) = \dfrac{2(1+t_1t_2)}{1-t_1}$;
- $Z^2(1) = \dfrac{(1+t_1t_2)^2}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)}$;
- $Z^2(t_1) = \dfrac{(1+t_1t_2)^2(t_1+2t_1t_2-t_1^2t_2)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)}$.

因此

$$\begin{aligned} M(UT_2(E);\mathrm{T}_2) \quad &= \quad \frac{2(1+t_1t_2)}{1-t_1} - \frac{(1+t_1t_2)^2}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)} + \frac{(1+t_1t_2)^2(t_1+2t_1t_2-t_1^2t_2)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)} \\ &= \quad \frac{2(1+t_1t_2)}{1-t_1} + \frac{(1+t_1t_2)^2(-1+t_1+2t_1t_2-t_1^2t_2)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)}. \end{aligned}$$

最后，我们有

$$M'(UT_2(E);\mathrm{V}_2) \quad = \quad \frac{2(1+v_2)}{1-v_1} + \frac{(1+v_2)^2(-1+v_1+2v_2-v_1v_2)}{(1-v_1)^2(1-v_2)}$$

至此得证。 □

现在，当 $\lambda$ 是至多含 2 个部分的分拆时，我们能够计算 $E$ 和 $UT_2(E)$ 的余特征序列中的重数 $m_\lambda$。这一结果旨在说明如何利用推论 4.2 和命题 5.1 求出这些重数。

推论 5.2. 设 $\lambda$ 是至多含 2 个部分的分拆。则:

(i) $E$ 的余特征序列中的重数 $m_\lambda$ 由下式给出

$$m_\lambda = \begin{cases} 1 \text{ if } \lambda = (n), \\ 1 \text{ if } \lambda = (\lambda_1, 1),\ \lambda_1 \geq 1, \\ 0 \text{ for all other } \lambda. \end{cases}$$

(ii) $UT_2(E)$ 的余特征序列中的重数 $m_\lambda$ 为

$$m_\lambda = \begin{cases} 1 & if \quad \lambda = (n), \\ \lambda_1 & if \quad \lambda = (\lambda_1, 1),\ \lambda_1 \geq 1, \\ 3\lambda_1 - 4 & if \quad \lambda = (\lambda_1, 2), \lambda_1 \geq 2, \\ 4(\lambda_1 - \lambda_2 + 1) & if \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 3. \end{cases}$$

证明。（i）由命题 5.1，得到

$$M'(E;\mathrm{V}_2)=\sum_{n\geq 0}v_1^n+\sum_{n\geq 0}v_1^nv_2.$$

由上述等式的第一项可知，若 $\lambda=(n)$ 且满足 $n\geq 0$，则 $m_\lambda=1$。注意， $v_1^nv_2$ 且满足 $n\geq 0$ 对应于分拆 $\lambda=(n+1,1)$。因此，若 $\lambda=(\lambda_1,1)$，其中 $\lambda_1\geq 1$，则 $m_\lambda=1$。

（ii）由命题 5.1，可得

$$\begin{aligned}M'(UT_2(E);\mathrm{V}_2) &= \sum_{n\geq 0}2v_1^n+\sum_{n\geq 0}2v_1^nv_2-\sum_{m,n\geq 0}(n+1)v_1^nv_2^m-\sum_{n\geq 0,m\geq 1}2(n+1)v_1^nv_2^m\\ &-\sum_{m\geq 2,n\geq 0}(n+1)v_1^nv_2^m+\sum_{m\geq 1,n\geq 0}2(n+1)v_1^nv_2^m\\ &+\sum_{m\geq 2,n\geq 0}4(n+1)v_1^nv_2^m+\sum_{m\geq 3,n\geq 0}2(n+1)v_1^nv_2^m\\ &+\sum_{n\geq 1}nv_1^n+\sum_{n\geq 1}2nv_1^nv_2+\sum_{n\geq 1}nv_1^nv_2^2.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}M'(UT_2(E);\mathrm{V}_2)=&\sum_{n\geq 0}v_1^n+\sum_{n\geq 0}(n+1)v_1^nv_2+\sum_{n\geq 0}(3n+2)v_1^nv_2^2\\ &+\sum_{n\geq 0,m\geq 3}4(n+1)v_1^nv_2^m.\end{aligned}$$

首先，考虑上述等式的第一项，并注意到 $v_1^n$ 对应于分拆$\lambda=(n)$。因此，若 $\lambda=(n)$，则 $m_\lambda=1$。

现在，注意到单项式 $v_1^nv_2$ 与 $n\geq 0$ 之间存在一一对应关系，且分拆为$\lambda=(n+1,1)$。因此，该等式表明，若 $\lambda=(n,1)$，其中 $n\geq 1$，则 $m_\lambda=n$。

最后，我们有 $v_1^nv_2^m$ 对应于分拆 $\lambda=(n+m,m)$。于是 $m_\lambda=4(n+1)=4((n+m)-m+1)$，由此可得，若 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ 且 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq 3$，则 $m_\lambda=4(\lambda_1-\lambda_2+1)$。

$n\geq 0, m\geq 3$ 的情形可类似处理。 □

我们强调，当分拆至多有两部分时，推论 5.2 与 [41] 和 [14] 中给出的结果一致。

现在，我们将计算 $UT_3(E)$ 关于两个变量的重数级数。

定理5.3。(i) $UT_3(E)$ 在两个变量中的重数级数为

$$\begin{aligned}M'(UT_3(E);\mathrm{V}_2)=&\frac{3(1+v_2)}{1-v_1}-\frac{3(1+v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)}+3\left(\frac{2(1+v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)}+\frac{v_1(1+v_2)^2}{(1-v_1)^2}\right)\\ &+\frac{1}{(1-v_1)^3(1-v_2)^3}\left(1-2v_1+v_1^2-2v_2+2v_1v_2-4v_2^2+8v_1v_2^2\right.\\ &-3v_1^2v_2^2+7v_2^3-5v_1v_2^3+10v_2^4-13v_1v_2^4+3v_1^2v_2^4-v_2^5-v_1v_2^5\\ &\left.-3v_2^6+3v_1v_2^6-v_1^2v_2^6\right).\end{aligned}\tag{3}$$

(ii) 设 $\lambda$ 是一个至多含 2 个部分的分拆。那么 $UT_3(E)$ 的余特征序列中的重数 $m_\lambda$ 由下式给出

$$m_\lambda = \begin{cases} 1 & if \quad \lambda = (n), \\ \lambda_1 & if \quad \lambda = (\lambda_1, 1),\ \lambda_1 \geq 1, \\ \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2)(\lambda_1 - 1) & if \quad \lambda = (\lambda_1, 2), \lambda_1 \geq 2, \\ \frac{1}{2}(16 - 17\lambda_1 + 5\lambda_1^2) & if \quad \lambda = (\lambda_1, 3), \lambda_1 \geq 3, \\ 14 - 16\lambda_2 + 4\lambda_2^2 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)(2 - 5(\lambda_1 - \lambda_2)) & \\ +4\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)(-3 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)) & if \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 4. \end{cases}$$

证明。(i) 根据推论 4.2，我们有

$$M(UT_3(E); \mathrm{T}_2) = \ 3Z(1) - 3Z^2(1) + 3Z^2(t_1) + Z^3(1) - 2Z^3(t_1) + Z^3(t_1^2) + Z^3(t_1 t_2).$$

由推论 3.7 和命题 3.4 可得

$$\begin{aligned} 3Z(1) - 3Z^2(1) + 3Z^2(t_1) =& \frac{3(1+v_2)}{1-v_1} - \frac{3(1+v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)} \\ &+ 3\left(\frac{2(1+v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)} + \frac{v_1(1+v_2)^2}{(1-v_1)^2}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} Z^3(1) - 2Z^3(t_1) + Z^3(t_1^2) + Z^3(t_1 t_2) =& \frac{1}{(1-v_1)^3(1-v_2)^3}\left(1 - 2v_1 + v_1^2 - 2v_2 + 2v_1 v_2\right. \\ &- 4v_2^2 + 8v_1 v_2^2 - 3v_1^2 v_2^2 + 7v_2^3 - 5v_1 v_2^3 + 10v_2^4 \\ &\left. -13v_1 v_2^4 + 3v_1^2 v_2^4 - v_2^5 - v_1 v_2^5 - 3v_2^6 + 3v_1 v_2^6 - v_1^2 v_2^6\right). \end{aligned} \tag{5}$$

现在，结论得证。

(ii) 我们利用以下众所周知的等式，将第 (i) 部分给出的 $M'(UT_3(E); \mathrm{V}_2)$ 的表达式展开为幂级数:

$$\frac{v_1^{a_1} v_2^{a_2}}{1 - v_1} = \sum_{n \geq a_1} v_1^n v_2^{a_2},$$

$$\frac{v_1^{a_1} v_2^{a_2}}{(1 - v_1)^2} = \sum_{n \geq a_1} (n - a_1 + 1) v_1^n v_2^{a_2},$$

$$\frac{v_1^{a_1} v_2^{a_2}}{(1 - v_1)^2 (1 - v_2)} = \sum_{n \geq a_1} \sum_{m \geq a_2} (n - a_1 + 1) v_1^n v_2^m,$$

$$\frac{v_1^{a_1} v_2^{a_2}}{(1 - v_1)^3 (1 - v_2)^3} = \sum_{n \geq a_1} \sum_{m \geq a_2} \binom{n - a_1 + 2}{2} \binom{m - a_2 + 2}{2} v_1^n v_2^m.$$

经过简单运算可得 $m_\lambda$ 的显式表达式，其中 $\lambda$ 是至多含两个部分的分拆。特别地，若要计算 $\lambda = (\lambda_1, 1)$ 的重数，我们需要研究 $M'(UT_3; \mathrm{V}_2)$ 中类型为 $v_1^n v_2$ 的项。因此，我们将研究以下表达式

$$\begin{aligned} &\frac{3v^2}{1 - v_1} - \left(\frac{3}{(1-v_1)^2(1-v_2)} + \frac{6v_2}{(1-v_1)^2(1-v_2)}\right) + \frac{6v_1 v_2}{(1-v_1)^2} \\ &+ \frac{6v_2}{(1-v_1)^2(1-v_2)} + \frac{1}{(1-v_1)^3(1-v_2)^3}\left(1 - 2v_1 + v_1^2 - 2v_2 + 2v_1 v_2\right). \end{aligned}$$

注意，若 $n \geq 2$ 且 $m = 1$，则 $\lambda = (n+1, 1)$。由上一个表达式可得

$$\begin{aligned} m_\lambda =& 3 - (3(n+1) + 6(n+1)) + 6n + 6(n+1) + \frac{6(n+1)(n+2)}{4} - \frac{6n(n+1)}{2} \\ &+ \frac{6(n-1)n}{4} - \frac{2(n+2)(n+1)}{2} + \frac{2n(n+1)}{2} \\ =& n+1. \end{aligned}$$

等价地，若 $\lambda = (n, 1)$，且 $n \geq 3$，则 $m_\lambda = n$。注意，若 $m = 0$ 且 $n = 1$，则 $\lambda = (1, 1)$ 且 $m_\lambda = 1$。最后，若 $n = 1$ 且 $m = 1$，则 $\lambda = (2, 1)$。由最后一个表达式可得，$m_\lambda = 2$。

我们得出，若 $\lambda = (\lambda_1, 1)$，且 $\lambda_1 \geq 1$，则 $m_\lambda = \lambda_1$。其他情形的处理类似，证明至此完成。□

## 6. Double Hilbert series and hook-Schur functions

注意，推论 4.2 中给出的 $UT_n(E)$ 的重数级数，仅当 $\lambda$ 的分拆至多有 $d$ 个部分时，才给出重数 $m_\lambda$。我们的下一个目标是找到一种算法，使我们能够计算 $UT_n(E)$ 的余特征序列中的重数，其中分拆 $\lambda$ 有更多“自由度”；并且找到$m_\lambda$，而不受 $\lambda$ 高度的任何限制。为此，我们将引入一些新概念。

如上所述，考虑无限维格拉斯曼代数 $E$。于是

$$\mathcal{B} = \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_m} \mid i_1 < \cdots < i_m,\ m = 1, 2, \ldots\}$$

$E$是一个基。我们回顾 Olsson 和 Regev 引入、 [41] 并由 Berele 和 Regev 在 [9]中使用的 $*$ 作用。给定 $1 \neq a = e_{i_1} \cdots e_{i_m} \in \mathcal{B}$，记 $l(a) = m$。设（$a$）=（$a_1, \ldots, a_n$），其中 $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B}$，并定义

$$I = \mathrm{Odd}(a) = \{i \mid l(a_i) \equiv 1 \pmod 2\}.$$

注 6.1。设 $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$（$I$可以为空），$\sigma \in S_n$。任取（$a$）=（$a_1, \ldots, a_n$），$a_i \in \mathcal{B}$，使得 $a_1 \cdots a_n \neq 1$ 且 $\mathrm{Odd}(a) = I$。则在 $E$中

$$a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = \pm a_1 \cdots a_n$$

注意，符号 $\pm$ 取决于 $I$ 和 $\sigma$，但与 $a$的具体选取无关。

定义 6.2。设 $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$（$I$可能为空），$\sigma \in S_n$。任取一个 $n$ 元组（$a$）=（$a_1, \ldots, a_n$），$a_i \in \mathcal{B}$，使得 $a_1 \cdots a_n \neq 0$ 且 $\mathrm{Odd}(a) = I$。我们通过等式定义 $f_I(\sigma) = \pm 1$

$$a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = f_I(\sigma) a_1 \cdots a_n.$$

定义 6.3。固定两个非交换变量集 $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ 和 $Z = \{z_1, \ldots, z_l\}$，以及一个以 $X \cup Z = \{x_1, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_l\}$ 为基的向量空间 $V$，张量 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$、$v_i \in X \cup Z$ 构成 $V^{\otimes n}$ 的一组基。给定这样的（$v$）$= v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$，我们将（$v$）的 $Z$ 指标定义为 $IZ(v) = \{i \mid v_i \in Z\}$。令 $\sigma \in S_n$，并定义 $*$ 对 $\sigma$ 的右作用如下

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) * \sigma = f_{IZ(v)}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots v_{\sigma(n)}.$$

最后，利用线性性，将 $\sigma$ 对 $V^{\otimes n}$ 的作用 $*$ 扩展到整个 $V^{\otimes n}$ 上。照例，我们可以将多线性多项式的向量空间 $P_n$（次数为 $n$）与群代数 $FS_n$ 视为同一对象，并定义 $P_n$ 在 $V^{\otimes n}$上的作用 $*$。

现在来考察与 PI-代数 $A$ 的多项式恒等式相关的双希尔伯特级数（或双 Poincar´e 级数）。在上述设定中，我们将 $V$ 的张量代数记为 $T_V$，并将自由代数

$$F\langle X, Z\rangle = F\langle x_1, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_l\rangle.$$

照例，假设 $x_1$，...，$x_k$ 和 $z_1$，...，$z_l$ 分别为偶自由生成元和奇自由生成元，则后一个代数是自由超代数。令

$$\langle a; b\rangle = \langle a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_l\rangle,$$

其中 $a_1 + \cdots + a_k + b_1 + \cdots + b_l = n$，并令 $V\langle a;\ b\rangle \subseteq V^{\otimes n}$ 为所有多项式构成的子空间，这些多项式分别关于 $x_1$、.....、$x_k$、$z_1$、.....、$z_l$ 齐次，次数为 $a_i$（关于 $y_i$）和 $b_j$（关于 $z_j$）。

定义 6.4. 设 $A$ 为一个 PI-代数，并考虑以下交换变量集合 $T_k$ ={$t_1, \ldots, t_k$}、 $Y_l = \{y_1, \ldots, y_l\}$。 $A$ 的双希尔伯特级数定义为

$$H(A; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) = H(A; t_1, \ldots, t_k; y_1, \ldots, y_l) := \sum_{\langle a;b\rangle} \dim_F(V\langle a;b\rangle / V\langle a;b\rangle * Q_n) t_1^{a_1} \cdots t_k^{a_k} y_1^{b_1} \cdots y_l^{b_l},$$

其中 $Q_n = T(A) \cap P_n$。

注意，变量 $t$'s 和 $y$'s 分别计数 $x$'s 和 $z$'s 的次数。

定义双希尔伯特级数还有另一种方式，它与相对自由代数的希尔伯特级数定义完全类似。回顾一下，如果 $A$ 是 PI-代数，那么 $A^M := A \otimes_F E$ 继承了来自 $E$ 的自然 $\mathrm{Z}_2$-分次结构的超代数结构，即 $A^{(0)} = A \otimes E^{(0)}$ 和 $A^{(1)} = A \otimes E^{(1)}$。

如果 $T_2(A^M) \subseteq F\langle x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots\rangle$ 是 $A^M$ 的 $\mathrm{Z}_2$-分次多项式恒等式的 $T_2$-理想，那么相对自由 $\mathrm{Z}_2$-分次代数

$$F\langle x_1, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_l\rangle / (T_2(A^M) \cap F\langle x_1, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_l\rangle)$$

称为 $A$ 的 magnum。有关 PI-代数的 magnum 的更多详细信息，请参见 [5]。以下结果是众所周知的（见 [5]），它表明，与 PI- 代数 $A$ 相关的双希尔伯特级数，与 $A$ 的 magnum 的希尔伯特级数一致。

命题 6.5。设 $A$ 为一个 PI-代数。若 $\langle a;\ b\rangle = \langle a_1, \ldots, a_k;\ b_1, \ldots, b_l\rangle$ 满足 $a_1 + \cdots + a_k + b_1 + \cdots + b_l = n$，则 $V\langle a;\ b\rangle * Q_n = V\langle a;\ b\rangle \cap T_2(A^M)$。

现在，我们将讨论钩施尔函数及其与 PI-代数的双希尔伯特级数之间的关系。我们将从一个推广半标准杨表概念的定义开始。

定义 6.6。固定整数 $k$、$l \geq 0$，使得 $k + l > 0$，以及 $k + l$ 个变量 $t_1$、$\ldots$、$t_k$、$y_1$、$\ldots y_l$，从而 $t_1 < \cdots < t_k < y_1 < \cdots y_l$。设 $\lambda$ 为一个分拆，其杨图为 $D_\lambda$。用来自{$t_1, \ldots, t_k, y_1, \ldots y_l$}的元素填充 $D_\lambda$，允许重复，从而得到一个 $(k,l)$-杨表 $T_\lambda$。若满足以下条件，则称这样的 $T_\lambda$ 为 $(k,l)$-半标准：

a) $T_\lambda$ 的“$t$ 部分”（即填有 $t_i$ 的单元格）是一个杨表。（因此，“$y$ 部分”是一个斜杨表）；b) $t_i$在行中非递减，在列中严格递增；c) $y_j$在列中非递减，在行中严格递增。

定义 6.7. 对于一个 $(k,l)$-半标准杨表 $T_\lambda$，我们定义 $w^{T_\lambda} = t_1^{a_1} \cdots t_k^{a_k} y_1^{b_1} \cdots y_l^{b_l}$，其中每个 $a_i$ 统计 $t_i$ 在 $T_\lambda$ 中出现的次数，而每个 $b_j$ 统计 $y_j$ 在 $T_\lambda$ 中出现的次数。因此，钩施尔函数定义为

$$HS_\lambda(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) = HS_\lambda(t_1, \ldots, t_k, y_1, \ldots, y_l) = \sum \{w^{T_\lambda} \mid T_\lambda \text{ is a } (k,l)\text{-semistandard}\}.$$

令 $H(k,l;\ n) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots) \vdash n \mid \lambda_{k+1} \leq l\}$ 且

$$H(k,l) = \bigcup_{n \geq 0} H(k,l;n).$$

注意，若 $\lambda \in H(k,l)$，则杨图 $D_\lambda$ 位于钩形内，臂的宽度为 $k$，腿的宽度为 $l$。由定义不难看出，$HS_\lambda(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) \neq 0$ 当且仅当 $\lambda \in H(k,l)$。

Amitsur 和 Regev 的下述定理表明，只要取足够大的 $k,l$，就能涵盖 PI-代数的余特征序列中具有非零重数的所有分拆。

定理 6.8（Amitsur 和 Regev [2]）。若 $A$ 是特征零域上的 PI-代数，则存在 $k$ 和 $l$，使得 $A$ 的余特征序列位于 $k \times l$ 钩形内；也就是说，若 $m_\lambda(A) \neq 0$，则 $\lambda \in H(k,l)$。

设 $A$ 是一个 PI-代数。当余特征序列 $\chi_n(A)$，$n = 0, 1, 2 \ldots$ 中的非零重数 $m_\lambda(A)$ 仅对应于那些 $\lambda \in H(k,l)$ 时，我们记作 $\chi(A) \subseteq H(k,l)$。根据 [8] 的定理 6 和定理 11，我们有如下结论。

定理 6.9（Berele 和 Regev [8]）。设 $A$ 是一个余特征序列为

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(A)\chi_\lambda,\ n \geq 0.$$

那么存在非负整数 $k$ 和 $l$，使得

$$H(A; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in H(k,l;n)} m_\lambda(A) HS_\lambda(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l).$$

以下结果是定理 2.2 的推广。

命题 6.10. 设 $A_1$、$A_2$ 和 $A$ 是 PI-代数，且满足 $T(A) = T(A_1)T(A_2)$。那么

$$H(A; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) = H(A_1; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) + H(A_2; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) + (HS_{(1)}(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) - 1)H(A_1; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)H(A_2; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l).$$

证明. Berele 和 Regev 在 [10] 中证明，若 $T(A) = T(A_1)T(A_2)$，则

$$\chi_n(A) = \chi_n(A_1) + \chi_n(A_2) + \chi_{(1)} \widehat{\otimes} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_j(A_1) \widehat{\otimes} \chi_{n-j-1}(A_2) - \sum_{j=0}^{n} \chi_j(A_1) \widehat{\otimes} \chi_{n-j}(A_2) \tag{6}$$

其中 $\widehat{\otimes}$ 表示特征的“外”张量积。回顾一下，对于不可约特征，$\widehat{\otimes}$ 的表现遵循 Littlewood-Richardson 法则。

根据定理 6.9，我们有

$$H(A; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in H(k,l;n)} m_\lambda(A) HS_\lambda(T_k, Y_l),$$

$$H(A_1; \mathrm{T}_k; \mathrm{Y}_l) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in H(k,l;n)} m_\alpha(A_1) HS_\alpha(T_k, Y_l),$$

$$H(A_2; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta \in H(k,l;n)} m_\beta(A_2) HS_\beta(T_k, Y_l).$$

利用 Littlewood-Richardson 法则将钩 Schur 函数相乘（见 [9], 第 6 节），等式 (6) 蕴含

$$H(A; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) = H(A_1; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) + H(A_2; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) + (HS_{(1)}(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) - 1)H(A_1; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)H(A_2; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l),$$

这正是所需的结果。 □

推论 6.11。设 $A$ 和 $C$ 是满足 $T(C) = T(A)^m$的 PI-代数。那么

$$H(C; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) = \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} H(A; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)^j (S_{(1)}(\mathrm{T}_k; \mathrm{Y}_l) - 1)^{j-1}.$$

## 7. The double Hilbert series of $UT_n(E)$

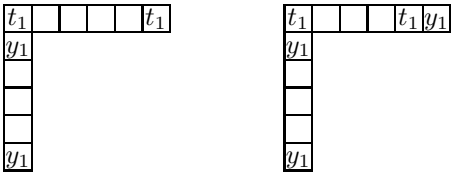
我们知道，$E$的余特征序列包含于钩形 $H(1, 1)$中。双希尔伯特级数 $H(E; t_1, y_1)$已在 [8]中计算过。我们再次给出 $H(E; t_1, y_1)$的计算，作为钩施尔函数定义的直接应用。

我们还将计算 $H(E; \mathrm{T}_k, \mathrm{T}_l)$，其中 $k, l$ 是非负整数。此外，我们将求出 $UT_n(E)$ 的双希尔伯特级数表达式。最后，利用 $H(UT_n(E); \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)$，我们将描述 $UT_n(E)$ 的余特征序列中的非零重数 $m_\lambda$。

命题 7.1. 设 $E$ 为无限维格拉斯曼代数。那么

$$H(E; t_1, y_1) = \frac{1 + t_1 y_1}{(1 - t_1)(1 - y_1)}.$$

证明. 根据定理 2.7，我们知道对于任意 $n \geq 1$，若 $\lambda = (p, 1^n - p)$，则有 $m_\lambda(E) = 1$。根据定理 6.9，我们需要计算 $HS_\lambda(t_1, y_1)$，以确定 $H(E; t_1, y_1)$。注意，形状为 $\lambda$ 的唯一 (1, 1)-半标准杨表为



分别对应于单项式 $t_1^p y_1^{n-p}$ 和 $t_1^{p-1} y_1^{n-p+1}$。因此

$$H(E; t_1, y_1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n} (t_1^p y_1^{n-p} + t_1^{p-1} y_1^{n-p+1}).$$

注意到

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n} (t_1^p y_1^{n-p} + t_1^{p-1} y_1^{n-p+1}) &= 1 + (t_1 + y_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n} t_1^{p-1} y_1^{n-p} \\ &= 1 + (t_1 + y_1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+p=k} t_1^p y_1^n \\ &= 1 + (t_1 + y_1) \sum_{p=0}^{\infty} t_1^p \sum_{n=0}^{\infty} y_1^n \\ &= 1 + \frac{t_1 + y_1}{(1 - t_1)(1 - y_1)} \\ &= \frac{1 + t_1 y_1}{(1 - t_1)(1 - y_1)}. \end{aligned}$$

由此可得

$$H(E; t_1, y_1) = \frac{1 + t_1 y_1}{(1 - t_1)(1 - y_1)}.$$

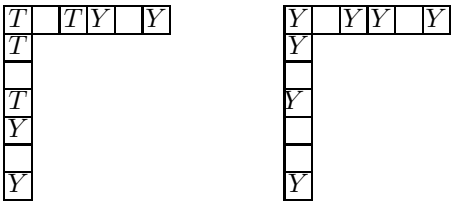
□

类似地，我们可以利用定义 6.7 以及定理 6.9 和 2.7，计算任意 $k, l \in \mathbb{N}$ 的 $H(E; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)$。结果如下。

命题 7.2。设 $k, l \in \mathbb{N}$。则

$$H(E; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) = \frac{1}{2} \left( 1 + \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{l} \frac{(1 + t_i)(1 + y_j)}{(1 - t_i)(1 - y_j)} \right).$$

证明。根据定义 的（$k, l$）-半标准杨表，对于 $\lambda = (p, 1^{n-p})$，我们只有两种类型的杨表：



其中，符号 $T$表示“属于$\mathrm{T}_k$的元素”，符号 $Y$ 表示“属于$\mathrm{Y}_l$的元素”。请记住，

- $\mathrm{T}_k$ 中的元素按行非递减，按列严格递增。
- $\mathrm{Y}_l$ 中的元素按列非递减，按行严格递增。

因此，第一类杨表有 $n \geq 1$ 个方格，且至少包含一个符号 $T$。第二类杨表不包含符号 $T$，并有 $n \geq 0$ 个方格。

考虑一个第一类杨表 $T_\lambda$。$T_\lambda$ 的 $T$ 部分构成一个半标准 $T_\mu$，其元素取自 $\mathrm{T}_k$，其中 $\mu = (q, q^{m-q})$，且 $m \leq n$ 和 $q \leq p$ 满足某些条件。因此，这类杨表的 $T$ 部分与元素取自 $T_k$ 的半标准 $\mu$ 杨表一一对应，其中 $\mu = (q, q^{m-q})$，$m \leq n$ 和 $q \leq p$。对所有 $\mu$，将 $T_\mu$ 中各项相乘后求和，等于舒尔函数之和$S_\mu(\mathrm{T}_k)$。如果杨表 $T_\lambda$ 的臂的 $Y$ 部分由 $y_{j_1}$、……、$y_{j_r}$ 构成，则 $1 \leq j_1 \cdots < j_r \leq l$。类似地，如果 $T_\lambda$ 的杨表的腿的 $Y$ 部分由 $y_{m_1}$、……、$y_{m_s}$ 构成，则 $1 \leq m_1 \cdots \leq m_s \leq l$。因此，当 $T_\lambda$ 遍历所有第一类的（$k-l$）半标准杨表时，所有单项式 $w^{T_\lambda}$ 之和为

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 1}\sum_{q=1}^{m} S_{(q,1^{m-q})}(\mathrm{T}_k)\sum_{c_i\geq 0} y_1^{c_1}\cdots y_l^{c_l}\sum_{j_1<\cdots<j_s} y_{j_1}\cdots y_{j_s} &= \sum_{m\geq 1}\sum_{q=1}^{m} S_{(q,1^{m-q})}(\mathrm{T}_k)\prod_{j=1}^{l}\frac{1}{1-y_j}\sum_{s=0}^{l} e_s(\mathrm{Y}_l)\\ &= \sum_{m\geq 1}\sum_{q=1}^{m} S_{(q,1^{m-q})}(\mathrm{T}_k)\prod_{j=1}^{l}\frac{1+y_j}{1-y_j}\end{aligned}$$

其中

$$e_s(\mathrm{Y}_l) = \sum_{j_1<\cdots<j_s} y_{j_1}\cdots y_{j_s}$$

是第 $s$ 个初等对称函数。根据定理 2.7

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{q=1}^{m} S_{(q,1^{m-q})} = H(E;\mathrm{T}_k) - 1.$$

$H(E;\mathrm{T}_k)$ 的显式形式是众所周知的（见 [20]）。特别地，我们有

$$H(E;\mathrm{T}_k) = \frac{1}{2}\left(1+\prod_{i=1}^{k}\frac{1+t_i}{1-t_i}\right).$$

这样，当 $T_\lambda$ 遍历所有第一类（$k$，$l$）-半标准杨表时，所有单项式 $w^{T_\lambda}$ 之和具有如下形式

$$\frac{1}{2}\left(-1+\prod_{i=1}^{k}\frac{1+t_i}{1-t_i}\right)\prod_{j=1}^{l}\frac{1+y_j}{1-y_j}.$$

现在，我们考虑第二类（$k$，$l$）-半标准杨表 $T_{(p,1^{n-p})}$。显然，转置杨表 $T'_{(p,1^{n-p})}$ 是形状为（$n-p+1$，$1^{p-1}$）的杨表。因此，$T'_{(p,1^{n-p})}$ 中的元素在第一行中不递减，并且在各列中严格递增。因此，$T'_{(p,1^{n-p})}$ 是通常意义下的半标准杨表。对第一类杨表的和中 $T$ 部分应用同样的论证，我们得到所有 $T^{(p,1^{n-p})}$ 上的单项式 $w^{T_\lambda}$ 之和等于

$$1+\sum_{n\geq 1}\sum_{p=1}^{n} S_{(n-p+1,1^{p-1})}(Y_l) = H(E;\mathrm{Y}_l) = \frac{1}{2}\left(1+\prod_{j=1}^{l}\frac{1+y_j}{1-y_j}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}H(E;\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l) &= \frac{1}{2}\left(-1+\prod_{i=1}^{k}\frac{1+t_i}{1-t_i}\right)\prod_{j=1}^{l}\frac{1+y_j}{1-y_j}+\frac{1}{2}\left(1+\prod_{j=1}^{l}\frac{1+y_j}{1-y_j}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\prod_{j=1}^{l}\frac{1+y_j}{1-y_j}+\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\frac{(1+t_i)}{(1-t_i)}\frac{(1+y_j)}{(1-y_j)}+1+\prod_{j=1}^{l}\frac{1+y_j}{1-y_j}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\frac{(1+t_i)}{(1-t_i)}\frac{(1+y_j)}{(1-y_j)}\right)\end{aligned}$$

证明随即得出。 □

推论 7.3. 设 $E$为无限维格拉斯曼代数。考虑由 $E$中的元素构成的 $n\times n$上三角矩阵代数 $UT_n(E)$。那么，对于 $k$, $l\in\mathbb{N}$

$$H(UT_n(E);\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\left[1+\prod_{i=1}^{k}\prod_{s=1}^{l}\frac{(1+t_i)}{(1-t_i)}\frac{(1+y_s)}{(1-y_s)}\right]\right)^{j}\left(\sum_{i=1}^{k}t_i+\sum_{s=1}^{l}y_s-1\right)^{j-1}.$$

证明。由命题 7.2 和推论 6.11，我们有

$$H(UT_n(E);\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\left[1+\prod_{i=1}^{k}\prod_{s=1}^{l}\frac{(1+t_i)}{(1-t_i)}\frac{(1+y_s)}{(1-y_s)}\right]\right)^{j}(S_{(1)}(\mathrm{T}_k;\mathrm{Y}_l)-1)^{j-1}.$$

注意，根据钩施尔函数的定义，可得

$$S_{(1)}(\mathrm{T}_k;\mathrm{Y}_l)=\sum_{i=1}^{k}t_i+\sum_{s=1}^{l}y_s.$$

因此

$$H(UT_n(E);\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\left[1+\prod_{i=1}^{k}\prod_{s=1}^{l}\frac{(1+t_i)}{(1-t_i)}\frac{(1+y_s)}{(1-y_s)}\right]\right)^{j}\left(\sum_{i=1}^{k}t_i+\sum_{s=1}^{l}y_s-1\right)^{j-1}.$$

□

由定理 6.8，存在自然数 $k$和 $l$使得 $\chi(UT_n(E))\subseteq H(k,l)$。由定理 4.3 可得 $k=n$和 $l=2n-1$。因此，我们有如下结果。

命题 7.4。设 $n\geq 1$ 并考虑代数 $UT_n(E)$。余特征序列中具有非零重数 $m_\lambda(UT_n(E))$ 的分拆 $\lambda$ （对应于 $UT_n(E)$）属于钩形 $H(n,2n-1)$。

利用 $UT_n(E)$ 的双希尔伯特级数，我们能够比定理 4.3 中给出的描述更好地描述满足 $\lambda$ with$m_\lambda(UT_n(E))\neq 0$ 的分拆。

定理 7.5。参与乘积 $H(E;\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)^j$ 的钩 Schur 函数 $HS_\pi(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)$ 由属于 $H(j,j)$ 的分拆 $\pi$ 标记。

证明。我们将对 $j$ 使用归纳法证明该断言。对于 $j=1$ ，结论由定理 6.9 和 2.7 得出。

假设该结论对 $j-1\geq 1$ 成立，我们将证明它对 $j$ 也成立。注意，

$$H(E;\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)^j=H(E;\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)^{j-1}H(E;\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l).$$

根据归纳假设，我们有

$$H(E;\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)^{j-1}=\sum\alpha_\lambda HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l),$$

其中 $\lambda\in H(j-1,j-1)$ 且 $\alpha_\lambda\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$。

令 $\lambda\in H(j-1,j-1)$，并考虑乘积

$$HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)HS_{(q,1^{m-q})}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)=\sum\theta_\nu HS_\nu(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l).$$

假设存在一个分拆 $\nu$，使得 $HS_\nu(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)$ 出现在上述乘积的分解中，且 $\nu\notin H(j,j)$。

注意， $\nu\notin H(j,j)$ 蕴含 $\nu_{j+1}\geq j+1$。令 $Q\subseteq\nu/\lambda$ 为由方格 $(j,j)$、$(j,j+1)$、$(j+1,j)$ 和 $(j+1,j+1)$ 构成的正方形，如下图所示:

$$Q=\begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline\ &\ \\\hline\end{array}.$$

当然，如果我们考虑一个形状为 $\nu/\lambda$ 、内容为 $(q,1^{m-q})$ 的半标准杨表，那么 $Q$ 必须按如下方式填入

(i)

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| $a$ | $b$ |

其中 $a$、$b \neq 1$ 和 $a < b$。

(ii)

| | |
|---|---|
| 1 | $a$ |
| $b$ | $c$ |

其中 $a$、$b$、$c \neq 1$、$a < c$ 和 $b < c$。

(iii)

| | |
|---|---|
| $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ |

其中 $a$、$b$、$c$、$d \neq 1$、$a < b < d$ 和 $a < c < d$。注意，这些条件是因为我们处理的是内容 $(q, 1^{m-q})$。

注意，$a$、$b$、$c$、$d$ 必须两两不同。由于我们考虑的是形状为 $\nu/\lambda$、内容为 $(q, 1^{m-q})$ 的半标准杨表，因此从右向左、从上向下读取其条目时，上述情况均不会产生格排列。因此，根据 Littlewood-Richardson 法则，$HS_\nu(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)$ 不能参与下列分解：

$$HS_\lambda(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) HS_{(q,1^{m-q})}(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l),$$

这显然荒谬，因此证明完毕。 □

接下来，我们希望找出参与 $H(UT_n(E); \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)$ 分解且重数非零的分拆。

给定 $n \geq 1$，令 $Q_2 = (n-1)^{n-1}$ 为一个有 $n-1$ 行的正方形杨图。我们将 $H(n,n) * Q_2$ 记为如下得到的斜钩：将 $Q_2$ 的方格 $(1,1)$ 与 $H(n,n)$ 中的 $(n+1, n+1)$ 方格重合，将 $Q_2$ 的方格 $(1,2)$ 与 $H(n,n)$ 中的 $(n+1, n+2)$ 方格重合，依此类推。最后，将 $Q_2$ 的方格 $(n,n)$ 与 $H(n,n)$ 中的 $(2n, 2n)$ 方格重合 $* Q_2$。换言之，若 $\lambda_{n+1} \leq 2n$、$\lambda_{2n+1} \leq n$ 和 $Q_2$，则 $\lambda \in H(n,n) * Q_2$ 变为一个以 $(n+1, n+1)$ 为左上角方格的正方形。

命题 7.6. 若 $m_\lambda(UT_n(E)) \neq 0$，则 $\lambda \in H(n,n) * Q_2$ 且 $|\lambda \cap Q_2| \leq n-1$。

证明。根据推论 7.3，$UT_n(E)$ 的余特征序列中的非零重数 $m_\lambda(UT_n(E))$，来自以下钩施尔函数的无穷和分解：

$$H(E; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)^j \left( \sum_{i=1}^{k} t_i + \sum_{s=1}^{l} y_s \right)^q = H(E; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)^j HS_{(1)}(T_k, Y_l)^q,$$

其中 $j \leq n$ 和 $q \leq n-1$，对某些 $k$、$l$ 成立。根据定理 7.5，参与乘积 $H(E; \mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)^j$ 的钩施尔函数 $HS_\pi(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)$ 由位于 $H(n,n)$ 中的分拆 $\pi$ 所索引，因此 $\pi_{n+1} \leq n$。注意，根据分支规则，乘积 $HS_\pi(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) \cdot HS_{(1)}(T_k, Y_l)$ 给出一系列 $HS_\rho(T, U)$，其中 $\rho$ 的图形由 $\pi$ 的图形添加一个方格得到。因此，$\rho$ 的图形在 $Q_2$ 中至多有一个方格。将 $q$ 乘以 $HS_{(1)}(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)$，我们在 $\pi$ 的图形中最多于 $Q_2$ 添加 $q \leq n-1$ 个方格。这意味着若 $m_\lambda(E) \neq 0$，则 $|\lambda \cap Q_2| \leq n-1$。

如果存在 $\lambda \notin H(n,n) * Q_2$ 使得 $m_\lambda(E) \neq 0$，那么 $\lambda_{n+1} \geq 2n$ 或 $\lambda_{2n} \geq n+1$。

假设 $\lambda_{n+1} \geq 2n$。我们知道存在 $\pi \in H(n,n)$，使得图表 $D_\lambda$ 由图表 $D_\pi$ 添加 $q \leq n-1$ 个方格得到。因此 $\lambda_{n+1} \leq 2n-1$，这是荒谬的。

如果 $\lambda_{2n} \leq n+1$，我们知道存在 $\pi \in H(n,n)$，使得图表 $D_\lambda$ 由图表 $D_\pi$ 添加 $q \leq n-1$ 个方格得到。注意，对于 $i \geq n+1$，情况数的上限为 $\pi_i = n$。因此 $\lambda_{2n} \leq n$，这与假设矛盾，证毕。 □

注 7.7. 注意，前一个命题对满足 $m_\lambda(UT_n(E)) \neq 0$ 的分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ 给出了比定理 4.3 更好的描述。事实上，根据命题 7.6，我们有 $\lambda \in H(n, 2n-1)$，$\lambda_i \leq 2n-1$，当 $n+1 \leq i \leq 2n-1$ 时；而当 $i \geq 2n$ 时，$\lambda_i \leq n$。另一方面，定理 4.3 仅给出 $\lambda \in H(n, 2n-1)$，也就是说，对于 $i \geq n+1$，有 $\lambda_i \leq 2n-1$。

## 8. The $(k,l)$-multiplicity series of $UT_n(E)$

**8.1.** $(k,l)$-重数级数。回顾一下，如果 $A$ 是有限维 PI-代数，那么只需使用足够大的变量集合 T，就能从其希尔伯特级数中获取其余特征序列的所有重数 $m_\lambda(A)$。但是，如果 $A$ 是无限维代数，其重数级数可能不足以找出所有重数 $m_\lambda(A)$。因此，我们希望推广重数级数的概念，定义 $A$ 的 $(k,l)$-重数级数。这个级数包含钩形 $H(k,l)$ 中 $\lambda$ 所对应的重数 $m_\lambda(A)$ 的信息。

如同将分拆与其杨图对应起来一样，我们可以将每个 $\lambda \in H(k,l)$ 分成三部分$\lambda \to (\lambda_0, \mu, \nu)$：其中 $\lambda_0$ 是分拆在 $k \times l$ 矩形（$l^k$）中的部分； $\mu$ 是一个至多有$k$ 个部分的分拆，表示 $\lambda$ 位于 $\lambda_0$右侧的部分； $\nu$ 是一个至多有 $l$ 个部分的分拆，其共轭分拆是 $\lambda$ 位于 $\lambda_0$下方的部分，见图 1。

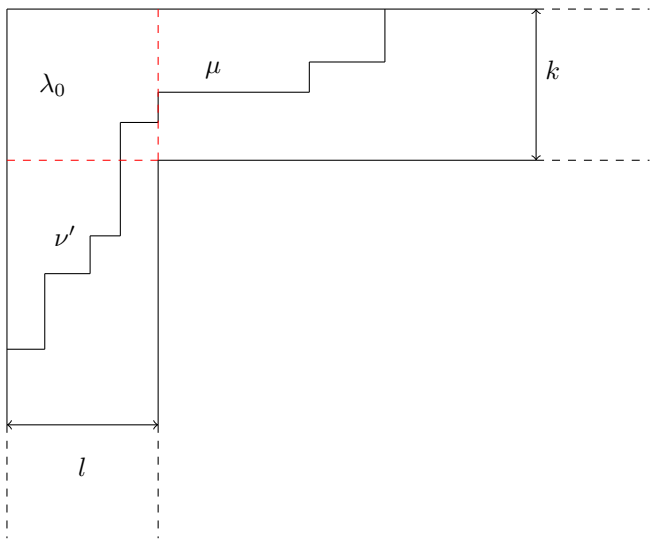



Figure 1. $\lambda_0$、 $\mu$ 和 $\nu$的定义

我们固定两个非负整数 $k$和 $l$，使得 $k+l \geq 1$。设 $\lambda_0$ 为一个分拆，使得 $\lambda_0 \subseteq (l^k)$，并令

$$H_{\lambda_0}(k,l) := \{\lambda \in H(k,l) \mid \lambda \cap (l^k) = \lambda_0\}.$$

注意， $H(k,l) = \bigcup H_{\lambda_0}(k,l)$。令 $\mathrm{T}_k = \{t_1, \ldots, t_k\}$、 $Y = \{y_1, \ldots, y_l\}$和 $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ 为三组$\lambda_0 \subseteq (l^k)$ 交换变量，并考虑代数

$$\mathbb{C}[[\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l]] = \mathbb{C}[[t_1, \ldots, t_k, y_1, \ldots, y_l]]$$

关于 $(k+l)$ 个交换变量的形式幂级数。令

$$\Lambda^{(k,l)} := \{\sum_\lambda m_\lambda HS_\lambda(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) \mid \lambda \in H(k,l), \quad m_\lambda \in \mathbb{C}\}.$$

$$\Lambda^{(k,l,n)} := \{\sum_\lambda m_\lambda HS_\lambda(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) \mid \lambda \in H(k,l;n), \quad m_\lambda \in \mathbb{C}\}.$$

注意，由于钩施尔函数按 Littlewood-Richardson 法则相乘， $\Lambda^{(k,l)}$ 是 $\mathbf{C}[[\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l]]$ 的子代数。集合 $\{HS_\lambda(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) \mid \lambda \in H(k,l;\, n)\}$ 是 $\Lambda^{(k,l,n)}$ 作为向量空间的一组基（见 [9]）。

给定 $g(\mathrm{T}_k,\ \mathrm{Y}_l) = \sum_{\lambda \in H(k,l)} m_\lambda HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\ \mathrm{Y}_l) \in \Lambda^{(k,l)}$，我们有

$$g(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l) = \sum_{\lambda_0 \subseteq (l^k)} \sum_{\lambda \in H_{\lambda_0}(k,l)} m_\lambda HS_\lambda(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l).$$

定义 8.1. 对于

$$g(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)=\sum_{\lambda_0\subseteq(l^k)}\sum_{\lambda\in H_{\lambda_0}(k,l)}m_\lambda HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)\in\Lambda^{(k,l)}$$

我们将 $g$ 的 $(k,l)$-重数级数定义为

$$\widehat{M}(g;\mathrm{V}_k,\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l):=\sum_{\lambda_0\subseteq(l^k)}\sum_{\lambda\in H_{\lambda_0}(k,l)}m_\lambda\mathrm{V}_k^{\lambda_0}\mathrm{T}_k^{\mu}\mathrm{Y}_l^{\nu},$$

其中 $\mathrm{V}_k^{\lambda_0}=v_1^{\lambda_{01}}\cdots v_k^{\lambda_{0k}}$、$\mathrm{T}_k^{\mu}=t_1^{\mu_1}\cdots t_k^{\mu_k}$ 和 $\mathrm{Y}_l^{\nu}=y_1^{\nu_1}\cdots y_l^{\nu_l}$。

显然，$M(g;\mathrm{V}_k,\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)$ 是 $\mathbb{C}[[\mathrm{V}_k,\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l]]$ 的一个元素；后者是以 $(2k+l)$ 个变量构成的形式幂级数代数。注意，$\widehat{M}$ 定义了一个从 $\Lambda^{(k,l)}$ 到 $\mathbb{C}[[\mathrm{V}_k,\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l]]$ 的单射线性映射，并令$\Lambda_{(2k,l)}:=\widehat{M}(\Lambda^{(k,l)})$。

例 8.2。考虑钩形 $H(2,1)$ 和分拆 $\lambda=(2,1^2)$。于是 $\lambda_0=(1,1)$ $\mu=(1)$ 且$\nu=(1)$。由此可得

$$\widehat{M}(HS_\lambda(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_1))=v_1v_2t_1y_1.$$

现在，若考虑钩形 $H(3,1)$ 和同一个分拆，我们得到 $\lambda_0=(1^3)$、$\mu=(1)$ 和 $\nu=(0)$。因此

$$\widehat{M}(HS_\lambda(\mathrm{T}_3,\mathrm{Y}_1))=v_1v_2v_3t_1.$$

定义 8.3. 设 $A$ 是一个 PI-代数。形式级数

$$\widehat{M}(A;\mathrm{V}_k,\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)=\sum_{\lambda_0\subseteq(l^k)}\sum_{\lambda\in H_{(\lambda_0)}(k,l)}m_\lambda(A)\mathrm{V}_k^{\lambda_0}\mathrm{T}_k^{\mu}\mathrm{Y}_l^{\nu}$$

其中 $\lambda\in H(k,l)$ 和 $m_\lambda(A)$ 是 $A$ 的余特征序列中对应于 $\chi_\lambda$ 的重数，称为 $A$ 的 $(k,l)$-重数级数。

当变量集已知时，我们也可以写作 $M(A)$，而不写作 $M(A;\mathrm{V}_k,\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)$。

下一步是求 $UT_n(E)$ 的 $(k,l)$-重数级数的表达式。根据命题 7.2，我们定义线性算子

$$G:\Lambda_{(2k,l)}\to\Lambda_{(2k,l)}$$

使得

$$G(\widehat{M}(g))=\widehat{M}\left(g\cdot\frac{1}{2}\left(1+\prod_{i=1}^{k}\prod_{s=1}^{l}\frac{(1+t_i)(1+y_s)}{(1-t_i)(1-y_s)}\right)\right),$$

其中 $g\in\Lambda^{(k,l)}$。

注记 8.4. 注意，$HS_{(q,1^{m-q})}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)$ 参与了 $HS_{(q)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)HS_{(1)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)$ 和 $HS_{(q-1)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)HS_{1^{(m-q+1)}}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)$ 的分解，后者是钩 Schur 函数之和。因此，$HS_{(q,1^{m-q})}$ 在乘积中的重数为 2

$$\sum_{n\geq0}HS_{(n)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)\sum_{m\geq0}HS_{(1^m)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l).$$

由此可得

$$H(E;\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)=1+\sum_{m\geq1}\sum_{q=1}^{m}HS_{(q,1^{m-q})}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n\geq0}HS_{(n)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)\sum_{m\geq0}HS_{(1^m)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)\right).$$

众所周知，

$$\sum_{n\geq0}HS_{(n)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)=\prod_{i=1}^{k}\prod_{s=1}^{l}\frac{1+y_s}{1-t_i},$$

$$\sum_{m\geq0}HS_{(1^m)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)=\prod_{i=1}^{k}\prod_{s=1}^{l}\frac{1+t_i}{1-y_s}.$$

根据注记 8.4，我们定义以下两个算子 $G_1$： $\Lambda_{(2k,l)} \to \Lambda_{(2k,l)}$ 和 $G_2$： $\Lambda_{(2k,l)} \to \Lambda_{(2k,l)}$，其定义如下：

$$G_1(\widehat{M}(g)) = \widehat{M}\left(g \cdot \prod_{i=1}^{k}\prod_{s=1}^{l}\frac{1+y_s}{1-t_i}\right)$$

and

$$G_2(\widehat{M}(g)) = \widehat{M}\left(g \cdot \prod_{i=1}^{k}\prod_{s=1}^{l}\frac{1+t_i}{1-y_s}\right),$$

其中 $g \in \Lambda^{(k,l)}$。
注意， $G_1 \circ G_2 = G_2 \circ G_1$ 和 $G = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + G_2 \circ G_1)$，其中 $\mathbb{1}$ 是恒等映射。

8.2. $G_1$ 和 $G_2$的作用。现在，我们将描述 $G_1$ 和 $G_2$ 在 $\Lambda_{2k,l}$上的作用。我们先从算子 $G_1$开始。使用第 3 节的记号，我们定义如下线性算子。

定义 8.5。给定一个正整数 $d$。令 $f(\mathrm{T}_d) \in \mathrm{C}[[\mathrm{T}_d]]^{S_d}$，定义共轭杨算子 $\overline{Y}$在 $\mathrm{C}[[\mathrm{V}_d]]$ 上为

$$\overline{Y}(M(f(\mathrm{T}_d)) := M\left(f(\mathrm{T}_d) \cdot \sum_{s=0}^{d} S_{(1^s)}(\mathrm{T}_d)\right).$$

引理 8.6 。考虑钩形 $H(k,l)$，并设 $\lambda \in H(k,l)$ 是一个分拆，使得 $\lambda_0 = (l^k)$。 $n$

$$\widehat{M}\left(HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)HS_{(n)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)\right) = \mathrm{V}_k^{\lambda_0}\sum_{m=0}^{n} M(S_\mu(\mathrm{T}_k)S_{(m)}(\mathrm{T}_k))M(S_\nu(\mathrm{Y}_l)S_{(1^{n-m})}(\mathrm{Y}_l)) \tag{7}$$

证明。回顾一下， $HS_\beta(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l) = 0$ 当且仅当 $\beta \notin H(k,l)$。由于 $\lambda_0 = (l^k)$，若 $HS_\beta(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)$ 参与了.....的分解

$$HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)HS_{(n)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l),$$

那么 $\beta_0 = \beta \cap (l^k) = (l^k) = \lambda_0$。因此，将杨氏规则应用于分拆 $\lambda$，等价于将杨氏规则应用于 $\mu$ 和 $\nu$。所以，我们有

$$\begin{aligned}\widehat{M}\left(HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)HS_{(n)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)\right) &= v_1^l\cdots v_k^l\sum_{m=0}^{n} M(S_\mu(\mathrm{T}_k)S_{(m)}(\mathrm{T}_k))M(S_\nu(\mathrm{Y}_l)S_{(1^{n-m})}(\mathrm{Y}_l))\\ &= \mathrm{V}_k^{\lambda_0}\sum_{m=0}^{n} M(S_\mu(\mathrm{T}_k)S_{(m)}(\mathrm{T}_k))M(S_\nu(\mathrm{Y}_l)S_{(1^{n-m})}(\mathrm{Y}_l))\end{aligned}$$

□

例 8.7。考虑钩形 $H(2,3)$ 和分拆 $\lambda = (3,3,2,1) \vdash 9$。注意， $\lambda \in H(2,3)$,$\lambda_0 = (3,3)$ $\mu = (0)$ 和 $\nu = (2,1)$。我们要计算

$$\widehat{M}\left(HS_\lambda(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\cdot HS_{(3)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\right).$$

首先，我们将利用杨氏规则计算分拆 $\lambda$ 与 $(3)$ 的张量积的 $(2,3)$-重数级数。我们得到

$$\begin{aligned}HS_\lambda(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\cdot HS_{(3)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3) =& HS_{(6,3,2,1)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3) + HS_{(5,3,3,1)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\\ &+ HS_{(5,3,2,2)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3) + HS_{(5,3,2,1,1)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3) + HS_{(4,3,3,2)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\\ &+ HS_{(4,3,3,3,1)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3) + HS_{(4,3,2,2,1)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3) + HS_{(3,3,3,2,1)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3).\end{aligned} \tag{8}$$

Then

$$\begin{aligned}\widehat{M}\left(HS_\lambda(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\cdot HS_{(3)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\right) &= v_1^3v_2^3(y_1^3y_2^2y_3 + t_1y_1^3y_2^2 + t_1y_1^2y_2^2y_3\\ &\quad + t_1y_1^3y_1y_3 + t_1^2y_1^3y_2 + t_1^2y_1^2y_2^2 + t_1^2y_1^2y_2y_3 + t_1^3y_1^2y_2).\end{aligned}$$

现在，我们将使用本节开头介绍的算法和等式（7）来计算 $\widehat{M}\left(HS_\lambda(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\cdot HS_{(3)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\right)$。注意，

- $S_\mu(\mathrm{T}_2)S_{(0)}(\mathrm{T}_2) = 1$, $S_\nu(\mathrm{Y}_3)S_{(1^3)}(\mathrm{Y}_3) = S_{(3,2,1)}(\mathrm{Y}_3)$;

- $S_\mu(\mathrm{T}_2)S_{(1)}(\mathrm{T}_2)=S_{(1)}(\mathrm{T}_2)$, $S_\nu(\mathrm{Y}_3)S_{(1^2)}(\mathrm{Y}_3)=S_{(3,2)}(\mathrm{Y}_3)+S_{(2,2,1)}(\mathrm{Y}_3)+S_{(3,1,1)}(\mathrm{Y}_3)$;
- $S_\mu(\mathrm{T}_2)S_{(2)}(\mathrm{T}_2)=S_{(2)}(\mathrm{T}_2)$, $S_\nu(\mathrm{Y}_3)S_{(1)}(\mathrm{Y}_3)=S_{(3,1)}(\mathrm{Y}_3)+S_{(2,2)}(\mathrm{Y}_3)+S_{(2,1,1)}(\mathrm{Y}_3)$;
- $S_\mu(\mathrm{T}_2)S_{(3)}(\mathrm{T}_2)=S_{(3)}(\mathrm{T}_2)$, $S_\nu(\mathrm{Y}_3)S_{(0)}(\mathrm{Y}_3)=S_\nu(\mathrm{Y}_3)$.

因此

$$\begin{aligned}\widehat{M}\left(HS_\lambda(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\cdot HS_{(3)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)\right) &= v_1^3v_2^3(y_1^3y_2^2y_3+t_1y_1^3y_2^2+t_1y_1^2y_2^2y_3\\ &\quad +t_1y_1^3y_1y_3+t_1^2y_1^3y_2+t_1^2y_1^2y_2^2+t_1^2y_1^2y_2y_3+t_1^3y_1^2y_2),\end{aligned}$$

引理 8.8. 设 $\lambda$ 是钩形 $H(k,l)$ 中的一个分拆，且满足 $\lambda_0\neq(l^k)$，则

$$\widehat{M}\left(HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)HS_{(n)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)\right)=\sum_{\beta_0\in\Pi}V_k^{\beta_0}\sum_{p=0}^{n-|D_{\beta_0}\setminus D_{\lambda_0}|}M\left(S_\mu S_{(p)};\mathrm{T}_{r_{\beta_0}}\right)M\left(S_\nu S_{(1^{n-|D_{\beta_0}\setminus D_{\lambda_0}|-p})};\mathrm{Y}_c\right),\tag{9}$$

其中 $\Pi=\{\beta_0\subseteq(l^k)|\beta$ 参与了 $HS_\lambda HS_{(n)}\}$的分解， $r_{\beta_0}$ 是 $\beta_0$中大小为 $l$ 的行数，而 $c$ 是 $\lambda_0$ 中大小为 $k$ 的列数。

证明. 注意，本情形与引理 8.6 的区别在于，若 $\beta\in H(k,l)$ 参与了

$$HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)HS_{(n)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)$$

作为钩 Schur 函数之和的分解，则 $\beta_0$ 不一定是 $\lambda_0$。考虑集合 $\Pi$，并注意到若 $\lambda_1\geq l$ 或$\lambda_1'\geq k$，则 $\lambda_0\in\Pi$。可能的 $\beta_0$ 是这样的分拆：将分拆 $\lambda_0$ 和 $(m)$（其中某个 $0\leq m\leq n$ 满足 $D_{\beta_0}\subseteq D_{(l^k)}$）应用杨氏规则后，其图形由 $\lambda_0$ 的图形得到。

现在，我们将 $\lambda$ 识别为三元组（$\lambda_0$， $\mu$， $\nu$）。假设 $D_{\beta_0}$ 是通过向 $D_{\lambda_0}$ 添加 $m$ 个方格得到的。注意，$m=|D_{\beta_0}\setminus D_{\lambda_0}|$，也就是说， $m$ 是斜图 $D_{\beta_0}\setminus D_{\lambda_0}$ 中方格的数量。如果我们想知道哪些分拆 $\beta$ 满足 $\beta\cap(l^k)=\beta_0$，就必须使用杨氏规则，分别向图形 $D_\mu$ 和 $D_\nu$ 中总共添加 $n-m$ 个方格。考察数字 $r_{\beta_0}$ 和 $c$，可以看到我们最多可以向图形 $D_\mu$ 添加方格，直到第 $r_{\beta_0}$ 行。对于图形 $D_\nu$，则只允许添加方格，直到第 $c$ 行。因此，参与分解的分拆 $\beta\in H(k,l)$

$$\widehat{M}(HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)HS_{(n)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l))$$

使得 $\beta\cap(l^k)=\beta_0$ 由以下表达式确定

$$V_k^{\beta_0}\sum_{p=0}^{n-|D_{\beta_0}\setminus D_{\lambda_0}|}M\left(S_\mu S_{(p)};\mathrm{T}_{r_{\beta_{0,\mathrm{m}}}}\right)M\left(S_\nu S_{(1^{n-|D_{\beta_0}\setminus D_{\lambda_0}|-p})};\mathrm{Y}_c\right).$$

由此可得

$$\widehat{M}\left(HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)HS_{(n)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)\right)=\sum_{\beta_0\in\Pi}V_k^{\beta_0}\sum_{p=0}^{n-|D_{\beta_0}\setminus D_{\lambda_0}|}M\left(S_\mu S_{(p)};\mathrm{T}_{r_{\beta_0}}\right)M\left(S_\nu S_{(1^{n-|D_{\beta_0}\setminus D_{\lambda_0}|-p})};\mathrm{Y}_c\right).$$

□

注意，如果 $r_{\beta_0}=0$ 或 $c=0$，则有 $\emptyset=Y_0=T_0$。因此， $1=Y(1,\mathrm{T}_0)=\overline{Y}(1,\mathrm{Y}_0)$。

例 8.9。考虑 $\lambda=(5,1,1)\in H(2,2)$。在此情形下， $\lambda_0=(2,1)$、 $\mu=(3)$ 和 $\nu=(1)$。若要计算 $M(HS_\lambda(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_2)HS_{(2)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_2))$，首先注意，如果 $HS_\beta(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_2)$ 参与了以下对象的分解

$$HS_\lambda(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_2)HS_{(2)}(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_2)$$

作为钩施尔函数之和，则 $\beta\in H(2,2)$、 $\beta\vdash 9$ 以及 $\beta_0=\lambda_0$ 或 $\beta_{0,\ 1}=(2,2)$。注意， $\beta_0$ 的第二种可能性是通过对分拆 $\lambda_0$ 和 $(1)$ 应用杨氏规则得到的。对于 $\beta_0=(2,1)$，我们有

- $S_\mu(\mathrm{T}_1)S_{(2)}(\mathrm{T}_1)=S_{(5)}(\mathrm{T}_1)$， $S_\nu(\mathrm{Y}_1)S_{(0)}(\mathrm{Y}_1)=S_\nu(\mathrm{Y}_1)$,
- $S_\mu(\mathrm{T}_1)S_{(1)}(\mathrm{T}_1)=S_{(4)}(\mathrm{T}_1)$， $S_\nu(\mathrm{Y}_1)S_{(1)}(\mathrm{Y}_1)=S_{(2)}(\mathrm{Y}_1)$,
- $S_\mu(\mathrm{T}_1)S_{(0)}(\mathrm{T}_1)=S_\mu(\mathrm{T}_1)$， $S_\nu(\mathrm{Y}_1)S_{(1^2)}(\mathrm{Y}_1)=0$.

对于 $\beta_0=(2,2)$，我们有

- $S_\mu(\mathrm{T}_2)S_{(1)}(\mathrm{T}_2)=S_{(4)}(\mathrm{T}_2)+S_{(3,1)}(\mathrm{T}_2)$, $S_\nu(\mathrm{Y}_1)S_{(0)}(\mathrm{Y}_1)=S_\nu(\mathrm{Y}_1)$,

- $S_\mu(\mathrm{T}_2)S_{(0)}(\mathrm{T}_2) = S_\mu(\mathrm{T}_2)$, $S_\nu(\mathrm{Y}_1)S_{(1)}(\mathrm{Y}_1) = S_{(2)}(\mathrm{Y}_1)$.

Then

$$\widehat{M}\left(S_\lambda(\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_2)\right) \quad = \quad v_1^2v_2(t_1^5y_1+t_1^4y_1^2)+v_1^2v_2^2(t_1^4y_1+t_1^3t_2y_1+t_1^3y_1^2).$$

利用引理 8.6、8.2 以及 $M$ 和 $M$的线性性，我们得到以下结果

定理 8.10。设 $\lambda$ 是 $H(k,l)$ 中的一个分拆。 $G_1$ 在 $M(HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l))$ 上的作用可描述如下

(i) 若 $\lambda_0 = (l^k)$，则

$$G_1(\widehat{M}(HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l))) = \mathrm{V}_k^{\lambda_0}Y(M(S_\nu;T_k))\overline{Y}(M(S_\mu;\mathrm{Y}_l)).$$

(ii) 若 $\lambda_0 \neq (l^k)$，则

$$G_1(\widehat{M}(HS_\lambda(\mathrm{T}_k;\mathrm{Y}_l))) = \sum_{\beta_0\in\Omega}\mathrm{V}_k^{\beta_0}Y(M(S_\mu;\mathrm{T}_{r_{\beta_0}}))\overline{Y}(M(S_\nu);\mathrm{Y}_c)),$$

其中，$\Omega = \{\beta_0 \subseteq (l^k) \mid D_{\beta_0}$ 由 $D_{\lambda_0}$ 根据杨氏规则（情形 1）$\}$得到， $r_{\beta_0}$ 是大小为 $l$ 的 $D_{\beta_0}$ 图表的行数， $c$ 是大小为 $k$ 的 $D_{\lambda_0}$ 图表的列数。

现在，我们来研究 $G_2$。我们的目标是用上文定义的算子 $Y$ 和 $\overline{Y}$ 来描述 $G_2$ .
注意到 $(n)$ 和 $(1^n)$ 是共轭分拆。因此，由定理 8.10 可得以下结果。

推论 8.11. 设 $\lambda$ 是 $H(k,l)$ 中的一个分拆。 $G_2$ 在 $M(HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l))$ 上的作用可描述如下:

(i) 若 $\lambda_0 = (l^k)$，则

$$G_2(\widehat{M}(HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l))) = \mathrm{V}_k^{\lambda_0}\overline{Y}(M(S_\nu;T_k))Y(M(S_\mu;\mathrm{Y}_l))$$

(ii) 若 $\lambda_0 \neq (l^k)$，则

$$G_2(\widehat{M}(HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l))) = \sum_{\beta_0\in\Omega'}\mathrm{V}_k^{\beta_0}\overline{Y}(M(S_\mu;\mathrm{T}_r))Y(M(S_\nu);\mathrm{Y}_{c_{\beta_0}})),$$

其中，$\Omega' = \{\beta_0 \subseteq (l^k) \mid D_{\beta_0}$ 由 $D_{\lambda_0}$ 根据杨氏规则（情形 2）$\}$ 得到； $r$ 是大小为 $l$ 的 $D_{\lambda_0}$ 图形的行数， $c_{\beta_0}$ 是大小为 $k$ 的 $D_{\beta_0}$ 图形的列数。

以下定理是 [12] 中推论 13 的类比。我们给出 $UT_n(E)$ 的 $(k,l)$-重数级数的表达式。

定理 8.12。设 $E$ 为无限维格拉斯曼代数。则

$$\widehat{M}(UT_n(E);\mathrm{V}_k,\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{\lambda\vdash q}(-1)^{j-q-1}\binom{n}{j}\binom{j-1}{q}d_\lambda G^j(\mathrm{V}_k^{\lambda_0}\mathrm{T}_k^\mu\mathrm{Y}_l^\nu),$$

其中 $d_\lambda$ 是 $S_\lambda$-特征 $\chi_\lambda$ 的次数，并且

$$T_k^\mu Y_l^\nu = t_1^{\mu_1}\cdots t_k^{\mu_k}y_1^{\nu_1}\cdots y_l^{\nu_l}$$

对于 $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_k)$、 $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_l)$，它们是矩形 $(l^k)$之外的分拆。

证明。将推论 7.3 中 $H(UT_n(E);\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)$ 的表达式展开，得到 :

$$H(UT_n(E);\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\left[1+\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\frac{(1+t_i)}{(1-t_i)}\frac{(1+y_j)}{(1-y_j)}\right]\right)^j\sum_{q=0}^{j-1}(-1)^{j-1-q}\binom{j-1}{q}\left(\sum_{i=1}^{l}t_i+\sum_{s=1}^{l}y_s\right)^q.$$

由于

$$\left(\sum_{i=1}^{l}t_i+\sum_{s=1}^{l}y_s\right)^q = HS_{(1)}(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l)^q = \sum_{\lambda\vdash q}d_\lambda HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l),$$

其中， $d_\lambda$ 是 $S_{|\lambda|}$-特征 $\chi_\lambda$的次数，因此可得

$$H(UT_n(E);\mathrm{T}k,\mathrm{Y}_l) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{\lambda\vdash q}(-1)^{j-q-1}\binom{n}{j}\binom{j-1}{q}d_\lambda\left(\frac{1}{2}\left[1+\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\frac{(1+t_i)}{(1-t_i)}\frac{(1+y_j)}{(1-y_j)}\right]\right)^j HS_\lambda(\mathrm{T}_k,\mathrm{Y}_l).$$

回顾一下，我们可以将 $\lambda \in H(k,l)$与分拆 $\lambda_0, \mu, \nu$对应起来（见图1），因此

$$G^j(\mathrm{V}_k^{\lambda_0}\mathrm{T}_k^{\mu}\mathrm{Y}_l^{\nu}) = G^j(M(HS_\lambda(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l))) = M\left(\left(\frac{1}{2}\left[1+\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\frac{(1+t_i)}{(1-t_i)}\frac{(1+y_j)}{(1-y_j)}\right]\right)^j \cdot HS_\lambda(\mathrm{T}_k, \mathrm{Y}_l)\right).$$

因此

$$\widehat{M}(UT_n(E); V_k, T_k, Y_l) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=0}^{j-1}\sum_{\lambda\vdash q}(-1)^{j-q-1}\binom{n}{j}\binom{j-1}{q}d_\lambda G^j(V_k^{\lambda_0}T_k^{\mu}U_l^{\nu}),$$

证明到此结束。 □

## 9. Applications of the $(k,l)$-multiplicity series of $UT_n(E)$

定理 8.10、8.11 和 8.12 给出了一个算法，用于计算 $UT_n(E)$ 的余特征序列中的重数。为了展示该算法的工作方式，我们研究一些具体情形。

定理 9.1。 $E$ 的 (1, 1)-重数级数为

$$\widehat{M}(E; v, t, y) = 1 + \frac{v}{(1-t)(1-y)}.$$

证明。利用定理 8.12，我们有 $M(E; v, t, y) = G(1)$。由定理 8.2 得

$$G_1(1) = G_1(\widehat{M}(HS_{\lambda_0}); v, t, y) = Y(1; \mathrm{T}_0)\overline{Y}(1; \mathrm{Y}_0) + vY(1; \mathrm{T}_1)\overline{Y}(1; \mathrm{Y}_0) = 1 + \frac{v}{1-t}.$$

现在，我们来计算 $G_2(1)$ 和 $G_2\left(\frac{v}{1-t}\right)$。利用推论 8.11，我们得到

$$G_2(1) = G_2(\widehat{M}(HS_{(0)}); v, t, y) = \overline{Y}(1, \mathrm{T}_0)Y(1, \mathrm{Y}_0) + v\overline{Y}(1, \mathrm{T}_0)Y(1, \mathrm{Y}_1) = 1 + \frac{v}{1-y}$$

$$G_2\left(\frac{v}{1-t}\right) = v\overline{Y}\left(\frac{1}{1-t}; \mathrm{T}_1\right)Y(1; \mathrm{Y}_1) = \frac{v}{(1-t)(1-y)} + \frac{vt}{(1-t)(1-y)}.$$

因此

$$G(1) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + G_2 \circ G_1(1)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 1 + \frac{2v}{(1-t)(1-y)}\right) = 1 + \frac{v}{(1-t)(1-y)},$$

如所求。 □

注意，根据定理 7.5， $E$ 的 (1, 1)-重数级数包含了 $E$ 的余特征序列中各重数的全部信息。事实上：

$$\frac{v}{(1-t)(1-y)} = \sum_{m,n\geq 0} vt^n y^m,$$

然后，将其次数为 $m$ 的齐次分量展开，我们得到

$$\sum_{q=1}^{m} vt^{q-1}y^{m-q}$$

这给出了定理 2.7 中 $E$ 的第 $m$ 个余特征的确切重数 .

根据定理 7.4，我们有 $\chi(UT_2(E)) \subseteq H(2, 3)$。因此，我们希望计算 $UT_2(E)$ 的 (2, 3)-重数级数。我们需要以下技术引理。

引理 9.2。考虑钩形 $H(2, 3)$ 和变量集合 $\{v_1, v_2, t_1, t_2, y_1, y_2, y_3\}$。那么 :

(i) $G(1, \mathrm{V}_2, \mathrm{T}_2, \mathrm{Y}_3) = 1 + v_1 + v_1^2 + \frac{v_1v_2}{1-y_1} + \frac{v_1^2v_2}{1-y_1} + \frac{v_1^3}{1-t_1} + \frac{v_1^3v_2}{(1-t_1)(1-y_1)}$;

$$
\begin{aligned}
\text{(ii) } G^2(1) &= 1+2v_1+3v_1^2+v_1v_2\left(\frac{2}{1-y_1}+\frac{1}{(1-y_1)^2}\right)\\
&+v_1^2v_2\left(\frac{4}{1-y_1}+\frac{1+y_1}{(1-y_1)^2}+\frac{1}{(1-y_1)^2}\right)\\
&+v_1^3\left(\frac{3}{1-t_1}+\frac{1}{(1-t_1)^2}\right)+v_1^3v_2\left(\frac{5}{(1-t_1)(1-y_1)}\right.\\
&\left.+\frac{2(1+y_1)}{(1-t_1)(1-y_1)^2}+\frac{1+t_1}{(1-t_1)^2(1-y_1)}+\frac{1+t_1y_1}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2}\right)\\
&+v_1^2v_2^2\left(\frac{2}{1-y_1}+\frac{2(1+y_1)}{(1-y_1)^2}+\frac{4y_1y_2}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)\\
&+v_1^3v_2^2\left(\frac{3}{(1-t_1)(1-y_1)}+\frac{3(1+y_1)}{(1-t_1)(1-y_1)^2}\right.\\
&+\frac{6y_1y_2}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}+\frac{1+t_1}{(1-t_1)^2(1-y_1)}\\
&\left.+\frac{(1+t_1)(1+y_1)}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2}+\frac{2(1+t_1)y_1y_2}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)\\
&+v_1^3v_2^3\left(\frac{1}{(1-t_1)(1-y_1)}+\frac{1+y_1}{(1-y_1)^2(1+t_1)}\right.\\
&+\frac{2y_1y_2}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}+\frac{1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)}\\
&\left.+\frac{(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)(1+y_1)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2}+\frac{2(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)y_1y_2}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(iii) } G^2(v_1) &= v_1+2v_1^2+v_1v_2\left(\frac{1}{1-y_1}+\frac{1}{(1-y_1)^2}\right)\\
&+v_1^2v_2\left(\frac{3}{1-y_1}+\frac{1+y_1}{(1-y_1)^2}+\frac{2}{(1-y_1)^2}\right)\\
&+v_1^3v_2\left(\frac{4}{(1-t_1)(1-y_1)}+\frac{3(1+y_1)}{(1-t_1)(1-y_1)^2}+\frac{2(1+t_1y_1)}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2}\right.\\
&\left.+\frac{1+t_1}{(1-t_1)^2(1-y_1)}\right)+v_1^3\left(\frac{2}{1-t_1}+\frac{1}{(1-t_1^2)}\right)\\
&+v_1^2v_2^2\left(\frac{2}{1-y_1}+\frac{3(1+y_1)}{(1-y_1)^2}+\frac{6y_1y_2}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}+\frac{(1+y_1y_2)}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)\\
&+v_1^3v_2^2\left(\frac{3}{(1-t_1)(1-y_1)}+\frac{5(1+y_1)}{(1-t_1)(1-y_1)^2}+\frac{10y_1y_2}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right.\\
&+\frac{2(1+t_1)(1+y_1)}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2}+\frac{4(1+t_1)y_1y_2}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\\
&\left.+\frac{1+y_1y_2+2t_1y_1y_2+t_1y_1-t_1y_1^2y_2}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}+\frac{1+3y_1y_2-y_1^2y_2+y_1}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)\\
&+v_1^3v_2^3\left(\frac{1}{(1-t_1)(1-y_1)}+\frac{2(1+y_1)}{(1-t_1)(1-y_1)^2}\right.\\
&+\frac{4y_1y_2}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}+\frac{(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)}\\
&+\frac{2(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)(1+y_1)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2}+\frac{4(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)y_1y_2}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\\
&\left.+\frac{(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)(1-y_1^2y_2+3y_1y_2+y_1+2y_1y_2y_3)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{(1-y_1^2y_2+3y_1y_2+y_1+2y_1y_2y_3)}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\Bigg).$$

证明。(i) 由 $G$ 的定义可直接得到该结果。

(ii) 根据上一项以及 $G$ 的线性性，我们有

$$\begin{aligned}G^2(1)=&G(1)+G(v_1)+G(v_1^2)+G\left(\frac{v_1v_2}{1-y_1}\right)+G\left(\frac{v_1^2v_2}{1-y_1}\right)\\&+G\left(\frac{v_1^3}{1-t_1}\right)+G\left(\frac{v_1^3v_2}{(1-t_1)(1-y_1)}\right).\end{aligned}\tag{10}$$

我们将分别计算上述等式右侧的各部分。先计算 $G(v_1)$。我们先计算 $G_1(v_1)$。由定理 8.10，得到

$$G_1(v_1)=v_1+v_1^2+v_1v_2+v_1^2v_2+\frac{v_1^3v_2}{1-t_1}+\frac{v_1^3}{1-t_1}.$$

由此可得

$$G_2(G_1(v_1))=G_2(v_1)+G_2(v_1^2)+G(v_1v_2)+G_2(v_1^2v_2)+G_2\left(\frac{v_1^3v_2}{1-t_1}\right)+G_2\left(\frac{v_1^3}{1-t_1}\right).$$

根据推论 8.11，我们有

$$\begin{aligned}G_2(G_1(v_1))=&v_1+2v_1^2+\frac{2v_1v_2}{1-y_1}+\frac{2v_1^3}{1-t_1}+\frac{4v_1^2v_2}{1-y_1}+\frac{4v_1^3v_2}{(1-t_1)(1-y_1)}\\&+\frac{2v_1^2v_2^2}{1-y_1}+\frac{2v_1^3v_2^2}{(1-t_1)(1-y_1)}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}G(v_1)=&v_1+v_1^2+\frac{v_1v_2}{1-y_1}+\frac{2v_1^2v_2}{1-y_1}+\frac{v_1^3}{1-t_1}\\&+\frac{2v_1^3v_2}{(1-t_1)(1-y_1)}+\frac{v_1^2v_2^2}{1-y_1}+\frac{v_1^3v_2^2}{(1-t_1)(1-y_1)}.\end{aligned}\tag{11}$$

为了计算剩余部分，我们将大量运用定理 8.10 和推论 8.11。由于计算过多，我们只写出最终结果，如下所示。

$$\begin{aligned}G(v_1^2)=&v_1^2+\frac{v_1^2v_2}{1-y_1}+\frac{v_1^3}{1-t_1}+\frac{2v_1^3v_2}{(1-t_1)(1-y_1)}+\frac{v_1^2v_2^2}{1-y_1}\\&+\frac{2v_1^3v_2^2}{(1-t_1)(1-y_1)}+\frac{v_1^3v_2^3}{(1-t_1)(1-y_1)};\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}G\left(\frac{v_1v_2}{1-y_1}\right)=&\frac{v_1v_2}{(1-y_1)^2}+v_1^2v_2\left(\frac{1+y_1}{(1-y_1)^2}\right)+v_1^2v_2^2\left(\frac{1+y_1}{(1-y_1)^2}+\frac{2y_1y_2}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)\\&+v_1^3v_2\left(\frac{1+y_1}{(1-t_1)(1-y_1)^2}\right)+v_1^3v_2^2\left(\frac{1+y_1}{(1-t_1)(1-y_1)^2}+\frac{2y_1y_2}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G\left(\frac{v_1^3}{1-t_1}\right)=&\frac{v_1^3}{(1-t_1)^2}+v_1^3v_2\left(\frac{1+t_1}{(1-t_1)^2(1-y_1)}\right)+v_1^3v_2^2\left(\frac{1+t_1}{(1-t_1)^2(1-y_1)}\right)\\&+v_1^3v_2^3\left(\frac{1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G\left(\frac{v_1^2v_2}{1-y_1}\right)=&\frac{v_1^2v_2}{(1-y_1)^2}+v_1^3v_2\left(\frac{1+y_1}{(1-t_1)(1-y_1)^2}\right)\\&+v_1^2v_2^2\left(\frac{1+y_1}{(1-y_1)^2}+\frac{2y_1y_2}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)\\&+v_1^3v_2^2\left(\frac{2(1+y_1)}{(1-t_1)(1-y_1)^2}+\frac{4y_1y_2}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)\\&+v_1^3v_2^3\left(\frac{(1+y_1)}{(1-t_1)(1-y_1)^2}+\frac{2y_1y_2}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G\left(\frac{v_1^3v_2}{(1-t_1)(1-y_1)}\right)=&v_1^3v_2\left(\frac{1+t_1y_1}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2}\right)\\&+v_1^3v_2^2\left(\frac{(1+t_1)(1+y_1)}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2}+\frac{2(1+t_1)y_1y_2}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)\\&+v_1^3v_2^3\left(\frac{(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)(1+y_1)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2}+\frac{2(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)y_1y_2}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right).\end{aligned}$$

由等式 (10) 和前面的计算，我们得到所需的结果。(iii) 由等式 (11)，我们有

$$\begin{aligned}G^2(v_1)=&G(v_1)+G(v_1^2)+G\left(\frac{v_1v_2}{1-y_1}\right)+2G\left(\frac{v_1^2v_2}{1-y_1}\right)+G\left(\frac{v_1^3}{1-t_1}\right)\\&+2G\left(\frac{v_1^3v_2}{(1-t_1)(1-y_1)}\right)+G\left(\frac{v_1^2v_2^2}{1-y_1}\right)+G\left(\frac{v_1^3v_2^2}{(1-t_1)(1-y_1)}\right).\end{aligned}\tag{13}$$

只需计算 $G\left(\frac{v_1^2v_2^2}{1-y_1}\right)$ 和 $G\left(\frac{v_1^3v_2^2}{(1-t_1)(1-y_1)}\right)$，因为其他项已在第 (ii) 项中计算过。

由定理 8.10 和推论 8.11 可得以下等式。

$$\begin{aligned}G\left(\frac{v_1^2v_2^2}{1-y_1}\right)=&v_1^2v_2^2\left(\frac{1+y_1y_2}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)+v_1^3v_2^2\left(\frac{1+3y_1y_2-y_1^2y_2+y_1}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)(1-t_1)}\right)\\&+v_1^3v_2^3\left(\frac{1+3y_1y_2-y_1^2y_2+y_1+2y_1y_2y_3}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)(1-t_1)}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G\left(\frac{v_1^3v_2^2}{(1-t_1)(1-y_1)}\right)=&v_1^3v_2^2\left(\frac{1+y_1y_2+2t_1y_1y_2+t_1y_1-t_1y_1^2y_2}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)(1-t_1)^2}\right)\\&+v_1^3v_2^3\left(\frac{(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)(1+3y_1y_2-y_1^2y_2+y_1+2y_1y_2y_3)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right).\end{aligned}$$

现在 t 该结果由等式 (13) 和前面的计算综合得出。 □

定理 9.3。 $UT_2(E)$ 的 (2, 3)-重数级数为

$$\begin{aligned}\widehat{M}(UT_2(E);\mathrm{V}_2,\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3) =& 1+v_1+v_1^2+\frac{v_1v_2}{1-y_1}+\frac{v_1^3}{1-t_1}+\frac{v_1^2v_2(2-y_1)}{(1-y_1)^2}\\ &+v_1^3v_2\left(\frac{1}{(1-t_1)(1-y_1)}+\frac{1+y_1}{(1-t_1)(1-y_1)^2}+\frac{1+t_1y_1}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2}\right)\\ &+v_1^2v_2^2\left(\frac{2+y_1}{(1-y_1)^2}+\frac{4y_1y_2}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)\\ &+v_1^3v_2^2\left(\frac{2(1+y_1)}{(1-t_1)(1-y_1)^2}+\frac{4y_1y_2}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right.\\ &+\frac{(1+t_1)(1+y_1)}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2}+\frac{2(1+t_1)y_1y_2}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\\ &\left.+\frac{1+y_1y_2+2t_1y_1y_2+t_1y_1-t_1y_1^2y_2}{(1-t_1)^2(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}+\frac{1+3y_1y_2-y_1^2y_2+y_1}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)\\ &+v_1^3v_2^3\left(\frac{(1+y_1)}{(1-t_1)(1-y_1)^2}+\frac{2y_1y_2}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right.\\ &+\frac{(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)(1+y_1)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2}+\frac{2(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)y_1y_2}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\\ &+\frac{(1+t_1+t_1t_2-t_1^2t_2)(1-y_1^2y_2+3y_1y_2+y_1+2y_1y_2y_3)}{(1-t_1)^2(1-t_1t_2)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\\ &\left.+\frac{(1-y_1^2y_2+3y_1y_2+y_1+2y_1y_2y_3)}{(1-t_1)(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right).\end{aligned}$$

证明。命题 7.4 蕴含 $\chi(UT_2(E)) \subseteq H(2,3)$。因此，我们可以使用变量集合$\{v_1,v_2,t_1,t_2,y_1,y_2,y_3\}$。由定理 8.12 可得

$$\widehat{M}(UT_2(E);\mathrm{V}_2,\mathrm{T}_2,\mathrm{Y}_3)=2G(1)-G^2(1)+G^2(v_1). \tag{14}$$

现在，由等式 (14) 和引理 9.2 即可得到结果。 □

下一个结果由 Centrone 在 [14] 中证明。现在，我们将利用 $UT_2(E)$ 的 (2, 3)-重数级数来证明该结果。

推论 9.4。设 $\lambda$ 为一个分拆。 $UT_2(E)$ 的余特征序列中的重数 $m_\lambda$ 由以下表达式给出：

$$\begin{array}{cc} f & g\quad p \\ m_\lambda=\left\{\begin{array}{ll} 1 & if\quad \lambda=(n),\\ 1 & if\quad \lambda=(1^m),\ m>1,\\ m+1 & if\quad \lambda=(2,1^m),\ m\geq 1,\\ 3m+2 & if\quad \lambda=(2,2,1^m),\ m\geq 0,\\ 4(m+1) & if\quad \lambda=(2,2,2^s,1^m),\ m\geq 0,\ s>0,\\ 2nm-3m-n+3 & if\quad \lambda=(n,1^m),\ n\geq 3,\ m\geq 1,\\ 6m(n-3)+9m+3(n-3)+5 & if\quad \lambda=(n,2,1^m),\ n\geq 3,\ m\geq 0,\\ (8(n-3)+12)(m+1) & if\quad \lambda=(n,2,2^s,1^m),\ n\geq 3,\ s\geq 1,\ m\geq 0,\\ 4(n_1-n_2+1)(2m+1) & if\quad \lambda=(n_1,n_2,1^m),\ n_1\geq n_2\geq 3,\ m\geq 0,\\ 12(n_1-n_2+1)(m+1) & if\quad \lambda=(n_1,n_2,2^s,1^m),\ n_1\geq n_2\geq 3,\ s\geq 1,\ m\geq 0,\\ 4(n_1-n_2+1)(m+1) & if\quad \lambda=(n_1,n_2,3,2^s,1^m),\ n_1\geq n_2\geq 3,\ s\geq 0,\ m\geq 0,\\ 0 & for\quad all\ other\ \lambda. \end{array}\right. \end{array}$$

证明。给定一个分拆 $\lambda$，由定理 7.4 可知，当 $\lambda \notin H(2,3)$ 时有 $m_\lambda = 0$。因此，设 $\lambda \in H(2,3)$。为了计算重数 $m_\lambda$，有必要将 $UT_2(E)$ 的钩形重数级数写成幂级数。

Let $\lambda \in H(2,3)$，并考虑三元组 $(\lambda_0,\mu,\nu)$。注意到 $D_{\lambda_0} \subseteq D_{(3,3)}$。由此可得 t

$$\lambda_0 \in \{(1),(2),(3),(1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(3,3)\}.$$

首先，令 $\lambda$ 为一个分拆，使得 $\lambda_0 \in$ {(1)、(2)、(3)}。利用定理 9.3，我们得到 $m_\lambda = 1$。

现在考虑满足 $\lambda_0=(1,1)$ 的 $\lambda$。根据定理 9.3，我们有 $\lambda_0$ 对应于项

$$\frac{v_1v_2}{1-y_1}=v_1v_2\sum_{m\geq 0}y_1^m.$$

因此，类型为 $\lambda=(1,1,1^m)$ 且满足 $m\geq 0$ 的分拆，其重数为 1；等价地，若 $\lambda=(1^m)$ 且满足 $m>1$，则 $m_\lambda=1$。

现在，设 $\lambda$ 满足 $\lambda_0=(2,1)$。注意到

$$\frac{v_1^2v_2(2-y_1)}{(1-y_1)^2}=v_1^2v_2\left(2+\sum_{n\geq 1}(m+2)y_1^m\right).$$

因此，若 $\lambda=(2,1)$，则 $m_\lambda=2$。此外，若 $\lambda=(2,1,1^m)$ 且满足 $m\geq 1$，则 $m_\lambda=m+2$；或者等价地，若 $\lambda=(2,1^m)$ 且满足 $m\geq 2$，则 $m_\lambda=m+1$。

设 $\lambda$ 是一个满足 $\lambda_0=(2,2)$ 的分拆。则

$$v_1^2v_2^2\left(\frac{2+y_1}{(1-y_1)^2}+\frac{4y_1y_2}{(1-y_1)^2(1-y_1y_2)}\right)=v_1^2v^2\left(2+\sum_{m\geq 1}(3m+2)y_1^m+\sum_{m\geq 1}\sum_{s\geq 1}4my_1^{m+s-1}y_2^s\right).$$

因此，若 $\lambda=(2,2)$，则 $m_\lambda=2$。若 $\lambda=(2,2,1^m)$，则 $m_\lambda=3m+2$。

注意到 $y_1^{m+s-1}y_2^s$ 与分拆 $\nu=(m+s-1,s)$ 一一对应，因此$\nu'=(2^s,1^{m-1})$。所以，若 $\lambda=(2,2,2^s,1^{m-1})$，且 $m,s\geq 1$，则 $m_\lambda=4m$；或者等价地，若 $\lambda=(2,2,2^s,1^m)$，且 $s\geq 1$ 和 $m\geq 0$，则 $m_\lambda=4(m+1)$。

其余情形的处理方法类似。 □

现在，我们将计算当 $\lambda\in H(1,1)$ 时，$UT_3(E)$ 的余特征序列中的重数 $m_\lambda$。

定理 9.5. 设 $\lambda$ 是一个满足 $\lambda\in H(1,1)$ 的分拆。$UT_3\ E$ 的余特征序列中的重数 $m_\lambda$ 由下列表达式给出：

$$m_\lambda=\begin{cases}1 & if\quad \lambda=(n),\ n\geq 0,\\ 1 & if\quad \lambda=(1^m),\ m>1,\\ n & if\quad \lambda=(n,1),\ n\geq 2,\\ m+1 & if\quad \lambda=(2,1^m),\ m\geq 2,\\ \frac{1}{4}(76-90m+26m^2-54n+68mn-20m^2n & \\ +10n^2-12mn^2+4m^2n^2) & if\quad \lambda=(n,1^m),\ n\geq 3,m\geq 2.\end{cases}$$

证明。由定理 8.12，我们得到

$$\widehat{M}(UT_3(E);t,y,v)=3G(1)-3G^2(1)+3G^2(v)+G^3(1)-2G^3(v)+G^3(vt)+G^3(vy) \tag{15}$$

由定理 8.10 和推论 8.10，我们得到

- $G(1)=1+\dfrac{v}{(1-t)(1-y)}$;
- $G^2(1)=1+\dfrac{v}{(1-t)(1-y)}+\dfrac{v(1+ty)}{(1-t)^2(1-y)^2}$;
- $G^2(v)=\dfrac{v(1+2ty+t^2y^2)}{(1-t)^2(1-y)^2}$;
- $G^3(1)=1+\dfrac{v}{(1-t)(1-y)}+\dfrac{v(1+ty)}{(1-t)^2(1-y)^2}+\dfrac{v(1+2ty+t^2y^2)}{(1-t)^3(1-y)^3}$;
- $G^3(v)=\dfrac{v(1+3ty+3t^2y^2+t^3y^3)}{(1-t)^3(1-y)^3}$;
- $G^3(vt)=\dfrac{v(t+3t^2y+3t^3y^2+t^4y^3)}{(1-t)^3(1-y)^3}$;
- $G^3(vy)=\dfrac{v(y+3ty^2+3t^2y^2+t^3y^4)}{(1-t)^3(1-y)^3}$.

由等式 (15)，我们得到 $UT_3(E)$ 关于变量 $v,t,y$ 的 (1, 1)-重数级数为

(16)

$$\begin{aligned}\widehat{M}(UT_3(E);v,t,y) =&1+\frac{v}{(1-t)(1-y)}+\frac{v(1+4ty+3t^2y^2)}{(1-t)^2(1-y)^2}\\ &+\frac{v}{(1-t)^3(1-y)^3}\left(-1+t+y-4ty-5t^2y^2-2t^3y^3+3t^2y+3t^3y^2+t^4y^3+3ty^2+3t^2y^3+t^3y^4\right).\end{aligned}$$

注意，要计算重数 $m_\lambda$ （其中 $\lambda\in H(1,1)$），必须将 (16) 写成幂级数。回忆一下，

$$\frac{t^{a_1}y^{a_2}}{(1-t)(1-y)}=\sum_{n\geq a_1}\sum_{m\geq a_2}t^ny^m,$$

$$\frac{t^{a_1}y^{a_2}}{(1-t)^2(1-y)^2}=\sum_{n\geq a_1}\sum_{m\geq a_2}(n-a_1+1)(m-a_2+1)t^ny^m,$$

$$\frac{t^{a_1}y^{a_2}}{(1-t)^3(1-y)^3}=\sum_{n\geq a_1}\sum_{m\geq a_2}\binom{n-a_1+2}{2}\binom{m-a_2+2}{2}t^ny^m.$$

利用前面的方程　　并进行一些代数运算，我们得到以下表达式　　n

(17)

$$\begin{aligned}\widehat{M}(UT_3(E);v,t,y) =&1+v\left(\sum_{n\geq0}t^n+\sum_{m\geq1}y^m+\sum_{n\geq1}(n+1)t^ny+\sum_{m\geq2}(m+1)ty^m\right.\\ &\left.+\sum_{n\geq2}\sum_{m\geq2}\frac{(32-34(m+n)+10(n^2+m^2)-12(m^2n+n^2m)+44mn+4m^2n^2)}{4}t^ny^m\right).\end{aligned}$$

由方程 (17) 可知，若 $\lambda=(n)$ 或 $\lambda=(1^m)$，则 $m_\lambda=1$。现在，若 $\lambda=(n+1,1)$ 且 $n\geq1$，则 $m_\lambda=n+1$，这意味着若 $\lambda=(n,1)$ 且 $n\geq2$，则 $m_\lambda=n$。注意，若 $\lambda=(2,1^m)$ 且$m\geq2$，其重数为 $m+1$。

最后，若 $\lambda=(n+1,1^m)$ 且 $n,m\geq2$，则有

$$m_\lambda=\frac{32-34(m+n)+10(n^2+m^2)-12(mn^2+n^2m)+44mn+4m^2n^2}{4},$$

或者等价地，若 $\lambda=(n,1^m)$，且 $n\geq3$ 和 $m\geq2$，则有

$$m_\lambda=\frac{76-90m+26m^2-54n+68mn-20m^2n+10n^2-12mn^2+4m^2n^2}{4}.$$

□

回想一下，若要知道 $UT_3(E)$ 的余特征序列的所有重数，我们必须处理钩形 $H(3,5)$，因为根据定理 7.4，我们知道 $\chi(UT_3(E))\subseteq H(3,5)$。因此，(3, 5)-重数$\widehat{\ }$级数 $M(UT_3(E);\mathrm{V}_3,\mathrm{T}_3,\mathrm{Y}_5)$ 有 11 个变量，计算过程非常复杂。

## References

[1] A. Sh. Abakarov, *Identities of the algebra of triangular matrices*（俄文），Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 114（1982），7-27，217。译文：J. Sov. Math. 27(4)（1984），2831-2848。[2] S. A. Amitsur 和 A. Regev, *PI-algebras and their cocharacters*, J. Algebra 78(1)（1982），248-254。[3] A. Ya. Belov, *Rationality of Hilbert series with respect to free algebras*,（俄文）Uspekhi Mat. Nauk 52（1997），第2期（314），153–154；译文见 Russian Math. Surveys 52（1997），第2期，394–395。[4] A. Berele, *Homogeneous polynomial identities*, Israel J. Math. 42(3)（1982），258-272。[5] A. Berele, *Magnum P.I.*, Israel J. Math. 51(1-2)（1985），13-19。[6] A. Berele, *Applications of Belov's theorem to the cocharacter sequence of p.i. algebras*, J. Algebra 298(1)（2006），208-214。[7] A. Berele, *Properties of hook Schur functions with applications to p.i. algebras*, Adv. Appl. Math. 41(1)（2008），52-75。[8] A. Berele 和 A. Regev, *Applications of hook Young diagrams to P.I. algebras*, J. Algebra 82(2)（1983），559-567。[9] A. Berele 和 A. Regev, *Hook Young diagrams with applications to combinatorics and to representations of Lie superalgebras* **64** 2 1987 118 175 , Adv. Math. ( ) ( ), -。[10] A. Berele 和 A. Regev, *Codimensions of products and of intersections of verbally prime $T$-ideals*, Israel J. Math. 103（1998），17-28。[11] A. Berele 和 A. Regev, *Exponential growth for codimensions of some p.i. algebras*, J. Algebra 241(1)（2001），118-145。

[12] S. Boumova 和 V. Drensky, *Cocharacters of polynomial identitities of upper triangular matrices*, J. Algebra Appl. 11(1)（2012），1250018，24页。[13] L. Carini 和 O. M. Di Vincenzo, *On the multiplicities of the cocharacters of the tensor square of the Grassmann algebra*, Atti Accad. Peloritana Pericolanti Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 69（1991），237-246。[14] L. Centrone, *Ordynary and $Z_2$-graded cocharacters of $UT_2(E)$*, Comm. Algebra 39(7)（2011），2554-2572。[15] L. Centrone，V. R. T. da Silva, *On $Z_2$-graded identities of $UT_2(E)$ and their growth*, Linear Algebra Appl. 471（2015），469-499。[16] O. M. Di Vincenzo 和 V. R. T. da Silva, *On Z $_2$-graded polynomial identities of the Grassmann algebra*, Linear Algebra Appl. 431(1-2)（2009），56-72。[17] V. Drensky, *Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras*（俄文），Mat. Sb. 115(157)(1)（1981），98-115。译文：Math. USSR Sb. 43(1)（1981），85-101。[18] V. Drensky, *Codimension of $T$-ideals and Hilbert series of relatively free algebras*, J. Algebra，91(1)（1984），1-17。[19] V. Drensky, *Extremal varieties of algebras. I，II*（俄文），《塞尔迪卡》13(4)（1987），320-332；14(1)（1988），20-27。[20] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras. Graduate Course in Algebra*，新加坡施普林格出版社，2000。[21] V. Drensky 和 G. K. Genov, *Multiplicities of Schur functions in invariants of two $3 \times 3$ matrices*, J. Algebra 264(2)（2003），496-519。[22] V. Drensky 和 B. Kostadinov, *Cocharacters of polynomial identities of block triangular matrices*, Comm. Algebra 45(5)（2017），2127-2141。[23] E. Formanek, *Invariants and the ring of generic matrices*, J. Algebra 89(1)（1984），178-223。[24] E. Formanek, *Noncommutative invariant theory*,《当代数学》43（1985），87-119。[25] G. K. Genov, *The Spechtness of certain varieties of associative algebras over a field of zero characteristic*（俄文），《保加利亚科学院通报》29（1976），939-941。[26] G. K. Genov, *Some Specht varieties of associative algebras*（俄文），《普利斯卡保加利亚数学研究》2（1981），30-40。[27] A. Giambruno 和 P. Koshlukov, *P. On the identities of the Grassmann algebras in characteristic $p > 0$*, Israel J. Math. 122（2001），305-316。[28] A. Giambruno 和 M. V. Zaicev, *On codimension growth of finitely generated associative algbras*, Adv. Math. 140(2)（1998），145-155。[29] A. Giambruno 和 M. V. Zaicev, *Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate*, Adv. Math. 142(2)（1999），221-243。[30] A. Giambruno 和 M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*,《数学调查专著》122。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005。[31] P. Halpin, *Some Poincaré series related to identities of $2 \times 2$ matrices*,《太平洋数学杂志》107(1)（1983），107-115。[32] A. R. Ke mer, *Finite basis property of identities of associative algebras*（俄文），《代数与逻辑》26(5)（1987），597-641。译文：《代数逻辑》26(5)（197），362-397。[33] D. Krakowski 和 A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*,《美国数学会汇刊》181（1973），429-438。[34] V. N. Latyshev, *On algebras with identity relations*（俄文），《苏联科学院通报》146(5)（1962），1003-1006。译文：《苏联数学通报》3（1962），1423-1427。[35] V. N. Latyshev, *On the choice of basis in a $T$-ideal*（俄文），《西伯利亚数学杂志》4(5)（1963），1122-1127。[36] V. N. Latyshev, *Partially ordered sets and nonmatrix identities of associative algebras*（俄文），《代数与逻辑》15(1)（1976），53-70。译文：《代数逻辑》15(1)（1976），34-45。[37] V. N. Latyshev, *Finite basis property of identities of certain rings*（俄文），《数学科学进展》32(4)(196)（1977），259-260。[38] J. Lewin, *A matrix representation for associative algebras. I*,《美国数学会汇刊》188（1974），293-308。[39] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*，牛津大学出版社，第二版，1995。[40] S. P. Mishchenko、A. Revev 和 M. V. Zaicev, *A characterization of P.I. algebras with bounded multiplicities of the cocharacters* **219** 1 1999 356 368 Algebra ( ) ( )，-。[41] J. B. Olsson 和 A. Regev, *Colength sequence of some $T$-ideals*, J. Algebra 38(1)（1976），100-111。[42] A. P. Popov, *On the Specht property of some varieties of associative algebras*（俄文），《普利斯卡保加利亚数学研究》2（1981），41-53。[43] A. P. Popov, *Identities of the tensor square of a Grassmann algebra*（俄文），《代数与逻辑》21(4)（1982），442-471。译文：《代数逻辑》21（1982），296-316。[44] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$*, Israel J. Math. 11（1972），131-152。[45] A. Regev, *The representations of $S_n$ and explicit identities of P.I. algebras*, J. Algebra 51(1)（1978），25-40。[46] I.B. Volichenko，A.F. Zalesskii, *Characterization of certain $T$-ideals from the view point of representation theory of the symmetric groups* **38** 2012 211 236 ，

《塞尔迪卡数学杂志》（ ），-。

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari Aldo Moro, Via Edoardo Orabona, 4, 70125 Bari, Italy*Email address*: lucio.centrone@uniba.it, centrone@unicamp.brInstitute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, 1113 Sofia, Bulgaria*Email address*: drensky@math.bas.bg

IMECC Universidade Estadual de Campinas Rua Sérgio Buarque de Holanda 651 Cidade Universitária "Ze- , ferino Vaz" Distr. Barão Geraldo Campinas São Paulo Brasil CEP 13083-859

, , , „*Email address*: d190688@dac.unicamp.br