arXiv:2301.02570v1 [math.GR] 6 Jan 2023

例外群的极大子群与奎伦维数

KEVIN I. PITERMAN*

摘要. 给定一个有限群 G 和一个素数 p，令 $\mathrm{A}_p(G)$ 表示 G 的非平凡初等阿贝尔 p-子群所构成的偏序集。若 $\mathrm{A}_p(G)$ 在可能的最高维数（即 G 的 p-秩减 1）上具有非零同调，则群 G 满足在 p 处的 Quillen 维数性质。例如，D. Quillen 证明了具有平凡 p-核的可解群满足此性质；此后，M. Aschbacher 和 S.D. Smith 列出了所有在 p 为奇数时可能不满足此性质的单群的 p-扩张。特别地，具有此性质的群 G 满足 Quillen 猜想：G 具有平凡的 p-核，且偏序集 $\mathrm{A}_p(G)$ 不可缩。

本文聚焦于素数 $p = 2$，并证明奇特征下例外李型有限单群的 2-扩张满足 Quillen 维数性质，只有有限多个例外。我们通过研究极大子群得出这些结论，通常将问题归结为小型线性群中的同一问题，并通过计数论证证明其具有这一性质。作为推论，我们将 Quillen 猜想在 $p = 2$ 处的极小反例中可能出现的分量列表缩小。

1. 引言

自 20 世纪 70 年代初以来，人们对 p-子群偏序集及其与有限群论、有限单群分类、有限几何、群上同调和表示论之间的联系日益关注。群 G 的非平凡 p-子群偏序集 $\mathrm{S}_p(G)$ 由 Kenneth Brown 在 [2] 中引入。在该文中，Brown 研究了满足某些有限性条件的群 G 的欧拉示性数 $\chi(G)$，并建立了 p-部分 $\chi(G)$ 与 G 的 p-子群结构之间的联系。他的结果之一就是广为人知的“同调西洛定理”：$\mathrm{S}_p(G)$ 的欧拉示性数模 $|G|_p$ 同余于 1，其中 G 的西洛 p-子群的阶为 $|G|_p$。

几年后，Daniel Quillen 引入了有限群 G 的非平凡初等阿贝尔p子群的偏序集 $\mathrm{A}_p(G)$，并展示了这些偏序集 [21]的拓扑性质的若干应用。事实上，对初等阿贝尔 p子群的研究可追溯至 Quillen 早期关于 G空间的布雷登上同及其 Atiyah-Swan 猜想证明；该猜想将一个环的克鲁尔维数与 $\mathrm{A}_p(G)$ 的维数联系起来（见[20]）。

在 [21], Quillen 证明了 $\mathrm{S}_p(G)$ 与 $\mathrm{A}_p(G)$（在 G 等变意义下）同伦等价，并为 Brown 的结果给出了新的证明。事实上，当 G 是特征为 p 的有限域上半单代数群的有理点集时，这些偏序集与 G 的建筑同伦等价，因此具有维数为 $l - 1$ 的球面楔和的同伦型，其中 l 是底层代数群的秩。此外，在这种情况下，f同调 $H_*(\mathrm{A}_p(G))$ 给出了 G 的经典 Steinberg 模。

2010 数学学科分类。20G41, 20D20, 20D30, 05E18.关键词与短语。 p-子群，李型例外群，Quillen 猜想。*本研究获亚历山大·冯·洪堡基金会博士后奖学金资助。

Quillen 还揭示了 G 的内在代数性质与这些偏序集的拓扑之间的其他联系。例如，他证明了$\mathcal{A}_p(G)$ 非连通，当且仅当 G含有一个强 p嵌入子群。回想一下，具有这一性质的群的分类确实是迈向有限单群分类的诸多重要步骤之一（例如参见 [8]第 7.6 节）。

另一方面，Quillen 证明，如果 G 在 $\mathrm{A}_p(G)$（或等价地，在 $\mathrm{S}_p(G)$）上有不动点，那么这些偏序集就是可缩的。注意，当且仅当其 p-核$O_p(G)$ 非平凡时， G才有不动点。鉴于此以及更多证据，Quillen 猜想这一命题的逆命题也应成立。也就是说，如果 $\mathrm{A}_p(G)$ 可缩，那么就存在不动点；等价地， $O_p(G) \neq 1$ （见 [21]的猜想 2.9 ）。换言之，Quillen 猜想断言，$\mathrm{A}_p(G)$ 可缩，当且仅当 $O_p(G) \neq 1$。

Quillen 的文章很大一部分致力于证明这一猜想的可解情形。在 [21] 中证明了，对于一个 p-幂零群 G，若其 Sylow p-子群为阿贝尔群，且 $O_p(G)$ =1，则 $\mathrm{A}_p(G)$ 与一个非平凡的球面楔和同伦等价，其维数为最大可能维数，即 $m_p(G) - 1$，也就是 G 的 p-秩减 1。接着，若 G 是任意一个满足 $O_p(G) = 1$ 的可解群，则 G 包含一个 p-幂零子群 $O_{p'}(G)\,A$，其中 $A \in \mathrm{A}_p(G)$ 的 p-秩 e 最大，且 $O_p(O_{p'}(G)\,A) = 1$，因此 $H_{m_p(G)-1}(\mathrm{A}_p(G)) \neq 0$。

后来，Michael Aschbacher 和 Stephen D. Smith 将这一性质形式化并为其命名：若任意群 G满足 $H_{m_p(G)-1}(\mathrm{A}_p(G)) \neq 0$，则称其在 p 处满足*Quillen* 维数性质，简称 $(\mathrm{Q\,D})_p$（见 [1]）。因此，满足 G且 $O_p(G) = 1$的可解群满足 $(\mathrm{Q\,D})_p$，从而满足 Quillen 猜想。此外，研究表明，利用 Quillen 的方法以及有限单群分类，可以证明 p-可解群也满足这一性质（见 [5, 23]）。这些结果还表明，猜想或许有一个更强的表述：若 $O_p(G) = 1$，则 $\mathrm{e}H_*(\mathrm{A}_p(G); \mathbb{Q}) \neq 0$。因此，下文所说的 Quillen 猜想均指这一更强版本。

不难看出，并非每个满足 G且 $O_p(G) = 1$的群都满足 $(\mathrm{Q\,D})_p$。例如，我们提到，特征为 p 的李型有限群满足该猜想；但由于李秩通常严格小于 p-秩，它们不满足 $(\mathrm{Q\,D})_p$。这推动了证明 Quillen 猜想的新方法的发展。Aschbacher-Smith 于 [1]在该猜想方面取得了一项引人瞩目的进展。他们证明，若群G 满足 $p > 5$，并且大致而言，所有 p-扩张的有限酉群 $\mathrm{PSU}_n(q)$（其中q 为奇数且 $p \mid q + 1$）都满足 $(\mathrm{Q\,D})_p$，则 Quillen 猜想成立（精确表述见 [1] 的主定理）。这里，群 L 的 p-扩张是指由初等阿贝尔 p-子群对 $\mathrm{Out}(L)$ 作分裂扩张所得的群。在 [1] 中，他们并未证明群 G 满足 $(\mathrm{Q\,D})_p$。相反，他们证明了：如果 G 的某个固定分量的每个 ep-扩张都满足 $(\mathrm{Q\,D})_p$，那么在适当的归纳假设下，若 $O_p(G) = 1$，则 $H_*(\mathrm{A}_p(G); \mathbb{Q}) \neq 0$。这一结果限制了 Quillen 猜想极小反例的分量可能具有的形式：每个分量都存在一个不满足 $(\mathrm{Q\,D})_p$ 的 p-扩张。基于这一结果以及有限单群分类，Aschbacher 和 Smith 在 $p \geq 3$ 中列出了可能不满足 $(\mathrm{Q\,D})_p$ 的所有单群 p-扩张。这就是 [1] 的 $(\mathrm{Q\,D})$-列表，即定理 3.1。此外， [1] 中猜想，若 q 为奇数且 $p \mid q + 1$，则酉群 $\mathrm{PSU}_n(q)$ 不应出现在此列表中，因此 [1] 主要结果中关于酉群的额外假设可以省去。然而，这个问题仍未解决（近期相关进展见 [19]）。

近年来，Quillen 猜想有了进一步的发展 [15, 16, 17,18]。最近， [18],为研究该猜想提供了新的工具。例如，

研究表明，Aschbacher-Smith 针对该猜想提出的一般方法可以推广到每个素数 p，而减少对[1] 仅针对奇素数提出的结果的依赖，并运用分类理论。具体而言，[18] 的定理 1.1 表明，[1] 的主定理可以推广到 $p \geq 3$，同时保留对酉群的附加约束。另一方面，对于 $p = 2$，这项推广的一项重要障碍是缺少该素数对应的（$\mathcal{QD}$）-列表。粗略地说，[18] 的推论 1.8 得出结论：Quillen 猜想的一个极小反例包含一个特征为 $r \neq 3$的李型分量，而 G 的每个分量都有一个不满足（$\mathcal{QD}$）$_2$的 2-扩张。

鉴于这些关于 Quillen 猜想的结果，本文着重证明奇特征下例外李型有限单群的 2-扩张满足$(\mathcal{QD})_2$, ，但存在少数例外情形。这改进了 [18] 关于 $p = 2$ 的 Quillen 猜想的结论，并使我们得以得出结论：特征不为 3 的奇特征李型例外群不可能是该猜想的极小反例的分量（见下文推论 1.2）。

本文的主要结果是以下定理，其证明见第 5 节中的若干命题。

定理 1.1。设 L 是一个奇特征的例外李型有限单群。也就是说，$L = {}^3D_4(q)$，$F_4(q)$，$G_2(q)$，${}^2G_2(q)'$，$E_6(q)$，${}^2E_6(q)$，$E_7(q)$或 $E_8(q)$，其中 q 为奇数。则 L 的每个2-扩张都满足在 $p = 2$ 上的 *Quillen* 维数性质，但以下情形可能例外：

${}^3D_4(9)$并由域自同构扩张；$F_4(3)$；$F_4(9)$并由域自同构扩张；2-扩张 $G_2(3)$；$G_2(9)$并由域自同构扩张；${}^2G_2(3)'$；$E_8(3)$；$E_8(9)$ 并由域自同构扩张。

事实上，上文提到的 $G_2(3)$、$G_2(9)$和 ${}^2G_2(3)'$的扩张确实不满足 $(\mathcal{QD})_2$，如例5.3和命题 5.1所示。

为了得到定理 1.1 的结论，在大多数情形下，我们展示 2-扩张 LB of L 的一个极大子群 M，使得 $m_2(M) = m_2(LB)$，且 M 满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。由于最高次同调群中存在包含关系 $H_{m_2(LB)-1}(\mathrm{A}\,2(M)) \hookrightarrow H_{m_2(LB)-1}(\mathrm{A}\,2(LB))$，这便证明了 LB 满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$（见引理 3.3）。在某些情形下，子群 M 来自适当的抛物子群。更具体地说，在可行时，我们选取 P 为 L 的一个极大抛物子群，该子群在 B 作用下保持不变，且 $M := PB$ 实现 LB 的 2-秩。于是得到一个 2-幂零构型 UA，其中 U 是 P 的幺幂根基，A 是实现 PB 的 2-秩的初等阿贝尔 2-子群，并且根据 Borel-Tits 定理的一个推论，$O_2(UA) = C_A(U) = 1$。因此，根据 Quillen 关于可解情形的结果，UA 满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$,，从而 M 和 LB 也满足该条件。

当无法选择这样的抛物型 P 时，我们从 L的极大秩子群中选取一个。这里，极大子群 M 的分量通常是较小的例外群、低维线性群 A_1（q）和 A_2（q），或酉群 ${}^2A_2$（q）。因此，我们首先证明，维数 2 和 3 的单线性群与酉群的 2-扩张满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。

尽管关于李型例外群的极大子群已有大量文献，我们只需要[3, 10, 11, 12, 13]中的结果。

最后，由定理1.1 以及 [18] 关于 $p = 2$的结果，我们可以得出：

推论 1.2. 设 G 是关于 $p = 2$的 *Quillen* 猜想的一个极小反例。那么 G含有一个特征为 $r \neq 3$的李型分量。此外，每个这样的分量都无法

(有理数域 D)$_2$ 在某个 2-扩张中，并属于以下某个族：

$$\mathrm{PSL}_n(2^a)(n \geq 3), D_n(2^a)(n \geq 4), E_6(2^a),$$

$$\mathrm{PSL}_n^{\pm}(q)(n \geq 4), B_n(q)(n \geq 2), C_n(q)(n \geq 3), D_n^{\pm}(q)(n \geq 4),$$

其中 $q = r^a$ 和 $r > 3$。

PSL 的 2-扩张$_2(q)$、PSL$_3(q)$和 PSU$_3(q)$满足 $(\mathcal{QZ})_2$，这分别由命题 4.2、4.5和 4.6 证明，但在 $q = 3$，5，9 时例外。尽管如此， [18] 的结果排除了这些情况作为极小反例的可能性。

结合本文介绍的方法与 [5, 6] 的结果，可以进一步研究经典群在 $p = 2$ 处的 Quillen 维数性质。

本文安排如下。第 2 节中，我们设定研究李型有限群所需的记号和约定，并提供一些有用的性质，以便求出 p-扩张并计算 p-秩。第 3 节中，我们汇集了关于 Quillen 维数性质的已有结果及相关工具，这些内容将帮助我们确立该性质。随后在第 4 节中，我们证明某些线性群的 2-扩张满足 $(\mathcal{QZ})_2$，并依据 [8]的表 4.5.1 回顾图自同构中心化子的结构。第 5 节中，我们证明定理 1.1的每一种情形。

本文所讨论的群均为有限群。我们省略同调系数的记号，并假定系数始终取自 $\mathbb{Q}$。感兴趣的读者可以注意到，我们的结果可以推广到系数取自其他环的同调。最后，我们强调，本文采用 [8]中的术语和约定。在为李型群的不同类型自同构命名时，这一点尤为重要。计算机计算使用 GAP [7]完成。

致谢。 作者感谢 Stephen D. Smith 就李型群的代数性质进行了许多有益的讨论，也感谢 Volkmar Welker 对本文初稿提出的建议。

2. 预备知识

我们假定读者熟悉如何将李型有限群构造为 Steinberg 自同态的不动点，以及约化代数群根系的基本性质。我们将遵循 [8], 中的术语，该文也包含有关李型有限群的必要背景知识。本节仅回顾一些记号和名称，并陈述后文将用到的结果。

我们分别用 C$_n$、D$_n$、Sym$_n$ 和 Alt$_n$ 表示阶为 n 的循环群、阶为 n 的二面体群、作用在 n 个点上的对称群，以及作用在 n 个点上的交错群。

若 G 是一个群，则 Aut(G)、Inn(G) 和 Out(G) 分别表示 G 的自同构群、内自同构群和外自同构群。我们用 $Z(G)$ 表示 G的中心。对于 G 被 H扩张的分裂扩张，我们通常记作 $G\colon H$，或简记为 GH。当 G 被 H 扩张且该扩张未必分裂时，我们记作 $G.H$。所谓 G 的元素 g （或子群 B）在 $L \leq G$ 上诱导外自同构，是指 g 嵌入 Aut(L) \ Inn(L)（或 B 嵌入 Aut(L)，且 $B \cap \mathrm{Inn}(L) = 1$）。最后， $H \circ_m K$ 表示 H和 K通过一个阶为 m 的中心循环群构成的中心积。也就是说， $H \circ_m K = (H \times K)/\mathrm{C}_m$，其中 C$_m$ 同时嵌入 $Z(H)$ 和 $Z(K)$。

在群扩张的记号中，我们通常用 n 表示阶为 n的循环群，用 n^m 表示 m 个阶为 n的循环群的直积。在扩张的结构描述中，方括号内的数字 $[n]$ 表示某个阶为 n的群。

本文主要关注由初等阿贝尔群作扩张的情形。下面回顾引言中给出的 p-扩张的定义，并引入一些有用的记号。

定义 2.1. 设 L 为有限群，p 为素数。L 的 p-扩张是一个分裂扩张 LB，即由初等阿贝尔 p-群 B 扩张 L，并在 L上诱导外自同构。

若 $L \leq G$，我们将由满足 $B \cap LC_G(L) = 1$ 的元素 $B \in \mathrm{A}_p(G)$ 构成的偏序集记为 $\mathrm{O}_G(L)$。因此，$\mathrm{O}_G(L)$ 是由在 L上诱导外自同构的 $B \in \mathrm{A}_p(G)$ 构成的集合。我们用 $\mathrm{O}_2(L)$ 表示 $\mathrm{O}^{\mathrm{Aut}(L)}(L)$ 在 $p = 2$处的情形。我们还令 $\hat{\mathrm{O}}_G(L) = \mathrm{O}_G(L) \cup \{1\}$，以及 $\hat{\mathrm{O}}_2(L) = \mathrm{O}_2(L) \cup \{1\}$。

定义 2.2. 对于素数 p，若一个群 G 满足在 p处的 Quillen 维数性质，则 $\mathrm{A}_p(G)$ 在维数 $m_p(G) - 1$处具有非零同调，其中 $m_p(G)$ 表示 G的 p-秩：

$$(\mathcal{QD})_p \quad \widetilde{H}_{m_p(G)-1}(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0.$$

关于奇素数下 Quillen 维数性质的一项重要研究 p 见 [1]的定理 3.1。该定理列出了可能无法满足 $(\mathcal{QD})_p$的单群的潜在 p-扩张，对于 $p \geq 3$。具体而言，该列表包含酉群 $\mathrm{PSU}_n(q)$ 的 p - 扩张，其中 q 为奇数且 $p \mid q+1$。然而，[1] 的猜想 4.1 基本上声称这些群不应列入该列表。事实上，该文证明，若 $n < q(q-1)$，则这些p-扩张满足 $(\mathcal{QD})_p$。尽管如此，这个问题仍未解决。

本文旨在为素数 $p = 2$ 的类似列表取得一些进展。因此，我们将着重证明某些单群的 2-扩张满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。为此，我们引入以下便于使用的定义。

定义 2.3. 若群 L 的每个 2-扩张都满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$，则称群 L 满足 (E-(Q D))：

(E-(Q D)) 对每个 $B \in \hat{\mathrm{O}}_2(L)$，$LB$都满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。

为了证明 p-扩张满足 $(\mathrm{Q\,D})_p$，能够计算扩张的 p-秩至关重要。以下结果摘自 [16], 中的引理 4.2，将有助于计算扩张的 p-秩。

引理 2.4 (p-扩张的秩)。设 $G = N.K$ 是有限群的一个扩张，且 p 是一个素数。则

$$m_p(G) = \max_{A \in \mathcal{S}} \big(m_p(C_N(A)) + m_p(A)\big),$$

其中 $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{A}_p(G) \cup \{1\} : A \cap N = 1\}$。特别地，$m_p(G) \leq m_p(N) + m_p(K)$。

我们将在证明的许多地方隐式地使用这一结果。注意，为了应用这个引理，我们需要能够计算初等阿贝尔 2-子群的中心化子，这通常会诱导出外自同构。我们通常按如下方式进行：若 LB 是 L的 2-扩张，则取一个适当的分解 $B = B_0 \oplus B_1$，其中 $|B_1| = 2$。假设我们能够归纳地计算 LB_0的 2-秩。于是，由引理 2.4，可得

$$m_2(LB) = \max\left\{m_2(LB_0), 1 + m_2(C_{LB_0}(t)) \,:\, t \in LB \setminus LB_0 \text{ is an involution}\right\}. \tag{2.1}$$

此外，这一计算仅取决于对合 t 的共轭类；而在我们感兴趣的大多数情形中，这些共轭类都已得到完整分类。

现在，我们较为非正式地回顾一下类型这些定义在奇特征域上的单李型群的自同构 K 的不同名称，采用定义 2.5.13 中的说法，参见[8]。完整细节请参阅 [8] 。令 $t \in \mathrm{Aut}(K)$ 为一个对合，并令 $K^* = \mathrm{Inndiag}(K)$。那么， t 的名称如下：

(1) 若 $t \in K^*$，则称为内对角；(2) 若 $t \in \mathrm{Inn}(K)$，则称为内；(3) 若 $t \in K^* \setminus \mathrm{Inn}(K)$，则称为对角；(4) 若 $t \in \mathrm{Aut}(K) \setminus K^*$ 在 $\mathrm{Aut}(K)$-共轭下与基域的一个域自同构共轭，且 K不是 ${}^2A_n(q)$、 ${}^2D_n(q)$或 ${}^2E_6(q)$，则称为域自同构；(5) 若 $t \in \mathrm{Aut}(K) \setminus K^*$大致上在 $\mathrm{Aut}(K)$-共轭下与一个由底层 Dynkin 图的自同构所产生的对合共轭（ $K = G_2(q)$ 除外），或在情形 ${}^2A_n(q)$、 ${}^2D_n(q)$ 和 ${}^2E_6(q)$ 中由域自同构产生，则称为图；(6) 若可表示为图对合 g与域自同构 f的乘积 gf，或者 $K = G_2(q)$且 t源自底层 Dynkin 图的一个 $\mathrm{Aut}(K)$-共轭对合同构自同构，则称为图-域自同构。

由 [8] 的命题 4.9.1 可知，域对合 t 的中心化子满足 $m_2(C_K(t)) = m_2(K)$，且 $m_2(C_{K^*}(t)) = m_2(K^*)$。由公式 (2.1) 可得 $m_2(K\langle t\rangle) = m_2(K) + 1$。下面我们给出该命题的一个简化版本。

命题 2.5. 设 $K = {}^d\Sigma(q)$ 是特征为 r 的伴随型李型群，且 x 是一个素数阶为 p 的域自同构或图-域自同构。令 $K_x = O^{r'}(C_K(x))$。则有以下结论：

(1) 若 x 是域自同构，则 $K_x \cong {}^d\Sigma(q^{1/p})$。 *(2)* 若 x 是图-域自同构，则 $d = 1$、$p = 2$ 或 3，且 $K_x \cong {}^p\Sigma(q^{1/p})$。 *(3)* K_x 是伴随型，且 $C_{\mathrm{Inndiag}(K)}(x) \cong \mathrm{Inndiag}(K_x)$。 *(4)* 域自同构（分别地，图 - 域自同构）均为 $\mathrm{Inndiag}(K)$- 共轭的，但 $K = D_4(q)$ 的图 - 域自同构和 $p = 3$ 除外。

前一个命题并未预先确定 $C_K(x)$ 的结构，而只确定了在内对角自同构群中取的中心化子。由于我们关心的是计算 $m_2(C_K(x))$，因此确定对角对合何时能中心化域自同构或图-域自同构 x 对我们至关重要。下面回顾 [9, 第 17], 章中的引理 12.8，它对这个问题给出了部分解答。

引理 *2.6.* 设 $K \cong PSL_2(q)$、$P\Omega_{2n+1}(q)$、$PSp_{2n}(q)$ 或 $E_7(q)$，其中 q 是一个奇素数r的幂。设 ϕ 是一个 *2* 阶域自同构，并且 $K_\phi = O^{r'}(C_K(\phi))$。则 $Inndiag(K_\phi) = C_{\mathrm{Inndiag}(K)}(\phi) = C_{\mathrm{Inn}(K)}(\phi)$。特别地， ϕ 不与 $Inndiag(K)$ 的对角对合交换。

我们主要使用 [8] 中的表 4.5.1 来计算由对角对合和图对合扩张得到的群的 2-秩，研究对象主要是 $A_m^{\pm}(q)$ 型群和例外群。下一段将简要、非正式地说明如何查阅此类表格。关于表 4.5.1 的完整准确说明，请参见 [8, 第 171-182] 页。

此表记录有限李型群 K 的伴随型中，内对角和图对合 t 的 K^*-共轭类，以及它们在 $K^* = \mathrm{Inndiag}(K)$ 中的中心化子结构。对合 t 的中心化子记为 $C^* = C_{K^*}(t)$。表 4.5.1 的第一列表示所列对合所属的族（A_n、 B_n、 C_n 等）。第二

列指出这些共轭类存在的限制条件，第三列则是相应对合的共轭类标签。就本文而言，我们无需解释第四列。第五列标明此类共轭类属于内型（记为 1）、对角型（记为 d）还是图型（记法如 g、g'）。记法 $1/d$ 表示：若右侧括号内的条件成立，则该对合为内型；否则为对角型。从第六列起至表格末尾，描述中心化子 C^* 的结构。粗略而言，C^* 是李型群 $L^* = O^{r'}(C^*)$ 的一个中心积的扩张（第六列）；这些群的型式在“型式”列中注明，其中心可由 $Z(L^*)$ 列确定。中心化该积的额外部分可由 $C_{C^{*\circ}}(L^*)$ 列计算得出。这里，$C^{*\circ} = L^*T^*$ 是连通中心化子，其中 T^* 是由环面 T 导出的某个 $r\prime$-子群；该环面由 t 正规化，并在 L^* 上诱导内对角自同构。根据 L^*、“型式”、$Z(L^*)$ 和 $C_{C^{*\circ}}(L^*)$ 各列，可以计算出 $C^{*\circ}$ 的“内部分”。最后，根据末两列，可以确定 L^* 在 $C^{*\circ}$ 中产生的外自同构（通常为对角型），以及 $C^*/C^{*\circ}$ 的其余部分；后者通常是一个作用于 L^* 的分支上的对合（作为域自同构或图自同构，或通过交换两个分支），并作用于中心部分 $C_{C^*}(L^*)$（该部分通常是循环群，且对合以取逆的方式作用）。要确定末列所表示的作用，符号 i、$\leftrightarrow$、ϕ、γ、1 分别表示取逆、交换两个分支、2 阶域自同构、2 阶图自同构，以及在某个分支上的内作用或在 $C_{C^{*\circ}}(L^*)$ 上的平凡作用。

3. 实现 (有理数域 D)$_p$ 的工具

本节将介绍一些工具并汇集相关结果，以帮助我们确立 (有理数域 D)$_2$ 关于某些 2-扩张的结论。这些工具中有许多由 Aschbacher-Smith 引入并加以深入研究，用于确定 (有理数域 D) 列表，见 [1]。

以下命题是空间连接的 Künneth 公式以及 $\mathrm{A}_p(H \times K) \simeq \mathrm{A}_p(H) * \mathrm{A}_p(K)$ 这一事实的直接推论（见 [21, 命题 2.6]）。

命题 3.1。若 p 是素数，且 H、K 满足 (有理数域 D)$_p$，则 $H \times K$ 满足 (有理数域 D)$_p$。

以下引理对应于 [1] 中的引理 0.11 和 0.12。

引理 3.2。设 $N \leq G$ 满足 $N \leq O_{p'}(G)$。则存在一个包含关系

$$\widetilde{H}_*(\mathscr{A}_p(G/N)) \subseteq \widetilde{H}_*(\mathscr{A}_p(G)).$$

特别地，$m_2(G) = m_2(G/N)$，并且如果 G/N 满足 (有理数域 D)$_p$，那么 G 也满足。

如果 $N \leq Z(G)$，那么实际上 $\mathscr{A}p(G) \equiv \mathscr{A}p(G/N)$。

以下观察是由最高次同调群之间的包含关系直接得出的。

引理 3.3。设 $H \leq G$ 满足 $m_p(H) = m_p(G)$。如果 H 满足 (有理数域 D)$_p$，那么 G 也满足 .

接下来，我们回顾 Quillen 维数性质的一项重要结果。

定理 3.4 (Quillen)。如果 G 是一个可解群，且 $O_p(G) = 1$，那么 G 满足 (有理数域 D)$_p$。

此定理解决了 Quillen 猜想的可解情形（见 [21, 定理 12.1]）。后来，若 p 为奇数，借助有限单群分类，该结果推广到了 p-可解群这一族。关于 Quillen 猜想和 Quillen 维数性质的更多细节，请参见 [23] 的第 8 章。

鉴于定理 3.4和包含关系引理 3.3，寻找 G 中具有最大 p-秩的可解子群是很方便的。在李型群 L 中，一些标准的可解子群可由其正规化子中的初等阿贝尔子群对幺幂根基作扩张而得到。这些扩张因而包含在抛物子群中。关于抛物子群的下述结果将帮助我们对任意李型群实现（E-($\mathcal{CZ}$)）（参见 [1]第 506 页的步骤 v）。

引理 3.5. 设 L 是一个单李型群， p 是一个不整除 L 的特征的素数。假设 LB 是 L 的一个 p-扩张，并且存在一个 B-不变抛物子群 $P \leq L$，使得 $m_p(LB) = m_p(PB)$。那么 LB 满足 (有理数域 D)$_p$。

证明。令 $R := O_r(P)$，其中 r 是基域的特征。于是，作为 Borel-Tits 定理的推论，$C_{\mathrm{Aut}(L)}(R) \leq R$ （参见 [8] 的推论 3.1.4）。特别是，若 $T \leq PB$ 实现了 PB 的 p-秩，则 T 规范化 R，且 $C_T(R) \leq R \cap T = 1$。这意味着 T 在 R 上是忠实的，即 $O_p(RT) = 1$，并且 $m_p(RT) = m_p(PB) = m_p(LB)$。那么 RT 是一个具有平凡 p-核的可解群；根据定理 3.4， RT 满足 (Q D) $_p$。根据引理 3.3， LB 满足 (Q D)$_p$。□

引理 3.6. 设 L 是一个定义在奇特征域上的单李型群。假设 P是 L 的真抛物子群，且包含 L 的一个 *Sylow 2*-子群（也就是说， $|L : P|$ 为奇数）。那么 L 以及由一个 *2* 阶域自同构扩张 L 所得的群满足($\mathcal{CZ}$)$_2$。

证明。 设 L 和 P 如引理的假设所述。由于 P 在 L中的指数为奇数，它包含 L的一个 Sylow 2-子群。因此， $m_2(P) = m_2(L)$，并且根据引理 3.5， L 满足 ($\mathcal{CZ}$)$_2$。

接下来，设 $B \in \hat{}\mathrm{O}_2(L)$ 为由域自同构诱导的循环群。通过考察代数群和根系，可以证明 B 正规化 P的某个共轭子群；不妨设该子群就是 P 本身。因此，经过共轭后，设 $B \leq N_{\mathrm{Aut}(L)}(P)$。注意， PB的一个 Sylow 2-子群也是 LB的一个 Sylow 2-子群，因此 $m_2(PB) = m_2(LB)$。根据引理 3.5， LB满足 (Q D)$_2$。□

我们以关于低 p-秩的若干结果结束本节。下面的引理可由 Quillen 猜想的 p-秩 2 情形推出。参见 [21, 定理 2.10]。

引理 3.7. 若$\mathcal{A}p(G)$是连通的， $m_p(G) = 2$且 $O_p(G) = 1$， 则 G满足($\mathcal{CZ}$)$_p$。

回顾具有强 2-嵌入子群的群的分类将会很有帮助，也就是说，这些群的 2-子群偏序集不连通。参见 [8, 定理 7.6.1] 和 [21, 命题 5.2]。

定理 3.8. 设 $p = 2$ 和 G 为有限群。则$\mathcal{A}(G)$ 不连通，当且仅当$O_2(G) = 1$，并且以下条件之一成立：

(1) $m_2(G) = 1$;

(2) $\Omega_1(G)/O_{p'}(\Omega_1(G))) \cong \mathrm{PSL}_2(2^n), \mathrm{PSU}_3(2^n)$ *or* $\mathrm{Sz}(2^{2n-1})$ *for some* $n \geq 2$.

特别地，由单群之间的同构关系可知

$$\mathrm{Alt}_5 \cong \mathrm{PSL}_2(5) \cong \mathrm{PSL}_2(2^2), {}^2G_2(3)' \cong \mathrm{PSL}_2(2^3),$$

包含在条目 *(2)* 的列表中。

事实上，在低维情形下，有时我们可以通过计算 A $_p(G)$ 的欧拉示性数的符号，得出结论 (Q D)$_p$ 。因此，我们将使用这一不变量的以下著名表达式。

命题 3.9。 $\mathscr{A}_p(G)$ 的约化欧拉示性数为：

$$\widetilde{\chi}(\mathscr{A}_p(G)) = \sum_{\overline{E}\in\mathscr{A}_p(G)/G\cup\{1\}} (-1)^{m_p(E)-1} p^{\binom{m_p(E)}{2}} |G : N_G(E)|.$$

最后，下一个引理将通过归纳考察某个正规子群的 Quillen 偏序集的同调，以及作用于其上的外部元素的中心化子，帮助我们得到非零同调。该引理的主要参考文献是 [22]。

引理 3.10。 设 G 为有限群， p 为素数。假设 $L \trianglelefteq G$ 为正规子群，且$\mathrm{O}_G(L)$ 仅由循环子群组成。那么我们有一个长正合序列

$$\ldots \to \widetilde{H}_{m+1}(\mathscr{A}_p(G)) \to \bigoplus_{B\in\mathrm{O}_G(L)} \widetilde{H}_m(\mathscr{A}_p(C_L(B))) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_m(\mathscr{A}_p(L)) \xrightarrow{j_*} \widetilde{H}_m(\mathscr{A}_p(G)) \to \ldots$$

其中， i_*和 j_*分别是由包含映射$\mathscr{A}_p(C_L(B)) \subseteq \mathscr{A}_p(L)$以及$\mathscr{A}_p(L)\subseteq\mathscr{A}_p(G)$诱导的自然映射。

特别地，以下结论成立：

(1) 令 X为子偏序集$\mathscr{A}_p(C_N(B))$对 $B \in \mathrm{O}_G(L)$的并集。我们确实有一个分解

(3.1)
$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{B\in\mathrm{O}_G(L)} \widetilde{H}_m(\mathscr{A}_p(C_L(B))) & \xrightarrow{\quad i_*\quad} & \widetilde{H}_m(\mathscr{A}_p(L)) \\ & {\scriptstyle i'_*}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle k_*} & \\ & \widetilde{H}_m(X) & \end{array}$$

其中，i'_*和 k_*也分别由包含映射$\mathscr{A}_p(C_L(B)) \subseteq X$和 $X \subseteq \mathscr{A}_p(L)$诱导。

(2) $m_p(G) \le m_p(L) + 1$。*(3)* 若对所有 $B \in O_G(L)$，都有$H_{m_p(L)-1}(\mathscr{A}_p(C_L(B))) = 0$，则$H_{m_p(L)}(\mathscr{A}_p(G)) = 0$。*(4)* 我们有一个上界

$$\begin{aligned} \dim H_{m_p(L)}(\mathscr{A}_p(G)) &\ge \sum_{B\in\mathrm{O}_G(L)} \dim \widetilde{H}_{m_p(L)-1}(\mathscr{A}_p(C_L(B))) - \dim \widetilde{H}_{m_p(L)-1}(X) \\ &\ge \sum_{B\in\mathrm{O}_G(L)} \dim \widetilde{H}_{m_p(L)-1}(\mathscr{A}_p(C_L(B))) - \dim \widetilde{H}_{m_p(L)-1}(\mathscr{A}_p(L)). \end{aligned}$$

(5) 若$m_p(G) = m_p(L) + 1$且 G不满足(⋆2)$_p$，那么对于$m = m_p(L) - 1$，我们得到包含映射

$$\bigoplus_{B\in\mathrm{O}_G(L)} \widetilde{H}_m(\mathscr{A}_p(C_L(B))) \hookrightarrow \widetilde{H}_m(X) \hookrightarrow \widetilde{H}_m(\mathscr{A}_p(L)).$$

证明。 长正合列由[22]的主要结果导出。于是，第 (1) 项中的等式（3.1）是该序列的直接推论。根据引理2.4，第 (2) 项成立。观察长正合列在$m = m_p(L)$处的末项，即可得到第 (3-5) 项。 □

4. 一些线性群满足 (Q D)$_2$

在本节中，我们证明，对于每个q，线性群 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 和 $\mathrm{PSL}_3(q)$ 都满足 (E-(Q D))，但 $q = 3$，5，9 除外。这些情形将作为例外群的基本情形；我们偶尔会发现，某些极大子群中含有线性群作为直因子。

根据[8, 命题 4.10。5], ，回顾小维线性群的 2-秩：

命题 4.1. 若 q 是奇素数的幂且 $n = 2, 3$，则 $\mathrm{PSL}_n^{\pm}(q)$ 和 $\mathrm{PGL}_n^{\pm}(q)$ 的2-秩为 2。

我们首先研究维数为 2 的线性群。

命题 4.2. 设 $L \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ 满足 q 为奇数且 $q \neq 3$。则 L 的每个2-扩张 LB 都满足 $(\mathscr{QD})_2$，，但以下情况除外：

(1) $L \cong \mathrm{PSL}_2(5)$，$B = 1$；*(2)* $L \cong \mathrm{PSL}_2(9)$，$B$ 诱导 *2* 阶域自同构。

此外，$\mathrm{Inndiag}(L) \cong \mathrm{PGL}_2(q)$ 的每个2-扩张都满足 $(\mathscr{QD})_2$，，但情况 *(2)* 除外。

证明。 我们考察 L 的可能 2-扩张。无论如何，我们知道 L 是单群，且 $\mathrm{Out}(L) = \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_a$，其中 $\mathrm{C}_2 \cong \mathrm{Outdiag}(L)$ 且 C_a 是 $\mathbb{F}_q$ 的域自同构群。设 ϕ 是 $\mathbb{F}_q$ 的一个 2 阶域自同构（若存在），并且 $d \in \mathrm{Inndiag}(L) \setminus L$ 是一个对角对合。那么 L 的 2-扩张列于表 1。该表由以下事实得出：

2-扩张 LB	$C_L(B)$	$m_2(LB)$
$B = 1$	L	2
$B = \langle\phi\rangle$	$\mathrm{PGL}_2(q^{1/2})$	3
$B = \langle d\rangle$	$\mathrm{D}_{q+\epsilon}$	2

表 1. $\mathrm{PSL}_2(q)$ 的 2-扩张，$q \geq 5$ 为奇数。这里 $q \equiv \epsilon$（模 4），$\epsilon \in \{1, -1\}$。

$\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}_2(q)) - \mathrm{PGL}_2(q)$ 的每个对合都是域自同构。还需回顾，根据引理 2.6，2 阶的域自同构与对角自同构不交换。d 的中心化子结构可由 [8] 的表 4.5.1 第一行得出。最后，注意 $L\langle d\rangle = \mathrm{Inndiag}(L)$ 且 $m_2(\mathrm{Inndiag}(L)\langle\phi\rangle) = 3$，因为 $m_2(L) = m_2(\mathrm{Inndiag}(L)) = 2$。

我们通过计算欧拉示性数，证明 L 的每个 2-扩张都满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。首先，根据定理 3.8，2- 扩张 LB 和 $\mathrm{Inndiag}(L)\langle\phi\rangle$ 的 $\mathrm{A}\,2$- 偏序集是连通的，但 $L = \mathrm{PSL}_2(5)$、$B = 1$ 除外。因此，根据引理 3.7，L 和 $\mathrm{Inndiag}(L)$ 满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$，，但 $L = \mathrm{PSL}_2(5)$ 除外。注意，$\mathrm{A}\,2(\mathrm{PSL}_2(5)) = \mathrm{A}\,2(\mathrm{Alt}_5) = \mathrm{A}\,2(\mathrm{PSL}_2(4))$ 是含有 5 个点的同伦离散空间，而 2-扩张 $\mathrm{PGL}_2(5) \cong \mathrm{Sym}_5$ 确实满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。由此可得出该陈述在 $q = 5$ 情形下的结论。

接下来，我们证明 2-扩张 $L\langle\phi\rangle$ 和 $\mathrm{Inndiag}(L)\langle\phi\rangle$ 满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$；根据引理3.3，二者的 2-秩均为 3。因此，只需证明 $L\langle\phi\rangle$ 满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。为此，我们计算 $H_1(\mathrm{A}\,2(L))$ 和 $H_1(\mathrm{A}\,2(C_L(\phi)))$ 的维数。

由于在这种情况下 q 是一个平方，$q \neq 5$。其次，如果 $q = 25$，$C_L(\phi) = \mathrm{PGL}_2(5)$。因此，无论哪种情况，这些一阶同调群的维数都可以根据底层 $\mathscr{A}_2$-偏序集的约化欧拉示性数计算。这里我们使用命题 3.9中给出的公式。因此，对于 $K = L$ 或 $C_L(\phi)$，

$$\begin{aligned}\dim H_1(\mathscr{A}_2(K)) &= -\widetilde{\chi}(\mathscr{A}_2(K)) \\ &= 1 - \#\text{ of involutions in } K + 2 \cdot \#\text{ of 4-subgroups of } K.\end{aligned} \tag{4.1}$$

表 2 列出了这些数值：

表 2 的证明。 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 中对合和 4 阶子群的数量 可由 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 子群的 Dickson 分类推出（另见 [8]的定理 6.5.1）。

群	对合数	4 阶子群数
$\mathrm{PSL}_2(q)$	$\frac{q(q+\epsilon)}{2}$	$\frac{q(q^2-1)}{24}$
$\mathrm{PGL}_2(q)$	q^2	$\frac{q(q^2-1)}{6}$

表 2。这里 $q \equiv \epsilon$ (模 4)， $\epsilon \in \{1,-1\}$。

$\mathrm{PGL}_2(q)$ 中对合的数量 可由其中存在唯一的对角对合共轭类得出， d 根据 [8]表 4.5.1。因此，该共轭类中的元素数等于 $^{q}_{(q-\epsilon)}2$ ，再加上 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 中对合的数量，即得 q^2。

最后，为了计算 $\mathrm{PGL}_2(q)$ 的四元子群数，我们按如下方式进行：$\mathrm{PGL}_2(q)$ 的每个四元子群要么包含在 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 中，要么包含 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 的一个唯一对合以及 2 个对角对合。因此，对于给定的对角对合 d，包含 d的 4 阶子群与 $C_L(d) \cong \mathrm{D}_{q+\epsilon}$ 中的对合之间存在一一对应。这表明每个对角对合都包含在 $(q+\epsilon)/2$ 个 4 阶子群中。由于我们有$_{q(q-\epsilon)}2$ 个对角对合，$\mathrm{PGL}_2(q)$ 中包含对角对合的 4 阶子群总数为

$$\frac{q(q-\epsilon)}{2} \cdot \frac{(q+\epsilon)}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{q(q^2-1)}{8}.$$

因此，$\mathrm{PGL}_2(q)$ 中 4 阶子群的总数为

$$\frac{q(q^2-1)}{24} + \frac{q(q^2-1)}{8} = \frac{q(q^2-1)}{6}.$$

表2的证明至此完成。 □

事实上，由表 2，我们可以得到 A 2($\mathrm{PSL}_2(q)$) 和 A 2($\mathrm{PGL}_2(q)$) 的一阶同调群维数的具体值：

$$\dim H_1(\mathscr{A}_2(\mathrm{PSL}_2(q))) = -\widetilde{\chi}(\mathscr{A}_2(\mathrm{PSL}_2(q))) = \frac{1}{12}(q-\epsilon)(q^2-(6-\epsilon)q-\epsilon 12), \tag{4.2}$$

$$\dim H_1(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGL}_2(q))) = -\widetilde{\chi}(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGL}_2(q))) = \frac{1}{3}(q-3)(q^2-1). \tag{4.3}$$

Now 我们需要描述 $\mathrm{PSL}_2(q)$ hϕi 和 $\mathrm{PGL}_2(q)$ h 中域自同构的数量 $\phi\rangle$.

回顾一下，$\mathrm{PSL}_2(q)$ hϕi 的域自同构在 $\mathrm{PGL}_2(q)$ 下共轭，其中心化子为$C_{\mathrm{PGL}_2(q)}(\phi)$ = $C_{\mathrm{PSL}_2(q)}(\phi)$。因此，$\mathrm{PSL}_2(q)$ hϕi 中 2 阶域自同构的数量恰为

$$\frac{|\mathrm{PGL}_2(q)|}{|C_{\mathrm{PSL}_2(q)}(q)|} = \frac{q(q^2-1)}{q^{1/2}(q-1)} = q^{1/2}(q+1).$$

这给出了 $q^{1/2}(q+1)$个对合，属于 $\mathrm{PSL}_2(q)\langle\phi\rangle\backslash\mathrm{PSL}_2(q)$。令 $L = \mathrm{PSL}_2(q)$， $B = \langle\phi\rangle$。根据引理3.10、表 2 中的数值及公式（4.1），我们得出：

$$\begin{aligned}\dim H_2(\mathscr{A}_2(LB)) &\geq q^{1/2}(q+1)\dim H_1(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGL}_2(q^{1/2}))) - \dim H_1(\mathscr{A}_2(\mathrm{PSL}_2(q)))\\ &= q^{1/2}(q+1)\frac{1}{3}(q^{1/2}-3)(q-1) - \frac{1}{12}(q-1)(q^2-5q-12)\\ &= \frac{1}{4}(q^{1/2}-1)(q-1)(q^{3/2}-3q-4).\end{aligned}$$

注意， $q \equiv 1$ （模 4）。上述数对所有 $q \geq 13$ 都为正；我们的情形正是如此，因为 q是奇素数的偶次幂，且根据假设 $q \neq 9$。因此我们得出， $LB = \mathrm{PSL}_2(q)$ hϕi

满足 (Q D)$_2$。那么 PGL$_2(q)$ hϕi 也满足 (Q D)$_2$。此外，

$$\begin{aligned}\dim H_2(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGL}_2(q)\langle\phi\rangle)) &\geq \dim H_2(\mathscr{A}_2(\mathrm{PSL}_2(q)\langle\phi\rangle)) \\ &\geq \frac{1}{4}(q^{1/2}-1)(q-1)(q^{3/2}-3q-4).\end{aligned} \tag{4.4}$$

我们已经证明，PSL$_2(q)$ 和 PGL$_2(q)$ 的每一种可能的 2-扩张都满足 (Q D)$_2$,，但定理陈述中描述的情形除外。□

我们注意到，命题 4.2 中排除的情形实际上不满足 (Q D)$_2$。事实上，PSL$_2$(5) 不满足 (Q D)$_2$，因为它的 2- 秩为 2，且 A 2 (PSL$_2$(5)) =A 2(PSL$_2$(4)) 是同伦离散的。下面的例子详细说明了 PSL$_2$(9) hϕi 和 PGL$_2$(9) hϕi 不满足 (Q D)$_2$,，其中 ϕ 是一个 2 阶域自同构。

例 4.3。令 $L = \mathrm{PSL}_2(9)$，并令 $A = \mathrm{Aut}(L)$。那么 $A/L \cong \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$,，因此 L 的每个 2-扩张都是 A 的非平凡正规子群。这给出了 L 的 3 种可能的 2-扩张，但不是 4 种。令 ϕ 为 L 的一个域自同构，d 为 L 的一个对角自同构，二者的阶均为 2。那么 L 的可能 2-扩张为：

(1) L，2-秩为 2，满足 (Q D)$_2$，且 H_1(A 2(L)) 的秩为 16；(2) L hϕi，2-秩为 3，不满足 (Q D)$_2$，因为 $C_L(\phi) \cong \mathrm{Sym}_4$，其 2-核非平凡$O_2(C_L(\phi)) \cong \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 \neq 1$；(3) Lhdi =PGL$_2$(9)，2-秩为 2，满足 (Q D)$_2$，且 H_1(A 2 (L) hdi) 的秩为 160，并且$C_L(d) \cong \mathrm{D}_{10}$。

注意，Aut(L) 的 2-秩为 3，不满足 (Q D)$_2$,，并且它不是 L 的 2-扩张，因为对角自同构和域自同构在 Aut(L) 中不交换。另外，PGL$_2$(9) hϕi 不满足 (Q D)$_2$，因为 $C_{\mathrm{PGL}_2(9)}(\phi) = C_L(\phi)$ 的 2-核非平凡。

此外，还有一个不属于前述情形的几乎单群 N with $L < N < \mathrm{Aut}(L)$。这是扩张 N =PSL$_2$(9)。2 $\cong$ Alt$_6$ 。2，并且满足 A 2 (N) =A 2 (L)。因此，尽管该群 $N$is 不是 L 的 2- 扩张，但它是一个 “ 非分裂 2- 扩张 ”，并且确实满足 (Q D)$_2$。

最后，这些计算表明，A 2(L) $\hookrightarrow$A 2(Aut(L)) 在同调中诱导了一个包含关系，因此给出了一个非零映射。根据主要结果，[17], PSL$_2$(9) 不是 Quillen 猜想的极小反例的一个分量。

我们的下一个目标是证明 PSL$_3(q)$ 的 2-扩张满足 (Q D)$_2$,，但有少数例外。我们需要下面的引理，它记录了某些线性群以及维数 3 的酉群的 Quillen 偏序集的欧拉示性数值。

引理 4.4. 对于 $L = \mathrm{PSL}_n(q)$ 且 n 为奇数时，我们有

$$\widetilde{\chi}(\mathscr{A}_2(L)) = \widetilde{\chi}(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGL}_n(q))) = \frac{(-1)^n}{n}\prod_{i=1}^{n-1}(q^i-1)f_n(q),$$

其中 $f_n(q)$ 表示 [25] 中所述的一个多项式。例如，$f_3(q) = q^3+3q^2+3q+3$。此外，由于 $\mathscr{A}_2(L)$ 是维数为 $n-2$ 的 *Cohen-Macaulay*，以上欧拉示性数给出了 $H_{n-2}(\mathscr{A}_2(L))$ 的维数。

若 $L = \mathrm{PSU}_3(q)$，则

$$\widetilde{\chi}(\mathscr{A}_2(L)) = \widetilde{\chi}(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGU}_3(q))) = \frac{1}{3}(q^6-2q^5-q^4+2q^3-3q^2+3).$$

证明。 $\mathrm{PGL}_n(q)$ 的欧拉示性数由[25]的命题 4.1 和定理 4.4 得出（注意，定理 4.4 中的公式有一处笔误，乘积应取到 $r-1$）。此外，由于 n 为奇数，根据 [19], 的命题 7.5，$\mathrm{A}\,2(\mathrm{PSL}_n(q)) = \mathrm{A}\,2(\mathrm{PGL}_n(q)) = \mathrm{A}\,2(\mathrm{GL}_n(q))_{>Z}$，其中 Z 是 $Z(\mathrm{GL}_n(q))$ 的 2 阶循环子群。根据[21]（另见 [25]），$\mathrm{A}\,2(\mathrm{PSL}_n(q))$ 是维数为 $n-2$ 的 Cohen-Macaulay。

$\mathrm{PGU}_3(q)$ 的公式由 [19] 的例 7.6 得出。 □

接下来，我们证明 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 的 2-扩张满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$, , 但 $q=3$ 除外。在我们对 $\mathrm{PSL}_3(q)$ 的分析中，这些情形将十分重要，尤其是在处理由图-域自同构得到的 2-扩张时。

命题 4.5。 设 $L=\mathrm{PSU}_3(q)$。则 L 满足 $(E\text{-}(\mathcal{QD}))$，其中 $q\neq 3$。此外，设 ϕ 是 L 的一个阶为 2 的图自同构。则有

$$\begin{aligned}\dim H_2(\mathrm{A}\,2(\mathrm{PGU}_3(q)\,\mathrm{h}\phi\mathrm{i})) &\geq \dim H_2(\mathrm{A}\,2(\mathrm{PSU}_3(q)\,\mathrm{h}\phi\mathrm{i}))\\ &\geq \frac{1}{3}(q^2-1)(q+1)\left(\frac{q^2(q^2-q+1)}{(3,q+1)}(q-3)-(q^3-3q^2+3q-3)\right),\end{aligned}$$

这是关于 $q>3$ 的一个正多项式。最后，对于 $q=3$，$\mathrm{PSU}_3(3)$ 满足 $(\mathcal{QD})_2$，但$\mathrm{PSU}_3(3)\langle\phi\rangle$ 不满足 $(\mathcal{QD})_2$。

证明。 我们有 $\mathscr{A}_2(L)$ 由定理 3.8可知是连通的，而 $m_2(L)=2$ 由命题 4.1可知。因此，L 由引理 $(\mathcal{QD})_2$ 满足条件，见引理 3.7。此外，由引理 4.4,

$$\dim H_1(\mathscr{A}_2(L)) = -\widetilde{\chi}(\mathscr{A}_2(L)) = \frac{1}{3}(q^6-2q^5-q^4+2q^3-3q^2+3). \tag{4.5}$$

接下来，唯一可能的非平凡 2-扩张是通过一个 2 阶图自同构 ϕ 对 L 进行扩张（该自同构确实由域自同构 $x\mapsto x^q$ 导出）。设 $L_1=L\mathrm{h}\phi\mathrm{i}$ 是这样的扩张。根据 [8], 的表 4.5.1

$$C_{\mathrm{PGU}_3(q)}(\phi)\cong \mathrm{Inndiag}(\Omega_3(q)) = \mathrm{PGL}_2(q).$$

这意味着 $C_L(\phi)=\mathrm{PGL}_2(q)$。此外，存在唯一的 $\mathrm{PGU}_3(q)$-共轭类图自同构，而这类元素在 $\mathrm{Outdiag}(L)=(3,q+1)$ 上的作用是取逆。因此，ϕ 在 $\mathrm{Out}(L)$ 中的共轭类大小为 $(3,q+1)$，这恰好产生 $(3,q+1)$ 个扩张$L\mathrm{h}\phi'\mathrm{i}\leq\mathrm{Aut}(L)$，即由 ϕ 的一个共轭元 ϕ' 对 L 作出的扩张；这些扩张在 $\mathrm{Aut}(L)$ 下共轭。因此我们得出，包含在 L_1 中的图自同构数量为

$$n_g := \frac{|\mathrm{PGU}_3(q)|}{|\mathrm{PGL}_2(q)|(3,q+1)} = \frac{q^2(q^3+1)}{(3,q+1)}.$$

最后，根据引理 3.10，我们得出

$$\begin{aligned}\dim H_2(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGU}_3(q)\langle\phi\rangle)) &\geq \dim H_2(\mathscr{A}_2(\mathrm{PSU}_3(q)\langle\phi\rangle))\\ &\geq n_g\dim H_1(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGL}_2(q))) - \dim H_1(\mathscr{A}_2(\mathrm{PSU}_3(q)))\\ &= \frac{q^2(q^3+1)}{(3,q+1)}\frac{1}{3}(q-3)(q^2-1)-\frac{1}{3}(q^6-2q^5-q^4+2q^3-3q^2+3)\\ &= \frac{1}{3}(q^2-1)(q+1)\left(\frac{q^2(q^2-q+1)}{(3,q+1)}(q-3)-(q^3-3q^2+3q-3)\right).\end{aligned}$$

该多项式对所有 $q>3$ 均为正。因此，当 $q\neq 3$ 时，L_1 满足 (有理数域 $\mathrm{D}\,)_2$。

当 $q=3$, $C_L(\phi)=\mathrm{PGL}_2(3)$ 具有非平凡的 2-核时，因此 $H_1(\mathrm{A}\,2(C_L(\phi)))=0$；由引理3.10，$H_2(\mathrm{A}\,2(L_1))=0$。 □

现在我们已具备必要的背景知识，可以证明 $\mathrm{PSL}_3(q)$ 满足 (E-(Q D))，只有少数情况例外。

命题4.6。设 $L = \mathrm{PSL}_n(q)$，其中 n, q 为奇数。以下断言成立：

(1) L 和 L 经域对合扩张后满足 $(\mathcal{QD})_2$。*(2)* 若 $n = 3$，则 L 的每个 2-扩张都满足 $(\mathcal{QD})_2$，，但以下例外不满足 $(\mathcal{QD})_2$：

- $L = \mathrm{PSL}_3(3)$ 经图自同构扩张，并且
- $L = \mathrm{PSL}_3(9)$ 经由域对合和图自同构生成的群扩张。

证明。设 $L = \mathrm{PSL}_n(q)$，其中 n 为奇数，并考虑底层模 $V = \mathbb{F}_q^n$的一个一维子空间的稳定子 P。则 P 是一个抛物子群，其结构为 $P \cong [q^{n-1}]L_P$，其中 L_P 是 P 的 Levi 补，结构为 $\mathrm{SL}_{n-1}(q) \circ_{(n,q-1)} C_{q-1}$。因此 $|L_P| = |\mathrm{GL}_{n-1}(q)|/(n, q-1)$，且 P 在 L 中的指数为：

$$|L : P| = \frac{q^{n(n-1)/2} \prod_{i=2}^{n}(q^i - 1)}{q^{n-1} \cdot q^{(n-1)(n-2)/2} \prod_{i=1}^{n-1}(q^i - 1)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1.$$

由于 n 为奇数，P 在 $\mathrm{PSL}_n(q)$ 中的指数为奇数。根据引理 3.6，$L = \mathrm{PSL}_n(q)$ 以及由域对合扩张得到的 L 满足 $(\mathcal{QD})_2$。这证明了第 (1) 项。

在转向 $n = 3$ 的情形之前，我们列出 L 的所有可能的 2-扩张。分别用 ϕ、γ 和 δ 表示 L 的 2 阶域自同构、图自同构和图-域自同构，使得 $[\phi, \gamma] = 1$ 和 $\delta = \phi\gamma$。再令 $L^* = \mathrm{PGL}_n(q)$。那么 L 的 2-扩张为：

(i) L；(ii) $L\langle\phi\rangle$，其中 $C_{L^*}(\phi) \cong \mathrm{PGL}_n(q^{1/2})$，由命题 2.5 得出；(iii) $L\langle\gamma\rangle$，其中 $C_L(\gamma) \cong \mathrm{Inndiag}(\Omega_n(q))$，见 [8] 的表 4.5.1；(iv) $L\langle\delta\rangle$，其中 $C_{L^*}(\delta) \cong \mathrm{PGU}_n(q^{1/2})$，由命题 2.5 得出；(v) $L\langle\phi, \gamma\rangle$，其中 $C_L(\phi, \gamma) \cong \mathrm{Inndiag}(\Omega_n(q^{1/2}))$，由 (iii) 和命题 2.5 得出。

现在假设 $n = 3$，也就是说 $L = \mathrm{PSL}_3(q)$。根据抛物子群论证，我们知道上文情形 (i) 和 (ii) 的扩张满足 $(\mathcal{QD})_2$。因此，剩下需要证明的是，由图自同构、图—域自同构以及图自同构和域自同构共同构成的 2-扩张满足 $(\mathcal{QD})_2$。为此，我们计算最高次同调群的维数，这与我们在命题 4.2 的证明中对 $\mathrm{PSL}_2(q)$所做的类似。

首先，回顾一下各类型对合的数量如下。令 $B = \langle\phi, \gamma\rangle$。

$$\begin{aligned}
n_f &:= \#\text{ field involutions in } L\langle\phi\rangle = \#\text{ field involutions in } LB \\
&= \frac{|\mathrm{PGL}_3(q)|}{|\mathrm{PGL}_3(q^{1/2})|(3, q^{1/2}+1)}, \\
n_g &:= \#\text{ graph involutions in } L\langle\gamma\rangle = \#\text{ graph involutions in } LB \\
&= \frac{|\mathrm{PGL}_3(q)|}{|\mathrm{PGL}_2(q)|(3, q-1)}, \\
n_{gf} &:= \#\text{ graph-field involutions in } L\langle\delta\rangle = \#\text{ graph-field involutions in } LB \\
&= \frac{|\mathrm{PGL}_3(q)|}{|\mathrm{PGU}_3(q^{1/2})|(3, q^{1/2}-1)}.
\end{aligned}$$

为计算这些数量，我们利用了各情形下中心化子的结构、每种类型的对合都只有一个 L^*-共轭类这一事实，以及 $\mathrm{Out}(L) = \langle \phi, \gamma \rangle \cong (3, q-1)$：（参见[8]中的定理 2.5.12）。

设 t 是 L 的域对合、图对合或图-域对合，且 $L_1 = L\langle t \rangle$。则 $L_1 \setminus L$ 中对合的数量 n_1 为 n_f，n_g 或 n_{gf}，具体取决于 t 的类型。另请注意，$m_2(L_1) = m_2(L) + 1 = 3$。

根据引理 3.10，

$$\dim H_2(\mathscr{A}_2(L_1)) \geq n_1 \cdot \dim H_1(\mathscr{A}_2(C_L(t))) - \dim H_1(\mathscr{A}_2(L)). \tag{4.6}$$

我们在各个情形下利用引理 4.4 和式 (4.3) 计算 $d(t) := \dim H_1(A\,2(C_L(t)))$。注意，根据上文的 (ii)，$\Omega_1(C_L(\phi)) = \mathrm{PSL}_3(q^{1/2})$。此外，根据经典同构 $\mathrm{Inndiag}(\Omega_3(q)) \cong \mathrm{PGL}_2(q)$，$C_L(\gamma) = \mathrm{PGL}_2(q)$。由引理 4.4 可得：

$$d(\phi) = \dim H_1(\mathscr{A}_2(\mathrm{PSL}_3(q^{1/2}))) = \frac{1}{3}(q^{1/2}-1)(q-1)(q^{3/2}+3q+3q^{1/2}+3),$$

$$d(\gamma) = \dim H_1(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGL}_2(q))) = \frac{1}{3}(q-3)(q^2-1),$$

$$d(\delta) = \dim H_1(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGU}_3(q^{1/2}))) = \frac{1}{3}(q^3-2q^{5/2}-q^2+2q^{3/2}-3q+3).$$

令 $d :=$ 维数 $H_1(\mathscr{A}_2(L))$。由式（4.2，该维数为

$$d = \frac{1}{12}(q-\epsilon)(q^2-(6-\epsilon)q-\epsilon 12),$$

满足 $q \equiv \epsilon$（模 4）且 $\epsilon \in \{\pm 1\}$。

现在不难验证，$n_1 d(t) > d$ 当且仅当 $t = \gamma$ 或 $t = \delta$，若且唯若 $(t, q) \neq (\gamma, 3)$。事实上，对于 $q = 3$，$C_L(\gamma) = \mathrm{PGL}_2(3) \cong \mathrm{Sym}_4$ 具有非平凡的 2-核，因此 $d(\gamma) = 0$，从而，$H_2(L\langle \gamma \rangle) = 0$。这表明，若 $q = 3$，则 $L\langle \gamma \rangle$ 不满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。因此，L 的 2-扩张若通过域对合、图对合或图-域对合扩张，则满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$ 当且仅当 L 通过图对合扩张时 $q \neq 3$。

剩下要证明 $LB = L\langle \phi, \gamma \rangle$ 满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。对于这种情况，我们取 $L_f = L\langle \phi \rangle, L_2 = LB$，并考虑引理 3.10 在 $m = 2$ 处的长正合列（因为 $m_2(L_2) = 4$）。也就是说，我们需要证明 $H_3(A\,2(L_2)) \neq 0$。

注意，对合的集合 $t \in L_2 \setminus L_1$ 恰好是扩张 $L_2 = LB$ 的所有图自同构和图-域自同构组成的集合。令 $d_g := \dim H_2(A\,2(\mathrm{PGL}_2(q)\langle \phi \rangle))$，$d_{gf} := \dim H_2(A\,2(\mathrm{PGU}_3(q^{1/2})\langle \phi \rangle))$，且 $d_f := \dim H_2(A\,2(L_f))$。因此，由引理 3.10，

$$\dim H_3(\mathscr{A}_2(L_2)) \geq n_g d_g + n_{gf} d_{gf} - d_f. \tag{4.7}$$

我们通过给出维数 d_g、d_{gf} 和 d_f 的适当上界，证明当 $q \neq 9$ 时该等式右侧为正。

由等式 (4.4)，

$$d_g = \dim H_2(\mathscr{A}_2(\mathrm{PGL}_2(q)\langle \phi \rangle)) \geq \frac{1}{4}(q^{1/2}-1)(q-1)(q^{3/2}-3q-4). \tag{4.8}$$

接下来，由命题 4.5，

$$d_{gf} \geq \frac{1}{3}(q-1)(q^{1/2}+1)\left(\frac{q(q-q^{1/2}+1)}{(3, q^{1/2}+1)}(q^{1/2}-3) - (q^{3/2}-3q+3q^{1/2}-3)\right), \tag{4.9}$$

对所有 $q > 9$ 均为正。

最后，我们需要给 d_f 一个上界。事实上，由引理 3.10 在 $m = 2$，我们有

$$\begin{aligned} d_f &= \dim H_2(\mathscr{A}_2(L_f)) = \dim H_2(\mathscr{A}_2(\mathrm{PSL}_3(q)\langle\phi\rangle)) \\ &\le n_f \dim H_1(\mathscr{A}_2(\mathrm{PSL}_3(q^{1/2}))) \\ &= \frac{q^{3/2}(q+1)(q^{3/2}+1)}{(3, q^{1/2}+1)}. \end{aligned}$$

现在我们利用给定的上界验证 $n_g d_g + n_{gf} d_{gf} - d_f$ 当且仅当 $q > 9$ 时为正。事实上，若 $q = 9$，类似的论证可得 $H_3(\mathscr{A}_2(LB)) = 0$ 因为 $d_g = 0$ 由例4.3 以及 $d_{gf} = 0$ 由命题4.5。

我们得出结论：除 $\mathrm{PSL}_3(q)$ 外，所有 2-扩张都满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$,；例外情形为 $\mathrm{PSL}_3(3)$ 经图自同构扩张，以及 $\mathrm{PSL}_3(9)$ 经域自同构和图自同构扩张，这两种情形实际上均不满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。□

5. 李型例外群上的 Quillen 维数性质

我们利用前几节的结果证明，除有限多个例外情形外，李型例外群的 2-扩张均满足 $(\mathcal{QD})_2$。为此，先回顾各情形下可能出现的 2-扩张会很有帮助。表3列出了伴随型李型例外群的 2-秩及其外自同构群的结构。由此，我们可以计算各情形下可能出现的 2-扩张。请注意，我们采用文献[8]中的术语。2-秩取自 [4] 和 [8,命题 4.10。5]。

群	2-秩	外对角群	外自同构群/对角外自同构群
${}^3D_4(q)$	3	1	3Φ
$G_2(q)$	3	1	$\Phi\Gamma$，其中 $\lvert\Phi\Gamma :\ q = 3^a$ 时为 $\Gamma\rvert = 2$，否则为 $\Gamma = 1$
${}^2G_2(q)$	3	1	Φ（奇数阶）
$F_4(q)$	5	1	Φ
$E_6(q)$	6	$(3,\ q-1)$	$\Phi \times \Gamma, \Gamma \cong \mathrm{C}_2$
${}^2E_6(q)$	6	$(3, q+1)$	2Φ
$E_7(q)$	8	2	Φ
$E_8(q)$	9	1	Φ

表 3。除非另有说明，外自同构群/对角外自同构群为循环群；$\Phi = \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{C}_a$，其中 $q = r^a$、r 为奇素数，且扭曲类型采用通常的约定。此外，Γ 是一组图自同构。

5.1. **情形 $G_2(q)$ 和 ${}^2G_2(q)$。** 我们首先证明 Ree 群 ${}^2G_2(q)$ 满足 $(\mathcal{QD})_2$ 当且仅当 $q \neq 3$。注意，例如根据表 3，${}^2G_2(q)$ 没有非平凡的 2-扩张。

命题 5.1. 设 L 是 *Ree* 群 ${}^2G_2(q)$，其中 q 是 *3* 的奇正整数次幂。则以下结论成立：

(1) L 没有非平凡的2-扩张。*(2)* L 的一个 *Sylow* 2-子群是阶为8的初等阿贝尔群，因此 $m_2(L) = 3$。*(3)* L 中阶相同的2-子群彼此共轭。*(4)* L 满足 $(\mathcal{QD})_2$ 当且仅当 $q \neq 3$。此外，若 $q > 3$，则

$$\dim H_2(\mathscr{A}_2(L)) \ge \widetilde{\chi}(\mathscr{A}_2(L)) = \frac{1}{21}(q^2-1)(q^5 - 8q^4 + 15q^3 + 21) > 0. \tag{5.1}$$

(5) 对于 $q = 3$, $\mathscr{A}_2(L) = \mathscr{A}_2(\mathrm{PSL}_2(8))$与一个含8个点的离散空间同伦等价。

证明。 条目（1-3）是关于 Ree 群的众所周知的事实，可见 [24]。

如果 $L = {}^2G_2(3)$，那么 $L' = \mathrm{PSL}_2(8)$ 在 L 中的指数为 3，并且 $\mathrm{A}\,2(L) \cong \mathrm{A}\,2(\mathrm{PSL}_2(8))$ 与一个含有 8 个点的离散空间同伦等价。由于 $m_2(L) = 3$，我们得出 L 不满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$ 对于 $q = 3$。这证明了条目（5）以及条目（4）的“当且仅当”中的“仅当”部分。

现在假设 $q \neq 3$ 且 $L = {}^2G_2(q)$。根据条目（2），$\mathrm{A}\,2\,(L)$ 的维数为 2；我们证明其第二同调群非零。为此，只需证明其欧拉示性数为正，因为根据定理 3.8，对于 $q \neq 3$，$\mathrm{A}_2(L)$ 是连通的。事实上，$\mathrm{e}\chi(\mathrm{A}\,2(L)) = \dim H_2(\mathrm{A}\,2(L)) - \dim H_1(\mathrm{A}\,2(L)) \leq \dim H_2(\mathrm{A}\,2(L))$。

我们引用 [10] 的定理 C 来描述 2-子群的正规化子：一个对合的中心化子是 $2\times \mathrm{PSL}_2(q)$，一个四元子群的正规化子是 $(2^2 \times \mathrm{D}_{\underline{q+1}}) : 3$，而一个 Sylow 2-子群的正规化子是 $2^3 : 7 : 3$。根据这些信息、条目 (2,3) 和命题 3.9，我们可以计算 $\mathrm{A}\,2(L)$ 的欧拉示性数：

$$\begin{aligned}\widetilde{\chi}(\mathscr{A}_2(L)) &= -1 + \frac{|L|}{2|\,\mathrm{PSL}_2(q)|} - 2\frac{|L|}{6(q+1)} + 8\frac{|L|}{168}\\ &= -1 + q^3(q^3+1)(q-1)\left(\frac{1}{q(q^2-1)} - \frac{1}{3(q+1)} + \frac{1}{21}\right)\\ &= \frac{1}{21}(q^2-1)(q^5 - 8q^4 + 15q^3 + 21).\end{aligned}$$

由于多项式 $q^5 - 8q^4 + 15q^3 + 21$ 对每个素数幂 $q \neq 4$都为正，我们得出 $H_2(\mathrm{A}\,2(L)) \neq 0$。因此，当 $q \neq 3$时， L满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$。这就完成了条目 (4) 的证明，进而也完成了本命题的证明。□

对于 $G_2(q)$ 的情形，请读者参阅 P. Kleidman [10]对 $G_2(q)$ 的极大子群分类。我们将沿用该文的术语。

命题 5.2. 设 $L = G_2(q)$，其中 q 为奇数。则 L 的每个 2-扩张都满足$(\mathscr{QD})_2$，，但 $G_2(3)$ 的 2-扩张以及由域对合得到的 $G_2(9)$ 的 2-扩张除外。

证明。 设 $L = G_2(q)$。我们首先证明 $G_2(q)$ 及其通过 2 阶域自同构得到的扩张满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$，，方法是展示一个满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$且秩相同的极大子群。

根据 [10] 中的定理 A， $G_2(q)$ 含有子群 $K_+ = \mathrm{SL}_3(q) : 2$。令 $L_+ = F^*(K_+) \cong \mathrm{SL}_3(q)$ 和 $Z = Z(L_+)$。那么 $L_0 := L_+/Z = \mathrm{PSL}_3(q)$，且 $H_0 := K_+/Z = L_0\langle\gamma\rangle$，其中 γ 在 L_0 上诱导图自同构（见命题 2.2 及其在 [10] 中的证明）。根据命题4.6，若 $q \neq 3$，则 L_0 满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$，因此 H_0 满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$。

另一方面， $m_2(L) = 3$ 由表3得出，而且 $m_2(L_0) = 3$ 由命题4.6的证明得出。回顾引理3.2可知

$$\widetilde{H}_*(\mathscr{A}_2(H_0)) = \widetilde{H}_*(\mathscr{A}_2(K_+/Z)) \subseteq \widetilde{H}_*(\mathscr{A}_2(K_+)).$$

特别地，我们得到最高次同调群之间的以下包含关系

$$\widetilde{H}_2(\mathscr{A}_2(H_0)) \subseteq \widetilde{H}_2(\mathscr{A}_2(K_+)) \subseteq \widetilde{H}_2(\mathscr{A}_2(L)),$$

这表明，如果 $q \neq 3$，那么 L 满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$。

接下来， $L = G_2(q)$ 的非平凡 2-扩张只能由 2 阶域自同构给出，条件是 q 不是 3 的幂。此外，根据 [10]，中给出的子群 K_+ 的构造， $G_2(q)$ 的域自同构会在（某个适当的共轭

的） K_+ 上诱导域自同构，因而也会在商群 H_0 上诱导域自同构。因此，对于诱导域自同构的 $B \in O_2(L)$，我们可以令 K_+ 被 B 固定；于是，经过适当选择共轭元，有 $K_+B \cong SL_3(q) : (2 \times B)$（回忆一下，$\mathrm{Out}(SL_3(q)) = (3, q-1) : (\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q) \times \Gamma)$，其中 $\Gamma = 2$ 是由图自同构构成的群）。与之前类似，我们有一个分裂扩张 $K_+B/Z = L_0B'$，其中 $B' = \langle \gamma \rangle \times B \in O(L_0)$。由命题4.6，若 $q \neq 9$，则 L_0B' 满足 $(QD)_2$。与前一种情况类似，$m_2(L_0B') = 4 = m_2(L) = m_2(K_+B)$，并且我们在三次同调群中得到一个包含关系，这表明 K_+B 和 LB 满足 $(QD)_2$。因此，若 $q \neq 9$，则由 2 阶域自同构扩张 L 所得到的扩张满足 $(QD)_2$。

剩下的情形是 $q = 3^a$。根据 [8] 的表 4.5.1（另见 [8] 的定理 2.5.12），$\mathrm{Aut}(L)$ 中可能出现的只有域自同构或图-域自同构。上文已证明，L 被一个 2 阶域自同构扩张时，若 $q \neq 9$，则满足 $(QD)_2$。因此，我们需要证明：若 L 的 t 是图-域自同构，则 $L\langle t \rangle$ 满足 $(QD)_2$。此时，$q = 3^{2a+1}$，且根据命题 2.5，$C_L(t) = {}^2G_2(q)$，其 2-秩为 3。因此，$m_2(L\langle t \rangle) = 4$。然而，根据 [10]，的定理B，$L\langle t \rangle$ 中包含 t 的每个极大子群要么是 2-局部的，要么 2-秩至多为 3。这说明我们无法像之前那样通过极大子群继续论证。鉴于此，我们将利用引理 3.10 的长正合列进行论证。

我们有子群 $M_0 := C_L(t) = {}^2G_2(q)$、$M_1 := G_2(3)\langle t \rangle \leq L\langle t \rangle$ 和 $M_2 := {}^2G_2(3)$，使得 $M_2 \leq M_1 \cap M_0$。取 A 为 M_2的一个 Sylow 2-子群。由命题5.1(2)和 [10, Lm. 2.4]，A 也是 M_0的一个 Sylow 2-子群，并且它在 L中是自中心化的，即 $C_L(A) = A$。直接计算还表明 $N_{M_2}(A) = A$。$PSL_3(2)$，这立即推出 $N_L(A) = A$。$PSL_3(2)$。

现在，反设 $L\langle t \rangle$ 不满足 $(QD)_2$，，也就是说，同调群$H_3(A_2(L\langle t \rangle))$ 消失。回忆一下，$C_L(t) = {}^2G_2(q)$，且由命题 2.5(4)，存在唯一的 L-对合共轭类 $t' \in L\langle t \rangle - L$。令 $X = \eth_{C_L(t)\, x \in L/C_L(t)} A_2(C_L(t^x))$。由引理 3.10，我们得到包含关系

$$\bigoplus_{L/C_L(t)} H_2(\mathcal{A}_2(C_L(t))) \hookrightarrow H_2(X) \hookrightarrow H_2(\mathcal{A}_2(L)). \tag{5.2}$$

Set

$$d := \dim H_2(X),$$
$$d' := \dim \bigoplus_{L/C_L(t)} H_2(\mathcal{A}_2(C_L(t))) = |L : C_L| \dim H_2(\mathcal{A}_2({}^2G_2(q))).$$

式（5.2）表明 $d' \leq d$。然而，我们将证明 $d < d'$，从而得出矛盾。

另一方面，我们有 X 是 A_2-偏序集的并。因此，每个点以下都有最大可能维数的球面的楔和。这意味着，X 的同调可以由如下链复形得到：在度数 i，它由 X 中高度为 i 的每个点以下的球面自由生成。特别地，对于 $i = 2$，高度为 2 的点对应于 $M_0 = C_L(t)$和 M_2的固定 Sylow 2-子群 A的共轭元。因此，

$$d = \dim H_2(X) \leq |L : N_L(A)| \cdot \#\text{ spheres below } A = \frac{q^6(q^6-1)(q^2-1)}{168}.$$

另一方面，根据命题 5.1(4),

$$d' \geq |L : C_L(t)| \cdot \widetilde{\chi}(\mathcal{A}_2({}^2G_2(q))) = q^3(q^3-1)(q+1)\frac{1}{21}(q^2-1)(q^5-8q^4+15q^3+21).$$

最后，由 d 和 d'的这些上界，不难得出 $d' > d$ 对所有素数幂 $q \geq 7$都成立，这正是我们的情形。这与等式 (5.2) 矛盾，因此说明$H_3(\mathrm{A}\,2(L\,\mathrm{h}t\mathrm{i})) \neq 0$，也就是说， $L\,\mathrm{h}t\mathrm{i}$ 满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$。命题的证明至此完成。□

例 5.3. 令 $L = G_2(3)$。我们证明 $\mathscr{A}_2(L)$与维数为 1 的球面的楔和同伦等价。特别地，由于 $m_2(L) = 3$， L 不满足 $(\mathscr{QD})_2$。此外，根据引理 3.10， L 的唯一非平凡 2-扩张（通过一个图-域自同构）也不满足 $(\mathscr{QD})_2$。

我们构造一个维数为 1 且与 $\mathrm{A}\,2(L)$ 同伦等价的 $\mathrm{A}\,2(L)$ 的子偏序集。首先，取子偏序集 $\mathfrak{i}(\mathrm{A}\,2(L)) = \{A \in \mathrm{A}\,2(L) : A = \Omega_1(Z(\Omega_1(C_L(A))))\}$，它与 $\mathrm{A}_2(L)$ 同伦等价（见 [14, 注 4.5]）。其次，阶为 8 的初等阿贝尔 2-子群有两个共轭类，且二者都包含在 $\mathfrak{i}(\mathrm{A}\,2(L))$ 中。对于其中一个共轭类，设其代表元为 A，则正规化子 $N_L(A)$ 的阶为 192。可以证明 $\mathfrak{i}(\mathrm{A}\,2(L))_{<A}$ 是可缩的。因此，从 $\mathfrak{i}(\mathrm{A}\,2(L))$ 中移去 L- A 的共轭元后，得到一个与 $\mathfrak{i}(\mathrm{A}\,2(L))$ 同伦等价的子偏序集$\mathfrak{si}(\mathrm{A}\,2(L))$。现在，这个新的子偏序集 $\mathfrak{si}(\mathrm{A}_2(L))$ 中，四元子群只有一个共轭类，并且每个这样的子群都包含在 $\mathfrak{si}(\mathrm{A}\,2(L))$ 中唯一一个阶为 8 的元素内。同样，我们可以从 $\mathfrak{si}(\mathrm{A}\,2(L))$ 中移去所有四元子群，得到一个与 $\mathrm{A}\,2(L)$ 同伦等价的新子偏序集 T。由于 T仅由 2 阶和 8 阶元素组成，我们得出 T 的维数为 1。最后，额外的计算表明 $\mathrm{e}\chi(\mathrm{A}\,2(L)) = -11584$。因此，$\mathrm{A}\,2(L)$ 与 11584 个 1 维球面的楔和同伦等价。特别地， L 不满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$。

这也表明， $L = G_2(9)$与一个 2 阶域自同构作扩张后不满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$：若 ϕ是一个域对合，则 $C_L(\phi) = G_2(3)$，因此根据前面的计算， $H_2(\mathrm{A}\,2(C_L(\phi))) = 0$。接着由引理 3.10，可得 $H_3(\mathrm{A}\,2(L)) = 0$。

5.2. **情形** ${}^3D_4$ **和** $F_4(q)$。

命题 5.4. 若 $q \neq 9$ 为奇数，则群 $L = {}^3D_4(q)$ 满足 $(E\text{-}(\mathscr{QD}))$。此外， ${}^3D_4(9)$ 满足$(\mathscr{QD})_2$。

证明。由表 3 可知， $m_2(L) = 3$ 。于是， ${}^3D_4(q)$ 的一个 3 阶图自同构中心化一个子群 $K = G_2(q)$。此外，若 ϕ 表示 L的一个 2 阶域自同构，则选取一个适当的共轭元后，可假设 ϕ 在 K上诱导一个域自同构。由命题 5.2 及其证明， $m_2(K) = 3 = m_2(L)$， $m_2(K\,\mathrm{h}\phi\,\mathrm{i}) = 4 = m_2(L\,\mathrm{h}\phi\mathrm{i})$，并且$K$ 和 $K\,\mathrm{h}\phi\mathrm{i}$ 对 $q \neq 3$分别满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$，9。此外注意到， $G_2(9)$ 满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$。由引理 3.3，若 $q \neq 3$，则 L 和 $L\,\mathrm{h}\phi\mathrm{i}$ 分别满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$，9。根据表 3，这些是 L 的唯一可能的 2-扩张，至此完成了关于 $q \neq 3$的命题证明。

若 $q = 3$，则在 GAP 中计算 L 的欧拉示性数可得 $\mathrm{e}\chi(\mathrm{A}_2(L))$ =882634225472。由于根据定理 3.8，$\mathrm{A}\,2(L)$ 是连通的，我们看到 $H_2(\mathrm{A}\,2(L)) \neq 0$，也就是说， L 满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$。□

命题 5.5。 若 $L = F_4(q)$，其中 $q \neq 3$，9 为奇数，则 L 满足 $(E\text{-}(\mathscr{QD}))$。此外， $F_4(9)$ 满足$(\mathscr{QD})_2$。

证明。设 $q \neq 3$，9 是奇素数幂。那么 L 含有一个子群 $H := \mathrm{PGL}_2(q) \times G_2(q)$（参见 [13]的主要结果）。注意，根据命题 3.1、4.2 和 5.2， H 满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$。由于根据表 3， L 和 H 的 2-秩均为 5，我们得出 L 满足 $(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,)_2$。

设 $B \in \mathrm{O}_2(L)$，因此 B 由一个 2 阶域自同构生成。于是它通过域自同构作用于一个与 H 同构的直积子群中；不失一般性，

我们可以假设它就是我们的 H。于是 e$H = \mathrm{PGL}_2(q)B \times G_2(q^{1/2})$，它是 HB 的一个子群；根据命题 3.1、4.2 和 5.2，e 满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。由于 $m_2(H) = 6 = m_2(LB)$，我们得出 LB 也满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$。

我们已经证明，L 的每个可能的 2-扩张都满足 $(\mathrm{Q\,D})_2$,，因此 L 满足 (E-(Q D))　　.

如果 $q = 9$，那么 $\mathrm{PGL}_2(9) \times G_2(9)$ 满足$(\mathcal{QD})_2$ 根据命题3.1、4.2 和5.2。因此，$F_4(9)$ 满足$(\mathcal{QD})_2$。□

5.3. **情形** $E_6(q)$ **和** ${}^2E_6(q)$。

Pro位置 5.6. 设 $L = E_6^\epsilon(q)$（任意版本）、$\epsilon \in \{\pm 1\}$，且 q 为奇数。那么 L 满足 *(E-(*$\mathcal{QD}$*)　).*

证明。设 $L = E_6^\epsilon(q)$ 为伴随型，其中 $\epsilon \in \{\pm 1\}$。对于伴随型 e e 版本 L的一个 2-扩张 LB，我们看到 $m_2(LB) = m_2(L_uB)$，其中 L_u是 $E_6^\epsilon(q)$ 的万能版本，而与 B同构的 B只是 B在 L_u上的作用的一个提升（这是可能的，因为 $Z(L_u) = (3, q - \epsilon)$ 是奇数 e e e）。因此 $LB = L_uB/Z(L_u)$，并且根据引理 3.2，$H_*(\mathrm{A}\,2(LB)) \subseteq H_*(\mathrm{A}\,2(L_uB))$。因此，若$L$ 满足 (E-(Q D))，则 $E_6^\epsilon(q)$ 的万能版本也满足。

我们将证明，存在 P 的一个抛物子群 L，使得对于任意 2-扩张 LB，P 的某个适当共轭元被 B 正规化（因此我们可以假设它本身就是 P），且 m_2（PB）$=m_2$（LB）。

该抛物子群 P 源自 E_6中的 A_5 子图，因此 $P = U\,\mathrm{GL}_6^\epsilon$（$q$）/$Z$（$L_u$），其中 GL_6^ϵ（q）/Z（L_u）表示 Levi 补。于是 m_2（P）$= 6$，这实现了 L的 2-秩。此外，L 的图自同构、图-域自同构或域自同构（后两者仅当 $\epsilon = 1$时）稳定该子图（从而稳定 P），并在 GL_6^ϵ（q）/Z（L_u）上诱导出图自同构（分别为图-域自同构或域自同构）。将此类自同构记为 t。于是 m_2（$L\,\mathrm{h}t\mathrm{i}$）$\leq m_2$（L）$+ 1 = 7$。我们断言

$$m_2(P\langle t\rangle) = m_2(\mathrm{GL}_6^\epsilon(q)\langle t\rangle) = 7 = m_2(L\langle t\rangle). \tag{5.3}$$

注意，$m_2(P\,\mathrm{h}t\mathrm{i}) = m_2(\mathrm{GL}_6^\epsilon(q)\,\mathrm{h}t\mathrm{i})$，这是 t 在 $\mathrm{GL}_6^\epsilon(q)$ 上提升作用的结果。显然，当 t 诱导域自同构时（因此 $\epsilon = 1$），等式（5.3）成立，因为 t 在 $\mathrm{GL}_6(q)$ 中的稳定子是 $\mathrm{GL}_6(q^{1/2})$。类似地，若 t 是图 - 域自同构，则 $\epsilon = 1$ 和 $C_{\mathrm{GL}_6(q)}(t) = \mathrm{GU}_6(q^{1/2})$，其 2- 秩为 6。因此，在这两种情况下，$m_2$ $(P\mathrm{h}t\mathrm{i}) = 7$。

现在假设 t 是图对合。对于 $\epsilon = 1$，t 作用于 $\mathrm{GL}_6(q)$，因此 $\mathrm{GL}_6(q)\,\mathrm{h}t\mathrm{i}$ 包含一个图自同构 g，它诱导映射 $x \mapsto (x')^{-1}$，其中 x' 表示 x 的转置。因此，$C_{\mathrm{GL}_6(q)}(g) = \mathrm{GO}_6(q)$，其 2-秩为 6。这意味着 $m_2(\mathrm{GL}_6(q)\,\mathrm{h}t\mathrm{i}) = 6$。若$\epsilon = -1$，则 t 是作用于 $\mathrm{GU}_6(q)$ 的图对合，因此经过共轭，t 确实是映射 $x \mapsto x^q$。因此，$C_{\mathrm{GU}_6(q)}(t) = \mathrm{GO}_6(q)$，同样可得 $m_2(\mathrm{GU}_6(q)\,\mathrm{h}t\mathrm{i}) = 6$。无论哪种情况，我们都看到 $m_2(P\mathrm{h}t\mathrm{i}) = 7$。

最后，设我们有 $B = \mathrm{h}\phi, \gamma\mathrm{i}$，其中 ϕ 是一个 2 阶域自同构，γ 是 $L = E_6(q)$的一个 2 阶图自同构。我们可以假设 B 稳定 P（从而也稳定其幺幂根基），以及其 Levi 补 $\mathrm{GL}_6(q)$。因此，γ 在 $\mathrm{GL}_6(q)$中 ϕ的稳定子上作为图自同构作用，而该稳定子同构于 $\mathrm{GL}_6(q^{1/2})$。如上所见，$m_2(\mathrm{GL}_6(q^{1/2})\,\mathrm{h}\gamma\mathrm{i}) = 7$。因此，$m_2(\mathrm{GL}_6(q)B) = 8$。由于 $m_2(B)$ $= 2$且 $m_2(E_6(q)) = 6$，我们得出 $m_2(E_6(q)B) = 8$，所以 2-秩在 PB中实现。

最后请注意，L 的一个 2-扩张属于以下情形之一：

(1) L，2-秩为 $6 = m_2(P)$；(2) $L\mathrm{h}\gamma\mathrm{i}$，2-秩为 7，其中 γ 是一个 2 阶图自同构，它还稳定 P and$m_2(P\mathrm{h}\gamma\mathrm{i}) = 7$,

(3) $L\,\mathrm{h}\phi\mathrm{i}$，2-秩为 7，其中 ϕ 是一个 2 阶域自同构（$\epsilon = 1$），它还稳定 $P$and $m_2(P\mathrm{h}\phi\mathrm{i}) = 7$；(4) $L\mathrm{h}\gamma\phi\mathrm{i}$，2-秩为 7，其中 $\gamma\phi$ 是一个 2 阶图-域自同构（$\epsilon = 1$），它还稳定 P and $m_2(P\mathrm{h}\gamma\phi\mathrm{i}) = 7$；(5) $L\,\mathrm{h}\gamma,\ \phi\mathrm{i}$，2-秩为 8，其中 ϕ 是一个 2 阶域自同构（$\epsilon = 1$），与 γ 这个 2 阶图自同构对易，并且 $\mathrm{h}\gamma,\ \phi\mathrm{i}$ 也稳定 P，且 $m_2(P\,\mathrm{h}\gamma,\ \phi\mathrm{i}) = 8$。

由此可得，$E_6^\epsilon(q)$ 的伴随型的任何 2-扩张都满足 (Q D)$_2$。根据证明开头的注记，可得 $E_6^\epsilon(q)$ 的任何型都满足 (E-(Q D))。□

5.4. **情形** $E_7(q)$。

命题 5.7. 设 $L = E_7(q)$ 为伴随型，且 q 为奇数。则 L 满足 *(E-(QD))* .

证明。 设 $L = E_7(q)$。根据表 3，若 ϕ 表示 L的一个 2 阶域自同构，则其 2-扩张为： L are:

$$L,\quad \mathrm{Inndiag}(L),\quad L\langle\phi\rangle.$$

注意，Inndiag$(L)\langle\phi\rangle$ 不是 2-扩张，因为根据引理 2.6，2 阶域自同构与对角自同构不交换。

接下来，我们研究这些扩张的 2-秩，因此需要了解外对合的中心化子。由表 3， $m_2(L) = 8$。我们断言 $m_2(\mathrm{Inndiag}(L)) = 8 = m_2(L)$。事实上，考虑伴随型中的 $K = E_7(q^2)$。那么 $m_2(K) = 8$。令 ϕ' 为 K的一个 2 阶域自同构。那么，由命题 2.5和引理 2.6，

$$K \geq C_K(\phi') = C_{\mathrm{Inndiag}(K)}(\phi') = \mathrm{Inndiag}(E_7(q)) \cong \mathrm{Inndiag}(L).$$

由此可知， $m_2(\mathrm{Inndiag}(L)) = 8 = m_2(L)$。特别地，如果 $_2$ 满足 (Q D)，那么 Inndiag(L) 也满足 (Q D)$_2$。此外，这也证明了如果 ϕ 是 L 的一个 2 阶域自同构，那么

$$m_2(\mathrm{Inndiag}(L)\langle\phi\rangle) = 9 = m_2(L\langle\phi\rangle).$$

根据这些观察，我们得出结论：为了证明 $E_7(q)$ 满足 (E-(Q D))，只需证明 $E_7(q)$ 和 $E_7(q)\,\mathrm{h}\phi\mathrm{i}$ 满足 (Q D)$_2$。

为此，我们展示 $E_7(q)$ 中一个 2-秩为 8 的极大抛物子群。我们看到 D_6 是 E_7的子图，因此在 $E_7(q)$ 中有一个形如

$$P = U : (D_6(q).(q-1)).$$

这里， U表示 P的幺幂根基，而子群 $H = D_6(q)$ 是 $\mathrm{Spin}_{12}^+(q)$ 对一个 2 阶中心子群取商所得的商群。事实上， $H = \mathrm{HSpin}_{12}^+(q)$，且它位于生成 $L(t_1$ 参见 $E_7(q)$ 条目中 [8]的 Sylow 2-子群 T之中心的对合的中心化子中。由此，我们证明 U的 Levi 补 $L_P = D_6(q).(q-1)$ 的 2-秩为 8。设 L_P中心中的对合为 t。根据 [8]的表 4.5.1， $C_L(t) = (\mathrm{SL}_2(q) \circ_2 \mathrm{HSpin}_{12}^+(q)).2$。由于 $t \in Z(T)$，故 $T \leq C_L(t)$。此外，$\mathrm{SL}_2(q)$ 有唯一的对合，因此 T的 2-秩可在扩张 $M := \mathrm{HSpin}_{12}^+(q).2$ 的一个子群中实现。末尾的 2 来自半旋量群的对角自同构，与上面的 Levi 补情形相同。因此，若将 M视为 L_P的子群，我们便得出 $m_2(L_P) = m_2(M) = m_2(E_7(q))$。

此外，经过适当选取共轭元，2 阶域自同构 ϕ 必须正规化 P，并在我们的 M 上作为域自同构作用。由于 $C_M(\phi)$ 含有一个与 $\mathrm{HSpin}_{12}^+(q^{1/2}).2$ 同构的子群，我们看出 $P\mathrm{h}\phi$ i 的 2-秩为 9，这正是 2-扩张 $E_7(q)\,\mathrm{h}\phi\mathrm{i}$ 的 2-秩。

根据命题 3.5， L和 $L\langle\phi\rangle$ 满足 $(\mathcal{QD})_2$。最后，根据前面的讨论，我们得出 L 满足 (E-($\mathcal{QD}$))。 □

5.5. **情形** $E_8(q)$。

命题 5.8. 单群 $E_8(q)$， $q \neq 3$，9 为奇数，满足 *(E-*(有理数域 D)*)*。此外， $E_8(9)$ 满足(有理数域 D)$_2$。

证明。 设 $L = E_8(q)$。根据 [11] 的表 5.1， L 含有一个极大子群

$$H \cong (3, q-1).(\mathrm{PSL}_3(q) \times E_6(q)).(3, q-1).2.$$

注意， $F^*(H)$ $=(3, q-1).(\mathrm{PSL}_3(q)$ $\times E_6(q))$，且 $H_+ := H/Z(F^*(H))$ $=(\mathrm{PSL}_3(q)$ $\times E_6(q))$. $(3, q-1).2$，其中 $(3, q-1)$ 在 H_+ 的每个分量上诱导对角自同构，而 2 诱导图对合，也作用于两个分量上。特别地，通过取 $\mathrm{PSL}_3(q)$ 分量上一个图对合的中心化子，我们看到 H_0 含有一个与 K_0 同构的子群

$$\mathrm{PGL}_2(q) \times \mathrm{Inndiag}(E_6(q))\,\langle\gamma\rangle,$$

其中 γ 是 $E_6(q)$ 的一个图对合，它中心化了 $\mathrm{PGL}_2(q)$。现在回忆一下， $m_2(L)$ $= 9$ 且m_2 $(\mathrm{PGL}_2(q))$ $= 2$。由于 $m_2(E_6(q)\,\langle\gamma\rangle)$ $= 7$ 由命题 5.6 的证明中第 (2) 项可知，我们得到

$$m_2(K_0) = m_2(\mathrm{PGL}_2(q)) + m_2(E_6(q)\,\langle\gamma\rangle) = 2 + 7 = 9 = m_2(L).$$

因此， K_0 实现了 L的 2-秩。

根据表 3， $E_8(q)$ 由一个 2 阶域自同构扩张，例如 ϕ，是唯一的非平凡 2-扩张。从极大子群 H 和 K_0 (参见 [11]) 的构造可知，我们可以选取一个合适的 L-共轭元 ϕ (并假设它就是同一个 ϕ)，使其正规化 H，并且在取商后正规化 K_0，且在 K_0 的两个因子上都诱导出域自同构。特别地，我们有一个 K_1 的子群 $K_0\,\langle\phi\rangle$，其形式为

$$\mathrm{PGL}_2(q^{1/2}) \times \mathrm{Inndiag}(E_6(q))\,\langle\gamma', \phi\rangle,$$

其中我们选取了 $\gamma' \in \mathrm{Inndiag}(E_6(q))\langle\gamma\rangle$ 作为一个与 ϕ交换的图自同构，而 $\mathrm{PGL}_2(q^{1/2})$ $= C_{\mathrm{PGL}_2(q)}(\phi)$。因此，根据命题 5.6 证明中的第 (5) 项，

$$m_2(K_1) = 2 + m_2(E_6(q)\,\langle\gamma', \phi\rangle) = 2 + 8 = 10.$$

由于 $m_2(L\,\mathrm{h}\phi\mathrm{i})$ $\leq m_2(L)$ $+ 1 = 10$，我们得出 $m_2(K_1)$ $= m_2(L\,\mathrm{h}\phi\mathrm{i})$。

最后，注意到 K_0 和 K_1 满足 $(\mathcal{QD})_2$ 当 $q \neq 3$，分别满足 9，这由命题 4.2、5.6 和 3.1得出。因此，根据引理 3.2 和 3.3， L 和 $L\,\langle t\rangle$ 满足 $(\mathcal{QD})_2$ 当 $q \neq 3$，分别满足 9。

因此， $E_8(q)$ 的每个 2-扩张都满足 (Q D)$_2$, ，但陈述中给出的例外情况除外。命题证明完毕。

□

参考文献

[1] M. Aschbacher 和 S. D. Smith。关于 p-群复形的 Quillen 猜想。《数学年刊》（第 *2* 辑），137(3): 473–529，1993。 2，3，5，7，8[2] K. S. Brown。群的欧拉示性数： p-分数部分。《数学发明》，29(1)：1–5，1975。 1[3] A. M. Cohen、M. W. Liebeck、J. Saxl 和 G. M. Seitz。有限及代数李型例外群的局部极大子群。《伦敦数学会会刊》（第 *3* 辑），64(1)：21–48，1992。 3[4] A. M. Cohen 和 G. M. Seitz。例外李型群的 r-秩。《荷兰皇家艺术与科学学院数学研究》，49(3)：251–259，1987。 16

[5] A. Díaz Ramos。关于 p-可解群的 Quillen 猜想。《代数杂志》，513：246–264，2018。2，4[6] A. Díaz Ramos 和 N. Mazza。研究 Quillen 猜想的一种几何方法。《群论杂志》，25(1)：91–112，2022。4[7] GAP 团队。GAP——群、算法与编程，4.12.1 版，2022。4[8] D. Gorenstein、R. Lyons 和 R. Solomon。有限单群分类。第 3 号。第一部分。A 章，《数学调查与专著》第 40 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998。几乎单 K-群。2，4，6，8，9，10，11，13，14，15，16，18，21[9] D. Gorenstein、R. Lyons 和 R. Solomon。有限单群分类。第 8 号。第三部分。第 12–17 章。一般情形，已完成，《数学调查与专著》第 40 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018。6[10] P. B. Kleidman。Chevalley 群 $G_2(q)$（其中 q 为奇数）、Ree 群 ${}^2G_2(q)$ 及其自同构群的极大子群。《代数杂志》，117(1)：30–71，1988。3，17，18[11] M. W. Liebeck、J. Saxl 和 G. M. Seitz。有限李型例外群中的极大秩子群。《伦敦数学会会刊》（第 3 辑），65(2)：297–325，1992。3，22[12] M. W. Liebeck 和 G. M. Seitz。有限及代数李型例外群的极大子群。《几何专论》，35(1-3)：353–387，1990。3[13] M. W. Liebeck 和 G. M. Seitz。例外代数群中正维数的极大子群。《美国数学会回忆录》，169(802)：vi+227，2004。3，19[14] K. I. Piterman。以有限拓扑空间的术语对 Webb 猜想作更强的改述。《代数杂志》，527：280–305，2019。19[15] K. I. Piterman。通过单群的中心化子研究 Quillen 猜想的一种方法。《数学论坛 Sigma》，9：论文编号 e48，23 页，2021。2[16] K. I. Piterman、I. Sadofschi Costa 和 A. Viruel。无环二维复形与 Quillen 猜想。《数学出版物》，65(1)：129–140，2021。2，5[17] K. I. Piterman 和 S. D. Smith。在 Quillen 猜想中消去分支。《代数杂志》，607（A 部分）：681–732，2022。2，12[18] K. I. Piterman 和 S. D. Smith。通过等价偏序集技术得到的 Quillen 猜想的一些结果。已提交，arXiv:2204.13055，2022。2，3，4[19] K. I. Piterman 和 V. Welker。酉空间标架复形的同伦性质。已提交，arXiv:2208.12626，2022。2，13[20] D. Quillen。等变上同调环的谱。I、II。《数学年刊》（第 2 辑），94：549–572；同刊（第 2 辑）94（1971），573–602，1971。1[21] D. Quillen。群的非平凡 p-子群偏序集的同伦性质。《数学进展》，28(2)：101–128，1978。1，2，7，8，13[22] Y. Segev 和 P. Webb。G-偏序集的扩张与 Quillen 复形。《澳大利亚数学会杂志》A 辑，57(1)：60–75，1994。9[23] S. D. Smith。子群复形，《数学调查与专著》第 179 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011。2，7[24] H. N. Ward。关于 Ree 系列单群。《美国数学会汇刊》，121：62–89，1966。17[25] V. Welker。拟阵的直和分解与指数结构。《组合理论杂志》B 辑，63(2)：222–244，1995。12，13

马尔堡菲利普大学，数学与计算机科学系，35032 马尔堡，德国电子邮件地址：
piterman@mathematik.uni-marburg.de