电阻抗成像完全电极模型的浸入边界法

J´ER´EMI DARD´E、NIAMI NASR 和 LISL WEYNANS

摘要。我们提出了一种浸入边界格式，用于数值求解电阻抗成像中的完全电极模型，并将其作为求解医学成像逆问题的主要组成部分。该方法无需精确离散边界，即可使用笛卡尔网格；在边界复杂和／或不断变化的情况下，这一特性十分有用。我们证明了该方法的收敛性，并通过二维正问题和逆问题展示了其效率。

1. 引言

本文致力于使用浸入边界法数值求解与电阻抗成像（EIT）相关的正问题和逆问题。电阻抗成像旨在通过在区域边界施加电流，并测量同一边界上产生的电压，重建区域内部的电导率分布。它在医学领域有多种应用，尤其是肺部监测和卒中检测 [1, 8, 30]。从数学上讲，这个问题被称为 *Calder´on* 问题 或 逆电导率问题，是一个严重病态的逆问题。关于逆电导率问题的概述，请参阅 [5, 9, 49] 及其中的参考文献。

在实际实验中，通过一组表面电极向目标物体内部注入电流，电极之间不注入电流。对于每种电流模式，都会测量电极之间的电势差。完全电极模型（CEM） [11, 48]能够准确地描述这一实际情形。该模型考虑了电极的形状以及分流效应，即测量过程中电极与物体界面处出现的薄电阻层。已知完全电极模型能够正确预测实验数据，因此广泛用于求解与电阻抗断层成像相关的正问题和逆问题。

通常使用有限元方法（FEM）计算完全电极模型的解。在几何形状简单时，这种方法能够实现快速、高效的数值计算。然而，当几何形状复杂时，有限元方法的计算成本可能会很高，在三维问题中尤为如此。这是因为需要对几何形状进行精确离散化，尤其是在电极处，电势随空间位置快速变化，因此必须使用非常精细的网格。

当几何形状并非完全已知时，还可能出现另一种困难，这通常会导致重建结果极不准确 [22, 42]。为解决这一困难，人们提出了迭代牛顿型算法，同时重建电导率和几何形状 [15, 16]。在这类算法中，几何形状会在每次迭代中发生变化。因此，每一步都需要创建新的网格，数值实现的成本也因此再次增加。

本文旨在通过采用浸入边界法（IBM），提出一种替代经典网格适配数值方法来数值求解完全电极模型的方案，以降低复杂且会移动的几何形状下的计算成本。在这种方法中，研究区域包含在一个几何形状简单的更大区域内；二维情形下通常为正方形，三维情形下通常为立方体。该区域的几何形状

日期：2023年1月6日。2010 数学主题分类。65N21, 65N25, 65N85, 35R30。

由一个已知函数的零水平集表示，且不进行精确离散。相反，通常使用笛卡尔网格对更大区域进行离散。当然，这种方法需要特别注意纳入原问题的边界条件。

最早针对椭圆问题的笛卡尔网格方法由 Mayo 于 1984 [39], 提出，并由 [40]和 [38]进一步发展。在这项工作中，研究者推导出一个积分方程，以最大范数下的二阶精度求解具有分段系数的椭圆界面问题。随后，LeVeque 和 Li（1994） [36] 提出了广为人知的浸入界面方法（IIM）。该方法基于界面两侧解的泰勒展开，并在界面附近进行局部坐标变换，以便在适当的坐标系中表达跳跃条件。在界面附近的每个网格点上，椭圆算子均采用考虑界面两侧跳跃的公式进行离散。为求得这些公式，每个相关网格点都需要求解一个含六个未知量的线性系统。此后，浸入界面方法得到了诸多发展，其中包括 [3, 37, 52]。Zhou 等人提出的另一类笛卡尔网格方法是匹配界面与边界（MIB）方法 [53]。该方法将界面一侧的解延拓至另一侧的虚拟点上，并通过迭代施加最低阶界面跳跃条件来计算这些虚拟点的值。其他类别的笛卡尔网格方法也存在；它们在界面问题中的精度较低，但实现起来可能更简单：Gibou 等人 [23,24] 开发了受 Fedkiw 的幽灵流体法启发的方法 [19] ，用于多相流。这些方法在任意区域上求解狄利克雷边界条件问题时具有二阶精度，但在界面问题中只有一阶精度。随后，人们提出了新方法，以提高界面问题的求解精度 [4, 18]。

本文采用笛卡尔网格上的有限差分格式来近似完全电极模型，并沿用 [13], 的方法，在界面与网格的交点处定义附加未知量。这些附加未知量用于界面附近椭圆算子的离散化，从而无需推导包含跳跃项或修正项的特定有限差分公式。为求解界面处的未知量，我们将通量跳跃条件离散化并加入待求解的线性系统。在电阻抗成像的背景下，这种在两个区域之间的界面处引入附加未知量的方法简化了离散化，因为区域边界上的值直接参与了描述电极输入电流的方程。

如上所述，离散化的主要难点在于极限条件。尤其是与输入电流相关的极限条件涉及电极上的积分，从有限差分的角度来看并不常见，因此需要格外谨慎处理。另一个难点出现在电极边缘处，此处的极限条件发生突变，导致解出现奇异性。我们采用平滑化完全电极模型 [28], 来处理这一难点；在该模型中，电极上的条件与电极之间的条件平滑过渡，从而得到光滑的解。

最后，由于该问题通常属于诺伊曼型，为了准确模拟物理测量场景，必须处理数据的相容条件，而这在数值层面并不容易验证。我们通过对模型进行轻微修改来规避这一问题；这种修改既能消除相容条件，又不会改变所关注的解。这一做法本身也可能具有价值，例如可用于简化完全电极模型的有限元数值实现。

1.1. 论文概要。 本文结构如下。第2节介绍完全电极模型及本研究关注的相关变体。第3节介绍数值格式，并证明其具有线性收敛率。第4节展示二维情形下的数值结果，涵盖电阻抗成像的正问题、逆电导率问题以及电极定位问题。附录 A 给出一些必要的技术计算。

2. 电阻抗成像的完全电极模型

2.1. 几何与函数空间设置。 在此处及下文中，我们假设所有函数和向量均为实值。所有内容均可直接推广到复数情形。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ 或 3 中的一个有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 光滑。记 ν 为 $\partial\Omega$ 的外单位法向量。设 $(E_m)_{m=1,\dots,M}$ 是 $M \geq 2$ Ω 中两两不相交的连通子区域，且具有正的勒贝格测度。令 $E = \bigcup_{m=1}^{M} E_m$，且 $E_c = \partial\Omega \setminus E$。

我们将 $\mathbb{R}^M_\diamond$记为 $\mathbb{R}^M$的零均值向量子空间，

$$\mathbb{R}^M_\diamond = \left\{ V \in \mathbb{R}^M,\ \sum_{m=1}^{M} V_m = 0 \right\},$$

并将 $\mathbb{R}^M_+$记为 $\mathbb{R}^M$ 中分量均为正的向量所构成的子集，

$$\mathbb{R}^M_+ = \left\{ V \in \mathbb{R}^M,\ V_m > 0 \quad \forall m \in \{1, \dots, M\} \right\}.$$

对于 $s \in \mathbb{R}$，我们引入商空间 $\mathscr{H}^s = (H^s(\Omega) \times \mathbb{R}^M)/\mathbb{R}$。若两个元素 (u, U) 和 (v, V) 属于 $H^s(\Omega) \times \mathbb{R}^M$，且它们相差一个加性常数，则在 $\mathscr{H}^s$ 中将二者视为等同，具体如下：

$$(u, U) \sim (v, V) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ u = v + c,\ U = V + c[1, \dots, 1]. \tag{2.1}$$

经典地， $\mathscr{H}^s$ 赋予范数

$$\|u, U\|_{\mathscr{H}^s} = \inf_{c \in \mathbb{R}} (\|u - c\|_{H^s(\Omega)} + \|U - c[1, \dots, 1]\|_{\mathbb{R}^M}),$$

是一个巴拿赫空间。

对于所有 m 属于 {1、.....、 M}，令 $e_m \subset E_m$ 具有正的勒贝格测度。我们定义

$$b : ((u, U), (v, V)) \in (H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M)^2 \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \sum_{m=1}^{M} \int_{e_m} (u - U_m)(v - V_m) \, ds(x),$$

并且，对于所有 $(v,\ V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$,

$$\|(v, V)\|_b^2 = b\left((v, V), (v, V)\right).$$

引理 2.1。 双线性型 b 在 $\mathscr{H}^1$上定义了一个内积，相应的范数 $k.k_b$与范数 $k.k_{\mathscr{H}^1}$等价。

因此，$(\mathscr{H}^1, b)$ 是一个希尔伯特空间。

证明。这个结果是标准结论，但为方便读者，我们仍回顾其证明。首先注意，若按照 (2.1) 的意义有 $(u_1, U_1) \sim (u_2, U_2)$ 且 $(v_1, V_1) \sim (v_2, V_2)$，则 $b((u_1, U_1), (v_1, V_1)) = b((u_2, U_2), (v_2, V_2))$，因此该引理是有意义的。

显然， b 在 $\mathscr{H}^1 \times \mathscr{H}^1$ 上是双线性、对称且正定的。设 $(v, V) \in \mathscr{H}^1$ 满足 $\|v, V\|_b = 0$。则 $\nabla v = 0$ 在 Ω 中，且存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $v = c$ 在 Ω 中几乎处处成立。此外

$$\int_{e_m} (v - V_m)^2 ds(x) = 0,\ \forall m \in \{1, \dots, M\},$$

我们得到 $V = c\,[1, \dots, 1]\,,$，其中常数 c 相同。因此，$(v, V) \sim (0, 0)$，且 b 是 $\mathscr{H}^1$上的内积。

利用从 $H(\Omega)$ 到 $L(\partial\Omega)$ 的迹算子的连续性，可直接看出 $\|.\|_b^2 \lesssim \|.\|_{\mathscr{H}^1}$.

反过来，设 (v_n, V_n) 是 $\mathscr{H}^1$ 中的一个序列，使得 $\|v_n, V_n\|_{\mathscr{H}^1} = 1$ 且 $\|v_n, V_n\|_b$ 在 n 趋于无穷时趋于零。必然存在 $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ 中的一个序列 $(\tilde{v}_n, \tilde{V}_n)$，使得

- $(v_n, V_n) \sim (\tilde{v}_n, \tilde{V}_n)$ 按照（2.1）的意义成立，因此 $\|\tilde{v}_n, \tilde{V}_n\|_b$ 趋于零，
- $1 \leq \|\tilde{v}_n\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{V}_n\|^2_{\mathbb{R}^M} \leq 2$，对所有 $n \in \mathbb{N}$。

由于 $(\tilde{v}_n)$ 是 $H^1(\Omega)$ 中的有界序列，且 $(\tilde{V}_n)$ 是 $\mathbb{R}^M$ 中的有界序列，因此存在一个子序列（仍记为 $(\tilde{v}_n, \tilde{V}_n)$）以及一个元素 $(\tilde{v}_\infty, \tilde{V}_\infty) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$，使得 $\tilde{v}_n$ 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛于 $\tilde{v}_\infty$，且 $\tilde{V}_n$ 在 $\mathbb{R}^M$ 中强收敛于 $\tilde{V}_\infty$。由于 $\nabla\tilde{v}_n$ 强收敛于 0，$\tilde{v}_n$ 实际上在 $H^1(\Omega)$ 中强收敛于 $\tilde{v}_\infty$，$\nabla\tilde{v}_\infty = 0$ 并且存在常数 c_∞，使得$\tilde{v}_\infty = c_\infty$ 几乎处处成立于 Ω。

现在，对于所有 $m \in \{1, \dots, M\}$，

$$0 \le \int_{e_m} (\tilde{v}_n - \tilde{V}_{n,m})^2 \, ds(x) \le \|\tilde{v}_n, \tilde{V}_n\|_b^2,$$

令 n 趋于无穷大，取极限可得 $V_{\infty,m} = \tilde{v}_{\infty|e_m} = c_\infty$，或等价地 $V_\infty = c_\infty[1, \dots, 1]$.但是，由于 $(v_n, V_n) \sim (\tilde{v}_n, V_n)$，我们有

$$1 = \|v_n, V_n\|_{\mathscr{H}^1} = \|\tilde{v}_n, \tilde{V}_n\|_{\mathscr{H}^1} \le \|\tilde{v}_n - c_\infty\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{V}_n - c_\infty[1, \dots, 1]\|_{\mathbb{R}^M},$$

从而导致矛盾。因此 $\|.\|_{\mathscr{H}^1} \lesssim \|.\|_b$，结论得证。 □

2.2. 广义完全电极模型。 现在我们可以介绍下文将使用的广义完全电极模型。该模型与电阻抗成像领域中的标准完全电极模型略有不同，因为我们允许存在内部源项和边界源项，并且还允许电极上的表面导纳率随空间变化。这两个特性在后续研究中都将发挥作用。

在我们的几何设置中，Ω 是研究区域，每个开集 E_m 代表一个电极。我们用 $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ 表示该区域的电导率，并假设其满足标准椭圆性条件

$$\sigma \ge c > 0 \text{ a.e. in } \Omega.$$

在标准完全电极模型中，每个电极-体组织界面处出现的薄电阻层由接触阻抗向量 $z \in \mathbb{R}_+^M$表示：每个电极 E_m对应一个接触阻抗 z_m。于是，电极 E_m 上的相应接触导纳率为常数，等于 $\frac{1}{z_m}$。在我们的广义模型中，我们允许导纳率随空间变化。为此，我们考虑 $\xi_m \in \mathscr{Z}_m$，其中

$$\mathscr{Z}_m = \{\xi \in L^\infty(E_m),\ \xi \ge 0,\ \xi \not\equiv 0\}.$$

这些变化的导纳率已在 [28]中引入，目的是确保完全电极模型解的正则性。标准完全电极模型对应于如下选择$\xi_m = \frac{1}{z_m}$，它确实属于 $\mathscr{Z}_m$。

设 $I \in \mathbb{R}^M$ 表示施加于电极上的输入电流，且 $(f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$。完全电极模型对应的边值问题如下：求 $(u, U) \in \mathscr{H}^1$，使得

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ \sigma \nabla u \cdot \nu = g & \text{on } E_c, \\ \sigma \nabla u \cdot \nu + \xi_m (u - U_m) = g & \text{on } E_m,\ m = 1, \dots, M, \\ \displaystyle\int_{E_m} \sigma \nabla u \cdot \nu \, ds(x) = I_m, & m = 1, \dots, M. \end{cases} \tag{2.2}$$

在证明问题（2.2）是适定的之前，我们先作几点说明：

- 由散度定理可简单推出，问题（2.2）有解的必要条件是 I，f 并且 g 满足相容条件

$$\sum_{m=1}^{M} I_m + \int_\Omega f \, dx + \int_{E_c} g \, ds(x) = 0. \tag{2.3}$$

当然，这不过是将著名的电流守恒定律应用于我们的方程组。在实际的电阻抗成像中，源项

f 和 g 均为零时，我们可以得到输入电流的零均值条件

$$\sum_{m=1}^{M} I_m = 0 \Leftrightarrow I \in \mathbb{R}^M_\diamond.$$

- 假设 $(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ 满足方程组 (2.2)。那么，对于任意常数 $c \in \mathbb{R}$，$(u + c, U + c[1, \dots, 1])$ 也满足 (2.2)。从物理学角度来看，这很自然，因为只有电势差能够被测量。因此，我们在商空间 $\mathscr{H}^1$ 中进行讨论，将 $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ 中相差一个加性常数的所有元素视为相同。正如我们将看到的，这样便可恢复唯一性。
- 按照 [28]，极限条件 (2.2_2) 和 (2.2_3) 的思路，可以将它们合并写为：具体而言，记 $\mathbb{1}_{E_m}$ 为将函数 $\xi \in L^\infty(E_m)$ 映射为其在$\partial\Omega$上的零延拓的算子，并定义算子

$$\Xi : (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \prod_{m=1}^{M} L^\infty(E_m) \mapsto \sum_{m=1}^{M} \mathbb{1}_{E_m} \xi_m \in L^\infty(\partial\Omega),$$

那么 (2.2_2) 和 (2.2_3) 等价于

$$\sigma \nabla u \cdot \nu + \Xi(\xi_1, \dots, \xi_M)(u - \Xi(U_1, \dots, U_M)) = g \text{ on } \partial\Omega.$$

- 在电阻抗成像的实际应用中，源项 f 和 g 均为零，此时相容条件（2.3）即为通常的条件 $I \in \mathbb{R}^M_\diamond$。不过，在数值测试中，我们的研究将采用非零源项，以确保 u 的光滑性，并捕捉数值格式的收敛率（见下文“正则性结果”小节）。

- 在问题（2.2）中，给定电流配置 I，并测量电势配置 U。从数学角度来看，给定 U并测量 I是等价的。将浸入边界法应用于我们的问题时，给定 U会更简单，因为此时极限条件是标准的。不过在实践中，总是给定电流并测量电势；由于测量数据上的噪声大于给定数据上的噪声，这打破了对称性。因此，我们重点研究问题（2.2）。

适定性。现在证明问题（2.2）是适定的。我们遵循在 $f = 0$ 和 $g = 0$情形中采用的标准步骤，并以问题（2.2）的变分形式为基础，将其调整到我们的情形。

命题 2.2。设 f，I 和 g 满足 (2.3)。那么问题 (2.2) 存在唯一解$(u, U) \in \mathscr{H}^1$。

*Pro*证明。考虑以下变分问题：求 $(u, U) \in \mathscr{H}^1$ 使得，对所有 (v, V) 属于 $\mathscr{H}^1$ ，

$$B\big((u, U), (v, V)\big) = L\big((v, V)\big), \tag{2.4}$$

with

$$B\big((u, U), (v, V)\big) = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \sum_{m=1}^{M} \int_{E_m} \xi_m (u - U_m)(v - V_m) ds(x),$$

and

$$L\big((v, V)\big) = \int_\Omega f \, v \, dx + \sum_{m=1}^{M} \int_{E_m} g \, (v - V_m) \, ds(x) + \int_{E_c} g \, v \, ds(x) + I \cdot V.$$

显然，B 在 $\mathscr{H}^1 \times \mathscr{H}^1$上是双线性且连续的。根据 $\mathscr{X}_m$的定义，存在 $c > 0$，使得对所有 m 属于$\{1, \dots, M\}$的情况，都存在 $e_m \subset E_m$，其勒贝格测度为正，使得 $\xi_m \geq c$ 在e_m上成立。结合关于 σ 的假设和引理2.1 ，即可推出强制性

关于 B。另一方面，由于对所有 $(v,\ V)\ \in\ H^1(\Omega)\ \times \mathbb{R}^M$ 以及所有常数 c，根据相容条件（2.3）可得

$$L\left((v,V)\right) = L\left((v-c, V-c[1,\ldots,1])\right),$$

L 是定义在 $\mathscr{H}^1$上的连续线性形式。因此，Lax-Migram 定理 [6, 推论 5。8] 蕴含了满足（$u,\ U$）的存在性和唯一性 $\in \mathscr{H}^1$，且满足（2.4）。

还需证明（2.4）等价于（2.2）。由（2.2）推出（2.4）是标准结论，因此我们着重证明反向推论，即证明（$u,\ U$）是（2.4）的解时满足（2.2）。在（2.4）中取（$v,\ V$）$\sim$（$\varphi,\ 0_{\mathbb{R}^M}$），并令 $\varphi \in C_c^\infty($ Ω)，便立即得到 $-\nabla\cdot(\sigma\nabla u)\ = f$在 Ω 中。然后取（$v,\ V$）$\sim$（$v_0,\ 0_{\mathbb{R}^M}$），并令 $v_0 \in H^1(\Omega)$，可得

$$\int_\Omega (\nabla\cdot\sigma\nabla u\, v_0 + \sigma\nabla u\cdot\nabla v_0)\, dx = \sum_{m=1}^M \int_{E_m} (g - \xi_m(u-U_m))\, v_0\, ds(x) + \int_{E_c} g\, v_0\, ds(x),$$

根据迹算子的满射性 $v_0 \in H^1(\Omega)\ \mapsto v_{0|\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$以及余法向导数的定义 $\sigma\nabla u\cdot\ \nu$ 可知，u 满足（2.2）$_2$ 和（2.2）$_3$。特别地，$\sigma\nabla u\cdot\nu$ 属于$L^2(\partial\Omega)$。

最后，取 $(v,V)\ \sim(0,V_0)$，使得 $V_0 \in \mathbb{R}^M$，得到

$$I\cdot V_0 = \sum_{m=1}^M \int_{E_m} (g-\xi_m(u-U_m))\ V_{0,m}\, ds(x) = \sum_{m=1}^M \int_{E_m} \sigma\nabla u\cdot\nu\, V_{0,m}\, ds(x) = W\cdot V_0,$$

其中 $W \in \mathbb{R}^M$ 由 $W_m = \int_{E_m} \sigma\nabla u\cdot\ \nu\, ds(x)$ 定义，证明至此完成。 □

正则性结果。 我们将在下一节开发的数值格式所需的收敛结果，要求我们关注的问题具有光滑解。然而，在许多情况下，尤其是在实际应用相关的情况下，（2.2）的解并不光滑。

事实上，假设 σ 是光滑的。由于混合边界条件（2.2）$_2$, (2.2)$_3$ 和（2.2）$_4$，满足系统（2.2）的电势 u 可能不如标准椭圆问题中的解那样光滑。

更准确地说，对于 ξ_m 为正常数的标准完全电极模型，在实际情况中，源项 f和 g均为零时，已知（$u,\ U$）是（2.2）的解，属于 $\mathscr{H}^{2-\varepsilon}$ 对所有 $\varepsilon > 0$均成立，但对于所有输入电流 I（零输入电流 [17,28] 除外），均不属于 $\mathscr{H}^2$。

引入平滑化完全电极模型 [28] 正是为了解决这一困难。该模型将常数 ξ_m 替换为在 E_m 中紧支撑且光滑的 $\xi_m \in \mathscr{X}_m$。因此，标准正则性结果适用，从而得到光滑的电势 u。由于实际应用中表面导纳率未知，也没有明确证据表明它是常数，因此这种模型变更是合理的。显然，其主要缺点是接触导纳率的参数化更为复杂。我们的收敛结果始终适用于平滑化完全电极模型。

然而，无论如何选择 ξ_m，除非几何构型非常特殊，否则问题（2.2）在$f\ =\ g\ =\ 0$时都没有显式解。这就是我们引入源项 f 和 g的原因：它们使我们能够构造问题（2.2）的显式解，从而对收敛结果进行数值检验。

2.3. **一种在 $H^1(\Omega)\ \times\mathbb{R}^d$ 中适定的替代表述。** 如前所述，问题 (2.2) 在 $\mathscr{H}^1$中适定。换言之，问题 (2.2) 的解仅确定到一个加性常数。从数值角度来看，必须固定该常数（换言之，选择接地电位），通常的做法是在 U 上添加约束，使得 $U_1 = 0$ 或$U \in \mathbb{R}^M_\diamond$：这样，解便在 $H^1(\Omega)\times\tilde{\mathbb{R}}$中求取，其中 $\tilde{\mathbb{R}} = \{U\in\mathbb{R}^m,\ U_1 = 0\}$ 或 $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^M_\diamond$，从而恢复唯一性。理论上，约束可以施加于电势 u（例如，可以要求 u 在 Ω 上的平均值为零），但这会给数值求解该问题带来计算问题。

在本研究中，我们提出另一种方法，即将问题 (2.2) 改写为一个新问题，该问题在 $H^1(\Omega)\times\mathbb{R}^d$中适定，且其解是问题 (2.2) 的一个解。需要注意的是，根据构造，无需对新问题施加任何额外约束即可保证适定性。

设定 $U_1 = 0$。令 $\varepsilon > 0$ 为固定值。我们考虑修改后的问题

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(\sigma\nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ \sigma\nabla u\cdot\nu = g & \text{on } E_c \\ \sigma\nabla u\cdot\nu + \xi_m(u-U_m) = g & \text{on } E_m,\ m=1,\dots,M, \\ \displaystyle\int_{E_m}\sigma\nabla u\cdot\nu\, ds(x) + \varepsilon\delta_{m1}U_m = I_m, & m=1,\dots,M. \end{cases} \tag{2.5}$$

边界方程（2.5）$_4$ 等价于

$$\int_{E_1}\sigma\nabla u\cdot\nu\, ds(x) + \varepsilon U_1 = I_1, \quad \int_{E_m}\sigma\nabla u\cdot\nu\, ds(x) = I_m,\ \forall m\in\{2,\dots,M\}.$$

换言之，初始问题（2.2）中只有一个方程被修改。

我们提出以下命题

命题 2.3。问题（2.5）存在唯一解 $(u,\ U)\in H^1(\Omega)\times\mathbb{R}^d$。此外，若 I，f和 g满足相容条件（2.3），$U_1 = 0$和 $(u,\ U)$作为 $\mathscr{H}^1$中的一个元素，是（2.2）的解。

证明。我们赋予 $H^1(\Omega)\times\mathbb{R}^M$ 其标准内积及相应的范数

$$\|(u,U)\|^2_{H^1(\Omega)\times\mathbb{R}^M} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|U\|^2_{\mathbb{R}^M}.$$

首先，参照命题 2.2 的证明进行调整，可直接看出，问题 (2.5) 等价于以下变分表述

$$B_1\big((u,U),(v,V)\big) = L\big((v,V)\big), \quad \forall (v,V)\in H^1(\Omega)\times\mathbb{R}^M. \tag{2.6}$$

with

$$B_1\big((u,U),(v,V)\big) = \int_\Omega \sigma\nabla u\cdot\nabla v\, dx + \sum_{m=1}^M\int_{E_m}\xi_m(u-U_m)(v-V_m)ds(x) + \varepsilon\, U_1\, V_1$$

and

$$L\big((v,V)\big) = \int_\Omega f\, v\, dx + \sum_{m=1}^M\int_{E_m} g\,(v-V_m)\, ds(x) + \int_{E_c} g\, v\, ds(x) + I\cdot V.$$

类似地，对引理 2.1 的证明稍作调整即可得出

$$\|(u,U)\|^2_{b_1} = \int_\Omega|\nabla u|^2dx + \sum_{m=1}^M|u-U_m|^2ds(x) + U_1^2,$$

是 $H^1(\Omega)\times\mathbb{R}^M$ 上的一个范数，且与标准范数等价。关于 σ和 ξ_m的假设立即推出连续双线性型 B_1 具有强制性，而线性形式 L 显然在 $H^1(\Omega)\times\mathbb{R}^M$上连续。因此，根据 Lax-Milgram 定理，问题 (2.6) 存在唯一解。

现在假设 I，f和 g满足 (2.3)。取 $v = 1$和 $V = [1,\dots,1]$可得

$$\varepsilon\, U_1 = \int_\Omega f\, dx + \int_{E_c} g\, ds(x) + \sum_{m=1}^M I_m = 0.$$

因此，$U_1 = 0$，这立即意味着 (u,U) 满足方程组 (2.2)，证明至此完成。□

我们看到，求解问题 (2.5)——它与初始问题 (2.2) 仅有细微差别——可以得到满足附加条件 $U_1 = 0$的 (2.2) 的唯一解，而无需严格施加该条件。注意，只要 ε、 I、f 和 g 符合 (2.3) 意义下的兼容性，这对任意正参数 ε均成立。

由于这样便无需固定接地电位即可求解（2.2），因此从现在起我们将始终关注问题（2.5）。

注2.4：这里将第一电极作为关注对象完全是任意的。只需对电极重新编号，即可采用相同的表述在任意电极上施加零条件。

注2.5：问题（2.5）适定，与数据 I、 f 和 g 是否相容无关。若数据不相容，则（u、U）作为（2.5）的解，无法解出（2.2），因为后者无解。A

如命题 2.3 的证明所示，若（u，U）是（2.2）的解，我们总是有 ve

$$\varepsilon U_1 = \int_\Omega f\,dx + \int_{E_c} g\,ds(x) + \sum_{m=1}^{M} I_m. \tag{2.7}$$

因此，若我们令 $\tilde{I} \in \mathbb{R}^M$ 定义如下

$$\tilde{I}_1 = I_1 - \left(\int_\Omega f\,dx + \int_{E_c} g\,ds(x) + \sum_{m=1}^{M} I_m \right), \quad \tilde{I}_m = I_m,\ m \neq 1,$$

˜我们看到 (u, U) 满足 (2.2)，其中原始源项 (I, f, g) 被替换为 (I, f, g)。显然，这组新的数据满足相容条件 (2.3)。从某种意义上说，问题 (2.5) 会修正数据，使其始终满足相容条件。

对于相容数据，参数 ε 的取值不会影响问题 (2.5) 的解，可以任意设为某个值，例如 1。从数值角度来看，情况并非如此。事实上，数值相容条件 没有理由能被有限差分格式精确满足，而只能以近似值的精度满足，即使连续数据满足 (2.3)。因此，根据方程 (2.7)， ε 的取值会影响U_1的取值。这使得 (2.5) 左端的两项$_4$ 相互作用，从而影响数值误差的幅值，但不会影响收敛阶本身。

设定 $U \in \mathbb{R}^M_\diamond$。最后需要指出的是，同样容易选取满足（$u$，$U$）的（2.2）解，并使其在 U上满足附加的零均值条件 $U \in \mathbb{R}^M_\diamond$，而无需强制施加该条件（即问题定义在 $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ 中，而不是定义在 $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M_\diamond$中）。

事实上，只需解以下问题：

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ \sigma \nabla u \cdot \nu = g & \text{on } E_c \\ \sigma \nabla u \cdot \nu + \xi_m (u - U_m) = g & \text{on } E_m,\ m = 1, \dots, M, \\ \displaystyle\int_{E_m} \sigma \nabla u \cdot \nu\, ds(x) + \varepsilon \langle U \rangle = I_m, & m = 1, \dots, M. \end{cases} \tag{2.8}$$

这里我们设定 $\langle U \rangle = \sum_{k=1}^{M} U_k$。相应的变分形式为

$$B_{\langle\rangle}\big((u, U), (v, V)\big) = L\big((v, V)\big), \quad \forall (v, V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M.$$

with

$$B_{\langle\rangle}\big((u, U), (v, V)\big) = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \sum_{m=1}^{M} \int_{E_m} \xi_m (u - U_m)(v - V_m) ds(x) + \varepsilon \langle U \rangle \langle V \rangle,$$

连续线性形式 L 保持不变。沿用上一节的推理思路，不难看出，式（2.8）在 $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$中适定；并且，如果（$I$，$f$，$g$）满足（2.3），那么（$u$，$U$）作为式（2.8）的解，也满足完全电极模型的原始方程（2.2），此外 $\langle U \rangle = 0$。

注 2.6。 从数值角度来看，附加项 $\langle U \rangle$ 似乎不实用，因为它是非局部的，因此往往会使对应于式（2.8）离散化的矩阵变得稠密。不过，该项只出现在方程（2.8）$_4$，中，且只影响项 $U \in \mathbb{R}^M$， M 表示 Ω 边界上的电极数量，通常少于一百个。由于电势 u 通常离散化于包含数千个自由度的空间中，因此实际上，该项不会显著影响矩阵的填充。

2.4. 迈向浸入边界法。在我们的数值格式中，研究区域 Ω 嵌入更大的区域 Ω_e中；当维数为 2 时，Ω_e 是一个正方形，当维数为 3 时，则是一个立方体，并且 $\Omega \subset \Omega_e$。区域 Ω_e 由笛卡尔网格完全离散化，这意味着一些离散点位于 $\Omega_e \backslash \Omega$ 中；在我们的语境下，这部分扩展区域不存在物理问题。在这种情况下，一个初步想法是将位于 Ω 之外的自由度上的解直接设为零。但这种做法很繁琐，也不适用于我们的方法，因为我们需要解在界面 $\partial\Omega$ 两侧都具有光滑性，以便计算电极上的求积公式。

因此，我们选择了另一种方法，即在 $\Omega_e \setminus \Omega$ 中求解一个附加的偏微分方程，该方程与 Ω 中提出的问题类似。因此，我们引入以下附加问题

$$\begin{cases} -\Delta u_e = 0 & \text{in } \Omega_e \setminus \overline{\Omega} \\ u_e = 0 & \text{on } \partial\Omega_e \\ u_e = u & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

函数 u 是电势，即方程（2.5）的解。显然，此类问题在$H^1(\Omega)$中适定，其解连续依赖于 u，因此也依赖于 EIT 源项（I， f， g）。此外，得益于标准的椭圆正则性结果，它会自动继承 u 的光滑性。

总之，我们现在的目标是定义一种浸入边界法，以重建（u， U， u_e），其中（u， U）是方程2.5）的解，而 u_e 是方程2.9）的解。

3. CEM的浸入边界格式

本节聚焦于二维情形，并介绍如何在笛卡尔网格上使用浸入边界法离散化问题（2.5）和（2.9）。区域 Ω 嵌入到更大的正方形区域 Ω_e中，并通过在 Ω 的边界上设置附加变量来处理方程（2.5）的边界条件。我们证明该方法具有一阶精度收敛性。收敛性证明基于离散最大值原理，并利用该原理估计离散矩阵的逆的系数。

3.1. 网格点的分类。 我们考虑定义在正方形 Ω_e上的均匀笛卡尔网格。网格间距记为 h。该笛卡尔网格的每个节点称为网格点，记作$M_{ij} = (x_i, y_j) = (i\,h, j\,h)$。我们用 u_{ij}^h表示函数 u 在点 (x_i, y_j) 处的近似值。位于区域 Ω_e 内部的网格点集合记作 Ω_h。

为了对完全电极模型进行离散化，我们需要在边界$\partial\Omega$上定义额外的点。若边界 $\partial\Omega$ 与线段 $[M_{ij}M_{i+1j}]$ 存在交点，则将该边界点定义为 $I_{i+1/2,\ j} = (x_{i+1/2,\ j}, y_j)$。类似地，边界点 $I_{i,\ j+1/2} = (x_i, y_{i,\ j+1/2})$ 定义为边界与线段 $[M_{ij}M_{ij+1}]$ 的交点。在每个边界点处，我们增加一个额外的未知量 $u^h_{i+1/2,\ j}$ 或 $u^h_{i,\ j+1/2}$。边界点集合记作 $\delta\Omega_h$。

如果一个网格点有一个直接邻点是边界点，我们就称该网格点为不规则网格点，见图 1。相反，不规则的网格点称为规则网格点。不规则网格节点集合记为 Ω_h^*。电极值集合记为 E_h。

为方便起见，网格点或边界点可以用字母表示，例如 P 或 Q，而不必使用诸如 $M_{i,\ j}$ 这样的下标。若更方便，我们也将点 P的坐标记为 x_P 和 y_P。

3.2. **数值格式**。

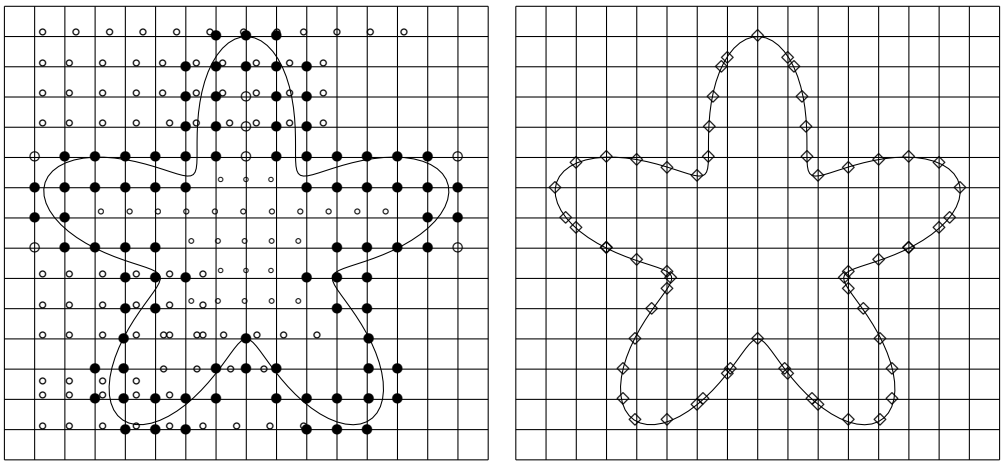


图1。左：用圆圈○表示的规则点，以及用实心圆点 •表示的不规则点（属于 Ω_h^*）；右：边界点（属于 $\delta\Omega_h$）。

椭圆算子。为在每个网格点（无论是否规则）上离散化椭圆算子 $(2.5)_1$ 或 $(2.9)_1$，我们采用五点差分格式，使用网格点 $M_{i,j}$ 以及各方向上的最近邻点（边界点或网格点）。为明确说明这一点，我们将 u_S^h 记为南向最近点处的解值，其坐标为 (x_S, y_S)。类似地，我们定义 u_N^h、u_W^h 和 u_E^h，其对应坐标分别为 (x_N, y_N)、(x_W, y_W) 和 (x_E, y_E)。离散化形式为

$$
\begin{aligned}
-\Big(\nabla.(\sigma\nabla u)\Big)_{i,j}^h \quad = \quad & -\Big(\sigma_{i+1/2,j}\frac{u_E^h - u_{ij}^h}{x_E - x_i} - \sigma_{i-1/2,j}\frac{u_{ij}^h - u_W^h}{x_i - x_W}\Big)\frac{1}{h} \\
& -\Big(\sigma_{i,j+1/2}\frac{u_N^h - u_{ij}^h}{y_N - y_j} - \sigma_{i,j-1/2}\frac{u_{ij}^h - u_S^h}{y_j - y_S}\Big)\frac{1}{h}.
\end{aligned}
$$

其中 $\sigma_{i+1/2,\ j}$ 表示点 $(\dfrac{x_i + x_E}{2},\ y_j,\ )$ 处 σ 的值。该离散化在规则网格点上具有二阶精度，在不规则网格点上具有零阶精度。

通量边界条件。在每个边界点处，我们对边界条件进行离散化（$2.5)_2$ 或（$2.5)_3$，，具体取决于该边界点是否属于某个电极。

例如，在边界点 $I_{i+1/2,\ j}$ 处，离散化形式为

$$
\sigma(\nabla u\cdot\nu)_{i+1/2,j}^h + \xi_m(I_{i+1/2,j})\Big(u_{i+1/2,j}^h - U_m\Big) = 0 \text{ if } I_{i+1/2,j}\in E_m, \tag{3.1}
$$

$$
\sigma(\nabla u\cdot\nu)_{i+1/2,j}^h = 0 \text{ otherwise.} \tag{3.2}
$$

其中 $(\nabla u\cdot\nu)_{i+1/2,\ j}^h$ 表示离散法向导数。对于每个边界点 $I_{i,\ j+1/2}$，均采用类似的离散化。

法向导数 $(\nabla u\cdot\nu)_{i+1/2,\ j}^h$ 的离散化取决于界面的局部几何形状。如图 2 所示，边界法向量与网格的第一个交点位于一条线段上：该线段可能是 $[M_{i,j},\ M_{i,j-1}]$、$[M_{i,j-1},\ M_{i+1,j-1}]$、$[M_{i,j},\ M_{i,j+1}]$ 或 $[M_{i,j+1},\ M_{i+1,j+1}]$。离散法向导数通过计算数值解在线段与边界点 $I_{i+1/2,\ j}$ 构成的三角形上的线性插值函数的法向导数得到。

如果将 K 记为该三角形，将 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ 和 $(x_3,\ y_3)$ 记为其顶点，并将 u_1、u_2 和 u_3 记为对应的值，则线性插值的顶点基函数写作

$$
\lambda_j(x,y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j,\ j = 1,2,3,
$$

with

$$\begin{aligned}\alpha_j &= \frac{y_k - y_i}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},\\ \beta_j &= \frac{x_i - x_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},\\ \gamma_j &= \frac{x_k y_i - x_i y_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},\end{aligned}$$

$(\nu_x,\ \nu_y)$ 是界面点处法向量的近似值。采用这些记号，法向导数的近似值例如可写为（对于界面点 $I_{i+1/2,\ j}$）

$$(\nabla u \cdot \nu)^h_{i+1/2,j} = (u_1\,\alpha_1 + u_2\,\alpha_2 + u_3\,\alpha_3)\nu_x + (u_1\,\beta_1 + u_2\,\beta_2 + u_3\,\beta_3)\nu_y.$$

由于基于线性插值，该离散化具有一阶精度。

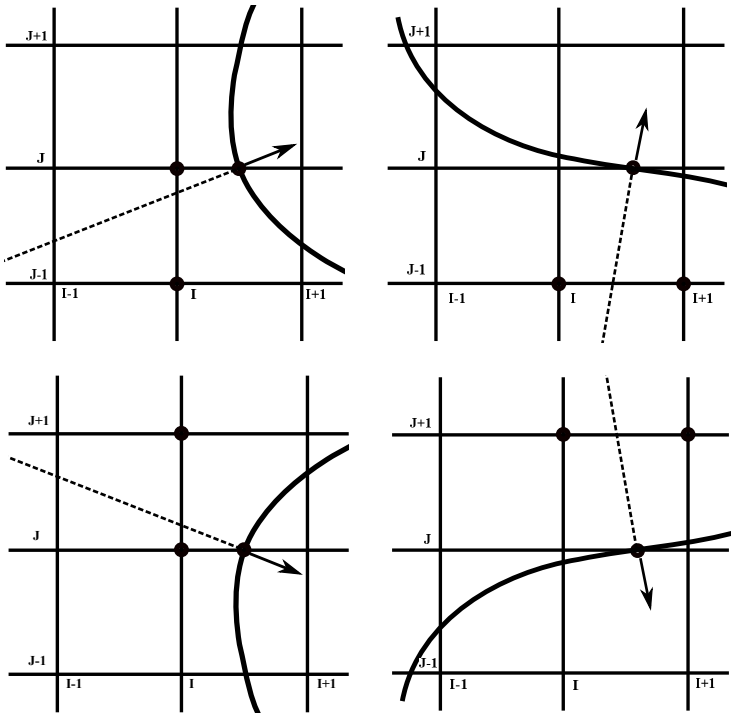


图2. 界面左侧一阶通量离散化的所有可能模板，离散化涉及的点以黑色圆点标出。

积分边界条件。现在我们对（2.5）$_4$进行离散化。更准确地说，利用（2.5）$_3$，它等价于：

$$\int_{E_m} \big(g + \xi_m(U_m - u)\big)\, ds(x) + \varepsilon\,\delta_{m1}\,U_1 = I_m,\ m = 1, \ldots, M. \tag{3.3}$$

从现在起，我们聚焦于等价的边界条件（3.3）。

我们在每个电极上使用基于一阶离散狄拉克函数的一阶求积公式，对该积分边界条件（3.3）进行离散化 [47]。根据构造，这个离散狄拉克函数为正，且仅在不规则网格点上非零，因此可以写为

$$\sum_{P\in\Omega_h^*} \omega_P \Big(g(P) + \xi_m(P)(U_m - u_P)\Big) + \varepsilon\,\delta_{m1}\,U_1 = I_m,\ m = 1, \ldots, M. \tag{3.4}$$

其中的系数 ω_P 是 [47]中的一阶求积公式的权重。因此，该公式的截断误差为一阶。

3.3. 离散矩阵的单调性。这里我们旨在证明前文所述线性系统的离散矩阵（记为 A_h）具有单调性。首先证明以下性质，该性质将在后续论证中发挥作用：

命题 3.1。按照边界法向量的约定，若 v 的最小值出现在某个边界点上，则该边界点处的离散法向导数为负。此外，若该点处的近似法向导数为零，则模板中涉及的三个点的取值相等。

证明。法向导数的近似值在空间中为常数，因为它是通过三角形上的线性插值得到的。因此，若 v 的最小值出现在某个边界点上，则该边界点处的离散法向导数为负。□

命题 3.2。 前面所述线性系统的离散矩阵（记作 A_h）是单调的，也就是说， A_h 可逆，且 A_h^{-1} 的所有值均为非负。

证明。 设 v 是一个数组， $A_h v$ 的所有系数均非负，记作 $A_h v \geq 0$。我们旨在证明 v 的所有系数均非负。为此，我们考虑 v 在整个区域内的最小值：它可能是某个网格点的值、某个边界点的值，或某个电极电势。下面分别讨论这些情况。

- 若最小值在某个网格点处取得：
  在这种情况下，我们用（i_0， j_0）表示 v中最小分量的索引。假设该网格点是规则网格点。否则，公式中的权重会略有不同，但推理过程相同。利用该点处椭圆算子的不等式，我们可以写出：
  $$4v_{i_0,j_0} - v_{i_0+1,j_0} - v_{i_0-1,j_0} - v_{i_0,j_0+1} - v_{i_0,j_0-1} \geq 0,$$
  由此我们推得
  $$v_{i_0+1,j_0} = v_{i_0-1,j_0} = v_{i_0,j_0+1} = v_{i_0,j_0-1} = v_{i_0,j_0}.$$
  递归地对 (i_0, j_0) 的邻点重复上述推理，再对邻点的邻点等重复推理，我们推得所有对应于网格点或边界点的 v 值均等于 v_{i_0,j_0}。因此，这种情形等同于最小值位于边界点的情形。

- 若最小值位于不属于任何电极的边界点：
  不失一般性，假设最小值位于$I_{i+1/2,j}$。在此界面点处，我们有以下两个关系式
  $$\begin{aligned}(\sigma\nabla v\cdot n)^h_{i+1/2,j} &\leq 0 \text{ because the minimum is located on this point,}\\ (\sigma\nabla v\cdot n)^h_{i+1/2,j} &\geq 0 \text{ because all coefficients of } A_h v \text{ are non-negative,}\end{aligned}$$
  由此可得
  $$(\sigma\nabla v\cdot n)^h_{i+1/2,j} = 0$$
  参与法向导数离散化的网格点的值也等于该最小值。根据上一小节的推理，这意味着所有网格点值和边界点值都等于该最小值。因此，最终这种情况相当于考虑最小值位于属于某个电极的边界点上的情形。

- 如果最小值位于属于某个电极的边界点上：
  不失一般性，我们假设最小值位于$I_{i+1/2,\ j}$上。在此界面点处，我们有以下关系：

$$\begin{aligned}(\sigma\nabla v\cdot n)^h_{i+1/2,j} &\leq 0,\\ (\sigma\nabla v\cdot n)^h_{i+1/2,j}+\xi_m(I_{i+1/2,j})\Big(v^h_{i+1/2,j}-V_m\Big) &\geq 0,\end{aligned}$$

  第一条关系成立，是因为最小值位于此点；第二条关系成立，是因为 $A_h v$ 的所有系数均为非负数。因此

$$v^h_{i+1/2,j}-V_m \quad \geq 0,$$

  这意味着

$$V_m \quad = v^h_{i+1/2,j},$$

  因此，电极电势 V_m 也是 v的最小值。因此，这种情况等同于考虑 v 的最小值对应于电极电势 V_m。

- 如果最小值对应于满足 $m\neq 1$的电极电势 V_m ：
  在该电极上，我们有如下关系：

$$\sum_{P\in\Omega_h^*}\omega_P\,\xi_m(P)\Big(V_m-v_P\Big)\geq 0,$$

  因此，属于 E_m 的所有边界点都等于最小值 V_m。根据前面的推理，这意味着与网格点、边界点或电极电势相对应的 v 的所有值都等于该最小值。

- 如果最小值对应于电极电势 V_1:
  在该电极上，我们有如下关系：

$$\sum_{P\in\Omega_h^*}\omega_P\,\xi_1(P)\Big(V_1-v_P\Big)+\varepsilon\,V_1\geq 0,$$

  这意味着

$$\varepsilon\,V_1\geq 0.$$

  v 的最小值是非负的，因此 v 的所有系数都是非负的。

因此我们证明了，如果 $A_h v$ 非负，那么 v 也非负。这一性质有两个推论： A_h 可逆，且A_h^{-1} 的所有值均非负。□

3.4. 离散格林函数。 下文中，字母 P 和 Q 表示线性系统中的索引，分别对应网格上或边界上的离散点，或电极值。例如，我们用 $u(P)$表示与点 P索引相同的 u 行中的系数。类似地， $A_hU(P)$表示数组 A_hU中第 P行的系数，而 $A_h(P,Q)$表示矩阵 A_h中第 P行、第 Q列的系数。我们还将矩阵 A_h的第 Q列和第 P行分别记为 $A_h(:\ Q)$和 $A_h(P,:)$。

按照 [12, 51] 对于每个 $Q\in\Omega_h\cup\delta\Omega_h\cup E_h$，我们定义离散格林函数

$$G_h(:,Q)=\Big(G_h(P,Q)\Big)_{P\in\Omega_h\cup\delta\Omega_h\cup E_h}$$

作为离散问题的解：

$$\left\{\ A_hG_h(:,Q)(P)=\left\{\begin{array}{ll}0, & P\neq Q\\ 1, & P=Q\end{array}\right.\right. \tag{3.5}$$

由于矩阵 A_h 是单调的，因此 $G_h(:,Q)$ 的所有值均为正。事实上，离散格林函数是 A_h 的逆矩阵的各列。我们可以将离散化问题的解写成源项与离散格林函数值的乘积之和：

$$u_h(P) = \sum_{Q\in\Omega_h\cup\delta\Omega_h\cup E_h} G_h(P,Q)\,(A_h u_h)(Q), \quad \forall P\in\Omega_h\cup\delta\Omega_h\cup E_h.$$

根据以下结果，我们可以得到离散格林函数的界：

˜**命题 3.3.** 设 S 和 S 是两个点集，W 是一个离散函数，$\alpha>0$、$\beta>0$ 和 i、$j\in\mathbb{N}$ 满足：

$$\begin{cases} (A_hW)(P)\geq 0, & \forall P\in\Omega_h\cup\delta\Omega_h\cup E_h\setminus\tilde{S},\\ (A_hW)(P)\geq \alpha^{-i}, & \forall P\in S,\\ (A_hW)(P)\geq -(\beta^{-j}), & \forall P\in\tilde{S}. \end{cases}$$

Then

$$\sum_{Q\in S} G_h(P,Q)\leq \alpha^i W(P)+\alpha^i\beta^{-j}\sum_{Q\in\tilde{S}} G_h(P,Q), \quad \forall P\in\Omega_h\cup\delta\Omega_h\cup E_h.$$

证明。 根据离散格林函数的定义，我们可以写出

$$A_hW(P)\geq A_h\Big(\alpha^{-i}\sum_{Q\in S} G_h(:,Q)-\beta^{-j}\sum_{Q\in\tilde{S}} G_h(:,Q)\Big)(P), \quad \forall P\in\Omega_h\cup\delta\Omega_h\cup E_h.$$

由于 A_h^{-1} 的所有系数均为非负，因此可得

$$W(P)-\alpha^{-i}\sum_{Q\in S} G_h(P,Q)+\beta^{-j}\sum_{Q\in\tilde{S}} G_h(P,Q)\geq 0, \quad \forall P\in\Omega_h\cup\delta\Omega_h\cup E_h,$$

最终，我们得到以下界：

$$\sum_{Q\in S} G_h(P,Q)\leq \alpha^i W(P)+\alpha^i\beta^{-j}\sum_{Q\in\tilde{S}} G_h(P,Q), \quad \forall P\in\Omega_h\cup\delta\Omega_h\cup E_h.$$

□

3.5. **离散格林函数的估计与收敛结果。** 本节针对由离散化（2.5）-（2.9）所产生的矩阵，求得相应离散格林函数的上界，并据此推导数值格式的收敛阶。我们假设函数 ξ_m 足够光滑，使得解 u 具有以下分析所需的正则性；特别是，使第3.2小节中的截断误差估计成立。

命题 3.4. 当 h 足够小时，以下上界成立：

$$\sum_{Q\in\Omega_h\setminus\Omega_h^*} G_h(:,Q)\leq O(1),$$
$$\sum_{Q\in\delta\Omega_h\cup E_h} G_h(:,Q)\leq O(1),$$
$$\sum_{Q\in\Omega_h^*} G_h(:,Q)\leq O(h).$$

证明。 在命题 3.3 的背景下，我们使用若干离散函数，以获得逆矩阵 A_h^{-1} 各个分块的界。

• 我们定义数组 W，使得 $W \equiv 1$。因此，除涉及电极 E_1 的求积公式外，线性系统中的所有表达式均为零：

$$\begin{aligned}
-\Big(\nabla.(\sigma\nabla W)\Big)^h_{i,j} &= 0 \quad \forall M_{i,j} \in \Omega_h,\\
(\sigma\nabla W\cdot\nu)^h_{i+1/2,j} - \xi_m(I_{i+1/2,j})\Big(W_m - W^h_{i+1/2,j}\Big) &= 0 \quad \forall\, I_{i+1/2,j} \in \delta\Omega_h,\\
(\sigma\nabla W\cdot\nu)^h_{i,j+1/2} - \xi_m(I_{i,j+1/2})\Big(W_m - W^h_{i,j+1/2}\Big) &= 0, \quad \forall\, I_{i,j+1/2} \in \delta\Omega_h,\\
\sum_{P\in E_m} \omega_p\, \xi_m(P)\Big(W_m - \tilde{W}_P\Big) &= 0 \quad \forall\, m \neq 1,\\
\sum_{P\in E_m} \omega_p\, \xi_m(P)\Big(W_m - \tilde{W}_P\Big) + \varepsilon W_1 &= \varepsilon.
\end{aligned}$$

$G_h(:, E_1)$ 表示与电极 E_1 相关联的离散格林函数，我们得到

$$G_h(:, E_1) = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.6}$$

• 我们考虑 $\bar{u}$ （2.5）- （2.9）的精确解，其中 $f = 1$, $g = 1$, $I_m = 1$ $\forall\, m \neq 1$, 且 I_1 满足相容条件（2.3）。我们将数组 W 定义为 $\bar{u}$ 在网格点、边界点和电极值上的离散化。

椭圆算子和通量的离散化至少具有一阶精度的一致性，但 Ω^*_h 中的网格点除外，在这些点上它只有零阶精度。因此，当h 足够小时，我们可以写成

$$\begin{aligned}
-\Big(\nabla.(\sigma\bar{W})\Big)^h_{i,j} &\geq \frac{1}{2}, \quad \forall M_{i,j} \in \Omega_h \setminus \Omega^*_h,\\
-\Big(\nabla.(\sigma\bar{W})\Big)^h_{i,j} &\geq -C_1, \quad \forall M_{i,j} \in \Omega^*_h,\\
(\sigma\nabla\bar{W}\cdot\nu)^h_{i+1/2,j} - \xi_m(I_{i+1/2,j})\Big(\bar{W}_m - \bar{W}_{i+1/2,j}\Big) &\geq \frac{1}{2}, \quad \forall I_{i+1/2,j} \in \delta\Omega_h,\\
(\sigma\nabla\bar{W}\cdot\nu)^h_{i,j+1/2} - \xi_m(I_{i,j+1/2})\Big(\bar{W}_m - \bar{W}_{i,j+1/2}\Big) &\geq \frac{1}{2}, \quad \forall I_{i,j+1/2} \in \delta\Omega_h\\
\sum_{P\in E_m} \omega_p\, \xi_m(P)\Big(\bar{W}_m - \bar{W}_P\Big) &\geq \frac{1}{2}, \quad \forall\, m \neq 1\\
\sum_{P\in E_1} \omega_p\, \xi_m(P)\Big(\bar{W}_1 - \bar{W}_P\Big) + \varepsilon\bar{W}_1 &\geq -2|I_1|,
\end{aligned}$$

其中 C_1 是一个严格正的常数。它也可以改写为：

$$\begin{aligned}
(A_h\bar{W})(P) &\geq \frac{1}{2}, \quad \forall P \in (\Omega_h \setminus \Omega^*_h) \cup (E_h \setminus E_1),\\
(A_h\bar{W})(P) &\geq \frac{1}{2}, \quad \forall P \in \delta\Omega_h,\\
(A_h\bar{W})(P) &\geq -C_1, \quad \forall P \in \Omega^*_h,\\
(A_h\bar{W})(E_1) &\geq -2|I_1|,
\end{aligned}$$

由此可得：

$$\sum_{Q\in(\Omega_h\setminus\Omega^*_h)\cup(E_h\setminus E_1)} G_h(:,Q) + \sum_{Q\in\delta\Omega_h} G_h(:,Q) \leq 2\bar{W} + 2C_1 \sum_{Q\in\Omega^*_h} G_h(:,Q) + 4|I_1|G_h(:,E_1). \tag{3.7}$$

• 我们定义数组 $\tilde{W}$，使得 $\tilde{W}=1$ 对 $\tilde{\Omega}_h$中的所有点成立，并且 $\tilde{W}=0$ 对$\delta\Omega_h\cup E_h$中的所有点成立。由于 Ω_h 和 $\delta\Omega_h\cup E_h$之间的 W取值存在跳跃，当我们将离散化˜应用于 W 时，得到

$$
\begin{aligned}
-\Big(\nabla.(\sigma\nabla\tilde{W})\Big)^h_{i,j}&=0 \quad \forall M_{i,j}\in\Omega_h\setminus\Omega_h^*,\\
-\Big(\nabla.(\sigma\nabla\tilde{W})\Big)^h_{i,j}&\geq\frac{C_2}{h^2} \quad \forall\, M_{i,j}\in\Omega_h^*,\\
(\sigma\nabla\tilde{W}\cdot\nu)^h_{i+1/2,j}-\xi_m(I_{i+1/2,j})\Big(\tilde{W}_m-\tilde{W}_{i+1/2,j}\Big)&\geq-\frac{C_3}{h} \quad \forall\, I_{i+1/2,j}\in\delta\Omega_h,\\
(\sigma\nabla\tilde{W}\cdot\nu)^h_{i,j+1/2}-\xi_m(I_{i,j+1/2})\Big(\tilde{W}_m-\tilde{W}_{i,j+1/2}\Big)&\geq-\frac{C_3}{h}, \quad \forall\, I_{i,j+1/2}\in\delta\Omega_h\\
\sum_{P\in E_m}\omega_p\,\xi_m(P)\Big(\tilde{W}_m-\tilde{W}_P\Big)+\varepsilon\delta_{m1}\tilde{W}_1&=0 \quad \forall\, m,
\end{aligned}
$$

其中 C_2 和 C_3 是严格正常数。因此我们得到

$$
\frac{C_2}{h^2}\sum_{Q\in\Omega_h^*}G_h(:,Q)\leq\tilde{W}+\frac{C_3}{h}\sum_{Q\in\delta\Omega_h}G_h(:,Q),
$$

然后:

$$
\sum_{Q\in\Omega_h^*}G_h(:,Q)\leq\frac{h^2}{C_2}\tilde{W}+h\frac{C_3}{C_2}\sum_{Q\in\delta\Omega_h}G_h(:,Q). \tag{3.8}
$$

结合3.8 与3.7 ，我们得到

$$
\sum_{Q\in(\Omega_h\setminus\Omega_h^*)\cup(E_h\setminus E_1)}G_h(:,Q)+\sum_{Q\in\delta\Omega_h}G_h(:,Q)\leq 2\bar{W}+2C_1\frac{h^2}{C_2}\tilde{W}+4|I_1|G_h(:,E_1) \tag{3.9}
$$

$$
+2C_1\frac{C_3}{C_2}h\sum_{Q\in\delta\Omega_h}G_h(:,Q), \tag{3.10}
$$

并且当 h 足够小时，可得

$$
\sum_{Q\in(\Omega_h\setminus\Omega_h^*)\cup(E_h\setminus E_1)}G_h(:,Q)+\sum_{Q\in\delta\Omega_h}G_h(:,Q)\leq\bar{C} \tag{3.11}
$$

¯其中 C 为正常数。将该不等式重新代入3.8，得到

$$
\sum_{Q\in\Omega_h^*}G_h(:,Q)\leq\frac{h^2}{C_2}\tilde{W}+h\frac{C_3}{C_2}\bar{C}. \tag{3.12}
$$

不等式3.6、3.11和3.12给出了该命题的界。

□

命题 3.5。 若记 $\bar{u}$ 为 (2.5)-(2.9)的精确解，且 u_h 为数值解，则局部误差 $|\bar{u}(P)-u_h(P)|$ 满足以下条件，其中 h 充分小:

$$
|\bar{u}(P)-u_h(P)|\leq O(h). \tag{3.13}
$$

因此，数值解在 L^∞-范数下以一阶精度收敛到精确解。

证明。 记 τ 为离散化（2.5）-（2.9）所产生的截断误差数组。我们有

$$|\bar{u}(P)-u_h(P)| = \left|\sum_{Q\in\Omega_h\cup\delta\Omega_h\cup E_h} G_h(P,Q)\tau(Q)\right|$$
$$\leq \left|\sum_{Q\in\Omega_h^*} G_h(P,Q)\tau(Q)\right| + \left|\sum_{Q\in\Omega_h\setminus\Omega_h^*} G_h(P,Q)\tau(Q)\right| + \left|\sum_{Q\in\delta\Omega_h\cup E_h} G_h(P,Q)\tau(Q)\right|,$$

根据前述结果，可立即推出

$$|\bar{u}(P)-u_h(P)| \leq O(1)\left|\sum_{Q\in\Omega_h^*} G_h(P,Q)\right| + O(h^2)\left|\sum_{Q\in\Omega_h\setminus\Omega_h^*} G_h(P,Q)\right| + O(h)\left|\sum_{Q\in\delta\Omega_h\cup E_h} G_h(P,Q)\right|$$
$$\leq O(1)O(h) + O(h^2)O(1) + O(h)O(1) = O(h).$$

□

4. 数值实验

现在我们研究第3.2节中介绍的电阻抗成像浸入边界法的效率。具体而言，我们在三个不同的二维问题上测试该方法：

- 电阻抗断层成像的正问题，在本文语境下表述如下：给定源项 f， g 以及 I，求解（u， U），使其成为（2.5）的解（按命题2.3的意义）。在这种情况下，几何形状（即 Ω 和电极的位置）以及电导率均假定为已知参数。这是一个适定问题，我们的数值方法旨在无需对几何形状进行精确离散化，即可获得其解的良好重建。
- 电阻抗断层成像的逆问题：给定输入电流 $I \in \mathbb{R}^M_\diamond$及相应的测量电压 U，重建内部电导率 σ。换言之，已知数对（I， U），我们寻求 σ，使得（u， U） $=(u(\sigma)\ U(\sigma))$满足（2.5），其源项为 $f=0$， $g=0$以及I。这里同样假定几何形状已知。这当然是电阻抗成像的核心问题，因此也是对我们方法的主要验证。
- 电阻抗断层成像中的一个几何反问题：对于给定的输入电流 $I \in \mathbb{R}^M_\diamond$以及相应的测量电压 U，在已知 Ω 和电导率 σ的情况下，重建电极的位置。显然，从实际角度来看，这个问题意义不大。但一方面，它可以视为解决电阻抗断层成像中几何设置信息不完全已知这一实际问题的第一步；众所周知，这会严重降低大多数电导率重建算法的质量（专门针对这一问题设计的算法除外，参见 [2, 15, 33, 34] 及其中的参考文献）。另一方面，这一问题也与我们的研究相关，因为我们提出的浸入边界法并不能精确地近似电极。因此，鉴于电阻抗断层成像测量对电极位置极为敏感，这是一个颇具挑战性的问题。

4.1. 几何形状的表示。 在以下实验中，区域 Ω 由其边界 $\partial\Omega$ 的极坐标参数化表示。更具体地说，对于给定的向量 $\alpha=[\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{2N}]\in\mathbb{R}^{2N+1}$， 令

$$\partial\Omega = \{r(\theta)\mathbf{u}(\theta), \theta\in[0,2\pi]\},$$

其中 $\mathbf{u}(\theta) = [\cos(\theta),\sin(\theta)]$, 和

$$r(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N}\left(\alpha_k\cos(k\theta) + \alpha_{k+N}\sin(k\theta)\right).$$

形状参数 $[\alpha_0, \ldots, \alpha_{2N}]$ 的选取满足：对所有 $\theta \in [0, 2\pi]$，$0 < r(\theta) < 2$。最后，我们设

$$\Omega = \left\{ \rho[\cos(\theta), \sin(\theta)] \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, 2\pi],\ 0 \leq \rho < r(\theta_0) \right\}.$$

注意，对于 Ω 的这种参数化，在点 $x = \|x\|[\cos(\theta_x), \sin(\theta_x)] \in \partial\Omega$ 处的外向单位向量（记作 $\nu(x)$）为

$$\nu(x) = \frac{1}{\rho(\theta_x)} \left[r(\theta_x)\mathbf{u}(\theta_x) - r'(\theta_x)\mathbf{v}(\theta_x) \right],$$

其中 $\mathbf{v}(\theta) = [-\sin(\theta), \cos(\theta)]$，且 $\rho(\theta) = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}$。我们还定义

$$\tau(x) = \frac{1}{\rho(\theta_x)} \left[r'(\theta_x)\mathbf{u}(\theta_x) + r(\theta_x)\mathbf{v}(\theta_x) \right],$$

在点 x 处与 $\partial\Omega$ 相切的向量，使得 $(\nu(x)\ \tau(x))$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的正向基。

在以下测试中，我们为 Ω 使用三种不同的几何形状：Ω_1 是半径为 1.5 的圆盘，对应于 $\alpha = [1.5]$；Ω_2 对应于选择 $\alpha = [1.51, 0.01, 0.05, 0.2, 0.035, 0.01, 0.1]$；$\Omega_3$ 对应于选择 $\alpha = [1.6, 0.002, 0.01, 0.003, 0.035, 0.2, 0.15]$。

M个电极由向量 (Θ^1, Θ^2) 参数化 $\in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$，满足 $E_1, \ldots, E_M$

$$\Theta_1^1 < \Theta_1^2 < \Theta_2^2 < \ldots < \Theta_M^2 < \Theta_1^1 + 2\pi,$$

使得

$$E_m = \left\{ r(\theta)\mathbf{u}(\theta),\ \theta \in [\Theta_m^1, \Theta_m^2] \right\}.$$

由于实际应用中电极的长度是预先给定的，我们通常设定 Θ^1，选择一个长度值 $L > 0$，并通过求解方程计算 Θ_2

$$L = \int_{\Theta_k^1}^{\Theta_k^2} \rho(\theta)\, d\theta. \tag{4.1}$$

除非另有说明，在以下实验中我们使用16个电极，由 $\Theta_k^1 = -\pi + (k-1)$定义 π_8和 $L = 0.35$。

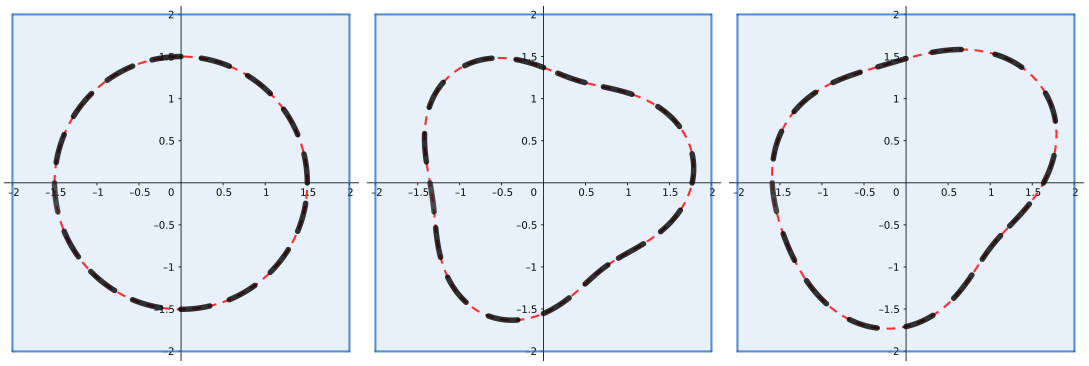


图 3. 参考正方形 $[-2, 2] \times [-2, 2]$（蓝色）中的区域 Ω_1, Ω_2 和 Ω_3（红色），采用我们通常使用的 16 个电极配置（粗黑线）

注释 4.1。本文采用一种特定的界面极坐标参数化方法，从而能够显式计算界面的所有法向量。然而，这种参数化意味着研究区域必须是星形的，而某些应用中可能并非如此。

在这种情况下，通常仍然可以使用水平集函数来描述界面。这种描述相当于将界面隐式地表示为某个函数的零水平集。水平集方法由 Osher 和 Sethian 提出 [44]。我们请感兴趣的读者

参阅 [43, 45, 46]。尽管任何在界面位置取零且足够光滑的函数都可以使用，但在实践中，到界面的有符号距离常常被采用：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{dist}_{\partial\Omega}(x) & \text{outside of the interface } \partial\Omega, \\ 0 & \text{on the interface,} \\ -\operatorname{dist}_{\partial\Omega}(x) & \text{inside of the interface } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

我们在此回顾此情形下的一些性质：

- 正如 [14], 中所回顾的，水平集作为距离函数，是 1-Lipschitz 连续的，且几乎处处可微。此外，若 ϕ 在点 x可微，则其在 x处满足所谓的程函方程：

$$\|\nabla\varphi(x)\| = 1.$$

- 水平集的光滑性实际上与界面的光滑性密切相关：如 [25, 第355], 页所证明的，若界面是 C^2, 则存在一个实数 $r_0 > 0$ ，使得对于所有 x， y 满足 $|\varphi(x, y)| < r_0$的情形，水平集是 C^2 。

- 经过 x的 φ 等值线的外法向量，记为 $\nu(x)$，在 φ 可微处可表示为

$$\nu(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}, \tag{4.3}$$

4.2. **正问题**。 首先，我们考察所提出的浸入边界法能否高效计算电阻抗成像问题（2.5）的解。我们指出，对于足够光滑的解，第3.5节中给出的收敛结果在实践中确实得到了验证，并展示了若干内部电势重建的示例。

4.2.1. 方法的收敛性。 为验证第3.5 节证明的收敛率确实在实践中得到体现，我们按如下步骤进行：令 $\Omega_e = [-2, 2] \times [-2, 2]$， $u(x, y) = \sin(x\, y)$， $U = 0_{\mathbb{R}^{16}}$，并计算相应的源项 f， g 以及 I ，见式 2.2。特别地，为了得到输入电流向量 I，我们使用数值积分方案计算式（2.2）$_4$ 中出现的相应积分。

随后，我们使用第 3.2 节所述的浸入边界法，针对不同的网格参数 u_h ，求解问题（2.2）以获得近似解 h。为同时检验导数的收敛性，我们通过数值微分计算梯度 du_h 的近似值。

接下来，对于从 u_h 和 du_h 到 h 的各种取值，我们计算 $_1{}_{25}$ 至 $_1{}_{225}$。式（ ε ~~2.5~~）$_4$ 中的参数 $\sim 10^{-10}$取较小值，量级为 4。结果如图所示：我们观察到 u 及其梯度均呈线性收敛。

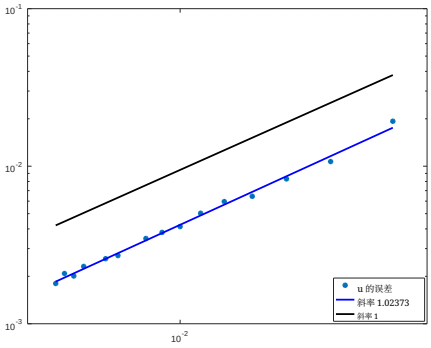
注4.2。 u_h 到 u 的线性收敛是预期之中的。梯度的线性收敛并不令人意外，因为该数值方法的构造基于区域边界附近通量的一阶离散。然而，要证明这一点并不显而易见，在有限差分框架下也并非标准做法。我们将梯度收敛性的研究留待未来工作。

注4.3。 本文给出了参数 ε取某一特定值时的数值结果。需要指出的是，改变参数 ϵ 的值不会改变收敛行为。然而，在 h固定时， ε 会影响误差幅值。 U_1 取决于数值相容条件，因此并不恰好为零。这意味着， εU_1 与公式（2.5）$_4$ 中的积分项相互作用，从而影响这两项的取值。

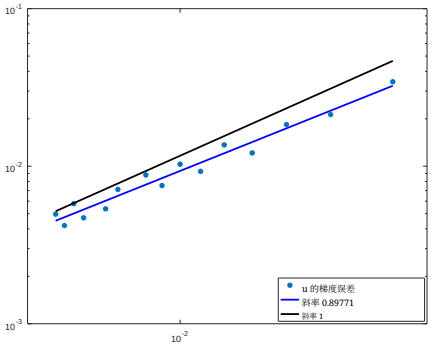
图 5 展示了广义完全电极模型（其导纳率在空间中平滑变化）与经典完全电极模型（其参数为常数 $\xi_m = \frac{1}{z_m}$ ）的数值误差对比。所考虑的几何形状为半径 $R = 0.5$ 的圆，嵌入在正方形 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 中，4 个电极均匀分布。离散参数 h 的取值范围为 $_1{}_{50}$ 至 $_1{}_{250}$。图中显示的收敛率是根据经典完全电极模型计算的。

我们观察到，两种模型的数值误差幅度及其收敛速率都非常接近。

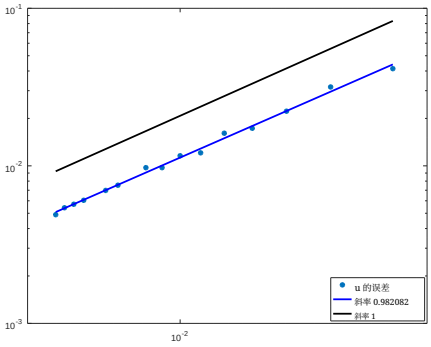
最后，我们给出一些内部电势的重建结果，其中 $\Omega_e = [-2,2]\times[-2,2]$ 采用 700×700 笛卡尔网格离散，并使用不同的几何形状、不同的背景电导率以及施加于电极的各种模式，见图6 和 7。



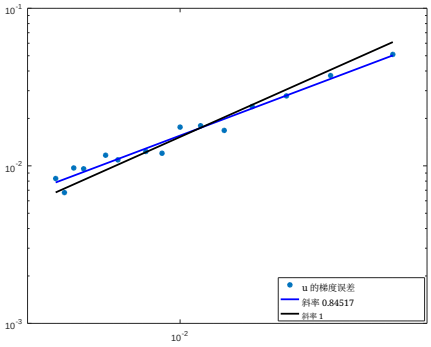
(a) $\|u_h - u\|_\infty$ 关于 h 的函数。$\Omega = \Omega_1$.



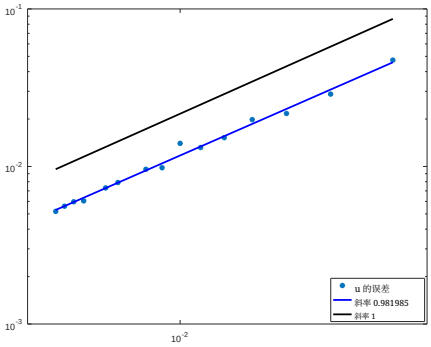
(b) $\|du_{h,\ 1} - \partial_x u\|_\infty$ 关于 h 的函数。$\Omega = \Omega_1$。



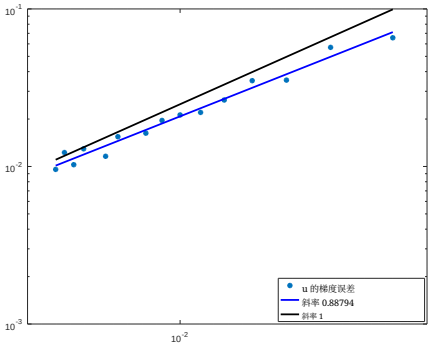
(c) $\|u_h - u\|_\infty$ 关于 h 的函数。$\Omega = \Omega_2$.



(d) $\|du_{h,\ 1} - \partial_x u\|_\infty$ 关于 h 的函数。$\Omega = \Omega_2$。

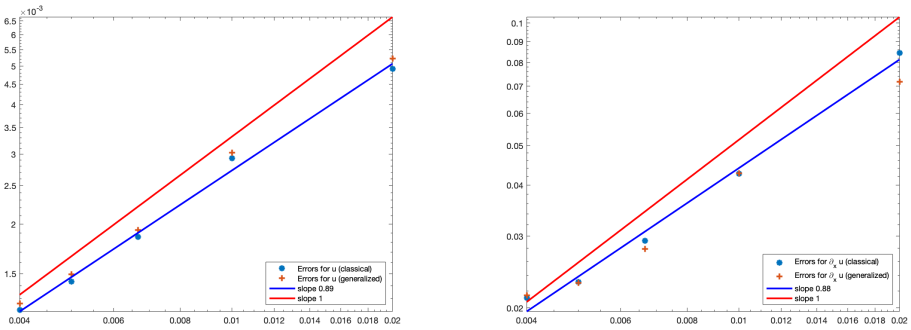


(e) $\|u_h - u\|_\infty$ 作为 h 的函数。$\Omega = \Omega_3$.



(f) $\|du_{h,1} - \partial_x u\|_\infty$ 作为 h 的函数。$\Omega = \Omega_3$。

图4. 使用制造解 $u(x,y) = \sin(x\,y)$ 以及 $U = 0_{\mathbb{R}^{16}}$ 在每个区域内进行的收敛性研究。



(a) $\|u_h - u\|_\infty$ 作为 h 的函数。 (b) $\|du_{h,1} - \partial_x u\|_\infty$ 作为 h 的函数。

图 5. 制造解 $u(x, y) = \exp(x^2+y^2)$ 和 $U = 0.5\exp(R^2)1_{\mathbb{R}^4}$ 的收敛性研究。蓝色点表示经典完全电极模型的数值误差，红色叉号表示广义完全电极模型的数值误差

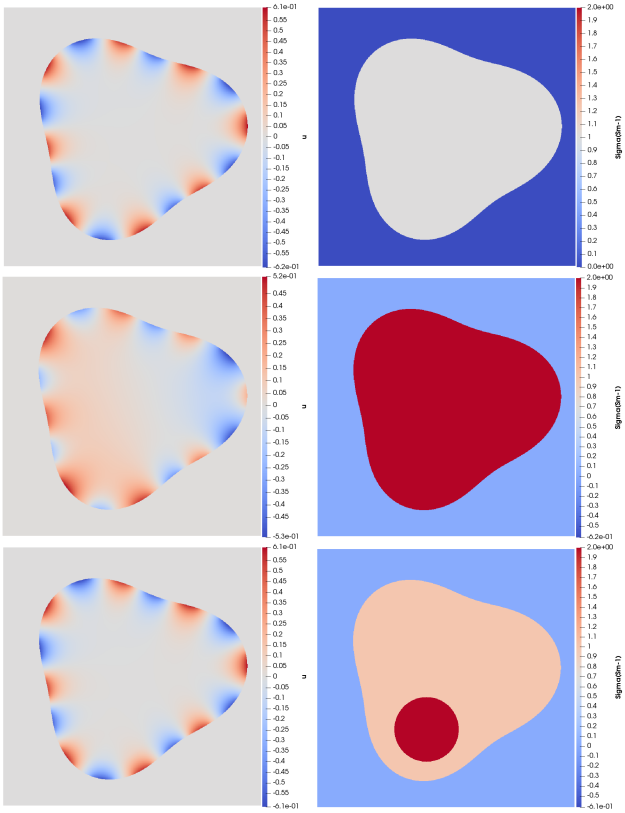


图 6. 区域 Ω 中问题 (2.5) 的求解$_2$，输入电流为 $I_m = (-1)^m$。左：内部电势。右：电导率。

4.3. **逆问题**。 从现在起，我们考虑标准完全电极模型。换言之，在问题（2.2）和（2.5）中，令 $\xi_m = \frac{1}{z_m}$， z_m 在每个电极上均为常数且为正的接触阻抗。

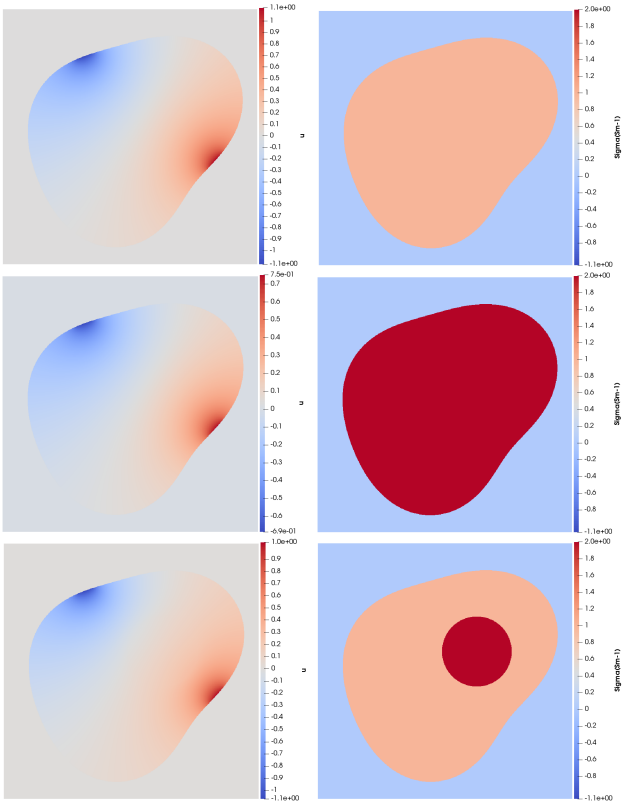


图7。 区域 Ω 中问题（2.5）的解$_3$，输入电流为 $I_m = \delta_{m\,8} - \delta_{m\,14}$。 左：内部电势。右：电导率。

4.3.1. 已知几何形状时的电导率重建。 现在，我们关注实际电阻抗成像场景中的电导率重建 σ_* ：对于一组输入电流（I^1，……，I^P） $\in \mathbb{R}^M_\diamond$， $P \in \mathbb{N}_*$测量相应的（可能含噪声的）电极电势U^1，……，U^P。它们对应于方程（2.2）的解的第二部分，其中 $\sigma = \sigma_*$且 $f = g = 0$。为确定常数，我们对所有 $U^p_1 = 0$设定 p，其中 $\{1$，……，$P\}$。因此，这些电势也是问题（2.5）的解的第二部分

为简化符号，我们将与某一电导率 σ 相对应的所有输入电流和电极电势汇集到 $M \times P$ 矩阵中

$$\mathscr{I} = \begin{bmatrix} I^1 & \dots & I^P \end{bmatrix}, \quad \mathscr{U} = \begin{bmatrix} U^1, \dots, U^P \end{bmatrix}.$$

测量矩阵 $\mathscr{U}$与输入电流 $\mathscr{I}$呈线性关系，与未知电导率 σ呈非线性关系。我们有时会通过写成 $\mathscr{U}(\sigma, \mathscr{I})$来明确表示这种依赖关系。我们还注意到

$$\mathscr{U}_{meas} \approx \mathscr{U}(\sigma_*, \mathscr{I}),$$

该矩阵理想情况下应与实际测量值相对应，但在实践中只能与其接近，因为在应用中，测量值总会受到噪声干扰。逆电导率问题可简洁地表述如下：已知 $(\mathscr{I}, \mathscr{U}_{meas})$ 重建 σ_*。

随着时间推移，人们提出了各种复杂的方法，用于根据（连续或类似电极的）边界测量重建电导率或夹杂物支撑集 [7, 10, 20, 21, 26, 27,29, 31, 35, 41, 50]。在本研究中，我们将采用一种相对非常朴素的方法进行重建σ_*，即将基本的最小二乘最小化方法与 Tikhonov 正则化相结合。我们有意选择这种方法，因为我们的首要目标是测试直接方法 能否给出

对问题（2.5）的解足够好的近似值，以便能够在逆电导率问题的标准算法中高效使用。

更准确地说，我们寻求使正问题（2.5）的解与测量数据之间的差异最小，其中该解对应于一个猜测的电导率 σ；也就是说，我们寻求 σ 使泛函

$$F(\sigma) = \|\mathscr{U}(\sigma, I) - \mathscr{U}_{meas}\|_2^2 \tag{4.4}$$

达到最小。由于该问题是病态的，因此需要进行正则化。因此，实际上我们最小化以下泛函

$$F(\sigma) = \|\mathscr{U}(\sigma, I) - \mathscr{U}_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} R(\sigma) \tag{4.5}$$

其中， R 是适当选取的正则化泛函， $\epsilon > 0$ 是正则化参数。换言之，我们对该问题采用确定性 Tikhonov 正则化。

从现在起，我们假设 $\sigma_* \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$。我们还假设存在已知电导率 $\sigma_\star \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$，使得 $\sigma_* - \sigma_\star \in H_0^1(\Omega)$。在应用中，这通常意味着寻找已知背景电导率 $\sigma_\star$的扰动，并假设这些扰动不触及区域的边界（在这种情况下，扰动是 $\sigma_* - \sigma_\star$）。因此，自然可以寻求最小化以下泛函

$$F(\sigma) = \frac{1}{2}\|\mathscr{U}(\sigma, I) - \mathscr{U}_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\sigma - \sigma_\star\|_{H^1(\Omega)}^2. \tag{4.6}$$

最小化策略很简单：给定电导率 σ 和电流模式 $I \in \mathbb{R}_\diamond^M$，我们将 $(u(\sigma, I)\ U(\sigma, I))$ 记为满足 2.5 且 $f = g = 0$的解。然后，给定电导率 σ_n，定义 $(d_x u_n, d_y u_n)$ 如下：

$$d_x u_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, I^1)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u(\sigma_n, I^P)}{\partial x}\right] \in L^2(\Omega)^d, \quad d_y u_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, I^1)}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u(\sigma_n, I^P)}{\partial y}\right] \in L^2(\Omega)^d.$$

现在，给定 $\mathscr{U}_{meas} = [U_{meas}^1, \ldots, U_{meas}^P]$，我们定义 $(d_x w_n, d_y w_n)$ 如下：

$$d_x w_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, U(\sigma_n, I^1) - U_{meas}^1)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u(\sigma_n, U(\sigma_n, I^P) - U_{meas}^P)}{\partial x}\right]$$

and

$$d_y w_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, U(\sigma_n, I^1) - U_{meas}^1)}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u(\sigma_n, U(\sigma_n, I^P) - U_{meas}^P)}{\partial y}\right].$$

最后，我们将 $\delta\sigma_n$ 定义为满足以下条件的唯一 $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$-\Delta v + v = \epsilon\big(\Delta(\sigma_n - \sigma_\star) - (\sigma_n - \sigma_\star)\big) + d_x u_n^T d_x w_n + d_y u_n^T d_y w_n.$$

接下来，不难证明以下结果。

引理 4.4。 假设 $\delta\sigma_n$ 属于 $L^\infty(\Omega)$。存在 $T_n > 0$，使得对所有 $t \in (0, T_n)$,

$$F(\sigma_n + t\delta\sigma_n) \le F(\sigma_n).$$

这一点的证明是标准的，见附录。

因此，我们的最小化算法如下：

- 选择 $\sigma_0 \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$（例如， $\sigma_0 = \sigma_\star$），
- 直到达到以下停止准则：

$$|F(\sigma_n + t_n\delta\sigma_n) - F(\sigma_n)| < \tau|\delta\sigma_n|, \text{ with } \tau \text{ small enough}$$

  (1) 对于给定的电导率 σ_n，按上述方法计算 $\delta\sigma_n$；(2) 定义 $\sigma_{n+1} = \sigma_n + t_n\delta\sigma_n$，其中 $t_n = \arg\min_{t\in(0,T_n)} F(\sigma_n + t\delta\sigma_n)$。
- 结束。

请注意，在该算法的每一步 n 中，我们都必须求解 P 个问题（2.5）以计算 $d_x u_n$ 和$d_y u_n$，然后再次求解 P 个问题（2.5）以计算 $d_w w_n$ 和 $d_y w_n$，并求解一个拉普拉斯型问题以计算 $\delta\sigma_n$，也就是说，共有 $2P+1$ 个椭圆问题。幸运的是，前 $2P$ 个问题恰好是（2.5），其中给定的电导率 σ_n固定不变，只有右端项发生变化，这意味着待求逆的相应系统对这些 $2P$ 个问题是相同的。因此，计算 $\delta\sigma_n$ 实际上非常快。

我们的数值实验表明，当 t 接近 0 时，函数 $t \mapsto F(\sigma_n + t\delta\sigma_n)$ 在 t 中表现得像一个只有一个局部极小值的二次函数。因此，我们使用 黄金分割搜索 搜索 t_n。

现在，我们展示图 3所示区域中的一些电导率重建结果。每个测试中，背景电导率 $\sigma_\star$ 等于 1，并且

- 第一种情况：我们在中心放置一个圆形夹杂。
- 第二种情况：我们将一个类似的夹杂放置在更靠近边界的位置。
- 第三种情况：我们在区域内放置两个幅值不同的夹杂。

测量矩阵 $\mathscr{U}_{meas}$ 通过使用我们的数值方法，在非常精细的网格上求解（2.5）得到，且采用了 $P = 15$ 个线性无关的电流模式。用于计算 $\mathscr{U}_{meas}$的网格与用于重建电导率的网格不同，以避免逆犯罪。为获得含噪数据，我们随后对测量值添加高斯噪声，并进行缩放，使噪声的相对幅度为 $\delta \in [0, 1]$。最后，我们将正则化参数设为$\epsilon = 10^{-4}$。

图 8 和 9 展示了不同几何区域中、添加不同程度高斯噪声后的重建结果，数据采用 400×400 笛卡尔网格离散化。可以看出，即使采用这种非常简单的方法，重建结果依然准确，这表明我们的浸入边界法可有效用于逆电导率问题。

注 4.5。 在实际应用中，电导 ξ_m （或等价地，接触阻抗 z_m）是未知的，也需要重建。利用（u, U）作为（2.5）的解关于 ξ_m是 Fréchet 可微的这一性质，并借助 Fréchet 导数的显式表达式，即可完成重建，且不会带来额外困难。

4.3.2. 已知电导率时电极位置的重建。现在我们重点讨论引言中所述的几何逆问题，可将其概括如下：已知$(\mathscr{I}, \mathscr{U}_{meas})$，求出电极的位置，换言之，即参数 Θ^1 和Θ^2，而其他所有参数（α, σ, ...）均已知。

如前所述，尽管从实际角度来看，这个问题意义不大，但对我们的方法而言，它既有趣又具挑战性，因为已知（2.2）对几何设置非常不稳定，而我们的边界浸入法按其设计，在 $\partial\Omega$的几何形状方面并不精确。

沿用上一节4.3.1的记号，我们用 $U = U(\Theta^1, \Theta^2, I)$表示方程（2.5）的解（第二项），其中 $f = g = 0$, $I \in \mathbb{R}^M_\diamond$，且电极的位置由角度$\Theta^1$ 和 Θ^2 确定（几何参数化见第4.1 节）。现在，对于一组输入电流（$I^1, \dots, I^P$） $\in (\mathbb{R}^M_\diamond)^P$，我们记

$$\mathscr{I} = \left[I^1, \dots, I^P\right], \quad \mathscr{U} = \left[U^1, \dots, U^P\right].$$

我们还将 $\mathscr{U}_{meas}$ 设为以下可能含噪的测量矩阵，用以近似与精确电极位置 Θ^1_* 和 Θ^2_*相对应的精确测量矩阵：

$$\mathscr{U}_{meas} \approx \mathscr{U}(\Theta^1_*, \Theta^2_*, \mathscr{I}).$$

我们的策略与之前类似：我们寻求最小化该泛函

$$F(\Theta^1, \Theta^2) = \|\mathscr{U}(\Theta^1, \Theta^2, I) - \mathscr{U}_{meas}\|_2^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\Theta^1 - \Theta^1_\star\|^2_{\mathbb{R}^{\mathbb{M}}} + \frac{\epsilon}{2}\|\Theta^2 - \Theta^2_\star\|^2_{\mathbb{R}^{\mathbb{M}}}.$$

与之前一样，$\Theta^k_\star$ 应被视为第 k个电极实际位置的一个合理猜测值，我们将在其附近搜索该电极的实际位置。

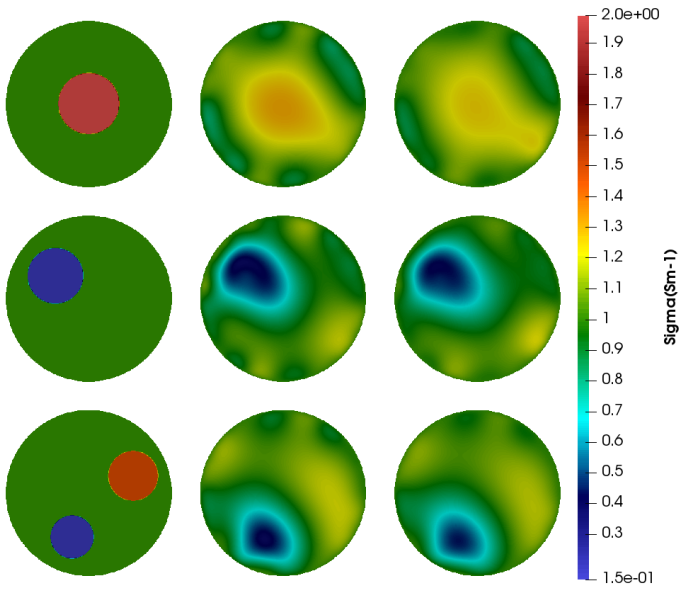


图8。Ω_1中的重建。第一列：待搜索电导率。第二列：使用未扰动数据（$\delta = 0$）重建的电导率。第三列：使用受扰动数据（$\delta = 2.0\%$）重建的电导率。

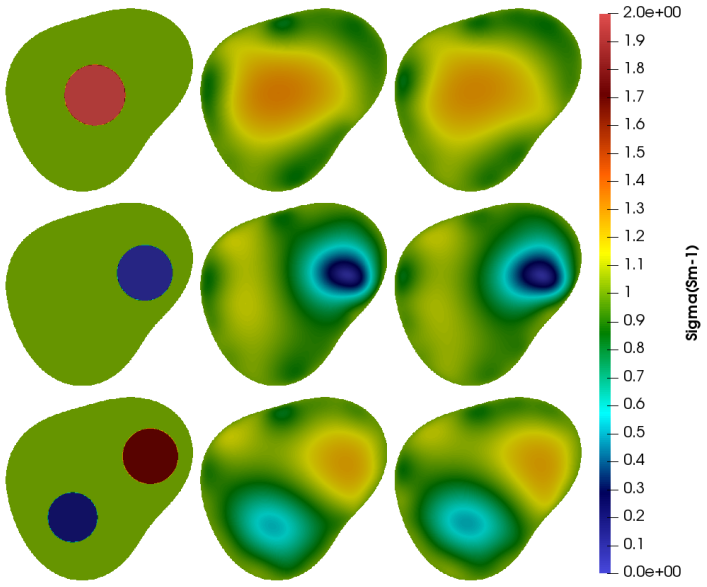


图9。Ω_3中的重建。第一列：待搜索电导率。第二列：使用未扰动数据（$\delta = 0$）重建的电导率。第三列：使用受扰动数据（$\delta = 2.0\%$）重建的电导率。

泛函关于参数的偏导数 Θ_k^1 或 Θ_k^2 可轻易地从 [15], 中得到的形状导数推导出来，尤其是采样公式 [15, 推论 34]:

引理 *4.6*。设 $(\tilde{u}, \tilde{U})$ 是某个电极模式 $\tilde{I} \in \mathbb{R}_\diamond^M$ 对应的方程 *(2.5)* 的解，且 $f = g = 0$。对于 $k \in \{1, 2\}$ 和 $m \in \{1, \dots, M\}$，令 $x_m^k = r(\Theta_m^k)[\cos(\Theta_m^k), \sin(\Theta_m^k)]$。

对于 $m \in \{1, \dots, M\}$，有：

$$(4.7)\quad \frac{\partial U}{\partial \Theta_m^1} \cdot \tilde{I} = \rho(\Theta_m^1)(U_m - u(\mathbf{x}_m^1))(\tilde{U_m} - \tilde{u}(\mathbf{x}_m^1)) \quad and \quad \frac{\partial U}{\partial \Theta_m^2} \cdot \tilde{I} = \rho(\Theta_m^2)(U_m - u(\mathbf{x}_m^2))(\tilde{U_m} - \tilde{u}(\mathbf{x}_m^2)),$$

定义见第 4.1 节，关于 r 和 ρ的定义，并将引理4.6 的证明推迟到附录。该采样公式的主要难点在于这些项 $u(\mathbf{x}_m^k)$ 和 $\tilde{u}(\mathbf{x}_m^k)$，它们对应电极端点处的内部电势值，难以准确计算，原因有二：首先，从理论角度看，该电势在电极端点处连续，但仅此而已，且可能变化很快，因此难以准确计算。此外，由于在我们的浸入式方法中，电极并未被精确离散化，因此无法直接获得该值。我们通过对位于电极内部、距离最近的界面点处的值进行线性插值来近似该值。尽管如此，通过使用梯度下降算法最小化泛函F，我们仍能从测量数据中获得足够精确的结果，以重建电极的位置。

我们首先展示 Ω 为半径 0.5 的圆盘、周围覆盖 4 个电极时的重建。我们对第一个电极的第一个角度或第二个角度进行扰动，其余电极不作扰动，但在算法中仍将所有角度设为自由变量。正如预期，电极 E_2、E_3 和 E_4 已处于正确位置，因此几乎没有被算法移动；而第一个电极的位置则如以下表格所示得以恢复：

搜索角度		起始角度		重建结果	
Θ_1^1	Θ_1^2	Θ_1^1	Θ_1^2	Θ_1^1	Θ_1^2
-2.35619	-1.85619	-3.141592	-1.85619	-2.356028	-1.85619
-3.141592	-2.64	-3.141592	-1.85619	-3.14159	-2.636460

在最后的实验中，我们假设电极的长度固定且已知。在这种情况下，Θ^1 和 Θ^2 并非相互独立，因为它们由关系式（4.1）联系起来。该方法很容易适用于这种情况：我们只需令 Θ_2 现在是 Θ^1 的函数，由关系式（4.1）给出，而 $\mathscr{U}$仅取决于 $\mathscr{I}$ 和 Θ^1。然后结合引理 4.6、链式法则，以及方程（4.1）直接推出的事实，即可得到导数：

$$\frac{\partial \Theta_k^2}{\partial \Theta_l^1} = \delta_{kl} \frac{\rho(\Theta_l^1)}{\rho(\Theta_k^2)}.$$

在最后的测试中，我们选择 $\Omega_e = [-1, 1] \times [-1, 1]$，并用 400×400 笛卡尔网格进行离散化，$N = 4$且 $\alpha = [0.8, 0.02, 0.001, 0.05, 0.001, 0.04, 0.001]$. 所得结果列于下表：

	搜索位置		起始位置		重建位置	
	Θ^1	Θ^2	Θ^1	Θ^2	Θ^1	Θ^2
E_1	-2.51327	-1.93817	-3.14159	-2.51358	-2.55152	-1.97563
E_2	-0.94247	-0.30516	-1.57079	-0.91229	-0.90298	-0.27141
E_3	0.62831	1.24343	0	0.57253	0.54018	1.14782
E_4	2.19911	2.84837	1.57079	2.18999	2.08957	2.72868

	搜索位置		初始位置		重建位置	
	Θ^1	Θ^2	Θ^1	Θ^2	Θ^1	Θ^2
E_1	-2.35619	-1.78157	-3.14159	-2.51358	-2.24361	-1.66646
E_2	-0.78539	-0.17053	-1.57079	-0.91229	-0.70862	-0.10368
E_3	0.78539	1.41055	0	0.57253	0.83745	1.46474
E_4	2.19911	2.84837	1。57079	2。18999	2.23475	2.88755

附录 A.

电导率重建——引理证明4.4。我们用 $P = 1$ 证明引理 4.4 ，即采用单一电流模式 I。推广到多个电流模式是显而易见的。因此，我们固定 $I \in \mathbb{R}^M_\diamond$ 和 $U_{meas} \in \mathbb{R}^M$ ，使得 $U_{meas,\ 1} = 0$。

设 $(u(\sigma,\ I)\ U(\sigma,\ I))$ 是给定电导率 $\sigma \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ 的$\sigma \geq c > 0$ 问题 (2.5) 的解，其中满足$\sigma \geq c > 0$ 在 Ω 中几乎处处成立。已知映射

$$M : \sigma \longrightarrow (u(\sigma, I), U(\sigma, I)),$$

是 Fréchet 可微的 [32]。更准确地说，对于所有 $\delta\sigma$ 属于 $L^\infty \cap H^1(\Omega)$ 且满足 $\sigma + \delta\sigma \geq \tilde{c} > 0$ 在 Ω 中几乎处处成立的情形，有

$$M(\sigma + \delta\sigma) = M(\sigma) + (\delta u, \delta U) + o(\|\delta\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}),$$

其中 $\delta u \in H^1(\Omega)$ 以及 $\delta U \in \mathbb{R}^M$, $\delta U_1 = 0$, 是下列变分问题的唯一解：求 $(u,\ U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$使得对于所有 $(v,\ V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$，均有

$$\int_\Omega \sigma\nabla u.\nabla v\, dx + \sum_m \int_{E_m} \xi_m(u - U_m)(v - V_m)\, ds(x) + \varepsilon U_1\, V_1 = -\int_\Omega \delta\sigma\nabla u(\sigma, I).\nabla v\, dx. \tag{A.1}$$

等价地，$(\delta u,\ \delta U)$ 满足

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(\sigma\nabla\delta u) = -\nabla\cdot(\delta\sigma\nabla u(\sigma, I)) & \text{in } \Omega \\ \sigma\partial_\nu(\delta u) = \xi_m(\delta U_m - \delta u) - (\delta\sigma)\partial_\nu u(\sigma, I) & \text{on } E_m \\ \sigma\partial_\nu(\delta u) = -(\delta\sigma)\partial_\nu u(\sigma, I) & \text{on } \partial\Omega\backslash\overline{E}, \\ \displaystyle\int_{E_m} \sigma\partial_\nu(\delta u)\, ds(x) + \varepsilon\delta U_1 = -\int_{E_m} (\delta\sigma)\partial_\nu(u(\sigma, I))\, ds(x) & \text{for } \ m = 1, \ldots, M. \end{cases}$$

因此，我们有

$$F(\sigma + \delta\sigma) = F(\sigma) + (\delta U, U(\sigma, I_{input}) - U_{meas})_{\mathbb{R}^M} + \epsilon(\delta\sigma, \sigma - \sigma_*)_{H^1(\Omega)} + o(\|\delta\sigma\|_{L^\infty\cap H^1(\Omega)}). \tag{A.2}$$

现在定义 (w, W) 为 (2.5) 在 $f = g = 0$和输入电流 $I = U(\sigma, I_{input}) - U_{meas}$下的唯一解，即

$$w = u(\sigma, U(\sigma, I_{input}) - U_{meas}), \quad W = U(\sigma, U(\sigma, I_{input}) - U_{meas}).$$

利用 (A.1) 以及问题 (2.5) 的变分形式，可得

$$(\delta U, U(\sigma, I_{input}) - U_{meas})_{\mathbb{R}^M} = -\int_\Omega \delta\sigma\nabla u(\sigma, I)\cdot\nabla w dx.$$

因此，对于 $\delta\sigma$ 属于 $L^\infty \cap H^1(\Omega)$ 且满足 $\sigma + \delta\sigma \geq \tilde{c} > 0$ 属于 Ω，并且 $t \in$ 属于 (0,1)，的情形，有

$$F(\sigma + \delta\sigma) = F(\sigma) + t\int_\Omega \Big(\delta\sigma(\epsilon(\sigma - \sigma_*) - \nabla u(\sigma, I).\nabla w) + \epsilon\nabla(\delta\sigma).\nabla(\sigma - \sigma_*)\Big)\, dx + o\left(t\|\delta\sigma\|_{L^\infty\cap H^1(\Omega)}\right)$$

现在我们的目标是选择 $\delta\sigma$，使得当 $t > 0$ 足够小时， $F(\sigma + t\delta\sigma) \leq F(\sigma)$。由前面的公式可知，只需选择 $\delta\sigma$ 使得

$$\int_\Omega \Big(\delta\sigma(\epsilon(\sigma - \sigma_*) - \nabla u(\sigma, I).\nabla w) + \epsilon\nabla(\delta\sigma).\nabla(\sigma - \sigma_*)\Big)\, dx < 0.$$

定义 v 为满足以下条件的 $H_0^1(\Omega)$ 中的唯一函数：对于所有 $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\nabla v\cdot\nabla\tilde{v} + v\,\tilde{v})\, dx = -\int_\Omega (\mathbf{G}\cdot\nabla\tilde{v} + f\,\tilde{v})\, dx, \tag{A.3}$$

其中

$$\mathbf{G} = \epsilon\nabla(\sigma - \sigma_*), \quad f = \epsilon(\sigma - \sigma_*) - \nabla u(\sigma, I).\nabla w.$$

根据此定义，我们有

$$\int_\Omega \Big(v(\epsilon(\sigma - \sigma_*) - \nabla u(\sigma, I).\nabla w) + \epsilon\nabla v\cdot\nabla(\sigma - \sigma_*)\Big)\, dx = -\|v\|^2_{H^1(\Omega)} < 0.$$

因此，假设 v 属于 $L^\infty(\Omega)$，我们可以选取 $\delta\sigma = v$，从而完成引理4.4的证明。

注释 A.1. 显然， v （A.3）的解可能不属于 $L^\infty(\Omega)$。不过，从数值角度来看，我们将得到 v 的一个近似值，根据构造，该近似值将属于 $L^\infty(\Omega)$。正如所展示的重建结果所示，这样的近似值是一个良好的下降方向。

电极位置重建——引理 4.6 的证明。 引理 4.6 是一个更一般结果的推论，即测量映射关于 Ω 边界的小扰动具有 Fréchet 可微性，该结果见 [15]。我们先非常简要地回顾本文证明的结果。

对于 $h \in C^1(\partial\Omega\ \mathbb{R}^d)$，我们定义 $F[h]\colon x \in \partial\Omega \mapsto x + h(x)$，并且

$$\partial\Omega_h = F[h](\partial\Omega).$$

当 h 足够小时， $\partial\Omega_h$ 是光滑区域 Ω_h 的边界，当然它是 Ω 的一个扰动。当 h 仍然足够小时，Ω_h 可由 M 个彼此间隔足够远的电极 $E_{m,\ h}$ 覆盖，其定义为

$$E_{m,h} = \{x + h(x),\ x \in E_m\}.$$

因此，对于任意 $I \in \mathbb{R}^M_\diamond$，我们可以将 $(u(h)\ U(h))$ 记为将 (Ω) 替换为 $(\Omega,\ E_{m,\ h})$ 后，方程 (2.5) 的解；并且 $f = g = 0$，定义测量映射

$$R : (h, I) \in \mathscr{B}_d \times \mathbb{R}^M_\diamond \mapsto U(h),$$

with

$$\mathscr{B}_d = \{h \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^n); \|h\|_{C^1(\partial\Omega,\mathbb{R}^d)} < d\},$$

d 为足够小的固定常数。 [15] 的主要结果是证明 R 关于 h ([15, 定理 3。2]) 的 Fréchet 可微性。文中还给出了一个采样公式（[15, 推论 3。4]），使得可以轻松计算该导数。以下定理汇总了这些结果。

定理 A.2。 算子 R 关于第一个变量在原点处 *Fr´echet* 可微。换言之，存在一个有界双线性算子

$$R' : C^1(\partial\Omega; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^M_\diamond \mapsto \mathbb{R}^M$$

使得

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_{C^1}} \|R(h,\cdot) - R(0,\cdot) - R'h\|_{\mathscr{L}} = 0.$$

此外，可以利用以下采样公式逐分量计算 $R'h$ ： 对于 I和 $\tilde{I}$属于 $R^M_\diamond$，若记$(u,\ U)$和$(\tilde{u},\ \tilde{U})$为方程(2.5)的对应解，则

$$\Big((R'h)I\Big)\cdot\tilde{I} = -\sum_{m=1}^M \int_{\partial E_m} (h\cdot\nu_{\partial E_m})(U_m - u)(\tilde{U}_m - \tilde{u})ds(x)$$
$$-\sum_{m=1}^M \frac{1}{z_m}\int_{E_m} h_\nu\left((d-1)(U_m-u)H - \partial_\nu u\right)(\tilde{U}_m - \tilde{u})ds(x) - \int_{\partial\Omega} h_\nu(\sigma\nabla u)_\tau(\nabla\tilde{u})_\tau ds(x).$$

此处， H 是平均曲率， ν （分别地， $\nu_{\partial E_m}$）是Ω （分别是 E_m的）外法向量，且$h_\nu = h\cdot\nu$。

现在我们已具备所有必要工具，可以证明引理4.6。下文中，我们重点讨论Θ^2，对 Θ^1 的计算类似。我们还针对单个输入电流$I \in \mathbb{R}^M_\diamond$进行计算，推广到 P 个输入电流显然是直接的。最后，对于任意 $x \in \partial\Omega$，我们将$\theta(x$定义为 $[-\pi,\pi[$ 中满足以下条件的唯一元素： $x = r(\theta(x))\mathbf{u}(\theta(x)$。

令 $m \in \{1,\dots,M\}$ 为固定值，并令 $\eta \in \mathbb{R}$ 足够小，使得

$$\Theta^1_m < \Theta^2_m + \eta < \Theta^1_{m+1},$$

其中，为简化记号，我们令 $\Theta^1_{M+1} = \Theta^1_1 + 2\pi$。我们将 Θ^2_η 定义为

$$\Theta^2_{\eta,k} = \Theta^2_k + \delta_{km}\,\eta,\ \forall k \in \{1,\dots,M\}\,.$$

对于固定常数 $c > 0$，我们定义

$$\mathscr{H}_\eta = \left\{ h \in C^1(\partial\Omega;\mathbb{R}^2), \;\middle|\; \begin{array}{ll} h(\Theta^k_1) = 0 & \forall k \in \{1,\dots,M\}\,, \\ h(\Theta^k_2) = \delta_{km}\eta & \forall k \in \{1,\dots,M\}\,, \\ \|h\|_{C^1} \le c\eta. & \end{array} \right\}$$

集合 $\mathscr{H}_\eta$ 非空：事实上，取 $\chi \in C^\infty_c(\mathbb{R};\,[0,1])$，使得 $\mathrm{supp}(\chi) \in]-1,1[$ 且 $\chi(0) = 1$，并定义

$$\varphi_\eta(\theta) = \eta\chi\Big(\frac{\theta - \Theta^2_m}{\Delta}\Big)$$

其中

$$\Delta = \max\left(\frac{\Theta^2_m - \Theta^1_m}{2}, \frac{\Theta^1_{m+1} - \Theta^2_m}{2}\right).$$

则集合 ω_η： $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $2\,\pi$-周期的，定义为

$$\omega_\eta : \theta \in [\Theta^1_1, \Theta^1_1 + 2\,\pi[\longrightarrow \theta + \varphi_\eta(\theta).$$

那么，如果常数 c 选取得足够大，向量场

$$h : x \in \partial\Omega \longrightarrow r(\omega_\eta(\theta(x)))\mathbf{u}(\omega_\eta(\theta(x))) - r(\theta)\mathbf{u}(\theta(x)),$$

属于 $\mathscr{H}_\eta$。

由于当 η 足够小时，对于 $\mathscr{H}_\eta$中的 h_η，有 $\partial\Omega_{h_\eta} = \partial\Omega$，$E_{k,\ h_\eta} = E_k$ 对所有 $k \in \{1,\ \dots\dots,\ M\}$，$k \neq m$，并且

$$E_{m,h_\eta} = \left\{ r(\theta)\mathbf{u}(\theta),\ \theta \in [\Theta^1_m, \Theta^2_m + \eta] \right\},$$

我们有 $U(\Theta^1,\ \Theta^2_\eta,\ I) = R(h_\eta,\ I)$。现在，经过繁复计算可得，对于所有 $h_\eta \in \mathscr{H}_\eta$，对于所有$x \in \partial\Omega$，有

$$h_\eta(x) = \Big(\theta(x + h_\eta(x)) - \theta(x)\Big)\rho(\theta(x))\tau(x) + o(\|h_\eta\|_{C^1}).$$

应用定理A.2 并结合 $d = 2$，立即可得，对于所有 $\tilde{I} \in \mathbb{R}^M_\diamond$以及（$\tilde{u}$，$\tilde{U}$）（2.5）的对应解，有

$$(R'(h_\eta)I)\cdot\tilde{I} = \eta\,\rho(\Theta^2_m)(U_m - u(\mathbf{x}^2_m))(\tilde{U}_m - \tilde{u}(\mathbf{x}^2_m)) + o(\|h_\eta\|_{C^1}).$$

As

$$\Big(U(\Theta^1,\Theta^2_\eta,I) - U(\Theta^1,\Theta^2,I)\Big)\cdot\tilde{I} - \eta\,\rho(\Theta^2_m)(U_m - u(\mathbf{x}^2_m))(\tilde{U}_m - \tilde{u}(\mathbf{x}^2_m))$$
$$= \Big(R(h_\eta,I) - R(0,I) - R'(h_\eta)I\Big)\cdot\tilde{I} + o(\|h_\eta\|_{C^1}),$$

定理A.2 直接推出引理4.6。

致谢。本研究部分经费由法国国家计划“未来投资计划”框架下的 ANR LabExCIMI（资助编号 ANR-11-LABX-0040）提供。

本文所述实验使用 PlaFRIM 实验测试平台完成，该平台由法国国家信息与自动化研究院、法国国家科学研究中心（LABRI 和 IMB）、波尔多大学、波尔多国立综合理工学院以及阿基坦大区委员会提供支持。

参考文献

[1] J. Agnelli、A. Ç¨ol、M. Lassas、R. Murthy、M. Santacesaria 和 S. Siltanen。《利用电阻抗成像中的神经网络对卒中进行分类》。载于：Inverse Probl. 36.11（2020）。doi: 10.1088/1361-6420/abbdcd.[2] J. P. Agnelli、V.Kolehmainen、M. J.Lassas、P. Ola 和 S. Siltanen。《电阻抗成像中电导率、边界形状和接触阻抗的同时重建》。载于：SIAM J. Imaging Sci. 14.4（2021）。doi: 10.1137/21M1407975.[3] P. A. Berthelsen。《针对系数可变、解非光滑且不连续的椭圆方程的分解式浸入界面方法》。载于：J. Comput. Phys. 197.1（2004）。doi: 10.1016/j.jcp.2003.12.003.[4] D. Bochkov 和 F. Gibou。《在笛卡尔网格上求解具有跳跃条件的椭圆界面问题》。载于：J. Comput. Phys. 407（2020）。doi: 10.1016/j.jcp.2020.109269.[5] L. Borcea。《电阻抗成像》。载于：Inverse Probl. 18.6（2002）。doi: 10.1088/0266-5611/18/6/201.[6] H. Brezis。《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》。英文版。Univer- sitext。纽约：施普林格，2011。doi: 10.1007/978-0-387-70914-7.[7] M. Br¨uhl 和 M. Hanke。《电阻抗成像的最新进展》。载于：Inverse Probl. 19.6（2003）。成像专题特刊。doi: 10.1088/0266-5611/19/6/055.[8] V. Candiani、A. Hannukainen 和 N. Hyv¨onen。《将电阻抗成像应用于头部成像的计算框架》。载于：SIAM J. Sci. Comput. 41.5（2019）。doi: 10.1137/19M1245098.[9] M. Cheney、D. Isaacson 和 J. C. Newell。《电阻抗成像》。载于：SIA M Rev. 41.1（1999）。doi: 10.1137/S0036144598333613.[10] M. Cheney、D. Isaacson、J. C. Newell、S. J. Simske 和 J. C. Goble。《NOSER：求解逆电导率问题的一种算法》。载于：International Journal of Imaging Systems and Technology 2（1990）。[11] K.-S. Cheng、D. Isaacson、J. C. Newell 和 D. Gisser。《用于电流计算机断层成像的电极模型》。载于：IEEE Trans. Biomed. Eng. 36.9（1989）。doi: 10.1109/10.35300.[12] P. G. Ciarlet。《有限差分算子的离散最大值原理》。载于：Aequationes Math. 4（1970）。doi: 10.1007/BF01844166.[13] M. Cisternino 和 L. Weynans。《用于椭圆界面问题的并行二阶笛卡尔方法》。载于：Commun. Comput. Phys. 12.5（2012）。doi: 10.4208/cicp.160311.090112a.[14] C. Dapogny 和 P. Frey。《在适配三角剖分上计算离散轮廓的有符号距离函数》。载于：Calcolo 49.3（2012）。doi: 10.1007/s10092-011-0051-z.[15] J. Dard´e、N. Hyv¨onen、A. Sepp¨anen 和 S. Staboulis。《电阻抗成像中外边界形状与导纳率分布的同时重建》。载于：SIAM J. Imaging Sci. 6.1（2013）。doi: 10.1137/120877301.[16] J. Dard´e、N. Hyv¨onen、A. Sepp¨anen 和 S. Staboulis。《电阻抗成像中导纳率与物体形状的同时恢复：实验评估》。载于：Inverse Probl. 29.8（2013）。doi: 10.1088/0266-5611/29/8/085004.[17] J. Dard´e 和 S. Staboulis。《电极建模：接触阻抗的影响》。载于：ESAIM, Math. Model. Numer. Anal. 50.2（2016）。doi: 10.1051/m2an/2015049.[18] R. Egan 和 F. Gibou。《xGFM：恢复幽灵流体方法中通量的收敛性》。载于：J. Comput. Phys. 409（2020）。doi: 10.1016/j.jcp.2020.109351.[19] R. P. Fedkiw、T. Aslam、B. Merriman 和 S. Osher。《多材料流中界面的非振荡欧拉方法（幽灵流体方法）》。载于：J. Comput. Phys. 152.2（1999）。doi: 10.1006/jcph.1999.6236.[20] H. Garde 和 N. Hyv¨onen。《Calder´on 问题中的级数反演》。载于：Math. Comp. 91.336（2022）。doi: 10.1090/mcom/3729。

[21] H. Garde 和 S. Staboulis. “电阻抗成像中基于单调性的形状重建的收敛性与正则化”. In: Numer. Math. 135.4 (2017). doi: 10.1007/s00211-016-0830-1.[22] E. Gersing, B. Hofmann, 和 M. Osypka. “外周几何形状变化对电阻抗成像测量的影响”. In: Med. Biol. Eng. Comput. 34 (1996). doi: 10.1007/BF02520005.[23] F. Gibou, R. P. Fedkiw, L.-T. Cheng, 和 M. Kang. “不规则区域上泊松方程的二阶精度对称离散化”. In: J. Comput. Phys. 176.1 (2002). doi: 10.1006/jcph.2001.6977.[24] F. Gibou 和 R. Fedkiw. “任意区域上拉普拉斯方程和热方程的四阶精度离散化及其在斯特藩问题中的应用”. In: J. Comput. Phys. 202.2 (2005). doi: 10.1016/j.jcp.2004.07.018.[25] D. Gilbard 和 N. Trudinger.《二阶椭圆偏微分方程》。施普林格，1998 年。[26] B. Harrach. “电阻抗成像因子分解法的最新进展”. In: Comput. Math. Methods Med. (2013). doi: 10.1155/2013/425184.[27] B. Harrach 和 M. Ullrich. “电阻抗成像中的基于单调性的形状重建”. In: SIAM J. Math. Anal. 45.6 (2013). doi: 10.1137/120886984.[28] N. Hyv¨onen 和 L. Mustonen. “平滑化完全电极模型”. In: SIAM J. Appl. Math. 77.6 (2017). doi: 10.1137/17M1124292.[29] M. Ikehata. “根据边界测量重建夹杂物的支撑函数”. In: J. Inverse Ill-Posed Probl. 8.4 (2000). doi: 10.1515/jiip.2000.8.4.367.[30] D. Isaacson, J. Mueller, J. Newell, 和 S. Siltanen. “用 D-bar 方法重建电阻抗成像胸部仿体”. In: IEEE Trans. Medical Imaging 23.7 (2004). doi: 10.1109/TMI.2004.827482.[31] J. Kaipio 和 E. Somersalo.《统计与计算反问题》。第 160 卷。Applied Mathematical Sciences。施普林格出版社，纽约，2005 年。[32] J. P. Kaipio, V. Kolehmainen, E. Somersalo, 和 M. Vauhkonen. “电阻抗成像中的统计反演与蒙特卡罗采样方法”. In: Inverse Probl. 16.5 (2000). doi: 10.1088/0266-5611/16/5/321.[33] V. Kolehmainen, M. Lassas, 和 P. Ola. “边界信息不完全已知且重建仅确定到共形变形的 Calder´on 逆问题”. In: SIAM J. Math. Anal. 42.3 (2010). doi: 10.1137/080716918.[34] V. Kolehmainen, M. Lassas, 和 P. Ola. “边界信息不完全已知时的逆电导率问题”. In: SIAM J. Appl. Math. 66.2 (2005). doi: 10.1137/040612737.[35] A. Lechleiter, N. Hyv¨onen, 和 H. Hakula. “将因子分解法应用于阻抗断层成像的完全电极模型”. In: SIAM J. Appl. Math. 68.4 (2008). doi: 10.1137/070683295.[36] R. J. LeVeque andZ. Li. “具有不连续系数和奇异源的椭圆方程的浸入界面方法”. In: SIAM J. Numer. Anal. 31.4 (1994). doi: 10.1137/0731054.[37] Z. Li 和 K. Ito. “具有不连续系数的界面问题的最大值原理保持格式”. In: SIAM J. Sci. Comput. 23.1 (2001). doi: 10.1137/S1064827500370160.[38] A. Mayo 和 A. Greenbaum. “不规则区域上泊松方程和双调和方程的快速并行迭代求解”. In: SIAM J. Sci. Stat. Comput. 13.1 (1992). doi: 10.1137/0913006.[39] A. Mayo. “不规则区域上泊松方程和双调和方程的快速求解”. In: SIAM J. Numer. Anal. 21 (1984). doi: 10.1137/0721021.[40] A. Mayo. “一般区域上势理论体积分的快速计算”. In: J. Comput. Phys. 100.2 (1992). doi: 10.1016/0021-9991(92)90231-M.[41] J. L. Mueller 和 S. Siltanen. “电阻抗成像的 D-bar 方法——揭秘”. In: Inverse Probl. 36.9 (2020). doi: 10.1088/1361-6420/aba2f5.

[42] A. Nissinen, V. P. Kolehmainen, 和 J. P. Kaipio. “电阻抗成像中对未知区域边界所致建模误差的补偿”. In: IEEE Transactions on Medical Imaging 30.2 (2011). doi: 10.1109/TMI.2010.2073716.
[43] S. Osher 和 R. Fedkiw.《水平集方法与动态隐式曲面》。第 153 卷。Appl. Math. Sci. 纽约：施普林格，2003 年。[44] S. Osher 和 J. A. Sethian. “以曲率相关速度传播的前沿：基于哈密顿–雅可比公式的算法”. In: J. Comput. Phys. 79.1 (1988). doi: 10.1016/0021-9991(88)90002-2.[45] J. A.Sethian. “用于推进前沿的水平集方法与快速行进方法：演化、实现与应用”. In: J. Comput. Phys. 169.2 (2001). doi: 10.1006/jcph.2000.6657.[46] J. A. Sethian.《水平集方法与快速行进方法：计算几何、流体力学、计算机视觉和材料科学中的演化界面》。第 3 卷。Camb. Monogr. Appl. Comput. Math. 剑桥：剑桥大学出版社，1999 年。[47] P. Smereka. “狄拉克δ函数的数值近似及其在水平集方法中的应用”. In: J. Comput. Phys. 211.1 (2006). doi: 10.1016/j.jcp.2005.05.005.[48] E. Somersalo, M. Cheney, 和 D. Isaacson. “电流计算机断层成像电极模型的存在性与唯一性”. In: SIAM J. Appl. Math. 52.4 (1992). doi: 10.1137/0152060.[49] G. Uhlmann. “电阻抗成像与 Calder´on 问题”. In: Inverse Probl. 25.12 (2009). doi: 10.1088/0266-5611/25/12/123011.[50] M. Vauhkonen, D. Vadasz, P. Karjalainen, E. Somersalo, 和 J. Kaipio. “电阻抗成像中的蒂霍诺夫正则化与先验信息”. In: IEEE Trans. Medical Imaging 17.2 (1998). doi: 10.1109/42.700740.[51] L. Weynans. “肖特利–韦勒方法中梯度最大范数的超收敛性”. In: J. Sci. Comput. 75.2 (2018). doi: 10.1007/s10915-017-0548-y.[52] A. Wiegmann 和 K. P. Bube. “显式跳跃浸入界面法：求解分段光滑解偏微分方程的有限差分法”. In: SIAM J. Numer. Anal. 37.3 (2000). doi: 10.1137/S0036142997328664.[53] Y. C. Zhou, S. Zhao, M. Feig, 和 G. W. Wei. “具有不连续系数和奇异源的椭圆方程的高阶匹配界面与边界法”. In: J. Comput. Phys. 213.1 (2006). doi: 10.1016/j.jcp.2005.07.022.

(J. Dard´e) 图卢兹数学研究所，UMR 5219，图卢兹大学，法国国家科学研究中心，UPS，118 route de Narbonne, 31062 Toulouse C´edex 9，法国。(N. Nasr) 波尔多大学，法国国家科学研究中心，法国国家信息与自动化研究院，波尔多国立综合理工学院，IHU-LIRYC，IMB，UMR 5251，F-33400 塔朗斯，法国。(L. Weynans) 波尔多大学，法国国家科学研究中心，法国国家信息与自动化研究院，波尔多国立综合理工学院，IHU-LIRYC，IMB，UMR 5251，F-33400 塔朗斯，法国电子邮件地址，J. Dard´e： jeremi.darde@math.univ-toulouse.fr 电子邮件地址，N. Nasr： niami.nasr@u-bordeaux.fr电子邮件地址，L. Weynans： lisl.weynans@math.u-bordeaux.fr