arXiv:2301.02583v1 [math.DG] 6 Jan 2023

弹性微分学空间

CHRISTIAN BLOHMANN

Abstract. 我们引入一类称为弹性的微分学空间。在这类空间上，光滑流形切函子的左 Kan 延拓定义了 Rosick´y 意义下的抽象切丛函子。在弹性空间上存在自然的嘉当演算，由向量场和微分形式以及李括号、德拉姆微分、内导数和李导数组成，并满足通常的分次交换关系。弹性空间在任意余积、有限积和回缩下封闭。示例包括带角和尖点流形、满足一个温和附加条件的微分拓扑群和微分学向量空间、光滑流形之间的映射空间，以及光滑纤维丛的截面空间。

1. Introduction

1.1. 微分学空间上的嘉当演算之探求。包含光滑流形作为全子范畴、同时又具有更佳性质（例如拥有所有极限、余极限和指数对象）的范畴，通常称为微分几何的便利集合环境。为这种便利付出的代价是，此类范畴通常过于庞大，无法让适用于其中所有对象的强几何结果成立。微分拓扑空间范畴就是一个典型例子。它是一个拟拓扑，具有良好的范畴性质。但由于它包含光滑流形的任意商、任意子集和任意交，也包含任意基数的拓扑空间、向量空间以及更多对象，因此，适用于所有微分学空间的定理也必须适用于所有这些情形。所以，与其尝试证明必须涵盖这些不可能穷尽的情形的论断，人们通常会致力于确定一些条件：这些条件既要足够强，能够证明所需结果，又要足够宽松，从而容纳广泛的示例与应用。

光滑流形 M 上的无穷小微分几何计算，很大一部分可以在其嘉当演算中进行。嘉当演算由切丛 $TM \to M$、向量场的李括号、微分形式的分次代数 $\Omega(M)$，以及德拉姆微分 d、内导数 ι_v 和每个向量场 v对应的李导数 $\mathcal{L}_v$ 构成，它们满足以下关系：

$$[d,d]=0\,,\quad [\iota_v,\iota_w]=0\,,\quad [\iota_v,d]=\mathcal{L}_v\,,$$
$$[\mathcal{L}_v,\iota_w]=\iota_{[v,w]}\,,\quad [\mathcal{L}_v,d]=0\,,\quad [\mathcal{L}_v,\mathcal{L}_w]=\mathcal{L}_{[v,w]}\,,$$

其中，括号是 $\Omega(M)$ 上分次导子的分次交换子。例如，辛几何中的局部定义和计算通常可以通过嘉当演算来完成，例如哈密顿向量场、泊松括号、哈密顿作用、狄拉克结构、广义复几何、接触结构、多辛结构的 L_∞-代数、同伦动量

日期：2023年1月9日。2020年数学主题分类：58A40（58A03、18F15、18F40）。关键词与短语：微分学空间、切结构、嘉当演算。

映射、等变上同调的无穷小模型等。另一个例子是局部拉格朗日场论，其中欧拉-拉格朗日方程的推导、局部对称性、诺特定理、雅可比场理论等，都在无限阶喷射丛的嘉当演算中展开，该丛也称为变分双复形 [DF99]。事实上，本文将要探讨的问题，源于拉格朗日场论和几何变形理论的最新进展。在这些领域中，基本几何对象——场空间以及结构模空间中的路径——都自然地赋有微分学。

问题 1.1。微分学空间必须满足哪些条件，才能自然地配备嘉当演算?

当然，总有一些同义反复的条件，它们将期望的结果直接提升为公理；在我们的情形中，期望的结果就是存在嘉当演算。我们的任务是找出一组条件，这组条件要么是最小的，要么至少足够精简，以便能在广泛的情形下得到验证。

光滑流形 M 上嘉当演算的基本结构——微分形式的微分分次代数 $\Omega(M)$ 和切丛 $TM \to M$——都是局部的，也就是说，它们可以先在图册 $U \subset M$ 的开子集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上定义，再沿图册粘合起来。更确切地说，函子 $U \mapsto \Omega(U)$ 是一个层，而切函子 $U \mapsto TU$ 是一个余层，因此

$$\begin{aligned} \Omega(M) &\cong \lim_{U \to M} \Omega(U) \\ TM &\cong \operatorname*{colim}_{U \to M} TU \,, \end{aligned}$$

其中，微分分次代数中的极限和流形中的余极限，均取遍 M 的极大图册的图册范畴。对于微分学空间 X，我们只需将图册范畴替换为图范畴，即可得到

$$\begin{aligned} \Omega(X) &:= \lim_{U \to X} \Omega(U) \\ TX &:= \operatorname*{colim}_{U \to X} TU \end{aligned}$$

X 的德拉姆复形和切微分学空间的定义。

映射 $X \mapsto \Omega(X)$ 和 $X \mapsto TX$ 是从光滑流形到微分学空间的逐点左 Kan 延拓，这表明它们关于 X 是函子性的。左 Kan 延拓也适用于自然变换，例如丛投影 $\pi_U \colon TU \to U$ 和零截面 $0_U \colon U \to TU$。这表明，左 Kan 延拓是将光滑流形上的嘉当演算推广到微分学空间的自然方法。

我们如何定义微分学空间上向量场的李括号？第一个设想是从所有图 $U \to X$ 上向量场的李代数 $\mathfrak{X}(U) = \Gamma(U, TU)$ 出发。然而，$U \mapsto \mathfrak{X}(U)$ 不是函子，因此无法应用左 Kan 延拓。我们可以将向量场映射到 $C^\infty(X) = \Omega^0(X)$ 的导子空间，该空间带有交换子括号。然而，这个映射通常不是单射；即使它是单射，其像也可能不关于括号封闭。更糟糕的是，映射 $X \mapsto \mathrm{Der}(C^\infty(X))$ 仍然不是函子，因此这并未解决自然性问题。结论是，以图上的向量场空间作为起点，并不是在微分学空间上构造自然嘉当演算的好方法。

幸运的是，Rosick´y 对这一情形进行了仔细分析，确定了定义向量场李括号所需的切函子的自然结构。他将范畴 $\mathcal{C}$ 上的抽象切结构定义为一个自函子 $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，以及丛投影的自然变换 $\pi_X\colon TX \to X$、零截面的自然变换 $0_X\colon X \to TX$、纤维逐点加法的自然变换$+_X\colon TX \times_X TX \to TX$、微分次序交换的自然变换 $\tau_X\colon T^2X \to T^2X$，以及将切纤维嵌入垂直切空间的自然变换 $\lambda_X\colon TX \to T^2X$；这些结构必须满足一长串公理（定义 2.7）。了解所有这些结构如何共同定义向量场的李括号（8），并避免引用某个结构环的导子的交换子括号，是很有启发性的。

对我们而言，Rosick´y 方法的主要优点在于，所有结构都由函子和自然变换给出，因此我们可以对其应用左 Kan 延拓。然而，这并未在所有微分学空间上产生抽象切结构。主要问题在于，逐点左 Kan 延拓由余极限给出，而余极限不保持极限，尤其是不保持定义切向量纤维逐点加法所依赖的拉回。更准确地说，自然态射

$$\operatorname*{colim}_{U\to X} TU \times_U TU \longrightarrow TX \times_X TX\,, \tag{1}$$

对于所有微分学空间 X 而言，都不是同构。事实上，如下面两个示例所示，这个映射通常既不是满射，也不是单射。

例 1.2（平面的坐标轴十字）。考虑子集 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$，赋予其子空间微分学。原点处沿 x 轴和 y 轴方向的两个切向量无法在同一个图上表示（图1）。由此可知，(1) 不是满射。

例 1.3（折叠直线）。考虑作用$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$下的微分学商空间（$k$，$x$）$\mapsto kx$，其中 $\mathbb{Z}_2 = \{1,-1\}$。商映射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$是一个图。其定义域上的切向量 (0, 1) 和 (0, −1) 在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$ 上表示同一个切向量。这意味着，在 $T\mathbb{R} \times_{\mathbb{R}} T\mathbb{R}$ 中，$\zeta = \big((0, 1), (0, 1)\big)$ 和$\eta = \big((0, 1), (0, -1)\big)$ 表示$T(\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2) \times_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2} T(\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2)$中的同一对切向量。由于每个图的态射的切态射都会保持一点处一对切向量的和，且 ζ 的和为零，而 η的和不为零，因此这两对切向量在 $\operatorname{colim}_{U\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2} TU \times_U TU$ 中不可能等价。由此得出，(1)不是单射。

1.2. 弹性公理。只有当 (1) 是一个同构时，图上的加法 $+_U$on 的左 Kan 延拓才是一个态射 $+_X\colon TX \times_X TX \to TX$，它可以视为微分学空间 X 上切向量的纤维逐点加法。因此，要求 (1) 是一个同构，是微分学空间具有自然嘉当演算所必须施加的第一个条件。

Ω(X)中的 k-形式是定义在所有图 $U \to X$ 上的一族 k-形式，它们与图态射诱导的拉回相容。然而，向量场并不能表示为定义在各个图上的一族向量场。因此，Ω(X)上不存在自然的内导数运算。对于内导数，我们必须将 ak-形式定义为一种纤维逐点多重线性且反对称的态射

$$\alpha : \underbrace{TX \times_X \ldots \times_X TX}_{=:T_kX} \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

（我们避免定义张量积，因为当纤维是无限维时，这会带来完备化方面常见的技术问题。）文献中关于抽象切结构的标准记法 T_kX 表示k重纤维积。于是， α 关于向量场 $v\colon X \to TX$ 的内导数由预复合给出

$$\iota_v\alpha : T_{k-1}X \xrightarrow{\cong} X \times_X T_{k-1}X \xrightarrow{v\times_X \mathrm{id}} T_kX \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}\,.$$

如果我们将形式定义为映射 $T_kX \to \mathbb{R}$，那么如何定义微分？函数 $f\colon TX \to X$ 的微分由切映射给出，

$$df : TX \xrightarrow{Tf} T\mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbb{R}\,.$$

然而，函数和恰当 1-形式并不能生成形式环，因此这种构造无法推广到更高阶形式。

现在我们面临以下两难境地：要么将微分形式定义为图上的形式族，这样就有微分，却没有内导数；要么将它们定义为逐纤维多重线性反对称态射$T_kX \to \mathbb{R}$，这样就有内导数，却没有微分。解决办法是要求这两种微分形式的概念一致。

我们已经施加了条件，要求 (1) 是一个同构，由此可导出一个同构

$$\mathrm{Hom}(TX \times_X TX, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \lim_{U\to X} \mathrm{Hom}(TU \times_U TU, \mathbb{R})\,. \tag{2}$$

容易看出，这个同构相对于纤维积中两个因子的交换是等变的。此外，这些映射在 T_kX 上是纤维逐点多重线性的，当且仅当它们在所有 T_kU 上都是如此。这表明，同构 (2) 导出了从 $TX \times_X TX$ 上的逐纤维多重线性反对称态射到 $\Omega^2(X)$ 的一个同构。由于我们需要任意次数 k 的形式都具有这样的同构，因此必须施加以下公理：

公理（E1）。自然态射

$$\theta_{k,X} : \operatorname*{colim}_{U\to X} T_kU \longrightarrow T_kX\,,$$

对于所有 $k > 1$ 都是同构。

这个公理有如下几何解释。每个切向量$v_x \in T_xX$ 都由一条路径表示。可以设想，将 x 沿着 v_x 的方向拉伸成一条光滑路径 $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to X$，它穿过 $\gamma(0) = x$，长度虽短但非零，使得区间原点处的坐标切向量 $\frac{\partial}{\partial t}$ 经由 $T_0\gamma$ 映射到 v_x。从这个意义上说，微分学空间中的每个点在单一无穷小方向上都具有一定的弹性。

然而，我们通常无法同时沿着多个切向量 $v_x^1,\dots,v_x^k \in TX_x$ 的方向将 x 拉伸开来。也就是说，我们不一定总能找到一个图$p\colon U \to X$，使得 $p(0) = x$，并且 $(T_0p)\,\frac{\partial}{\partial t^i} = v_x^i$，其中 $(t^1,\dots,t^k)$ 是 $U \subset \mathbb{R}^k$ 的典范坐标。即使我们能找到这样的图，也可能出现切映射 Tp 在 0 处不是单射的情况，因此无法将 X 上的切向量与 U 上的坐标向量对应起来。当且仅当态射 $\theta_{k,\,x}$ 是双射时，这种对应关系才能在每一点 $x \in X$ 处成立。若还希望这一条件与光滑结构相容，就必须作出更强的假设：$\theta_{k,\,x}$ 是微分学空间的同构

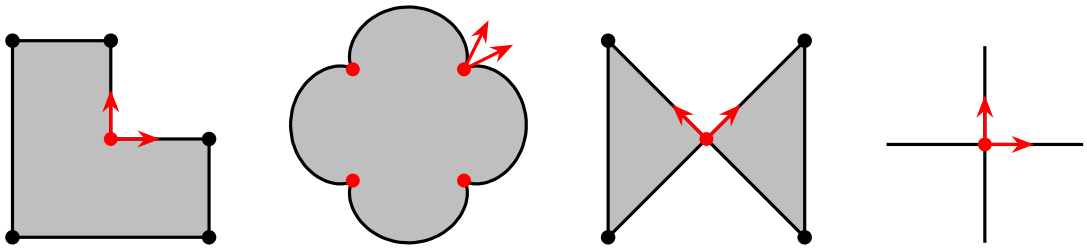


FIGURE 1. $\mathbb{R}^2$ 的微分学子空间，其中非弹性点以红色标出；在这些点处，两个切方向无法表示在同一个图上。

。从这个意义上说，公理（E1）体现了微分学空间“弹性”这一几何思想：其中任意有限个切方向都可以拉伸成一个光滑的“膜”，而这个膜由某个图的像给出。

例 1.4（意面微分学）。我们可以通过规定图为所有光滑映射 $p:\ U \to M$，使得 $Tp:\ TU \to TM$ 的秩处处小于或等于 r，从而在光滑流形 M 上赋予一种替代微分学。由于（i）用光滑函数 f 对 p 进行复合不会增加秩，（ii）秩是一个局部性质，并且（iii）常值映射的秩为零，这就定义了一种微分学，我们称之为秩-r 限制微分学。

当 $r = 0$ 时，我们得到离散微分学。如果 $r = 1$，那么每个图都通过 $\mathbb{R}$ 分解，因此我们得到意大利细面微分学 [IZ13，第 1.10 节，脚注 1]。于是，$r = 2$ 的情形可以称为意大利宽面微分学。2022年 AMS-EMS-SMF 会议在格勒诺布尔举行时，与会者建议将 $r = 3$ 的情形称为意式团子微分学。对于秩-r 限制微分学，公理（E1）中的态射 $\theta_{k,\ M}$ 对所有 $k \leq r$ 都是同构，但当 $r < k <$ 维数为 M 时则不是。

1.3. 附加公理。到目前为止，我们有公理（E1），它确保在 TX 上定义了纤维上的加法，并在微分形式上定义了内导数。定义李括号还需要更多结构。特别是，我们需要一个自然态射 $\tau_X\colon T^2X \to T^2X$，它在两次应用切函子时交换微分的顺序。在欧几里得空间 $U \subset \mathbb{R}^n$上，每个切向量都由某个图上的一条路径 $\mathbb{R} \to U$ 表示，因此，切向量流形上的切向量由光滑路径的光滑路径表示，这等同于一个光滑映射 $\mathbb{R}^2 \to U$。通过交换参数即可交换微分的顺序，

$$\begin{aligned} \tau_{1\leftrightarrow 2} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t_1, t_2) &\longmapsto (t_2, t_1)\,, \end{aligned}$$

它由交换图诱导而下沉

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}^2, U) & \xrightarrow{\tau^*_{1\leftrightarrow 2}} & C^\infty(\mathbb{R}^2, U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^2U & \xrightarrow[\tau_U]{} & T^2U \end{array} \tag{3}$$

到 T^2U 的一个自同态。

当我们将 τ_U 扩展到微分学空间时，会出现这样一个问题：左 Kan 延拓不保留自函子的乘积，也就是说，自然态-射

$$\theta^2_X : \operatorname*{colim}_{U\to X} T^2U \longrightarrow T^2X$$

通常不是同构。我们可以要求 θ^2_X 是同构，但这会过于苛刻。只需要求 τ_U 的左 Kan 延拓能够下降为一个态射 $\tau_X : T^2X \to T^2X$。由于对于所有 X， θ^2_X 都是下沉（命题 3.26），这样的 τ_X 是唯一的。与欧几里得空间的情形相同，我们可以用光滑族来更直观地表述这一条件。我们可以证明， T^2X 中的元素可以用图 $\mathbb{R}^2 \to X$表示。更准确地说，我们有一个下沉

$$\underline{\mathcal{D}\mathrm{fl}}\mathrm{g}(\mathbb{R}^2, X) \longrightarrow T^2X\,,$$

其中，$\underline{\mathcal{D}}$flg 表示微分学空间的内 Hom，即配备函数微分学的态射集合。现在，第二条公理可以用一种与图表 (3) 完全类似的方式表述。

公理（E2）。存在一个自然态射 $\tau_X : T^2X \to T^2X$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{D}\mathrm{fl}}\mathrm{g}(\mathbb{R}^2, X) & \xrightarrow{\tau^*_{1\leftrightarrow 2}} & \underline{\mathcal{D}\mathrm{fl}}\mathrm{g}(\mathbb{R}^2, U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^2X & \xrightarrow[\tau_X]{} & T^2X \end{array}$$

可交换。

接下来，考虑自然态射 $\lambda_X : TX \to T^2X$，它将 $v \in TX$映射为 TX 上的垂直切向量，该向量由路径 $t \mapsto tv$表示。在光滑流形上，此态射在每个切空间与其切空间的切空间之间诱导出一个同构。对于微分学向量空间，这一点可能不成立，以下示例将说明这一点。

例 1.5。考虑 $\mathbb{R}^n$，并将 k次可微映射作为图。它是一个微分学向量空间，我们记为 $\mathbb{R}^n_{C^k}$。其切微分学空间对于 $k > 0$ 由下式给出

$$T\mathbb{R}^n_{C^k} \cong \mathbb{R}^n_{C^k} \times \mathbb{R}^n_{C^{k-1}}\,,$$

这表明该向量空间与其切纤维并不同构。假设 $k > 1$，因此我们可以将切函子应用两次。垂直提升，

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbb{R}^n_{C^k}} : \mathbb{R}^n_{C^k} \times \mathbb{R}^n_{C^{k-1}} &\longrightarrow \mathbb{R}^n_{C^k} \times \mathbb{R}^n_{C^{k-1}} \times \mathbb{R}^n_{C^{k-1}} \times \mathbb{R}^n_{C^{k-2}} \\ (x, v) &\longmapsto (x, 0, 0, v)\,, \end{aligned}$$

不是下沉。

用切结构定义李括号，会得到一个映射：从 X到 T^2X在 TX零截面上的垂直子丛。为了使括号仍是一个向量场，我们必须能够将这个丛与 TX 识别起来。此条件并非微分学空间所特有。在一个 C^k-流形上的向量场是一个 C^k-映射。两个这样的向量场的交换子是一个 C^{k-1}-映射，因此不是 C^k-流形上的向量场。为排除这类现象，我们必须施加以下公理：

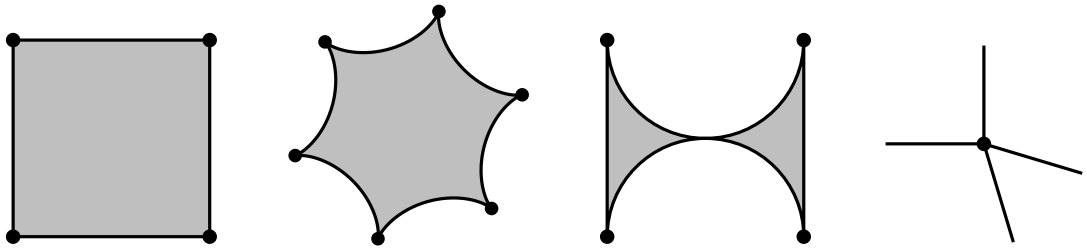


FIGURE 2. 微分学子空间 $\mathbb{R}^2$。标记点处的切空间为 0，黑线上各点处为 $\mathbb{R}$，而内部灰色点处为 $\mathbb{R}^2$。

公理（E3）。垂直提升 $\lambda_X\colon TX \to T^2X$ 是一个归纳。

还有另外两条公理。对于光滑流形，切函子与浸没上的拉回相交换。这可由浸没的局部标准形式推出，而该形式是利用隐函数定理证明的。如此真正的解析结果不可能对所有微分学空间都成立，因此我们需要提出以下公理：

公理（E4）。切函子与切丛的纤维积相交换，$TT_kX \cong T_kTX$。

最后，我们希望满足这些公理的微分学空间构成一个范畴。这要求满足这些公理的微分学空间集合在函子 T_k 作用下封闭，由此得到以下公理：

公理（E5）。对于每个正整数的有限集合 $k_1, \ldots, k_n$，微分学空间 X'：
$= T_{k_1} \cdots T_{k_n} X$ 满足公理（E1）至（E4）。

满足公理（E1）—（E5）的微分学空间称为弹性的。若去掉公理（E5），我们仍可在 X 上定义自然的嘉当演算。满足公理（E1）—（E4）的微分学空间称为弱弹性的。弱弹性空间范畴在函子 T_k 下并不封闭。

1.4. 概要。关于弹性微分学空间的主要结果如下：欧几里得空间上的切结构的左 Kan 延拓，在弹性空间范畴上定义了一个带有标量 $\mathbb{R}$-乘法的切结构（定理 4.2）。这一结论的证明篇幅很长且技术性很强，详尽论证见更长的论文 [Blo]。本文将概述弹性空间的概念框架、主要性质和重要示例。

在第2节中，我们回顾 Rosický 的抽象切结构概念。我们还详细说明了相容标量乘法所需的条件，这在原论文 [Ros84] 中仅被简要提及。为清晰起见，我们明确写出欧几里得空间的切结构。

在第3节中，我们陈述一些关于从欧几里得空间到微分学空间的左 Kan 延拓的新结果，这些结果将在后文中用到。我们采用将微分学空间定义为欧几里得空间位点上的具体层，这也是我们将要研究的范畴构造的最佳方法。随后，我们不加证明地陈述左 Kan 延拓与积、余积、下沉映射、自函子复合以及微分学空间的 D- 拓扑相容的结果；这些结果都是证明主要定理 4.2 所必需的。

第4节给出弹性空间的形式定义，并不加证明地陈述主要定理 4.2。我们讨论若干可使该定理仍然成立的公理替代方案。首先，我们指出，可以从弹性空间的定义中删去公理（E5），仍能在空间X上得到嘉当演算。这类较弱的微分学空间将不再对切函子及其纤维积封闭，因此我们不再拥有 Rosick´y 意义下具有抽象切结构的范畴。我们还可以略微放宽弹性的公理（E1），只要求该条件对$k = 2$成立。这个较弱的条件足以证明定理 4.2。正如引言中所解释的，我们选择较强的公理（E1），是希望获得的不仅是切结构，而是完整的嘉当演算。在早期版本中，我们曾在演讲中介绍弹性空间这一概念，当时公理（E1）、（E2）和（E4）被一个单独的条件取代；后来发现，这一条件强得没有必要。最后，我们不加证明地指出，弹性空间范畴对开子集上的限制、余积、有限积和回缩封闭。

第 5 节将给出若干弹性微分学空间的示例，说明尽管弹性的条件相当严格，但仍然适用于多种有趣的情形。第一个主要结果——定理 5.2——表明，微分学李群 G 是弹性的，当且仅当从向量空间 $\mathfrak{g} = T_eG$ 到其在 0 处切空间的自然映射 $\mathfrak{g} \to T_0\mathfrak{g}$ 是一个归纳。这是一个出人意料地宽松的条件，而且并非微分学空间所独有。例如， C^k-流形 $k < \infty$ 上的可微群结构就不满足该条件。定理 5.2 的证明篇幅很长且技术性很强，将在 [Blo] 中给出。第二个主要结果——定理 5.11——指出，光滑纤维丛 $F \to M$ 的截面所构成的微分学空间是弹性的。该定理的证明同样冗长复杂，因此将在 [Blo] 中给出。本节中弹性空间的其他示例包括：带角和尖点流形、满足一个温和附加条件的微分学向量空间、以弹性向量空间为模型的流形、取值于满足条件 $A \cong T_0A$ 的微分学向量空间的映射空间 $\mathcal{D}\overline{\text{flg}}(X, A)$、微分学空间上的光滑 $\mathbb{R}$-值函数空间，以及光滑流形的映射空间。

1.5. 展望。发展弹性空间这一概念的动机之一源自经典场论：其中的基本结构——场的“空间”——是光滑纤维丛 $F \to M$ 的截面集合，但“空间”在数学上的含义往往并不明确，或仅被隐含地假定。人们常常指出， $\mathcal{F} = \Gamma(M, F)$ 是一个 Fr´echet 流形，随后便将此视为充分授权，把 $\mathcal{F}$ 当作普通的有限维光滑流形来处理。例如，人们往往隐含地假定，在 $\mathcal{F} \times M$ 上存在一个自然的光滑微分形式微分双分次代数，它在 $J^\infty F$ [DF99] 上的限制就是变分双复形。同样，在研究对称性时，例如诺特定理或 BV 理论，相关构造往往只对作用于有限维流形的有限李群作了严格说明，随后便凭着一跃信念，将其推广到作用于场空间的群值函数或微分同胚。更仔细的分析表明，实际用到的只有微分学结构。例如，场的变分是一条由截面构成的光滑路径，而场方程解空间中的切向量（即广义雅可比场）则由一条

光滑场路径表示。所有这些都表明，可以通过微分学构造在 $\mathcal{F}$ 上建立嘉当演算。定理 5.11 验证了这一方法。

另一个动机来自几何变形理论。从概念上说，变形是结构模空间中的一条路径，例如代数结构的态射、黎曼度量或复结构；这些结构都自然地带有函数微分学。这表明，几何模空间可以通过由（高阶）微分学群胚呈现的（高阶）层叠来概念化。于是，无穷小变形理论应由模空间切丛的纤维给出，而该切丛应由相应的（高阶）李代数丛呈现。为了严格定义这一过程，必须发展微分学群胚的李理论。这使我们得出结论：需要在群胚的微分学空间上定义切结构。令人鼓舞的是，对于微分学李群，弹性条件出奇地宽松。微分学群胚的李理论及其在几何变形理论中的应用仍在研究中。

2. Abstract tangent structures

将德拉姆复形 $\Omega(M)$推广到其他范畴相当直接。它是一个从光滑流形范畴到微分分次代数范畴的逆变函子。虽然向量场在某种意义上与微分形式对偶，但要推广向量场却困难得多。一个直接的障碍是，将流形映射到其向量场李代数的映射 $M \to \mathfrak{X}(M)$ 并非函子。具有函子性的其实是切丛 $TM \to M$，因此它很容易推广到 M。给定某个范畴中的广义切丛$\pi_X : TX \to X$，向量场自然定义为态射 π_X 的截面。于是，显而易见的问题是：

问题 2.1. 给定某个范畴中的态射 $TX \to X$，要为其截面空间赋予李代数结构，需要怎样的自然结构?

这个问题结果证明相当复杂。光滑流形上的向量场可以视为其光滑函数环 $C^\infty(M)$ 的导子；该导子在环境自同态环 $C^\infty(M)$ 的交换子括号下封闭。然而，$M \mapsto \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ 仍然不是函子。此外，在广义情形下，要求将 $TX \to X$ 的截面与 X 上某个结构环的导子相对应，似乎要求过强，与微分几何的考量无关。那么，我们如何通过范畴论方法，直接根据切函子定义 M 上向量场的李括号，并使这种方法便于推广呢?

Rosický 在 [Ros84] 中解决了这个问题。首先，我们注意到，在流形上，向量场的向量空间结构由切纤维上的向量空间结构所诱导。为了适用于不包含实数作为对象的范畴，我们将 $\mathbb{R}$-向量空间结构放宽为阿贝尔群结构。于是，广义切丛 $TX \to X$ 上所需的结构是加法 $+_X : TX \times_X TX \to TX$ 的自然变换，以及零截面 $0_X : X \to TX$；它们赋予 $TX \to X$ 以 X 上阿贝尔群的结构。

对于李括号的定义，我们从以下坐标公式开始

$$\left[v^i \frac{\partial}{\partial x^i} w^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \left(v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^i} - w^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

它适用于 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场。右侧由 w 关于 v 的导子减去 v 关于 w 的导子给出。为了推广这一公式，我们必须明确一个向量场关于另一个向量场的求导，以及这两项之差的含义。

w的导子：$X \to TX$关于 v：$X \to TX$由以下复合给出

$$X \xrightarrow{v} TX \xrightarrow{Tw} T^2X\,.$$

然而，我们还不能对 Tw(${v_x}$)和 Tv(${w_x}$)作差，因为 π_{TX}：T(TX) $\to TX$中 Tw(${v_x}$)的基点是 w_x，而 Tv(${w_x}$)的基点是 v_x。我们首先必须交换二重切丛中求导的顺序。也就是说，我们需要一个满足 $\tau_X \circ \pi_{TX} = T\pi_X$的自然变换 τ_X：$T^2X \to T^2X$。这样，τ_X(Tv(${w_x}$))的基点也将是 w_x，因此我们可以取差

$$Tw(v_x) - \tau_X\big(Tv(w_x)\big) = \big(+_{TX} \circ (Tw \circ v, -\tau_X \circ Tv \circ w)\big)_x\,. \tag{4}$$

结果位于 $T^2X \to TX$的垂直切丛中，也就是$T\pi_{TX}$的核。在最后一步，我们必须能够在每个点 $w_x \in TX$处将垂直切空间与 T_xX 本身识别起来。

在光滑流形中，存在一个态射 $\lambda_{2,\,M}$：$TM \times_M TM \to T^2M$，它将对 (w_x, u_x) 映射为 T^2M 中由路径 $t \mapsto w_x + tu_x$ 表示的垂直切向量。此映射诱导出一个同构 $TM \times_M TM \cong$ker $T\pi_{TM}$。在广义情形中，这一结构被提升为一条公理：我们要求存在一个自然态射 $\lambda_{2,\,x}$：$TX \times_X TX \to T^2X$，它诱导出一个同构 $TX \times_X TX \cong$ker $T\pi_{TX}$。利用此同构，表达式 (4) 可视为 $TX \times_X TX$ 中的一个元素，并可投影到第二个因子，从而得到 TX 中的一个元素，这就是括号 $[v, w]$ 在 x 处的值。

为了使这个括号满足雅可比恒等式，必须要求各种结构之间满足若干兼容关系，并具备相应性质，包括丛投影、零截面、纤维逐点加法、交换微分次序以及垂直提升 [Ros84]。Rosicky 对这些结构的公理化构成了本文的基础。

2.1. 关于术语和记号的初步说明。

术语 2.2. 设 Wibble 是一个代数理论。设 X 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，并且上范畴 $\mathcal{C}\downarrow X$ 具有所有有限积（即关于 X的拉回）。$\mathcal{C}\downarrow X$ 中的一个 Wibble 对象称为 X上的 Wibble 丛。

本文中的 Wibble 指以下之一：幺半群、群、阿贝尔群、模、 $\mathbb{R}$-向量空间（对于包含对象 $\mathbb{R}$ 的范畴）。若 $W \to X$ 是一个 Wibble 丛，且在 $\mathcal{C}$中存在点 $x : * \to X$ 上的拉回 $W_x = * \times_X W$，那么 W_x 就是 $\mathcal{C}$ 中的一个 Wibble 对象。换言之，Wibble 丛的每个纤维都是 $\mathcal{C}$中的一个 Wibble 对象，这也说明了这一术语的合理性。请注意，Wibble 丛的概念完全不对局部平凡化作任何假设。因此，流形 M 上的向量空间丛比 M上的向量丛更一般。

注 2.3。术语 2.2 的主要目的是统一文献中多种多样的术语（就本文而言），并采用一个令范畴论学者一目了然的术语。在 [Ros84，第 1] 页中，关于自函子 F：$\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 的（阿贝尔）群丛被称为“自然（阿贝尔）群丛

覆盖 F”。微分学空间 X 上的向量空间丛在 [Vin08], 中称为“正则向量丛”，在 [CW16], 中称为“ X 上的微分学向量空间”，在 [Per16] 中称为“微分学向量伪丛”。

记号 2.4。我们将遵循 [Ros84] 对函子和自然变换的复合所采用的记号。函子 $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 和 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 的复合记为并置形式 $FG\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$。因此，自然变换 $\alpha\colon F \to F'$ 和 $\beta\colon G \to G'$ 的水平复合（戈德蒙积）也记为并置形式 $\alpha\beta\colon FG \to F'G'$。其分量由以下交换图给出：

$$\begin{array}{ccc} FG(A) & \xrightarrow{F(\beta_A)} & FG'(A) \\ {\scriptstyle \alpha_{G(A)}}\downarrow & \searrow^{(\alpha\beta)_A} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{G'(A)}} \\ F'G(A) & \xrightarrow[F'(\beta_A)]{} & F'G'(A) \end{array}$$

恒等自然变换 $F \to F$ 记为 F，因此

$$\begin{aligned} (F\beta)_A &= F(\beta_A) \\ (\alpha G)_A &= \alpha_{G(A)}\,. \end{aligned}$$

α 与自然变换 $\alpha'\colon F' \to F''$ 的纵向复合记为 $\alpha' \circ \alpha\colon F \to F''$。其分量由 $(\alpha' \circ \alpha)_A = \alpha'_A \circ \alpha_A$ 给出。自函子的幺半范畴记为 $\mathrm{End}(\mathcal{C})$。

2.2. Rosick´y 公理。在 [Ros84], Rosick´y 提出了抽象切丛函子的概念，它涵盖了流形切函子的大部分范畴结构。以下概念隐含在 Rosick´y 的定义中：

定义 2.5. 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个函子，$\tau\colon F^2 \to F^2$ 是一个自然变换。设 $\tau_{12} := \tau F$ 和 $\tau_{23} := F\tau$ 是将 τ 扩张为自然变换 $F^3 \to F^3$ 的两个平凡扩张。若 τ 满足辫子关系 $\tau_{12} \circ \tau_{23} \circ \tau_{12} = \tau_{23} \circ \tau_{12} \circ \tau_{23}$，则称其为 F 上的辫子结构。若辫子结构 τ 满足 $\tau \circ \tau = F^2$，则称其为 F 上的对称结构。

注 2.6. F 上的对称结构定义了对称群 S_n 在 F^n 上的作用。

在 X 上的群丛由态射 $\pi\colon A \to X$（即丛投影）以及群结构的态射 $0\colon X \to A$ 和 $+\colon A \times_X A \to A$ 组成。设 $\pi'\colon A' \to X'$、$0'\colon X' \to A'$、$+'\colon A' \times_{X'} A' \to A'$ 是另一个群丛。丛态射是一个交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A' \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ X & \xrightarrow[\psi]{} & X' \end{array}$$

存在唯一的态射 $\varphi \times_\psi \varphi\colon A \times_X A \to A' \times_{X'} A'$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} A \times_X A & \xrightarrow{\varphi\times_\psi\varphi} & A \times_X A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \times A & \xrightarrow[\varphi\times\varphi]{} & A' \times A' \end{array}$$

有序对 (φ, ψ) 是群丛态射，当且仅当图表

$$\begin{array}{ccc} A \times_X A & \xrightarrow{\varphi\times_\psi\varphi} & A' \times_X A' \\ {\scriptstyle +}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle +'} \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & A' \end{array}$$

交换。自函子 F 保持纤维积，当且仅当在 FX 上的自然丛态射

$$\nu_{k,X} : F(A \times_X^{\pi,\pi} \ldots \times_X^{\pi,\pi} A) \longrightarrow FA \times_{FX}^{F\pi,F\pi} \ldots \times_{FX}^{F\pi,F\pi} FA\,, \tag{5}$$

其中两侧具有相同数目的 k 个因子，对所有 k 都是同构。

定义 2.7（第 2 节中的 [Ros84], 定义 2.3 中的 [CC14]）。范畴 $\mathcal{C}$ 的切结构由函子 $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 以及自然变换$\pi\colon T \to 1$, $0\colon 1 \to T$, $+\colon T_2 \to T$, $\lambda\colon T \to T^2$ 和 $\tau\colon T^2 \to T^2$ 组成，并满足以下公理：

- 纤维积：拉回

$$T_k := \underbrace{T \times_1 T \times_1 \ldots \times_1 T}_{k \text{ factors}}$$

  在 $T \xrightarrow{\pi} 1$ 上对所有 $k \geq 1$均存在，且是逐点定义的，并由 T保持。
- 阿贝尔群丛：$T \xrightarrow{\pi} 1$ 带有单位元 0 和加法 $+$，是一个在 1 上的阿贝尔群丛（术语 2.2）。
- 对称结构：$\tau\colon T^2 \to T^2$是 T上的对称结构（定义 2.5）。此外，τ 是群丛态射。也就是说，图表

$$\begin{array}{ccc} T^2 & \xrightarrow{\tau} & T^2 \\ & {\scriptstyle T\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi T} & \\ & T & \end{array}$$

  and

$$\begin{array}{ccccc} TT_2 & \xrightarrow{\nu_2} & T^2 \times_T^{T\pi,T\pi} T^2 & \xrightarrow{\tau\times_T\tau} & T^2T \\ {\scriptstyle T+}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle +T} \\ T^2 & & \xrightarrow[\tau]{} & & T^2 \end{array}$$

  交换，其中 ν_2是关于 $A = TX \xrightarrow{\pi} X$、$F = T$ 和 $k = 2$ 的态射 (5)。

- 垂直提升：这些图表

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\lambda} & T^2 \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi T} \\ 1 & \xrightarrow[0]{} & T \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\lambda} & T^2 \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda T} \\ T^2 & \xrightarrow[T\lambda]{} & T^3 \end{array}$$

  可交换。此外，第一个图表是群丛态射，即 $(+T)\circ(\lambda\times_0\lambda)=\lambda\circ+$。

- 垂直提升与对称结构的相容性：这些图表

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ {\scriptstyle\lambda}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\lambda} \\ T^2 & \xrightarrow[\tau]{} & T^2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} T^2 & \xrightarrow{T\lambda} & T^3 & \xrightarrow{\tau T} & T^3 \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle T\tau} \\ T^2 & & \xrightarrow[\lambda T]{} & & T^3 \end{array}$$

  可交换。

- 垂直提升是一个核：该图表

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\lambda} & T^2 \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\pi T, T\pi)} \\ 1 & \xrightarrow[0\times_1 0]{} & T_2 \end{array} \tag{6}$$

  是逐点拉回。

术语 2.8。在 [CC14]及后续工作中，Rosick´y 最初要求 $T\to 1$ 是阿贝尔群丛的条件，放宽为阿贝尔幺半群丛。在这一术语体系中，Rosicky 更强的概念称为带负元的切结构。本文中的所有切结构都带负元。

注 2.9。图（6）是逐点拉回，当且仅当

$$T \xrightarrow{\lambda} T^2 \underset{0\circ\pi\circ\pi T}{\overset{\pi T}{\overset{T\pi}{\rightrightarrows}}} T$$

是逐点三重等化子。该条件是 [Ros84] 中最初的公理。

注 2.10。垂直提升可借助加法丛结构扩展为映射

$$\lambda_2 : T_2 \xrightarrow{T0\times_0\lambda} T_2T \xrightarrow{+T} T^2 \xrightarrow{\tau} T^2\,. \tag{7}$$

在假设其余切结构（带负元）公理均成立的情况下，[CC14，引理 3.10], 证明了公理（6）成立，当且仅当

$$\begin{array}{ccc} T_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & T^2 \\ {\scriptstyle\pi\circ\mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T\pi} \\ 1 & \xrightarrow[0]{} & T \end{array}$$

是一个逐点拉回。

2.3. 标量乘法。设 R 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个环对象。这给出了一个自函子 $R\times 1\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C},\ X\mapsto R\times X$，它配备了投影 $\mathrm{pr}_1\colon R\times 1\to 1$。$R$ 的环结构赋予 $R\times 1\to 1$ 以 $\mathbf{1}$ 上自函子中的内环结构。设 $\pi\colon T\to 1$ 是 $\mathbf{1}$ 上自函子范畴中的一个阿贝尔群对象。在 $T\to 1$ 上的一个 $(R\times 1\to 1)$-模结构由一个自然变换显式给出

$$\kappa_X : R\times TX \longrightarrow TX\,,$$

使得以下图表对所有 $X\in\mathcal{C}$ 都交换：

(i) 丛态射：

$$\begin{array}{ccc} R\times TX & \xrightarrow{\kappa_X} & TX \\ & {\scriptstyle \pi_X\circ \mathrm{pr}_2}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi_X} & \\ & X & \end{array}$$

(ii) 结合律：

$$\begin{array}{ccc} R\times R\times TX & \xrightarrow{\mathrm{id}_R\times\kappa_X} & R\times TX \\ {\scriptstyle \cdot\times \mathrm{id}_{\mathbb{R}\times TX}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_X} \\ R\times TX & \xrightarrow[\kappa_X]{} & TX \end{array}$$

(iii) 幺元性：

$$\begin{array}{ccc} \{1\}\times TX & \hookrightarrow & R\times TX \\ & \underset{\cong}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle \kappa_X} \\ & & TX \end{array}$$

(iv) 关于 R的线性：

$$\begin{array}{ccc} R\times R\times TX & \xrightarrow{+\times\mathrm{id}_{TX}} & R\times TX \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_{R^2}\times\Delta_{TX}}\downarrow & & \\ (R\times TX)\times_X (R\times TX) & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_X} \\ {\scriptstyle \kappa_X\times_X\kappa_X}\downarrow & & \\ TX\times_X TX & \xrightarrow[+_X]{} & TX \end{array}$$

此处 $\Delta_{TX}\colon\ TX\to TX\times_X TX$ 是对角态射，且陪域的各个因子重新排列。

（v）关于 TX 的线性：

$$\begin{array}{ccc} R\times TX\times_X TX & \xrightarrow{\mathrm{id}\times+_X} & R\times TX \\ {\scriptstyle \Delta_R\times\mathrm{id}_{T_2X}}\downarrow & & \\ (R\times TX)\times_X (R\times TX) & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_X} \\ {\scriptstyle \kappa_X\times_X\kappa_X}\downarrow & & \\ TX\times_X TX & \xrightarrow[+_X]{} & TX \end{array}$$

此处 $\Delta_R\colon\ R \to R \times R$ 是对角态射，且陪域的因子经过了重新排序。

我们将这种结构更简洁地称为 R-模结构，定义在 $T \to 1$上；而将 $T \to 1$ 称为一个 R-模丛（术语 2.2）。如果 T 是 $\mathcal{C}$上的切结构的一部分，那么我们还必须要求其与对称结构和垂直提升相容。

定义2.11. 设 R 是带有切结构的范畴 $\mathcal{C}$ 内的一个环。若一个 R-模结构 $\kappa_X\colon$ $R\times TX \to TX$ 对所有 $X \in \mathcal{C}$ 都使下列图表交换，则称其为该切结构的标量乘法：

（vi）与对称结构的相容性：

$$\begin{array}{ccc} R \times T^2X & \xrightarrow{\mathrm{id}_R \times \tau_X} & R \times T^2X \\ & {\scriptstyle \kappa_{TX}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle T\kappa_X} & \\ & T^2X & \end{array}$$

（vii）与垂直提升的相容性：

$$\begin{array}{ccc} R \times TX & \xrightarrow{\mathrm{id}_R \times \lambda_X} & R \times T^2X \\ {\scriptstyle \kappa_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{TX}} \\ TX & \xrightarrow[\lambda_X]{} & T^2X \end{array}$$

我们在此考虑的切结构都将配备一个 $\mathbb{R}$-标量乘法。

注 2.12. 与任何模结构的情形一样，交换图表 (v) 意味着，$0 \in R$ 对 TX 的标量乘法将其映到零截面，也就是说，图表

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times TX & \hookrightarrow & R \times TX \\ {\scriptstyle \pi_X \circ \mathrm{pr}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_X} \\ X & \xrightarrow[0_X]{} & TX \end{array}$$

是交换的。若 κ 使得此图表以及图表 (i)–(iii) 均交换，则称 κ 为 R-锥结构，称 $T \to 1$ 为 R-锥丛。

2.4. 向量场的李括号。

定义 2.13. 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有切结构的范畴。$X \in \mathcal{C}$ 上的向量场是 $\pi_X\colon TX \to X$ 的一个截面。

两个向量场 v、$w\colon\ X \to TX$ 的括号定义如下。v 与 $Tw\colon TX \to T^2X$ 的复合满足

$$\begin{aligned} \pi_{TX} \circ Tw \circ v = w \circ \pi_X \circ v = w \circ \mathrm{id}_X \\ = w\,. \end{aligned}$$

交换 v和 w 后，我们有 $\pi_X \circ Tv \circ w = v$。为了能够在纤维积 $T^2X \times_{TX} T^2X$ 中将这两项相减，我们必须应用对称

结构到 T^2 上，从而得到

$$\pi_{TX}\circ\tau_X\circ Tv\circ w = T\pi_X\circ Tv\circ w = T\mathrm{id}_X\circ w = \mathrm{id}_{TX}\circ w = w\,.$$

这表明，$Tw\circ v$和 $\tau_X\circ Tv\circ w$投影到 π_{TX}的同一纤维上：$T^2X\to TX$，因此我们可以取它们的差

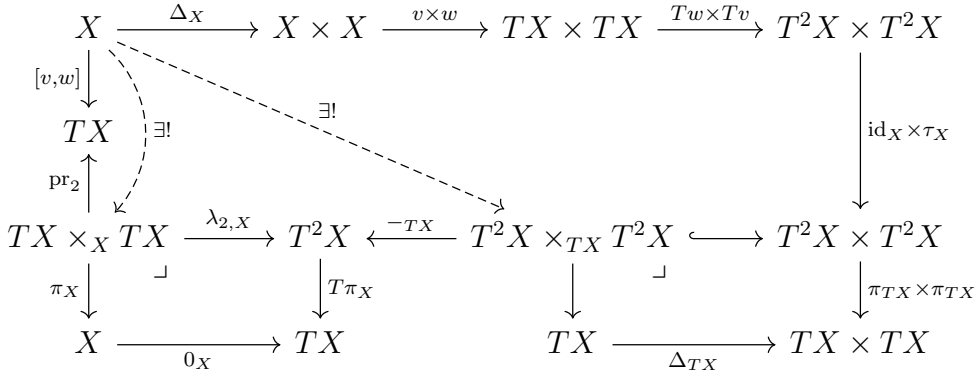
$$\delta(v,w)(x) := (Tw\circ v)(x) - (\tau_X\circ Tv\circ w)(x)\,,$$

其中减号表示阿贝尔群丛 π_{TX}：$T^2X\to TX$中的差。我们有

$$\pi_{TX}\circ\delta(v,w) = 0 = T\pi_X\circ\delta(v,w)\,,$$

因此，映射 $\delta(v,w)$：$X\to T^2X$的取值落在 $T\pi_X$：$T^2X\to TX$的核中，而该核同构于 $TX\times_X TX$。于是，对第二个因子作投影，便得到向量场 $[v,w]$：$X\to TX$。这一构造可用下列交换图概括：

(8)



这表明，定义向量场括号需要用到全部切结构。该结论在 [Ros84] 中提出，并在 [CC15] 中证明，Rosický 参与了证明；结论指出，$[v,w]$ 满足雅可比关系。

向量场的集合 $\Gamma(X,TX)$ 具有阿贝尔群结构，其加法为

$$v+w := +_X\circ(v\times w)\circ\Delta_X\,,$$

其中 Δ_X：$X\to X\times X$ 是对角态射。当切结构具有标量乘法 R 时，$\Gamma(X,TX)$ 是环 $\mathcal{C}(X,R)$ 上的一个模，该环由 R 值函数构成，定义为

$$\kappa(f,v) = \kappa_X\circ(f\times v)\circ\Delta_X\,.$$

2.5. 欧几里得空间的切结构。切结构的典型例子是实向量空间开子集上的切函子，它是光滑流形切函子的局部模型。令 $\mathcal{E}\mathrm{ucl}$ 表示这样一个范畴，其对象为 $\mathbb{R}^n$，$n\geq 0$ 的开子集，态射为光滑映射。$\mathcal{E}\mathrm{ucl}$ 将称为欧几里得空间范畴。其切函子记为

$$T:\mathcal{E}\mathrm{ucl}\longrightarrow\mathcal{E}\mathrm{ucl}\,.$$

在开子集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上，切范畴定义 2.7 中出现的函子可明确表示为

$$\begin{aligned} TU &= U \times \mathbb{R}^n \\ T^2U &= U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ T^kU &= U \times (\mathbb{R}^n)^{2^k-1} \\ T_2U &= U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ T_kU &= U \times (\mathbb{R}^n)^k . \end{aligned}$$

对于光滑映射 $f\colon\ U \to V \subset \mathbb{R}^m$，这些函子定义如下

$$\begin{aligned} Tf : (u, u_0^i) &\longmapsto \Big(f(u), \frac{\partial f^a}{\partial x^i} u_0^i\Big) \\ T^2f : (u, u_0^i, u_1^i, u_{01}^i) &\longmapsto \Big(f(u), \frac{\partial f^a}{\partial x^i} u_0^i, \frac{\partial f^a}{\partial x^i} u_1^i, \frac{\partial f^a}{\partial x^i} u_{01}^i + \frac{\partial^2 f^a}{\partial x^i \partial x^j} u_0^i u_1^j\Big) \\ T_2f : (u, u_0^i, u_1^i) &\longmapsto \Big(f(u), \frac{\partial f^a}{\partial x^i} u_0^i, \frac{\partial f^a}{\partial x^i} u_1^i\Big) . \end{aligned}$$

T^k 和 T_k 的公式类似。切范畴结构的自然变换定义如下

$$\begin{aligned} \pi_U : (u, u_0) &\longmapsto u \\ 0_U : u &\longmapsto (u, 0) \\ +_U : (u, u_0, v_0) &\longmapsto (u, u_0 + v_0) \\ \lambda_U : (u, u_0) &\longmapsto (u, 0, 0, u_0) \\ \tau_U : (u, u_0, u_1, u_{01}) &\longmapsto (u, u_1, u_0, u_{01}) . \end{aligned}$$

T_2 和 T 的交换性由同构给出

$$\begin{aligned} T(T_2U) &\longrightarrow T_2(TU) \\ \big((u, u_0, v_0), (u_1, u_{01}, v_{01})\big) &\longmapsto \big((u, u_1), (u_0, u_{01}), (v_0, v_{01})\big) \end{aligned}$$

丛投影扩展到 T^2 后定义如下

$$\begin{aligned} (\pi T)_U = \pi_{TU} : (u, u_0, u_1, u_{01}) &\longmapsto (u, u_0) \\ (T\pi)_U = T\pi_U : (u, u_0, u_1, u_{01}) &\longmapsto (u, u_1) . \end{aligned}$$

定义中出现的其他自然变换 $+T$、 $T+$、 λT、 $T\lambda$、τT和 $T\tau$，也以类似方式得到。垂直提升的扩展 (7) 定义如下

$$\lambda_2 : (u, u_0, v_0) \longmapsto (u, u_0, 0, v_0) .$$

以下命题可通过直接的初等计算验证 n:

命题 2.14. 配备切函子 T 及自然变换π、0、 $+$、 τ和 λ 的 $\mathcal{E}$ucl，是 $\mathcal{E}$ucl上的切结构。

命题 2.15. 实数的纤维逐点乘法,

$$\begin{aligned} \kappa_U : \mathbb{R} \times TU &\longrightarrow TU \\ \big(r, (u, u_0)\big) &\longmapsto (u, ru_0) , \end{aligned}$$

是切结构的一种标量乘法（定义2.11）。

3. Left Kan extension to diffeological spaces

我们希望推广到微分学空间上的光滑流形结构，例如切丛和微分形式代数；从局部性和普遍性的意义上说，这些结构定义在 $\mathbb{R}^n$ 的所有开子集上，然后沿图册粘合在一起。用范畴论的术语来说，局部结构由函子 $F\colon \mathcal{E}\mathrm{ucl} \to \mathcal{C}$ 给出，而粘合操作则由余极限给出

$$FM := \operatorname*{colim}_{U\to M} FU$$

在极大图册上。用范畴论的术语来说， FM 是 F 沿着欧几里得空间到光滑流形的包含映射的逐点左 Kan 延拓。要将这一构造推广到微分学空间，我们用微分学空间 X的图替换光滑流形 M 的坐标图，

$$FX := \operatorname*{colim}_{U\to X} FU\,.$$

这是 F 沿着欧几里得空间到微分学空间的包含映射的逐点左 Kan 延拓。

为了将左 Kan 延拓用作把微分几何结构推广到微分学空间的通用工具，我们必须较为详细地研究它的范畴性质。为此，最好采用将微分学空间定义为欧几里得空间上的具体层的方式；这一点已在 [BH11]中阐明。欧几里得空间的位点 $\mathcal{E}$ ucl是具体的，这意味着存在一个忠实函子 $\mathcal{E}\mathrm{ucl} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$， $U \to |U|$ 它将覆盖映射到满射。层$D\colon \mathcal{E}\mathrm{ucl}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$若是 $U \mapsto \mathcal{S}\mathrm{et}(|U|, D(*))$的子层，便称为具体层。具体来说，这意味着 $D(U)$是由集合映射 $|U| \to X := D(*)$构成的集合，称为图，并且满足层的性质。由此，我们还原了微分胚学的原始定义。

与任何具体层范畴的情形一样，微分学空间范畴 $\mathcal{D}\mathrm{flg}$ 是一个拟拓扑，亦即带有强子对象分类器的范畴，并具有若干良好性质（命题 3.6）。 $\mathcal{D}\mathrm{flg}$ 的其他良好性质则继承自位点 $\mathcal{E}\mathrm{ucl}$。例如，微分学空间的图所构成的范畴，也就是用于计算逐点左 Kan 延拓的指标范畴，是滤过余极限型的，这表明它与有限积具有相容性。

每个可表预层都是具体层，因此 Yoneda 嵌入可分解为一个全忠实函子

$$y : \mathcal{E}\mathrm{ucl} \longrightarrow \mathcal{D}\mathrm{flg}\,.$$

虽然 y 只是将 Yoneda 嵌入限制到其陪域上的结果，但这种限制改变了余极限的计算方式。 $\mathcal{D}\mathrm{flg}$ 中的余极限，先通过在函子范畴 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{\mathcal{E}\mathrm{ucl}^{\mathrm{op}}}$ 中取逐点余极限得到，再应用包含 $\mathcal{D}\mathrm{flg} \to \mathcal{S}\mathrm{et}^{\mathcal{E}\mathrm{ucl}^{\mathrm{op}}}$ 的左伴随。第二步会影响左 Kan 延拓的性质，而左 Kan 延拓是由余极限给出的。

我们将要考虑的大多数结构都由自函子 $F\colon \mathcal{E}\mathrm{ucl} \to \mathcal{E}\mathrm{ucl}$ 给出。由于 $\mathcal{E}$ ucl 不是余完备的，而且我们希望得到一个微分学空间的自函子，因此必须先与 y 复合，将 F 的陪域置于微分学空间中，然后再取 Kan延拓。Kan延拓后的自函子记作

$$\mathbb{L}F := \mathrm{Lan}_y\, yF : \mathcal{D}\mathrm{flg} \longrightarrow \mathcal{D}\mathrm{flg}\,.$$

本节将要探讨的主要问题如下。

问题 3.1。 $\mathbb{L}$： End(Ɛucl) →End(Ɛucl) 具有哪些范畴性质？ F 的哪些性质会被 $\mathbb{L}$保留?

由 Kan 延拓的自然性可知， $\mathbb{L}$ 是一个函子

$$\mathbb{L} : \mathrm{End}(\mathcal{E}\mathrm{ucl}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{D}\mathrm{flg})$$

自函子范畴之间的函子，这意味着自然变换的纵向复合以及由此得到的自然变换交换图都得以保留。这是我们最关注的性质，因为它意味着定义 2.7 中切结构的交换图也适用于微分学空间的情形。

遗憾的是，关于到微分学空间的左 Kan 延拓，好消息到此为止。与到预层的 Kan 延拓不同，将函子延拓到具体层所得的 Kan 延拓通常不保留余极限，甚至不保留有限余积。 $\mathbb{L}$ 也不保留自函子复合。幸运的是，我们想要延拓的函子 F 具有一些良好的范畴性质，从而使它们的 Kan 延拓 $\mathbb{L}F$也具有良好的性质。

利用图册范畴 $U \to X$ 是滤过余极限型这一事实，我们证明，若 F保留有限积，则其 Kan 延拓 $\mathbb{L}F$ 也保留有限积（命题 3.19）。这也意味着$\mathbb{L}$保留自函子的有限积（命题 3.20）。若要保证与余积的相容性，我们必须假设 F 是一个余层，也就是说，F： $\mathcal{E}\mathrm{ucl}^{\mathrm{op}}$ →$\mathcal{E}\mathrm{ucl}^{\mathrm{op}}$ 是一个层。于是 $\mathbb{L}F$ 保留余积（推论 3.23）和下沉映射（命题 3.24 ）。

虽然 $\mathbb{L}$不保持自函子的复合，但存在一个自然态射

$$\mathbb{L}(FG) \longrightarrow (\mathbb{L}F)(\mathbb{L}G)\,, \tag{9}$$

它通常不是同构。我们可以证明，如果 F 是余层，那么将 (9) 应用于一个微分学空间所得的映射是下沉（命题 3.26）。态射

$$\mathbb{L}(FGH) \longrightarrow \mathbb{L}(F)\mathbb{L}(G)\mathbb{L}(H)$$

我们通过两次应用 (9) 得到的结果，不取决于我们是先将它应用于 $(FG)H$，还是应用于 $F(GH)$（命题 3.27）。从这个意义上说， μ是结合的。不难看出，(9) 对 F 和 G 是自然的（命题 3.28）。

最后，我们研究 Kan延拓与微分学空间的 D-拓扑之间的相容性。我们注意到，我们所关注的许多欧几里得空间上的函子都带有一个自然变换 $F \to 1$ ，使得沿任意开嵌入 $V \to U$ 的拉回满足 $FV \cong V \times_U FU$。由于没有更好的术语，我们称这样的 $F \to 1$为局部丛。我们可以证明，如果 $F \to 1$ 是局部的，那么它的 Kan延拓 $\mathbb{L}F \to 1$ 也是局部的（命题 3.35）。接着我们证明，局部丛的态射 $FX \to GX$ 是归纳、下沉、满态射或同构，当且仅当 X 的某个覆盖的各开子集上的限制都是如此（命题 3.34）。

3.1. 微分学空间作为具体层。回顾一下， Ɛucl 表示一个范畴，其对象是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$，$n \geq 0$ 的所有开子集，态射是所有光滑映射。开覆盖定义了一个格罗滕迪克预拓扑。

定义 3.2。小范畴 Ɛucl 配备由开覆盖预拓扑生成的格罗滕迪克拓扑后，将称为欧几里得空间位点。

$\mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 中的终对象是 $* := \mathbb{R}^0$。点函子，

$$\begin{aligned} |_| : \mathcal{E}\mathrm{ucl} &\longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et} \\ U &\longmapsto \mathcal{E}\mathrm{ucl}(*, U)\,, \end{aligned}$$

是忠实的，因此赋予 $\mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 具体范畴的结构。此外，每个覆盖 $\{U_i \to U\}$ 在底层集合上都是满射。具有这些性质的位点称为具体位点。

设 $X : \mathcal{E}\mathbf{ucl}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathbf{et}$ 是一个预层。那么存在一个预层态射，定义如下：

$$\begin{aligned} X(U) &\longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}\big(|U|, |X|\big) \\ p &\longmapsto \big((* \xrightarrow{u} U) \mapsto X_u(p)\big)\,, \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $X_u \equiv X(u) : X(U) \to X(*)$ 是将 $X(U)$ 限制到点 u 上所得的限制。

定义 3.3. 具体位点上的预层 $X : \mathcal{E}\mathbf{ucl}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathbf{et}$ 若满足 (10) 是单态射，则称为具体的；也就是说，对所有 $U \in \mathcal{E}\mathbf{ucl}$，由 (10) 定义的映射都是单射。若一个层作为预层是具体的，则称其为具体层。具体层之间的态射是底层预层的态射。

定义 3.4. 欧几里得空间位点上的具体层称为微分学空间。微分学空间之间的态射是层态射。微分学空间范畴记作 $\mathcal{D}\mathbf{flg}$。

定理 3.5（ [BH11] 中的定理 5.25）。微分拓扑空间范畴是一个拟拓扑斯，并具有小极限和小余极限。

定理 3.5 表明，微分拓扑空间范畴具有许多便利性质。为便于说明并供后文参考，我们将列举其中一些。

命题 3.6。微分拓扑空间范畴 $\mathcal{D}\mathbf{flg}$ 具有以下性质：

- $\mathcal{D}\mathbf{flg}$ 是局部笛卡尔闭的，即对于 $\mathcal{D}\mathbf{flg}$ 中的每个对象 X，其余范畴 $\mathcal{D}\mathbf{flg}\downarrow X$ 都是笛卡尔闭的。
- 强单态射和强满态射都是有效的。
- （强）单态射和（强）满态射在拉回下稳定。

- $\mathcal{D}\mathbf{flg}$ 是拟粘合的，也就是说，强单态射的推出仍是强单态射，并且推出方块是拉回方块。
- 始对象是严格的，即每个态射 $X \to \emptyset$ 都是同构。
- 余积彼此不交，即 $X \to X \sqcup Y \leftarrow Y$ 是单态射，并且 $X \times_{X\sqcup Y} Y \cong \emptyset$。

- 点函子 $\mathcal{D}\mathbf{flg} \to \mathcal{S}\mathbf{et}$，$X \to \mathcal{D}\mathbf{flg}(*, X)$ 是忠实的。它有左伴随和右伴随，因此保极限和余极限。

术语 3.7。在 $\mathcal{D}\mathbf{flg}$ 中，强满态射称为下沉映射，强单态射称为归纳。

例 3.8。以下是一些最基本的微分学结构示例：

(a) 集合 S 上的细微分学结构或离散微分学，是指其图为局部常值映射的微分学结构。[1](b) 集合 S 上的粗微分学结构（又称不可分微分学结构或平凡微分学结构）由 $U \mapsto \mathcal{S}\mathrm{et}\big(|U|, S\big)$ 给出，即所有映射都是图。(c) 每个拓扑空间 X 都配备连续微分学结构，由 $U \mapsto \mathcal{T}\mathrm{op}(U, X)$ 给出，即其图为连续映射。(d) 每个光滑有限维流形 M 都配备自然微分学结构，由 $U \mapsto \mathcal{M}\mathrm{fld}(U, M)$ 给出，即其图为无限次可微映射。(e) 我们将 $\mathcal{D}\mathrm{flg}$ 中的指数对象记为

$$\underline{\mathcal{D}\mathrm{flg}}(X, Y) \equiv Y^X$$

并称它们为微分学映射空间。由泛性质给出的微分学结构

$$\mathcal{D}\mathrm{flg}\big(U, \underline{\mathcal{D}\mathrm{flg}}(X, Y)\big) \cong \mathcal{D}\mathrm{flg}(U \times X, Y)\,,$$

称为函数微分学。

备注 3.9。根据命题 3.6，遗忘函子 $\mathcal{D}\mathrm{flg} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$, $X \mapsto |X|$ 有左伴随和右伴随。右伴随为集合 S 赋予粗微分学结构。左伴随则为其赋予细微分学结构。换言之，集合上的细微分学结构就是自由微分学结构，而粗微分学结构就是余自由微分学结构。

备注 3.10。将光滑流形 M 映射到其自然微分学结构$U \mapsto \mathcal{M}\mathrm{fld}(U, M)$的映射定义了一个充满、忠实且单射的函子 $\mathcal{M}\mathrm{fld} \to \mathcal{D}\mathrm{flg}$。

备注 3.11。每个微分学空间 X 都自然带有使所有图连续的最细拓扑，这种拓扑称为 D-拓扑。该拓扑仅由光滑曲线决定，因此许多不同的微分学结构会诱导出相同的拓扑 [CSW14，定理 3.7]。将 X 上的微分学结构映射到其诱导拓扑的操作，是将拓扑映射到连续微分学结构[CSW14，命题 3.3]的左伴随。离散（平凡）微分学结构诱导的拓扑是离散拓扑。然而一般而言，该伴随的单位和余单位都不是同构。

微分学空间 X 的映射 $p \in X(U) \subset \mathcal{S}\mathrm{et}(|U|, |X|)$ 被称为图。若将具体层的定义条件展开，就会得到用图表述的微分学空间的传统定义。

对于 $\{U_i \to U\}$ ucl 中的每个开覆盖 $\mathcal{E}$， U 是 $\coprod_{i,j} U_i \cap U_j \rightrightarrows \coprod U_i$ 的余等化子。换言之，欧几里得空间位点是次典范的，因此每个可表预层都是层。由于每个可表预层都是具体的，因此 $\mathcal{E}$ucl 上的所有可表预层都是具体层。由此我们得出，Yoneda 嵌入 $Y\colon X \mapsto \mathcal{D}\mathrm{flg}(\underline{\ }X)$ 可分解为

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{S}\mathrm{et}^{\mathcal{E}\mathrm{ucl}^{\mathrm{op}}} \\ & \overset{Y}{\nearrow} & \uparrow{\scriptstyle I} \\ \mathcal{E}\mathrm{ucl} & \xrightarrow[y]{} & \mathcal{D}\mathrm{flg} \end{array}$$

[1]在 [BH11 中，第 5794] 页的例（2）错误地指出，离散微分学由常值映射给出。

经由函子 y。由于 Y 和 I 都是全忠实的，因此 y 也是全忠实的。由于 I 是全忠实的，米田引理表明，具体层 $X \in \mathcal{D}\mathbf{flg}$ 在 $U \in \mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 上的取值为

$$\begin{aligned} X(U) &\cong \mathcal{S}\mathrm{et}^{\mathcal{E}\mathrm{ucl}^{\mathrm{op}}}(YU, IX) \cong \mathcal{S}\mathrm{et}^{\mathcal{E}\mathrm{ucl}^{\mathrm{op}}}(IyU, IX) \\ &\cong \mathcal{D}\mathrm{flg}(yU, X)\,. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}\mathbf{flg}$ 中的极限是逐点计算的，且 I 保极限。根据伴随函子定理， I 有一个左伴随，

$$K : \mathcal{S}\mathrm{et}^{\mathcal{E}\mathrm{ucl}^{\mathrm{op}}} \longleftrightarrows \mathcal{D}\mathrm{flg} : I\,,$$

该左伴随已在 [BH11，第 5.3] 节中计算并研究。具体而言， K 由一个称为具体化的过程，随后再进行格罗滕迪克加构造得到。

左伴随 K 是一个回缩， $KI \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}\mathrm{flg}}$，这意味着图表 $X\colon \mathcal{I} \to \mathcal{D}\mathbf{flg}$ 的余极限可计算为

$$\begin{aligned} \operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} X_i &\cong \operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} KIX_i \\ &\cong K \operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} IX_i\,, \end{aligned}$$

也就是说，先计算预层中的余极限，再应用 K。进一步还可以证明， y 是稠密的:

命题3.12（ [BH11] 中的命题 51）。每个 $X \in \mathcal{D}\mathbf{flg}$ 都是 $y{\downarrow}X \to \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{D}\mathbf{flg}$ 的余极限，我们将其记作

$$X \cong \operatorname*{colim}_{yU\to X} yU\,.$$

术语3.13. 逗号范畴 $y{\downarrow}X$ 称为X的图册范畴。

注记3.14. 通常，为了方便，会在记号上将图 $U \in \mathcal{E}\mathbf{ucl}$的定义域与微分学空间 $yU \in \mathcal{D}\mathbf{flg}$等同起来。然而，本文将讨论沿着 y 进行Kan延拓时遇到的一些微妙问题；这种等同会让人因记号而得出错误的证明（作者不止一次掉进过这个陷阱）。因此，我们始终会明确写出嵌入 y。

3.2. 左Kan延拓到微分拓扑空间。

记号3.15. 设 $F\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{E}\mathbf{ucl}$为一个自函子。沿嵌入 $y\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \hookrightarrow \mathcal{D}\mathbf{flg}$对$yF$ 作左 Kan 延拓，将记作

$$\mathbb{L}F := \mathrm{Lan}_y\, yF\,, \tag{11}$$

它是 $\mathcal{D}\mathbf{flg}$上的一个自函子。

左 Kan 延拓将作为一种工具，把欧几里得空间的切结构扩展到微分学空间。 $\mathbb{L}$ 是函子性的，这意味着 $\mathbb{L}$ 保留了自函子 F、 F'、 $F'' \in \in \mathbf{End}(\mathcal{E}\mathbf{ucl})$之间自然变换$\hat{}\alpha\colon\ F \to F'$和$\hat{}\alpha'\colon\ F' \to F''\hat{}\ \hat{}\ \hat{}$的垂直复合，即，

$$\mathbb{L}(\alpha' \circ \alpha) = (\mathbb{L}\alpha') \circ (\mathbb{L}\alpha)\,.$$

由于 $\mathcal{E}$ucl是小的，且 $\mathcal{D}$flg是余完备的， $\mathbb{L}F$ 存在且逐点成立，也就是说，它可以通过余极限 [计算。ML98，定理 X.5。3]

$$\begin{aligned}(\mathbb{L}F)(X) &\cong \operatorname{colim}(y\downarrow X \longrightarrow \mathcal{E}\mathrm{ucl} \xrightarrow{yF} \mathcal{D}\mathrm{flg}) \\ &= \operatorname*{colim}_{yU\to X} yFU\,,\end{aligned}$$

对所有 $X \in \mathcal{D}$flg。设 $\alpha\colon F \to G$ 是函子 $\mathcal{E}$ucl $\to\mathcal{E}$ucl 之间的自然变换。那么 $y\alpha\colon yF \to yG$ 是函子 $\mathcal{E}$ucl $\to \mathcal{D}$flg 之间的自然变换。左 Kan 延拓 Lan $_y\, yF$ 关于 yF 是函子性的，因此我们有一个自然变换

$$\mathbb{L}\alpha := \operatorname{Lan}_y y\alpha : \mathbb{L}F \longrightarrow \mathbb{L}G\,. \tag{12}$$

（11）和（12）共同定义了一个函子

$$\mathbb{L} : \operatorname{End}(\mathcal{E}\mathrm{ucl}) \longrightarrow \operatorname{End}(\mathcal{D}\mathrm{flg})\,, \tag{13}$$

其中 End(𝒞) 表示范畴 𝒞的自函子与自然变换所构成的范畴。

命题 3.16。图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}\mathrm{ucl} & \xrightarrow{F} & \mathcal{E}\mathrm{ucl} \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ \mathcal{D}\mathrm{flg} & \xrightarrow[\mathbb{L}F]{} & \mathcal{D}\mathrm{flg} \end{array}$$

对于所有自函子 F，该图表都交换，即

$$(\mathbb{L}F)yU \cong yFU$$

对所有 $U \in \mathcal{E}$ucl。

证明。由于 y 是全忠实的，结论可由 [ML98, Cor. 3, Sec. X.3]或 [Kel05, Prop. 4.23]推出。□

推论 3.17。函子 (13) 是全忠实的。

3.3. 与积、余积和下沉映射的相容性。由于 y :$\mathcal{E}$ucl $\to \mathcal{D}$flg 是全忠实的，欧几里得空间之间的光滑映射 $f\colon U \to V$ 是强满态射，当且仅当 $yf : yU \to yV$ 是强满态射，这与下沉映射是同一回事。因此，我们将强满态射f 称为下沉映射。若每个点 $v_0 \in V$ 都有一个开邻域$V_0 \subset V$，使得存在光滑映射 $g_0\colon V_0 \to U$ 满足 $f \circ g_0 = \mathrm{id}_{V_0}$，则该条件成立。简言之，若 f 有局部截面，则它是下沉映射。特别地，每个满射浸没都是下沉映射。

命题 3.18. 设 $\alpha : F \to G$ 是$\mathcal{E}$ucl 的自函子之间的一个自然变换。若对于所有 $U \in \mathcal{E}$ucl, $\alpha_U\colon FU \to GU$都是下沉，则对于所有 $X \in \mathcal{D}$flg，$(\mathbb{L}\alpha)_X\colon (\mathbb{L}F)X \to(\mathbb{L}G)X$ 都是下沉。

证明。由于 α_U 是下沉映射， $y\alpha_U$也是如此。在 $\mathcal{D}$flg 中，下沉映射与正则满态射相同，因此对所有 $U \in \mathcal{E}$ucl， $y\alpha_U$ 都是正则满态射。左 Kan 延拓 α_X =$(\mathbb{L}\alpha)$ $_X$ 由图册范畴$y\downarrow X$上的余极限给出。由于余极限保正则满态射， α_X 是正则满态射，也就是说，是下沉映射。□

命题 3.19。如果函子 $F\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 保持有限积，那么 $\mathbb{L}F\colon \mathcal{D}\mathbf{flg} \to \mathcal{D}\mathbf{flg}$ 也保持有限积。

设 $F\colon \mathcal{I} \to \mathbf{End}(\mathcal{E}\mathbf{ucl})$, $i \mapsto F_i$ 是一个函子。根据余极限和极限的泛性质，对于每个 $X \in \mathcal{D}\mathbf{flg}$，我们都有自然态射

$$\operatorname*{colim}_{yU\to X} \lim_{i\in\mathcal{I}} yF_iU \longrightarrow \lim_{i\in\mathcal{I}} \operatorname*{colim}_{yU\to X} yF_iU\,.$$

假设极限 $\lim_{i\in\mathcal{I}} F_i$ 存在于 $\mathbf{End}(\mathcal{E}\mathbf{ucl})$ 中，则它可以写成如下自然变换

$$\mathbb{L}\lim_i F_i \longrightarrow \lim_i \mathbb{L}F_i\,,$$

这里用到了 y 保持极限这一事实。除非余极限与极限可交换，否则这不是一个同构。

设 $G\colon \mathcal{J} \to \mathbf{End}(\mathcal{E}\mathbf{ucl})$ 是另一个图表，并且 $\lim_i G_i$ 存在。任意自然变换 $\alpha_i\colon F_i \to G_i$ 都会导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}\lim_i F_i & \xrightarrow{\mathbb{L}(\lim_i \alpha_i)} & \mathbb{L}\lim_i G_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim_i \mathbb{L}F_i & \xrightarrow[\lim_i \mathbb{L}\alpha_i]{} & \lim_i \mathbb{L}G_i \end{array}$$

命题 3.20. 设 $F_1, \ldots, F_k \in \mathbf{End}(\mathcal{E}\mathbf{ucl})$ 是一个有限的自函子族。那么我们有一个同构

$$\mathbb{L}(F_1 \times \ldots \times F_k) \cong \mathbb{L}F_1 \times \ldots \times \mathbb{L}F_k\,.$$

众所周知，任意函子沿 Yoneda 嵌入 $Y\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{S}\mathbf{et}^{\mathcal{E}\mathbf{ucl}^{\mathrm{op}}}$ 的左 Kan 延拓保留所有余极限。但沿 $y\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{D}\mathbf{flg}$ 的 Kan 延拓并非如此。即使要保留余积，我们也必须作出额外假设。回顾一下，若函子 $F\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{C}$ 满足 $F^{\mathrm{op}}\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是一个层，则称其为余层。

例 3.21。以下定义在 $\mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 上的函子都是余层：

(a) 切函子 $T\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{E}\mathbf{ucl}$；(b) 切函子的纤维积 $T_k\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{E}\mathbf{ucl}$；(c) 若 $F\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{C}$ 和 $G\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 都是余层，则它们的复合 FG 也是余层；(d) 德拉姆函子 $\Omega\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathbf{dg}\mathcal{A}\mathbf{lg}^{\mathrm{op}}$，它将 U 映射为微分形式的微分分次代数，并将光滑映射映射为形式的拉回；(d) 若 $F\colon \mathcal{M}\mathbf{fld}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 是流形与开覆盖的大站点上的一个层，则限制 $F\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \hookrightarrow \mathcal{M}\mathbf{fld} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是一个余层；

命题 3.22. 如果 $F\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{C}$ 是一个余层，那么其沿着$y\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{D}\mathbf{flg}$ 的左 Kan 延拓保持余积。

推论 3.23. 如果 $F\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 是一个余层，那么 $\mathbb{L}F$ 保持余积 $s.$

命题 3.24. 如果 $F\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 是一个余层，那么 $\mathbb{L}F$ 保持下沉映射。

命题 3.25. 设 $X\colon \mathcal{I} \to \mathcal{D}\mathbf{flg}$ 是一个函子。若 $F\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 是一个余层，则自然态射

$$\operatorname{colim}(\mathbb{L}F)X \longrightarrow (\mathbb{L}F)\operatorname{colim} X$$

是一个下沉。

3.4. 与自函子复合的相容性。设 $F, G\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 为自函子。它们乘积的左 Kan 延拓由余极限给出

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(FG)X &\cong \operatorname*{colim}_{yU\to X} yFGU \\ &\cong \operatorname*{colim}_{yU\to X} (\mathbb{L}F)yGU\,, \end{aligned} \tag{14}$$

这里用到了命题 3.16。Kan 延拓的乘积可写为

$$(\mathbb{L}F)(\mathbb{L}G)X \cong (\mathbb{L}F)\operatorname*{colim}_{yU\to X} yGU\,. \tag{15}$$

根据余极限的泛性质，我们有一个自然态射

$$\operatorname*{colim}_{yU\to X} (\mathbb{L}F)yGU \longrightarrow (\mathbb{L}F)\operatorname*{colim}_{yU\to X} yGU\,. \tag{16}$$

将此态射与其定义域上的同构 (14) 以及陪域上的同构 (15) 复合，可得一个自然态射

$$\mu_{F,G} : \mathbb{L}(FG)X \longrightarrow (\mathbb{L}F)(\mathbb{L}G)X\,. \tag{17}$$

当且仅当 (16) 是同构时，这也是同构，而通常并非如此 .

命题 3.26. 若 F 是余层，则对所有 $X \in \mathcal{D}\mathbf{flg}$，(17) 都是下沉。

证明。由于 F 是余层，根据命题 3.25，(16) 是下沉，由此可知 (17) 也是下沉。□

态射 (17) 在以下意义下是结合的。

命题 3.27. 设 F、G、$H\colon \mathcal{E}\mathbf{ucl} \to \mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 是自函子。则由自变换构成的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(FGH) & \xrightarrow{\mu_{F,GH}} & (\mathbb{L}F)(\mathbb{L}GH) \\ {\scriptstyle \mu_{FG,H}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathbb{L}F)\mu_{G,H}} \\ \mathbb{L}(FG)(\mathbb{L}H) & \xrightarrow[\mu_{F,G}(\mathbb{L}H)]{} & (\mathbb{L}F)(\mathbb{L}G)(\mathbb{L}H) \end{array}$$

是交换的。

命题 3.28. 设 $\alpha\colon F \to F'$ 和 $\beta\colon G \to G'$ 是 $\mathcal{E}\mathbf{ucl}$ 的自函子之间的自然变换。则图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(FG) & \xrightarrow{\mathbb{L}(\alpha\beta)} & \mathbb{L}(F'G') \\ {\scriptstyle \mu_{F,G}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{F',G'}} \\ (\mathbb{L}F)(\mathbb{L}G) & \xrightarrow[(\mathbb{L}\alpha)(\mathbb{L}\beta)]{} & (\mathbb{L}F')(\mathbb{L}G') \end{array}$$

是交换的。

3.5. 与 D-拓扑的相容性。

定义 3.29（ [IZ13] 中的第 2.8 节）。微分学空间上的 D-拓扑是（底层集合上的）最精细拓扑，使得每个图都是连续的。

明确地说，子集 $Y \subset X$ 在 D-拓扑中是开集，当且仅当对于每个图 p：$yU \to X$，其原像 $p^{-1}(Y) \subset U$ 是开集。每个微分拓扑空间之间的态射相对于 D-拓扑都是连续的。下文中的“开”和“连续”均指相对于 D-拓扑而言。微分学空间的开子集 $S \subset X$ 自然赋有子空间微分学，因此包含映射 $i\colon S \to X$ 是一个开嵌入。

设 $\{S_i \subset X\}_{i\in I}$ 是微分学空间 X 的一个开覆盖。那么图表

$$\coprod_{i,j} S_{ij} \rightrightarrows \coprod_i S_i \longrightarrow X \quad , \tag{18}$$

其中 $S_{ij} = S_i \times_X S_j$ 是一个余等化子。函子 $F\colon \mathfrak{D}\mathbf{flg} \to \mathfrak{D}\mathbf{flg}$ 是一个余层，当且仅当 F 保持余等化子 (18)，也就是说，若

$$\coprod_{i,j} FS_{ij} \rightrightarrows \coprod_i FS_i \longrightarrow FX$$

对每个开覆盖都是一个余等化子。一种特殊的余层由满足以下局部性条件的自然丛给出。

定义 3.30. 微分学空间的自函子丛 $\pi : F \to 1$ 称为局部的，如果对于每个开嵌入 $i\colon S \to X$，交换图

$$\begin{array}{ccc} FS & \xrightarrow{Fi} & FX \\ {\scriptstyle \pi_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_X} \\ S & \xrightarrow[i]{} & X \end{array}$$

是一个拉回。

命题 3.31. 如果微分学空间的自函子丛 $\pi : F \to 1$ 是局部的，那么 F 是一个余层。

命题 3.32. 如果微分学空间的自函子丛 $\pi : F \to 1$ 是局部的，那么 F 保持开嵌入。

命题 3.33. 设 $\pi : F \to 1$ 和 $\rho : G \to 1$ 是微分学空间的自函子丛。如果这两个丛都是局部的，那么纤维积 $F \times_1 G \to 1$ 和复合 $FG \to 1$ 也是局部的。

命题 3.34. 设 $\pi : F \to 1$ 和 $\rho : G \to 1$ 是微分学空间上的自函子丛，且 $\alpha\colon F \to G$ 是丛态射，$\rho\circ\alpha = \pi$。若两个丛都是局部的，则下列条件等价：

(i) $\alpha_X : FX \to GX$ 是归纳（下沉、满态射、同构）。(ii) 存在一个开覆盖 $\{S_i \to X\}$，使得对于所有 i，$\alpha_{S_i} : FS_i \to GS_i$ 都是归纳（下沉、满态射、同构）。

定义 3.30 也适用于欧几里得空间上的自同态丛。具体而言，丛 $\pi : F \to 1$ 是局部的，当且仅当对于每个开子集 $V \subset U$，$\pi_U^{-1}(V) \cong FV$。下一个命题表明，这种局部性概念在通过左 Kan 延拓到微分学空间时得以保留。

命题 3.35. 如果欧几里得空间上的自函子丛 $\pi : F \to 1$ 是局部的，那么它的左 Kan 延拓 $\mathbb{L}\pi : \mathbb{L}F \to 1$ 也是局部的。

4. Elastic diffeological spaces

弹性空间范畴的主要结果是，欧几里得空间上的切结构的左 Kan 延拓定义了一个具有标量 $\mathbb{R}$- 乘法的切结构（定理 4.2）。这一论断的证明相当冗长，将在 [Blo] 中给出。证明运用了多种技巧，其中有些属于范畴论，有些属于几何学，并且用到了前面的第 3.2 节中关于左 Kan 延拓的所有结果。

4.1. 弹性空间的切结构。欧几里得空间的切结构由切函子 $T\colon \mathcal{E}\mathrm{ucl} \to \mathcal{E}\mathrm{ucl}$，以及丛投影的自然变换 $\hat{}\pi : T \to 1$、零截面 $0 : 1 \to T$、加法 $\hat{}+ : \hat{}\ T_2 \to \hat{}T$、对称结构 $\hat{}\tau : \hat{}T^2 \to \hat{}T^2$和垂直提升 $\hat{}\ \lambda : \hat{}T \to \hat{}T^2$组成。从现在起，我们为这些结构加上帽号，以便将它们与其到微分学空间的 Kan 延拓区分开来。该结构已在第 2.5 节中明确阐述。

我们希望通过应用 Kan 延拓函子 $\mathbb{L} = \mathrm{Lan}_y\, y$，将这一结构延拓到微分学空间。切函子的 Kan 延拓记作 $-$

$$T := \mathbb{L}\hat{T} : \mathcal{D}\mathrm{flg} \to \mathcal{D}\mathrm{flg}\,.$$

定义 4.1. 微分学空间 X 称为弹性的，如果满足以下公理：

(E1) 自然态射

$$\theta_{k,X} : (\mathbb{L}\hat{T}_k)X \longrightarrow T_k X$$

对所有 $k > 1$ 都是同构。

(E2) 存在一个自然态射 $\tau_X\colon T^2X \to T^2X$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{L}\hat{T}^2)X & \xrightarrow{(\mathbb{L}\hat{\tau})_X} & (\mathbb{L}\hat{T}^2)X \\ {\scriptstyle\theta^2_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta^2_X} \\ T^2X & \xrightarrow[\tau_X]{} & T^2X \end{array}$$

可交换。

(E3) 自然态射

$$\lambda_X : TX \xrightarrow{(\mathbb{L}\hat{\lambda})_X} (\mathbb{L}\hat{T}^2)X \xrightarrow{\theta^2_X} T^2X$$

是一个归纳。

（E4）自然态射

$$\nu_{k,X} : TT_kX \longrightarrow T^2X \times^{T\pi_X, T\pi_X}_{TX} \ldots \times^{T\pi_X, T\pi_X}_{TX} T^2X$$

对所有 $k > 1$ 都是单射。

（E5）对于任意有限的正整数集合 k_1、…、k_n，微分学空间 $X' := T_{k_1} \cdots T_{k_n} X$ 满足公理（E1）至（E4）。

The 弹性微分学空间的全子范畴记为 $\mathcal{E}\mathrm{lst} \subset \mathcal{D}\mathrm{flg}$。

定理 4.2. 弹性微分学空间范畴具有一个切结构 $\hat{}$，由 Kan 延拓切函子 $T = \mathbb{L}T$、丛投影 $\pi_X := (\mathbb{L}\hat{}\pi)_X$、零截面 $0_X := (\mathbb{L}\hat{}0)_X$ 以及加法

$$+_X := \theta^{-1}_{2,X} \circ (\mathbb{L}\hat{+})_X \circ \theta_{2,X}\,,$$

公理（E2）中的对称结构 τ_X （定义 4.1），以及公理（E3）中的垂直提升λ_X。此外，标量 $\mathbb{R}$乘法的 Kan 延拓是定义2.11意义下的标量 $\mathbb{R}$乘法。

4.2. 替代公理。抽象切结构的公理应当对整个范畴成立。这就是为什么必须将公理（E5）纳入弹性空间的定义 4.1 中，从而使 T_k 的应用不会超出弹性空间子范畴。然而，Rosick´y 的公理对于处于某个定义了 T_k 的环境范畴中的单个对象 X，仍然可以逐点地成立。这正是我们的情形，也因此引出了以下更一般的概念。

定义4.3。如果微分学空间 X 满足定义 4.1 的公理（E1）-（E4），则称其为弱弹性空间。

在弱弹性空间上，我们仍然拥有微分演算的大部分结构，例如向量场的李代数。我们只需注意， TX 及其纤维积可能不再具有相同的良好性质。

注4.4。如果将定义 4.1 的公理（E1）替换为以下较弱的版本，定理 4.2 仍然成立：

（E1’）自然态射

$$\theta_{k,X} : (\mathbb{L}\hat{T}_k)X \longrightarrow T_kX$$

对于 $k = 2$ 是同构，对于所有 $k > 2$ 是满态射。

如引言中所述，我们需要更强的公理（E1），以便得到嘉当演算。

在弹性空间定义的早期版本中，我们使用了以下公理：

（E0）自然态射

$$\mathbb{L}(\hat{T}_k\hat{T})X \longrightarrow T_kTX$$

对于所有 $k \geq 1$ 都是同构。

命题4.5。公理（E0）蕴含定义 4.1 中的公理（E1）、（E2）和（E4）。

虽然该命题表明，公理（E0）在逻辑上强于（E1）、（E2）和（E4），但目前我们还不知道存在不满足更强公理（E0）的弹性空间。

4.3. 弹性空间的稳定性性质。

命题 4.6。设 X 为一个微分学空间。以下条件等价：

（i） X 是弹性的。（ii） X 具有一个由弹性空间 S_i 构成的开覆盖 $\{S_i \to X\}$。

推论 4.7。设 X 是一个以微分学向量空间 A 为模型的微分拓扑流形。那么，当且仅当 A 是弹性的， X 才是弹性的。

推论 4.8. 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是一族微分学空间。以下条件等价：

(i) 余积 $\sqcup_i X_i$ 是弹性的。

(ii) 每个 X_i 都是弹性的。

命题 4.9. 弹性空间的有限积是弹性的。

命题 4.10. 弹性空间的收缩是弹性的。

5. 示例

微分学空间要成为弹性空间，必须满足的条件相当苛刻。弹性空间的极限、余极限、子空间和映射空间通常不再是弹性的。如果说通过研究弹性空间，我们舍弃了微分拓扑空间范畴的许多便利性质，那么问题便是：是否存在足够多有趣的示例和应用，使这一概念具有实用价值?

我们已经指出，弹性空间的有限积和小余积仍是弹性的。我们也看到，弹性空间在回缩下稳定，因此可以构造出奇异行为相当温和的弹性空间。基本示例包括带角流形 [Joy12] 和尖点。

Souriau 提出微分胚学概念时受到启发的原始例子是微分拓扑群。我们的主要结果指出，一个微分拓扑群是弹性的，当且仅当垂直提升 $\lambda_G\colon TG \to T^2G$ 是一个归纳（定理 5.2）。这一温和的条件是必要的，以避免向量场括号的取值落入具有较弱微分结构的切丛中；对于定义在 C^k-流形上的群的向量场，情况便是如此。这表明，几乎所有能想到的微分拓扑群都是弹性的。即使是像商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 这样看似病态的群也是弹性的。

每个微分学向量空间都有一个底层阿贝尔群，因此我们可以应用微分拓扑群的刻画。由此可知，微分学向量空间 A 是弹性的，当且仅当自然映射 $T_0A \to T_0T_0A$（它将 v_a 映射为由路径 $t \mapsto tv_a$ 表示的切向量）是一个归纳。以 A 为模型的微分拓扑流形是弹性的，当且仅当 A 是弹性的。确保弹性的一个更强条件是 $A \to T_0A$ 为同构，由此可得到切丛的一个平凡化$TA \cong A \times A$。我们称这样的向量空间为切稳定。所有精细微分学向量空间都具有这一性质。

如果 A 是切稳定的，那么对于所有 X，微分映射空间 $\underline{\mathcal{D}\mathrm{f}}\mathbf{lg}(X, A)$ 都是弹性的。一个重要的例子是代数 $C^\infty(X) \cong \mathcal{D}\mathbf{flg}(X, \mathbb{R})$，它由~~$X$~~ 上的光滑函数构成。光滑纤维丛 $\rho : F \to M$ 的截面空间 $\Gamma(M, F)$ 是弹性的（定理 5.11）。如预期，其切空间由垂直切丛 $\ker T\rho \to M$ 的截面构成。由此可推得，流形之间的光滑映射~~所~~构成的微分学空间 $\mathcal{D}\mathbf{flg}(M, N)$ 是弹性的，其切空间由.....构成

$$T\,\underline{\mathcal{D}\mathrm{f}}\mathrm{lg}(M, N) \cong \underline{\mathcal{D}\mathrm{f}}\mathrm{lg}(M, TN)\,.$$

还可以通过构造回缩得到更多示例，从而涵盖轻微奇异的情形。

5.1. 带角流形。考虑集合 $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$，赋予其子空间微分学。每个像包含于 $p(U) \subset [0, \infty)$ 的光滑映射 $p \in U \to \mathbb{R}$，在每个满足 $p(u_0) = 0$ 的点 u_0 处，其所有阶导数都为零。因此

$$T_0[0, \infty) = 0\,.$$

内部点 $x \in (0, \infty)$ 处的切空间由 $T_x[0, \infty) = \mathbb{R}$ 给出。

我们想证明 $[0,\infty)$ 是弹性的。为此，我们考虑映射

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,\infty)\\ x &\longmapsto x^2\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sigma : [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \sqrt{x}\,,\end{aligned}$$

它们作为集合映射满足 $\pi\circ\sigma = \mathrm{id}_{[0,\infty)}$。我们需要证明 σ 是光滑的。令$p:\ U \mapsto [0,\infty)$ 为一张图。由于 σ 在内部 $(0,\infty)$ 上光滑， $\sigma\circ p$ 在 U 中映射到内部 $(0,\infty)$ 的所有点处都光滑。假设 $p(u_0) = 0$。由于图 p 的所有导数在 u_0 处都为零， p 在 u_0 处的各阶导数也都为零，即

$$\frac{p(u)}{\|u-u_0\|^k} \xrightarrow{u\to u_0} 0\,,$$

对所有 $k \geq 0$ 均成立。这意味着 $\sqrt{p(u)} = (\sigma\circ p)(u)$ 在 u_0 处的各阶导数也都为零，因此 $\sigma\circ p$ 在 u_0 处可微。由此可得 σ 光滑，因此$[0,\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 的光滑收缩。

由命题 4.10，我们得出 $[0,\infty)$ 是弹性的；由命题 4.9，任意有限乘积

$$\mathbb{R}^n_k := [0,\infty)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

是弹性的。由于微分学切映射函子与积可交换，切空间为

$$T_{(x_1,\dots,x_n)}\mathbb{R}^n_k = T_{x_1}[0,\infty)\times\dots T_{x_k}[0,\infty)\times\mathbb{R}^{n-k}\,.$$

最后，由命题 4.6 可知，每个局部建模于 $\mathbb{R}^n_k$ 的微分学空间都是弹性的。这类空间称为带角流形 [Joy12]。我们得出：

命题 5.1。带角流形是弹性的。

5.2. 尖点流形。考虑 $\mathbb{R}^2$ 的以下子集，

$$X := \big\{(x,y) \mid x \geq 0 \ \wedge\ |y| \leq x\big\}\,,$$

配备子空间微分学。我们可以通过用光滑函数 $f \in C^\infty\big([0,\infty)\big)$ 乘以 y 坐标来挤压或拉伸 (0,0) 处的角（见图 3），

$$\begin{aligned}\varphi : X &\longrightarrow X_f\\ (x,y) &\longmapsto \big(x, f(x)\,y\big)\,,\end{aligned}$$

其中

$$X_f := \big\{(x,y) \mid x \geq 0 \ \wedge\ |y| \leq f(x)\big\}\,.$$

假设 $f(x) > 0$ 对 $x > 0$成立。那么 φ 的逆映射由 $\varphi^{-1}(0,0) = (0,0)$ 给出，并且

$$\varphi^{-1}(x,y) = \Big(x, \frac{y}{f(x)}\Big)$$

否则。我们赋予 X_f 以 φ^{-1} 的拉回微分结构。由于 φ^{-1} 是满射， φ 是微分学空间之间的同构。 X 是将 $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 旋转负 45 度所得，因此根据命题 5.1，它是弹性的。由于 φ 是同构， X_f 也是弹性的。

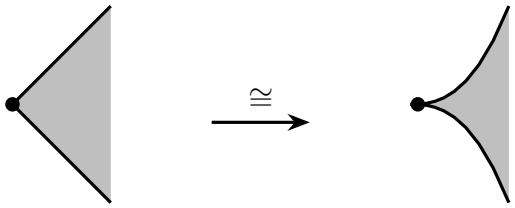


FIGURE 3. 通过将 y 坐标乘以函数 $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$来挤压一个角。所得微分学子空间 $\mathbb{R}^2$ 的边界是曲线 $x^2 = y^5$，其在 (0,0) 处有一个尖点。

这里无法笼统地描述带尖点流形或具有类似缺陷的流形，因为任何作为光滑收缩的挤压操作，都会为 $\mathbb{R}^n$ 的弹性子空间生成一个新的模型。图2第 7 页中，我们给出了一些以这种方式得到的 $\mathbb{R}^2$ 的弹性子空间示例。

5.3. 微分拓扑群。微分拓扑群是 $\mathcal{D}$flg 中的一个群对象 (G, m, e)。与普通群一样，逆映射 $i\colon G \to G, g \mapsto g^{-1}$ 是唯一的，因此它是一种性质，而非结构。通过应用一个保持积的自函子 $F\colon \mathcal{D}\mathbf{flg} \to \mathcal{D}\mathbf{flg}$，我们得到一个微分拓扑群 (FG, Fm, Fe)。F 的示例有 T 和 T_k（见命题 3.19）。(TG, Tm, Te) 称为切群。

由切群的乘法，我们得到TG 的左 G-平移，定义为

$$L : G \times TG \xrightarrow{0_G \times \mathrm{id}_{TG}} TG \times TG \xrightarrow{Tm} TG\,.$$

I若将第二个参数限制在 e处的切纤维上，我们便得到映射

$$\begin{aligned} \varphi_G : G \times T_eG &\longrightarrow TG \\ (g, v_e) &\longmapsto L_g v_e\,, \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $T_eG = \{e\} \times_G TG$ 是群单位元处的切纤维。其逆映射为

$$\varphi_G^{-1} : TG \xrightarrow{(i\circ\pi_G, \mathrm{id}_{TG})} G \times TG \xrightarrow{L} T_eG\,,$$

它将 $v_g \mapsto L_{g^{-1}} v_g$映射到.....。由此可得，(19) 是一个同构。与李群的情形类似，我们将记

$$\mathfrak{g} := T_eG\,,$$

从而得到切丛的平凡化,

$$TG \cong G \times \mathfrak{g}\,.$$

TG 本身是一个单位元为 0_e的微分拓扑群。利用同构

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}(X, Y) &\cong \{(x, y)\} \times_{X\times Y} T(X \times Y) \\ &\cong (\{x\} \times_X TX) \times (\{y\} \times_Y TY) \\ &\cong T_xX \times T_yY\,, \end{aligned}$$

我们得到平凡化

$$\begin{aligned} T^2G &\cong TG \times T_{(0_e)}TG \\ &\cong G \times \mathfrak{g} \times T_{(e,0)}(G \times \mathfrak{g}) \\ &\cong G \times \mathfrak{g} \times T_eG \times T_0\mathfrak{g} \\ &\cong G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times T_0\mathfrak{g}\,. \end{aligned}$$

在此平凡化中，垂直提升 $\lambda_G\colon TG \to T^2G$ 由下式给出

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g} &\longrightarrow G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times T_0\mathfrak{g} \\ (g, a) &\longmapsto \big(g, 0, 0, \lambda_{\mathfrak{g}}^{\perp}(a)\big) \end{aligned}$$

其中

$$\lambda_{\mathfrak{g}}^{\perp} : \mathfrak{g} \longrightarrow T_0\mathfrak{g}\,,$$

将 $a \in \mathfrak{g}$ 映射到由路径 $t \mapsto ta$表示的切向量。

定理 5.2. 微分拓扑群 G 是弹性的，当且仅当 $\lambda_{\mathfrak{g}}^{\perp}\colon\ \mathfrak{g} \to T_0\mathfrak{g}$ 是一个归纳。

由定理 5.2 和定理 4.2 可知， $\mathfrak{g}$和 $T_0\mathfrak{g}$ 是微分学向量空间。对于弹性群， $\lambda_{\mathfrak{g}}^{\perp}$ 是一个同构，并且 $\mathfrak{g}$ 配备了不变向量场的李括号。

例 5.3. 当 G 是光滑流形时，每个李群 G 都是弹性的。然而，当用 C^k-微分胚结构赋予 G 时， $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n_{C^k}$ 和 $T_0\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n_{C^{k-1}}$，因此 $\lambda_{\mathfrak{g}}^{\perp}$不再是一个归纳（参见例 1.5）。

例 5.4. 光滑流形的微分同胚群是弹性的。

5.4. 微分拓扑向量空间。微分学向量空间是 $\mathcal{D}\mathbf{flg}$ 中的一个 $\mathbb{R}$-向量空间对象。具体而言，这意味着加法和标量乘法都是微分学空间之间的态射。微分学向量空间具有丰富而微妙的结构 [CW19]。

命题 5.5. 微分学向量空间 A 是弹性的，当且仅当自然线性映射 $T_0A \to T_0T_0A$ 是归纳。

证明。这是针对加法微分拓扑群 A 的定理 5.2。 □

在许多情况下，弹性微分学向量空间满足更强的条件$A \cong T_0A$，该条件等价于

$$TA \cong A \times A\,.$$

我们将具有此性质的微分学向量空间称为切稳定向量空间。切稳定向量空间是弹性的。

命题 5.6. 所有精细微分学向量空间都是切稳定的（因此是弹性的）。

5.5. 微分学流形。回顾一下，以微分学向量空间 A为模型的微分学流形，是指满足以下条件的微分学空间 X： X 中的每个点都有一个开邻域，该开邻域作为微分学空间同构于 A的一个开子集。

命题 5.7. 微分拓扑流形是弹性的，当且仅当它以一个弹性微分学向量空间为模型。

证明。这由命题 4.6 得出。 □

5.6. 映射空间。如果 A 是微分学向量空间，那么映射空间 $\mathcal{D}\mathbf{flg}(X, A)$ 是一个微分学向量空间，其加法和数乘均按点定义。

命题 5.8. 设 X 是一个微分学空间， A 是一个微分学向量空间。若 A 是切稳定的，则 $\mathcal{D}\mathbf{flg}(X, A)$ 也如此。

推论 5.9. 若 A 是一个切稳定的微分学向量空间，则存在自然同构

$$T\,\underline{\mathcal{D}\mathbf{fl}}\mathrm{g}(X, A) \cong \underline{\mathcal{D}\mathbf{fl}}\mathrm{g}(X, A) \times \underline{\mathcal{D}\mathbf{fl}}\mathrm{g}(X, A) \cong \underline{\mathcal{D}\mathbf{fl}}\mathrm{g}(X, TA)$$

对于所有 $X \in \mathcal{D}\mathbf{flg}$。

推论 5.10. 微分学空间

$$C^\infty(X) := \underline{\mathcal{D}\mathbf{fl}}\mathrm{g}(X, \mathbb{R})$$

在微分学空间 X 上取值于 $\mathbb{R}$ 的光滑函数空间是弹性的。

定理 5.11. 设 $\rho\colon F \to M$ 是一个光滑流形的纤维丛。那么截面空间 $\Gamma(M, F)$ 作为微分学空间是弹性的，其切空间为

$$T\Gamma(M, F) \cong \Gamma(M, VF)\,,$$

垂直切丛 $VF := \ker T\rho \to M$ 的截面空间。

推论 5.12. 光滑流形 M 和 N 之间的微分映射空间 $\mathcal{D}\underline{\mathbf{flg}}(M, N)$ 是弹性的，其切空间为

$$T\,\underline{\mathcal{D}\mathbf{fl}}\mathrm{g}(M, N) \cong \underline{\mathcal{D}\mathbf{fl}}\mathrm{g}(M, TN)\,.$$

推论 5.13. 光滑向量丛 $A \to M$ 的截面 $\Gamma(M, A)$ 所构成的微分学向量空间是切稳定的。

References

[BH11] John C. Baez 和 Alexander E. Hoffnung。《光滑空间的便捷范畴》。Trans. Amer. Math. Soc., 363(11):5789–5825, 2011.[Blo] Christian Blohmann。弹性微分胚空间上的切结构与嘉当演算。编写中。[CC14] J. R. B. Cockett 和 G. S. H. Cruttwell。微分结构、切结构与合成微分几何。Appl. Categ. Structures, 22(2):331–417, 2014.[CC15] J. R. B. Cockett 和 G. S. H. Cruttwell。切范畴的雅可比恒等式。Cah. Topol. G ´eom. Diff ´er. Cat ´eg., 56(4):301–316, 2015.[CSW14] J. Daniel Christensen、Gordon Sinnamon 和 Enxin Wu。微分学空间的 D-拓扑。Pacific J. Math., 272(1):87–110, 2014.[CW16] J. Daniel Christensen 和 Enxin Wu。微分学空间的切空间与切丛。Cah. Topol. G ´eom. Diff ´er. Cat ´eg., 57(1):3–50, 2016.[CW19] J. Daniel Christensen 和 Enxin Wu。微分学向量空间。2019.[DF99] Pierre Deligne 和 Daniel S. Freed。经典场论。载于《量子场与弦：数学家课程》，第 1、2 卷（新泽西州普林斯顿，1996/1997），第 137–225 页。Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.[IZ13] Patrick Iglesias-Zemmour。《微分胚学》，《数学调查与专著》第 185 卷。American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.[Joy12] Dominic Joyce。论带角流形。载于《几何分析进展》，《高级讲座数学》第 21 卷，第 225–258 页。Int. Press, Somerville, MA, 2012.[Kel05] G. M. Kelly。《富范畴理论基本概念》。Repr. Theory Appl. Categ., (10):vi+137, 2005。1982 年原版重印 [Cambridge Univ. Press, Cambridge; MR0651714]。

[ML98] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》，《数学研究生教材》第 5 卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1998 年。[Per16] Ekaterina Pervova。微分学向量伪丛。Topology Appl., 202:269–300, 2016.[Ros84] J. Rosick´y。抽象切丛函子。Diagrammes, 12:JR1–JR11, 1984.[Vin08] Martin Vincent。微分拓扑微分几何。硕士学位论文，哥本哈根大学数学科学系，2008 年。可见
https://www.math.ku.dk/english/research/tfa/top/paststudents/ms-theses/martinvincent.msth

下载于 2019 年 4 月 15 日。

Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany电子邮箱：blohmann@mpim-bonn.mpg.de