arXiv:2301.02596v2 [cs.CE] 9 May 2023

采用动网格和精确未碰撞源项处理的辐射输运基准解

William Bennett
Ryan G. McClarren

2023年5月10日

摘要

热辐射输运领域使用的基准解集存在一些覆盖缺口，尤其是非线性非平衡问题。此外，目前还没有针对非平衡光学厚问题的基准算例。这些不足促使人们开发一种不受线性要求限制、且能够轻松收敛于光学厚光滑问题的数值方法，即一种采用未碰撞源项处理的动网格间断Galerkin（DG）框架。该方法已在时变散射输运问题中得到验证；本文则针对常见的线性化系统以及更符合物理实际的非线性系统，给出光学薄和光学厚区域中的非平衡热辐射输运问题的解，其中包括全输运解和 S_2/P_1 解。对于光滑源项，在所有时刻均观察到几何收敛；对于某些非光滑源，在较晚时刻达到局部平衡时也观察到了几何收敛。此外，即使解不光滑，阶跃源项也能获得准确解。

I 引言

斯特藩-玻尔兹曼定律 [1], 描述了物质辐射与其温度之间的关系：辐射量与温度的四次方成正比；它是高能量密度辐射热传递模型中顽固非线性的一部分成因。此外，所关注物质的不透明度也可能随温度呈非线性变化。基于这些原因，该领域现有的、具有时空依赖性的解析基准解都建立在线性或平衡假设之上。有些解假设辐射能与物质内能瞬间达到平衡，由此产生 Marshak波 [2, 3, 4], ；另一些针对非平衡问题的解则通过采用一种材料热容形式将 T^4 中的系统线性化，该热容与温度的三次方成正比。这一创新由 Pomraning [5], 提出，并指定恒定不透明度。通过定义热容来使系统线性化的技术已用于获得大量解，包括针对 P_1方程的输运处理 [6], 、单速全输运解 [7, 8], 以及非灰问题的解 [9]。在扩散极限下，已有单温 [10], 、三温 [11], 和非灰处理 [12]的基准解。

尽管这些解对代码开发者进行验证至关重要，但必须指出，使用线性问题来验证旨在求解非线性系统的代码存在一些弊端。理想情况下，相关数值代码在运行这些验证问题时，应求解完全非线性的方程，并采用特殊的状态方程；但没有任何规定阻止这些代码的维护者在运行基准解时仅求解线性化系统。此外，线性系统的解可以缩放以匹配基准算例，而非线性系统的解则无法灵活调整；并且，由于采用了特殊的状态方程，随着温度升高，线性化方程的解比非线性问题更快达到平衡。求解线性问题并不能完全验证辐射输运代码的功能。

尽管非线性会妨碍解析方法，但不一定会给谱方法带来困难。这促使我们开发了一种用于求解输运问题的动网格、未碰撞源处理间断伽辽金（DG）方法 [13]。时变

单元边缘（我们称之为动网格）和未碰撞源处理被加入到间断伽辽金（DG）方法的实现中，因为具有有限波速的输运方程允许出现间断，而这些间断会妨碍间断伽辽金方法发挥其高阶收敛潜力。动网格和未碰撞源可以使该方法求解的问题更加平滑：动网格通过使网格边缘与移动波前间断相匹配来实现这一点，而未碰撞源则通过解析地求解解中结构最复杂的部分来实现这一点。

如 [13], 所述，我们已经使用该方法对时变输运问题进行了大量测试，从而能够详细分析动网格和未碰撞网格对不同源类型的有效性。例如，对于会产生非光滑解、且该解随时间逐渐变得光滑的有限宽度非光滑源，与标准间断伽辽金实现相比，该方法的优势最为显著；但其误差仅呈代数收敛，而未达到间断伽辽金方法所能实现的最优几何收敛。不过，对于光滑高斯源，我们能够实现谱收敛，但动网格的重要性有所降低。

了解该方法在线性系统中的有效性后，我们将其应用于非线性辐射输运问题，并获得了精度与解析解相当的结果，这正是本工作的目标。我们考虑的非线性问题与前述线性化基准问题相近，但采用了更符合物理实际的定比热。虽然我们可以指定温度相关不透明度并提供一个更符合物理实际的基准解，但这样做会失去间断伽辽金推导中的一些正交性简化。温度相关不透明度将留待未来工作研究。不过，在尝试完全非线性问题之前，我们先将该方法应用于现有的线性辐射输运问题。这使我们能够在解已知的问题上检验该方法，并在较宽松的条件下发现其不足。对于非线性问题，我们仍可通过检查展开系数的大小来评估解的精度，并通过与现有数值 S_n 求解器进行比较来检验准确性。

我们选择 Su 和 Olson 输运基准问题 [8] 作为检验我们方法的理想解。遗憾的是，现有结果给出的有效数字不足以充分展示我们方案的有效性，而且重新计算这些结果并非易事。因此，我们通过对该基准问题的 P_1 版本进行积分 [6]，得到精度更高的解；这些解的物理准确性未必与全输运解相当，但可以用更高精度进行求值。

除平衡扩散极限外，目前不存在适用于光学厚问题的辐射输运验证解。这里所说的光学厚，是指源宽度或初始条件的支撑范围比平均自由程大若干个数量级。相反，光学薄问题的源宽度与平均自由程相当。对于输运代码而言，要使验证问题的覆盖范围足够广，在不解析平均自由程的情况下收敛到光学厚问题的扩散基准解，是一种良好的测试。不过，如果代码能够解析平均自由程，它将收敛到扩散问题的解加上输运修正。为验证这一输运修正，我们纳入了光学厚问题的输运解以及 S_2/P_1 解。

本文其余各节安排如下。第 II 节介绍模型方程、无量纲化以及未碰撞源项的推导。第 III 节简要介绍我们的间断伽辽金实现，详细推导则见 [13]。第 IV 节专门介绍 S_2 基准算例的计算，以及用于验证我们方法的相应未碰撞解。接下来介绍结果部分中误差收敛性的计算方法（第 V 节），然后给出我们的结果（第 VI 节和第 VII 节）。结果部分还具体说明了各个问题所采用的方法，并讨论了解的特征。

II 方程

我们研究具有内部辐射源的无限大、纯吸收、恒定不透明度静止介质中的非平衡时变辐射传热。该系统的辐射输运方程和物质平衡方程为：

$$\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau}+\mu\frac{\partial}{\partial z}+\sigma_a\right)\psi(z,\tau,\mu)=\sigma_a\left(\frac{1}{2}avT(z,\tau)^4\right)+\frac{1}{2}S(z,\tau), \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}e(z,\tau)=\sigma_a\left(\phi(z,\tau)-avT(z,\tau)^4\right), \tag{2}$$

其中，状态方程的一般形式为：

$$e = \int_0^T dT'\, C_{\mathrm{v}}(T'). \tag{3}$$

这些方程中的变量包括： ψ，角通量或强度； $\phi = \int_{-1}^{1} d\mu' \psi(x,\ t,\ \mu')$，标量通量； T，温度；以及 e，物质能量密度。 ψ 和 ϕ 的单位为单位面积单位时间的能量（[吉焦·厘米$^{-2}$纳秒$^{-1}$]），而 e 的单位为能量密度（[吉焦·厘米$^{-3}$]）。 S 是源项，单位为单位时间的能量密度。 $\mu \in [-1, 1]$ 是粒子方向相对于 z 轴的余弦值。 v 是粒子速度；在我们的应用中，它是真空中的光速，即 $v = 29.998$ 厘米 纳秒$^{-1}$。辐射常数为 $a = 4\sigma_{\mathrm{SB}}/v = 0.0137225$ 吉焦 厘米$^{-3}$ 千电子伏$^{-4}$，其中 σ_{SB} 是斯特藩-玻尔兹曼常数。吸收截面 σ_a的单位为长度的倒数。

我们希望为这些方程进行无量纲化，使其与 Su-Olson 基准问题中给出的无量纲化相兼容， [9] 并且可用于光学厚问题，而无需扩大无量纲长度来适应更大的不透明度，

$$x = l\sigma_a z \qquad t = lv\sigma_a \tau. \tag{4}$$

l 是一个无量纲缩放变量，在光学薄问题中取 1，在光学厚问题中则取一个较小的数值，以抵消更大的 σ_a 。

每个方程都转换为新变量，并除以 $av\sigma_a T_H^4$，其中 T_H是参考温度，在以往研究中称为辐射腔温度，

$$\left(l\frac{\partial}{\partial t} + \mu l\frac{\partial}{\partial x} + 1\right)\overline{\psi}(x,t,\mu) = c_a\left(\frac{1}{2}\overline{T}(x,t)^4\right) + \frac{1}{2}Q(x,t), \tag{5}$$

$$l\frac{\partial}{\partial t}\overline{e}(x,t) = c_a\left(\overline{\phi}(x,t) - \overline{T}(x,t)^4\right). \tag{6}$$

现在，我们的无量纲因变量为：

$$\overline{\psi}(x,t) = \frac{\psi(x,t)}{avT_H^4} \qquad \overline{\phi}(x,t) = \frac{\phi(x,t)}{avT_H^4} \qquad \overline{T}(x,t) = \frac{T(x,t)}{T_H} \qquad \overline{e}(x,t) = \frac{e(x,t)}{aT_H^4}, \tag{7}$$

无量纲源项为：

$$Q(x,t) = \frac{S(x,t)}{\sigma_a avT_H^4} \tag{8}$$

吸收比定义为：

$$c_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_t} = 1. \tag{9}$$

在本文中，我们考虑 C_{v} 的两种函数形式。为求解 Su-Olson基准问题，我们采用熟悉的形式，

$$C_{\mathrm{v}} = \alpha T^3. \tag{10}$$

该形式使方程 (6) 关于 T^4 呈线性。采用 $\alpha = 4a$ 的常规选取后，现在

$$\overline{e}_{\mathrm{SU}} = \overline{T}^4, \tag{11}$$

其中下标 “SU”表示这是线性Su-Olson问题的状态方程 .

尽管求解这些线性问题对我们的研究很重要，但本文的新颖之处在于给出了非线性问题的结果。对于这些问题，我们选择更符合物理实际的定比热 $C_{\mathrm{v}} = \mathsf{C}_{\mathrm{v0}}$，其单位为能量密度/温度。此选择使 $e = \mathsf{C}_{\mathrm{v0}} T$. 。为确定采用该状态方程时无量纲变量之间的关系，我们定义 $\mathsf{C}_{\mathrm{v0}} = \mathrm{C}_{\frac{\mathrm{v0}}{aT_H^3}}$. 。现在可以写成

$$\overline{e}_{\mathrm{N}} = \overline{\mathrm{C}}_{\mathrm{v0}}\overline{T}, \tag{12}$$

其中 下标“N”表示这是我们针对非线性问题的状态方程。

II.A 未碰撞解

在时变输运试验中，我们发现采用未碰撞源处理，即使用该方程的解，

$$\left(l\frac{\partial}{\partial t}+\mu l\frac{\partial}{\partial x}+1\right)\overline{\psi}_u(x,t,\mu)=\frac{1}{2}Q(x,t), \tag{13}$$

将其作为源项来求解碰撞通量，对于解不光滑的情况，能显著提高精度。$l=1$ 时，方程 (13) 的格林函数解由 [14] 给出。 [15], 对该解在不同源项配置下进行了积分，包括方形源和高斯源。利用这些解，我们可以确定 ψ_u ，并通过解析积分求得 ϕ_u。对于 $l\neq 1$ 的问题，只需进行简单的缩放。对于满足 $l\ll 1$ 的光学厚问题，未碰撞解则不那么有用，因为在相关的评估时刻，它已衰减至零。

为求得通量中剩余的碰撞部分，我们有以下系统：

$$\left(l\frac{\partial}{\partial t}+\mu l\frac{\partial}{\partial x}+1\right)\overline{\psi}_c(x,t,\mu)=c_a\left(\frac{1}{2}\overline{T}(x,t)^4\right) \tag{14}$$

$$l\frac{\partial}{\partial t}\overline{e}(x,t)=c_a\left(\overline{\phi}_c(x,t)+\overline{\phi}_u(x,t)-\overline{T}(x,t)^4\right). \tag{15}$$

在线性输运应用中，通量可以无限次分解，不仅可以分解为未碰撞通量和碰撞通量，还可以分解为未碰撞、首次碰撞、第二次碰撞等部分。尽管辐射传输方程是非线性的，我们仍能使用这种线性求解技术，因为未碰撞通量不与物质相互作用。然而，我们无法像在线性输运问题中那样进一步分解通量。

采用“未碰撞源”处理得到的答案，是指对碰撞方程（方程（14）和（15））求解，并在最终时刻计算方程（13）中的未碰撞解，再将其加到碰撞部分上。“标准源”处理则指方程（5）和（6）。在具体问题中，最有用的源项处理取决于未碰撞通量在求解时间窗口内的行为。在 [13] 开展的测试表明，对未碰撞源进行积分所需的计算时间可能比标准源更长。这是因为未碰撞源是空间的复杂函数，与标准源相比，更难通过求积进行积分。一般来说，在未碰撞通量尚未衰减到可忽略程度的时刻对应的问题，适合采用未碰撞源处理。对于这些问题， [13] 显示出精度和收敛速度均有所提高。在未碰撞解已经衰减的时刻，未碰撞源处理的帮助则不大。

尽管本文研究的问题处于纯吸收介质中，但物质能量密度与辐射能量密度之间的耦合起到了散射体的作用，能够随时间推移平滑间断。因此，我们预计，通过采用未碰撞源处理求解纯散射输运问题所获得的见解，也适用于这些纯吸收辐射输运问题。

III 动网格间断伽辽金空间离散

类似于 [13], 中的过程，我们定义一种采用动网格的间断伽辽金空间离散方法，以求解形如（5）和（6）的方程。推导中的部分细节留给 [13]。为求出 μ上的积分以得到标量通量，我们采用离散坐标方法对角度进行离散化：对于全输运解，通过选择满足高斯-洛巴托求积公式 [16] 的点，对立体角 $\mu\in[-1,1]$ 进行离散化；而对于 S_2 解，则采用高斯-勒让德求积公式。利用所选求积公式对应的权重，我们可以将标量通量定义为加权和：

$$\overline{\phi}\approx\sum_{n'=1}^{N}w_{n'}\overline{\psi}^{n'}, \tag{16}$$

其中 w_n 为权重， ψ^n 是在给定角度下计算得到的标量通量。这样的选择使方程 (5) 和 (6),

$$\left(l\frac{\partial}{\partial t}+\mu_n l\frac{\partial}{\partial x}+1\right)\overline{\psi}^n(x,t)=c_a\left(\frac{1}{2}\overline{T}(x,t)^4\right)+\frac{1}{2}Q(x,t)\quad\text{for } n=1\ldots N, \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{e}(x,t)=c_a\left(\sum_{n'=1}^{N}w_{n'}\psi^{n'}-\overline{T}(x,t)^4\right). \tag{18}$$

为离散化空间域，我们定义 K 个互不重叠的单元，其边界随时间变化，分别为 $x_L(k,\ t)$ 和 $x_R(k,\ t)$。为了简化后续的方程弱形式，我们定义一个映射变量$x'(k,\ t)$，将单元内的 x 映射到 [-1,1] ，

$$x'(k,t)\equiv\frac{x_L(k,t)+x_R(k,t)-2x}{x_L(k,t)-x_R(k,t)},\qquad k=1\ldots K. \tag{19}$$

现在，我们为每个单元在 x' 中定义一个正交归一化的勒让德多项式基函数，

$$B_{i,k}(x')=\frac{\sqrt{2i+1}}{\sqrt{x_R(k,t)-x_L(k,t)}}P_i(x'). \tag{20}$$

因此，给定角度时，单元内角通量的弱解为

$$\overline{\psi}^n(x,t)\approx\sum_{j=0}^{M}B_{j,k}(x')\,u_{k,j}^n. \tag{21}$$

其中，u 是我们三维解矩阵中的一个元素。同样，给定单元内能量密度的解为:

$$\overline{e}(x,t)\approx\sum_{j=0}^{M}B_{j,k}(x')\,u_{k,j}^{N+1}, \tag{22}$$

求方程弱形式的标准间断伽辽金过程包括：将每个方程乘以一个基函数，在单元上积分，利用分部积分将空间导数转移到基函数上，并利用正交性简化系统。我们的动网格方法与此类似，但多了应用雷诺输运定理 [17] 这一步，因为我们的积分域是时变的。省略这一过程的一般步骤，详见 [13], ，我们得到:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{U_n}-\underline{\underline{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{U_n}+\left(\underline{\underline{\boldsymbol{L}}}\boldsymbol{U_n}\right)^{(\text{surf})}-\mu_n\boldsymbol{L}\boldsymbol{U_n}+\frac{1}{l}\boldsymbol{U_n}=\frac{c_a}{2l}\boldsymbol{H}+\frac{1}{2l}\boldsymbol{Q}\quad\text{for } n=1\ldots N, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{U_{N+1}}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{\text{surf}}-\underline{\underline{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{U}_{N+1}=\frac{c_a}{l}\left(\sum_{n'=1}^{N}w_n'\boldsymbol{U}_{n'}-\boldsymbol{H}\right), \tag{24}$$

其中，时变解向量为

$$\boldsymbol{U}_{n,k}=[u_{k,0}^n,u_{k,1}^n,...,u_{k,M}^n]^T,$$

其中，$M+1$ 是基函数的数量。我们还定义

$$L_{i,j}=\int_{x_L}^{x_R}dx\,B_{j,k}(x')\,\frac{dB_{i,k}(x')}{dx}, \tag{25}$$

$$G_{i,j}=\int_{x_L}^{x_R}dx\,B_{j,k}(x')\,\frac{dB_i(x')}{dt}, \tag{26}$$

$$Q_i=\int_{x_L}^{x_R}dx\,B_{i,k}(x')\,Q(x,t), \tag{27}$$

$$H_i=\int_{x_L(k,t)}^{x_R(k,t)}dx\,B_i(x')\,\overline{T}^4(x,t). \tag{28}$$

数值通量项采用基于粒子与单元边缘相对速度的迎风格式，计算解的流动方向

$$(LU)_i^{\text{surf}} = \left(\mu_n - \frac{dx_R}{dt}\right) B_{i,k}(x'=1)\overline{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{n}+} - \left(\mu_l - \frac{dx_L}{dt}\right) B_{i,k}(x'=-1)\overline{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{n}-}. \tag{29}$$

$$(RU)_i^{\text{surf}} = \left(-\frac{dx_R}{dt}\right) B_{i,k}(x'=1)\overline{\boldsymbol{e}}^{+} - \left(-\frac{dx_L}{dt}\right) B_{i,k}(x'=-1)\overline{\boldsymbol{e}}^{-}. \tag{30}$$

$\overline{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{l}+}$ 和 $\overline{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{l}-}$ 通过计算式 (21) 得到，而 $\boldsymbol{e}^{+}$ 和 $\boldsymbol{e}^{-}$ 通过计算式 (22) 得到。

如果选择采用未碰撞源处理，式 (23) 和 (24) 会略有变化：源项 $\boldsymbol{Q}$ 从式 (23) 的右端项中消失，而 $\overline{\boldsymbol{\phi}}_{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\phi}$ 则被加入式 (24) 的右端项，其中，

$$\overline{\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{u}}} = \int_{x_L}^{x_R} dx\, B_{j,k}(x')\,\overline{\phi_u}(x,t). \tag{31}$$

在这种情况下，数值解对应的是碰撞通量，因此必须在最后一步加上未碰撞通量，才能得到完整解。

求解流程如下。首先，设置基函数数量、空间单元数量以及 S_n 阶数等参数。指定一个源项，并根据源项处理方式，在每个时间步使用标准高斯积分器对未碰撞解或标准源项进行积分，积分点数为 $2M+1$。网格边的位置由一个旨在针对特定源项优化解的函数控制。该函数还会返回网格边的速度，以便计算数值通量。温度平衡项由状态方程确定，并以与源项相同的方式进行积分。求解器返回系数数组，并通过式 (21) 和 (22) 中定义的展开式重构标量通量和材料能量；根据源项处理方式，还会将未碰撞通量加到标量通量上。

为了从方程（23）和（24）中求得解，我们使用 Python 软件包 quadpy [18] 计算求积权重，并使用 SciPy [19] 内置的积分器对常微分方程（ODE）进行积分。我们的 Python 实现可在 GitHub[1] 上找到。

IV 辐射输运方程的基准算例与未碰撞解 S_2

为了在线性问题中获得比 [8], 所提供结果更高的精度，我们有必要自行计算解析基准解。由于我们已将使用 S_2计算的各问题结果纳入其中，因此选择使用 [6]给出的 S_2/P_1 基准解来验证求解器。该基准解给出了方程（17）和（18）的标量通量及能量密度解的解析表达式，其中（$N=$ ）为 2 个角度和高斯-勒让德求积权重，（$[\mu^1,\mu^2]=[\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$和 $[w_1,w_2]=[1,1]$），且源项在时空中均为狄拉克δ函数。单速输运问题的 S_2/P_1 处理方法的特征波速（$\frac{c}{\sqrt{3}}$），源于推导 P_1 近似时所作的一项假设：角通量是角度的仿射函数。该近似使当前方程（角通量的第一个角矩）中的梯度项前乘上$\frac{1}{3}$，从而限制了信息传播速度。详见 [21,第 221] 页的详细说明。另一个有趣之处是，如果将辐射建模为光子气体，且其比强度由普朗克分布给出，那么该气体中的声速为 $\frac{c}{\sqrt{3}}$ [22]。

位置 s 处狄拉克δ函数源对应的格林函数为 [6]，其中 $\phi=\psi_1+\psi_2$ 为

$$G(x,s,t) = \frac{v}{2\sqrt{3}}e^{-t}\left(\frac{tI_1\left(\sqrt{t^2-3(x-s)^2}\right)}{\sqrt{t^2-3(x-s)^2}}\Theta\left(t-\sqrt{3}|x-s|\right) + I_0\left(\sqrt{t^2-3(x-s)^2}\right)\delta\left(t-\sqrt{3}|x-s|\right)\right), \tag{32}$$

[1] www.github.com/wbennett39/动网格辐射传输 [20]

其中 Θ 为阶跃函数， δ 为狄拉克 δ 函数， I_0 和 I_1 为第一类修正贝塞尔函数。物质能量密度的格林函数为，

$$G_U(x,s,t) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t} \left(I_0 \left(\sqrt{t^2 - 3(x-s)^2} \right) \Theta \left(t - \sqrt{3}|x-s| \right) \right). \tag{33}$$

我们选择求解方形源和高斯源，以便在光滑和非光滑问题上测试我们的方法。因此，该积分的解为，

$$\overline{\phi}_{ss,gs} = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^{\infty} dt' \, S_{ss,gs}(s,t') \, G(x,s,t-t') \tag{34}$$

由此得到标量通量。能量密度同样可通过下式获得

$$\overline{e}_{ss,gs} = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^{\infty} dt' \, S_{ss,gs}(s,t') \, G_u(x,s,t-t'). \tag{35}$$

这里，解和源项中的下标要么是“ss”（表示方形源），要么是“gs”（表示高斯源）。源项为

$$S^{ss}(x,t) = \Theta(x_0 - x)\Theta(t_0 - t), \tag{36}$$

对于方形源，为

$$S^{gs}(x,t) = \exp\left(\frac{-x^2}{x_0^2} \right) \Theta(t_0 - t), \tag{37}$$

对于高斯源。

由于为光学厚问题寻找基准解，需要在极晚时刻计算这些积分，而此时被积函数的性质不佳，因此我们仅为光学薄问题计算 S_2 基准算例。

IV.A S_2 未碰撞解

到目前为止，我们在未碰撞源处理过程中使用的未碰撞解，都是来自 [15] 的全输运解。我们不能用这些解来求解 S_2 输运方程，因为两个未碰撞通量并不相等。全输运解基于以下假设：ODE 的 S_n 阶数足以消除角度误差，并且通过求积计算得到的碰撞通量能够很好地近似对 μ 的解析积分，即

$$\sum_{n'=1}^{N} w_{n'} \overline{\psi}^{n'} \approx \int_{-1}^{1} d\mu' \, \psi(x,t,\mu'), \tag{38}$$

因此，可以采用对未碰撞角通量的解进行解析积分后得到的未碰撞标量通量。在 S_2 方程中，式（38）的假设并不成立，必须通过对角通量进行数值求积来求得未碰撞标量通量。

因此，为辐射输运问题的 S_2 解求得用作源项的未碰撞标量通量时，需先求角通量的格林函数解，对该解进行求积，然后再对给定的源项积分。带有狄拉克δ函数源（$\delta(x)\delta(t)$）的式 13 的未碰撞解为 [14],

$$\overline{\psi}_u(x,t) = \frac{e^{-t}}{2t} \delta\left(\mu - \frac{x}{t} \right). \tag{39}$$

为求得 S_2 未碰撞标量通量，使用高斯-勒让德求积对积分进行计算，并采用 $N = 2$ 得到未碰撞标量通量，

$$\overline{\phi}_u^{pl}(x,t) = \frac{e^{-t}}{2t} \left(\delta\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{x}{t} \right) + \delta\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{x}{t} \right) \right). \tag{40}$$

为最终求得与使用式（34）计算的基准解相对应的未碰撞标量通量，我们对其进行积分

$$\overline{\phi}_u^{ss,gs}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^{\infty} dt' \, \overline{\phi}_u^{pl}(x-s, t-t') \, S^{ss,gs}(s,t'), \tag{41}$$

其中 $S^{ss,\ gs}$ 由公式（36）或公式（37）给出。公式（41）的解见附录 A .

V 误差估计方法

对于所呈现的问题，我们使用两种方法来估计解的准确性。对于具有基准解的问题，我们使用均方根误差（均方根误差）作为误差度量。其计算方式如下：

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\sum_{i}^{N} \frac{|y_i - \hat{y}_i|^2}{N}}, \tag{42}$$

其中，y_i 是给定节点处计算得到的标量通量或物质能量密度，$\hat{y}_i$ 是相应的基准解，而 N 是计算解中的节点总数。

对于那些 表现出几何谱收敛的问题，当 $M \to \infty$时，误差可建模为 as

$$\mathrm{ERROR} = C\ \exp(-c_1 M), \tag{43}$$

其中，M 是基函数的最高多项式阶数，C 和 c_1 是可能取决于问题所用单元数量的常数。该曲线在对数-线性坐标上是一条直线。

对于以下章节中的所有问题，我们绘制解展开中系数绝对值的平均值，以表征解收敛。我们将解展开中的 j^{th}系数的平均值定义为，

$$|c_j| = \frac{\sum_{k=1}^{K} |a_{j,k}|}{K}, \tag{44}$$

其中，j 对应于基函数中勒让德多项式的阶数，K 为单元数。

在表征ϕ的误差时，由于我们关注的是标量通量的残余误差，$a_{j,\ k}$ 是使用式（16）中的权重计算得到的加权平均值，

$$a_{j,k} = \frac{\sum_{l'=1}^{N} w_{l'} u_{(l',k,j)}}{\sum_{l'=1}^{N} w_{l'}}. \tag{45}$$

对于物质能量密度，$a_{j,\ k}$ 为，

$$a_{j,k} = u_{(N+1,k,j)}. \tag{46}$$

VI 光学薄结果

本节的结果针对源宽度等于一个平均自由程的问题，符合我们对光学薄问题的定义。这些问题的特征是：未碰撞解在通量和传播波前中占据重要部分。因此，本节中的问题均采用未碰撞源；对于具有传播间断的方形源，则采用动网格。

VI.A 具有方形源的 Su-Olson 问题

我们首先使用 [8] 中最初提出的相同方形源复现 Su-Olson问题，其中 $\sigma_a = 1$厘米$^{-1}$、源宽度为 $x_0 = 0.5$，源持续时间为 $t_0 = 10$。该源的未碰撞解已在 [15] 中给出。对于该问题的 S_2 处理，未碰撞源由公式（58）给出。温度由公式（11）计算。

我们对最初为求解 [13] 中的方形源输运问题而设计的网格函数进行了一些修改。在该网格中，源项内部的网格边始终保持不动，而外部的网格边则以波速向外移动。这样做是为了处理源边缘处的静态间断以及波前处的传播间断。在原始的 Su-Olson 结果中，源项在 $t_0 = 10$ 关闭，而解需要在很久之后仍然求得（$t = 31.6228$，100）。使用我们先前的方形源网格时，在源项不再引入非光滑性很久之后，网格边仍会聚集在源区域周围。这并不是计算区域的最优分布。

因此，本问题中使用的网格函数如下。若将网格边定义为向量，

$$\boldsymbol{X}(t) = \left[x^0(t), x^1(t), ..., x^K(t)\right], \tag{47}$$

并初始化为，

$$\text{if } \frac{K}{4} \leq k \leq \frac{3K}{4},\ x_o^k = x_0 y_j, \tag{48}$$

$$\text{if } k < \frac{K}{4},\ x_o^k = \frac{s_k(\delta x) - 2x_0 - \delta x}{2} \tag{49}$$

$$\text{if } k > \frac{3K}{4},\ x_o^k = \frac{s_l(\delta x) + 2x_0 + \delta x}{2} \tag{50}$$

其中， y_j 为高斯-洛巴托求积点， N为点的数量，从 0 开始编号， s_m 为 $N = \frac{K}{4} + 1$对应的高斯-洛巴托求积点。索引 j 和 l 分别等于 $k - \frac{K}{4}$ 和 $k - \frac{3K}{4}$ 。 δx 为较小的初始宽度，且 K 始终为偶数。此初始化将三分一之一的边分配给源项，其余三分之二用于覆盖求解域的其余部分。每个子域由具有高斯-洛巴托间距的边界构成，这使单元集中在源边界和出射波前附近，因为这些位置最可能出现间断。

随着时间推移 ，边界和外侧边缘随解向外移动，其位置定义为，

$$\text{if } t \leq t_0,\ x^k(t) = x_o^k + \frac{x^k}{x_o^k} \times vt, \tag{51}$$

其中， v 为输运问题中的波速 c，而 $\frac{c}{\sqrt{3}}$ 为 S_2 问题中的波速。边速度定义为，

$$\text{if } t \leq t_0,\ \frac{dx^k}{dt} = \frac{x^k}{x_o^k} \times vt, \tag{52}$$

以这种方式定义边界的位置和速度，可以保持初始化边界的相对间距，这意味着边界会聚集在源边界和前导波前处。

在源项关闭后的较晚时刻，光学薄问题中的方形源解将表现得更像高斯源的解，因为在源项不再发射未碰撞粒子的情况下，解会变得更加平滑。信息流不再由波速主导。距离原点某处的解实际上将为零，该距离远小于 vt。例如，在 Su-Olson问题中，在 $t = 100$ 时，超过 $x = \pm 30$后解实际上为零。

由于这些原因，当源项关闭时，恒定加速度会使每个边界的轨迹发生偏转，从而使它们在最终时刻于指定宽度内均匀分布。该宽度是对解在评估时刻传播距离的估计。我们选择恒定加速度，而不是瞬时改变速度，因为后者会引入数值误差，导致无法收敛到基准解。每个边界的加速度由下式确定：

$$c^k = 2\frac{\left(\left.\frac{dx^k}{dt}\right|_{t_0}(t_0 - t_{\text{final}}) - x^k\Big|_{t_0} + x^k\Big|_{t_{\text{final}}}\right)}{\left(t_0 - t_{\text{final}}\right)^2} \tag{53}$$

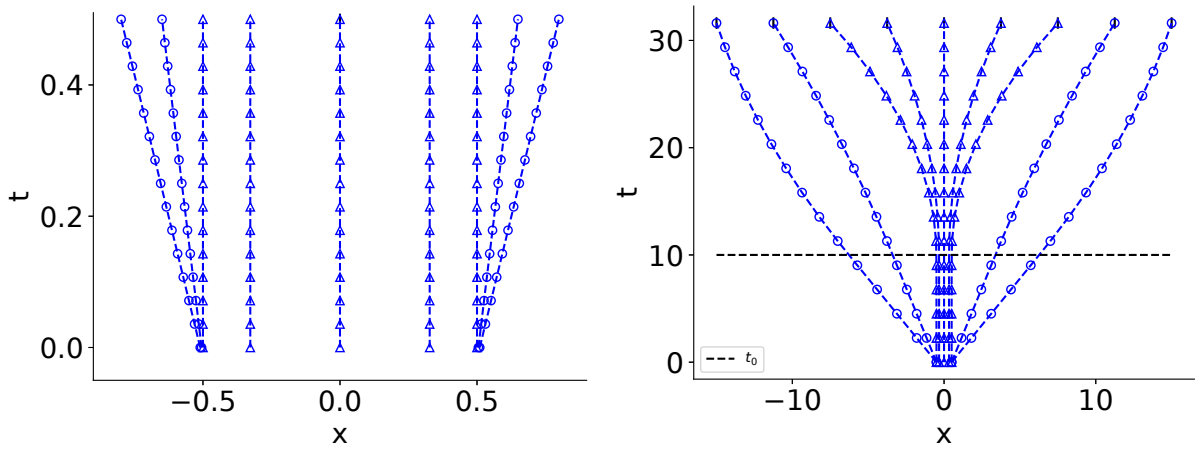
其中，我们通过指定最终位置向量 $\boldsymbol{X}(t_{\text{final}})$ 在 $[-x_f/2, x_f/2]$ 内均匀分布，来求得 $x^k\Big|_{t_{\text{final}}}$ ；其中 x_f 是我们对评估时刻求解域宽度的估计值。

定义加速 度后，我们计算源项关闭后边缘的位置，方 h,

$$\text{if } t > t_0,\ x^k(t) = \frac{1}{2}c^k\left(t - t_0\right)^2 + \left.\frac{dx^k}{dt}\right|_{t_0}(t - t_0) + x^k\Big|_{t_0}, \tag{54}$$

以及速度，

$$\text{if } t > t_0, \frac{dx^k}{dt} = c^k\left(t - t_0\right) + \left.\frac{dx^k}{dt}\right|_{t_0}. \tag{55}$$



(a) t = 0.5　　(b) t = 31.6228

图1：薄方形源网格中每条边在早期和晚期的边缘位置；该网格包含 8 个间隔，波速为 $\frac{c}{\sqrt{3}}$，最终域宽度为 $x_f = 30$。

我们将这种控制网格边和速度的方法称为“薄方形源网格”。图1中给出了网格边的示例 x 与 t 示意图，以便说明。图1a展示了源项内部网格边的勒让德间距，以及源项外部网格边在波前附近的聚集；图1b则展示了网格边在较晚时刻如何逐渐恢复为均匀分布。

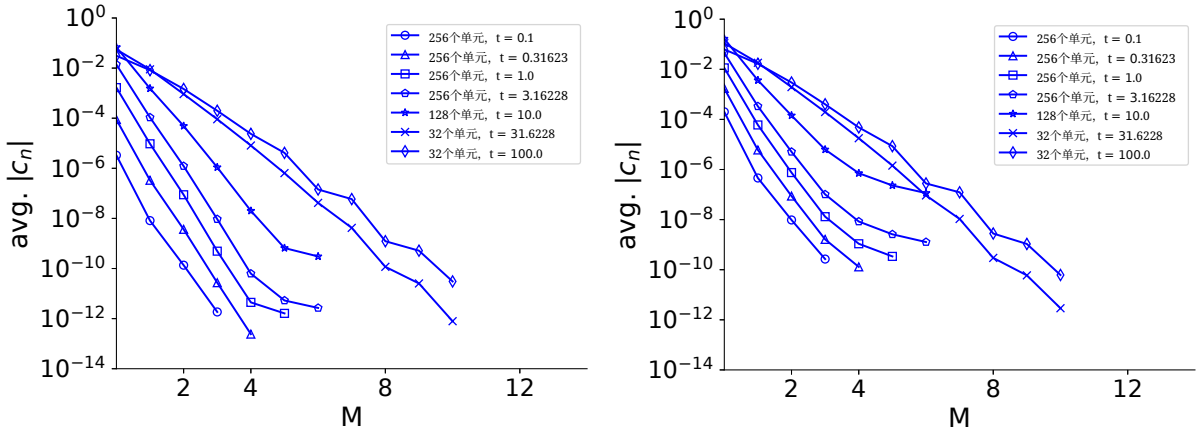
完成定义源项、选择温度的函数形式以及定义网格等必要步骤后，我们即可给出此问题的结果。表 I 和表 II 列出了我们的解，其中一致的数位以粗体标示；所用点和评估时间与 [8] 的表 1 和表 2 相同。这些结果的系数展开收敛结果绘于图 2 和图 3。若干选定时刻的解绘于图 4。除 S_2 解在时间大于 t_0 时的情形外，每种情况下均使用动网格和未碰撞源，因为 S_2 未碰撞解会变得尖锐，难以通过求积解析。在这些情况下，对标准方形源进行了积分。

收敛结果表明，对于这个问题， S_2 在早期时刻明显更平滑。要使全输运解中的空间划分数量达到 256，才能在早期时刻获得与 S_2 解相近的收敛程度，其空间划分数量是后期所需的两倍。两种情况随时间变化的行为相似。在早期时刻，明显不平滑的未碰撞通量在物质能量密度中引发了间断，需要更多的空间划分才能加以解析，这使问题变得更为刚性，也限制了解中合理使用的基函数数量。源项关闭后，解逐渐变得平滑，并在局部达到平衡（对于无限大的物质而言，完全平衡是不可能的）。此时解更加平滑，只需较少的空间单元和更多的基函数便可轻松解析。我们还注意到，在源项关闭后的较晚时刻，全输运解与 S_2 解变得更加相似。

既然我们声称给出的是基准质量结果，就有必要讨论表 I 和表 II 的准确性。虽然 [8] 声称其解收敛到四位有效数字，但细心的读者会发现，在某些情况下只有三位数字吻合。鉴于我们的解已收敛到远高于此的精度，我们相信所报告的数字是正确的。

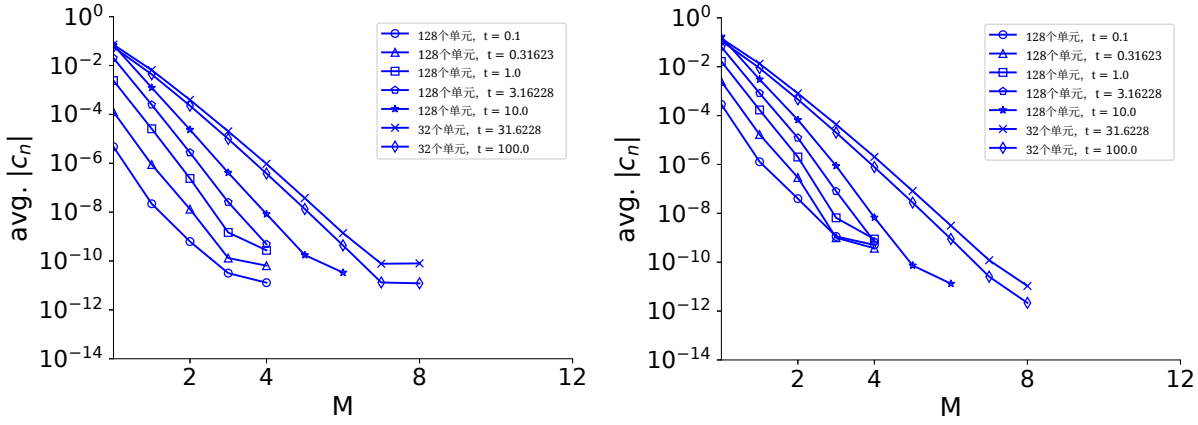
VI.B 定热容方形源问题

该问题采用与上一节问题相同的源项，但热容的函数形式不同。使用公式（12）后，我们的系统变为非线性。我们选择 $C_{v0} = 0.03$ 吉焦 · 厘米$^{-3}$ · 千电子伏$^{-1}$。选择这个值是为了观察所选时间窗口内温度的显著变化。由于我们不再具备方便的条件 $e = T^4$，局部平衡条件不再像 Su-Olson问题中那样是 $\phi = e$，而是 $\phi^{1/4} = T$。因此，该问题以及之后所有定热容问题的解图不再显示标量通量和物质能量密度，而是显示辐射温度



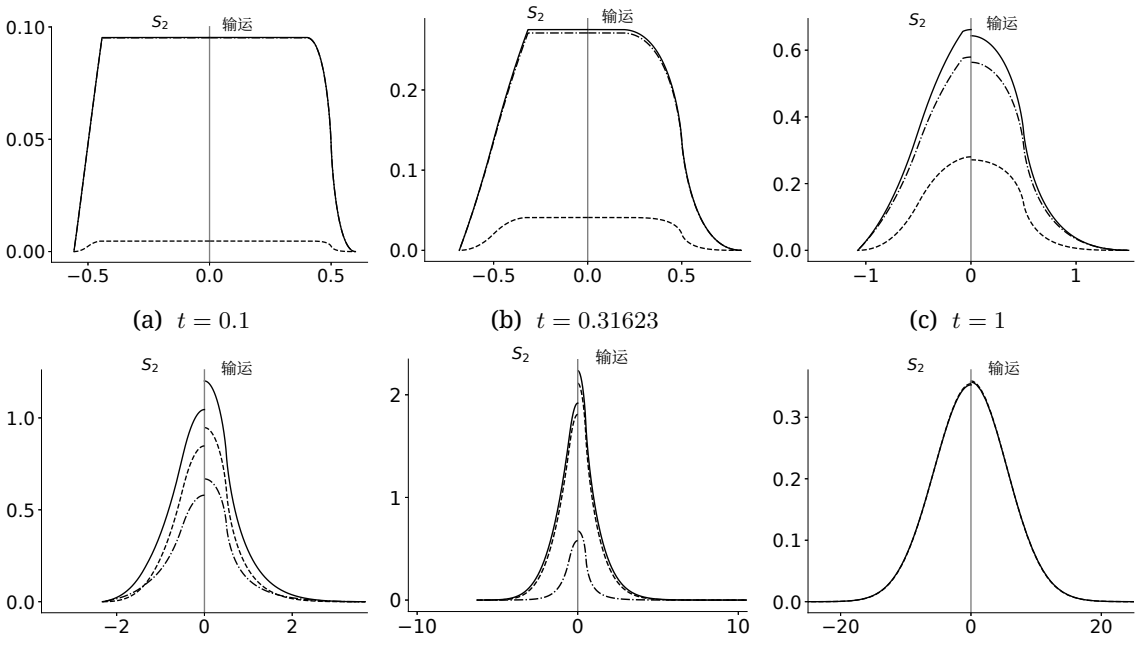
(a) 辐射能量密度， ϕ (b) 物质能量密度， e

图2：对于光学薄（$\sigma_a = 1$ 厘米$^{-1}$）Su-Olson 方形源问题，解展开系数的对数线性缩放平均值（由方程（44）求得），其中 $x_0 = 0.5$, $t_0 = 10$。所有结果的求积阶数均为 S_{256}。所有结果均采用动网格和未碰撞源处理计算。



(a) 辐射能量密度， ϕ (b) 物质能量密度， e

图3：对于光学薄（$\sigma_a = 1$ 厘米$^{-1}$） S_2 Su-Olson 方形源问题，解展开系数的对数线性缩放平均值（由方程（44）求得），其中 $x_0 = 0.5$, $t_0 = 10$。除 $t = 31.6228$ 和 $t = 100$ 情况采用标准源处理外，所有结果均采用动网格和未碰撞源处理计算。



(a) $t = 0.1$ (b) $t = 0.31623$ (c) $t = 1$

(d) $t = 3.16228$ (e) $t = 10$ (f) $t = 100$

图4：光学薄 Su-Olson 方形源问题在 $x_0 = 0.5$, $t_0 = 10$ 条件下的 S_2 （ $x = 0$左侧）和全输运（ $x = 0$右侧）解。实线表示标量通量， ϕ；点划线表示未碰撞标量通量， ϕ_u ；虚线表示物质能量密度， e。

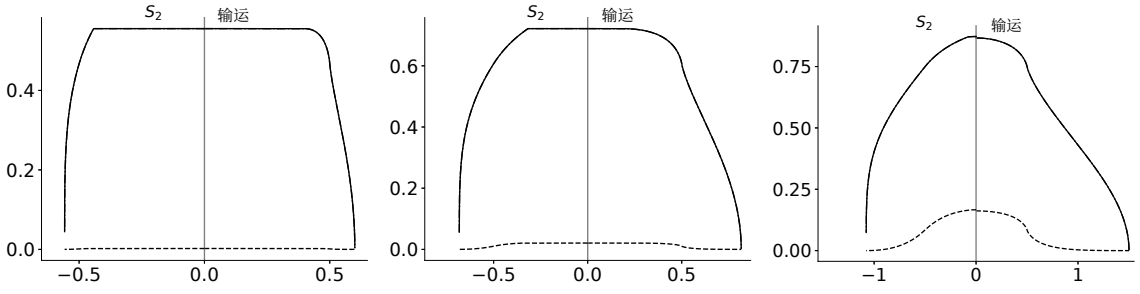
以及物质温度。

虽然对于这个问题，我们已无法再依赖基准解，但通过绘制系数的大小并使用 S_n求解器检查系统误差，我们可以确信所得解已收敛。此外，由于此处采用的网格方法与第VI.A节所述方法相同，我们可以确信网格不会引入误差。

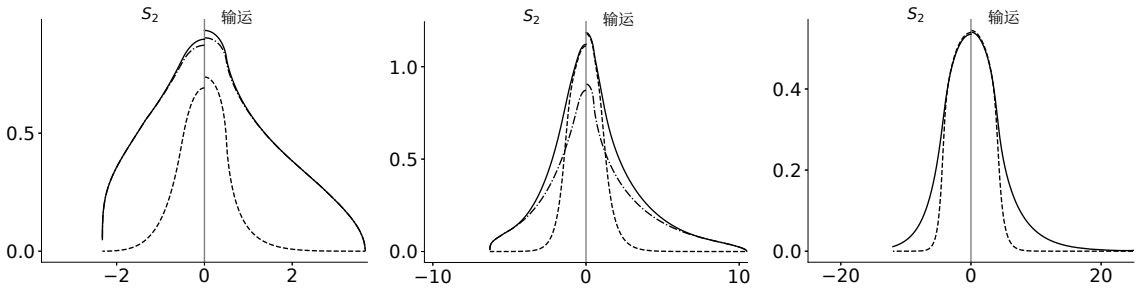
该问题的解绘于图5。我们注意到，该问题并非处处处于平衡状态，而 Su-Olson 问题则是如此 $t = 100$ 。此外，解传播的距离也较短。在 Su-Olson 问题中，温度较低时比热非常小，并随温度的立方增长。这会使解趋向于平衡。在定 C_{v} 情形下，这种效应并不存在，因此解趋于局部平衡的驱动力较弱。还值得注意的是，在极早时刻（$t < 1$），标量通量与物质的相互作用尚不如 Su-Olson 问题中那么充分，并且主要由未碰撞通量构成。这一点在图6a和图7a中很明显。

由于在较晚时刻解尚未完全达到平衡，与 Su-Olson问题相比，这些解的平滑性较差。将该问题在较晚时刻的收敛结果（见图6和图7）与 Su-Olson问题在图2中的收敛结果进行比较，可以观察到这一影响。此外，收敛结果表明，物质能量密度通常比标量通量更不光滑。尽管如此，我们对这些结果的收敛性表示满意，并将其列于表III和表IV中。

全输运解与我们的 S_2 结果之间的差异也值得关注，因为它有助于揭示系统的物理特性。我们注意到，只有到了较晚时刻，随着解逐渐达到平衡，这两个解才开始呈现相似的形态。这说明解的角度相关性减弱，并且用两个角度近似会更加准确。

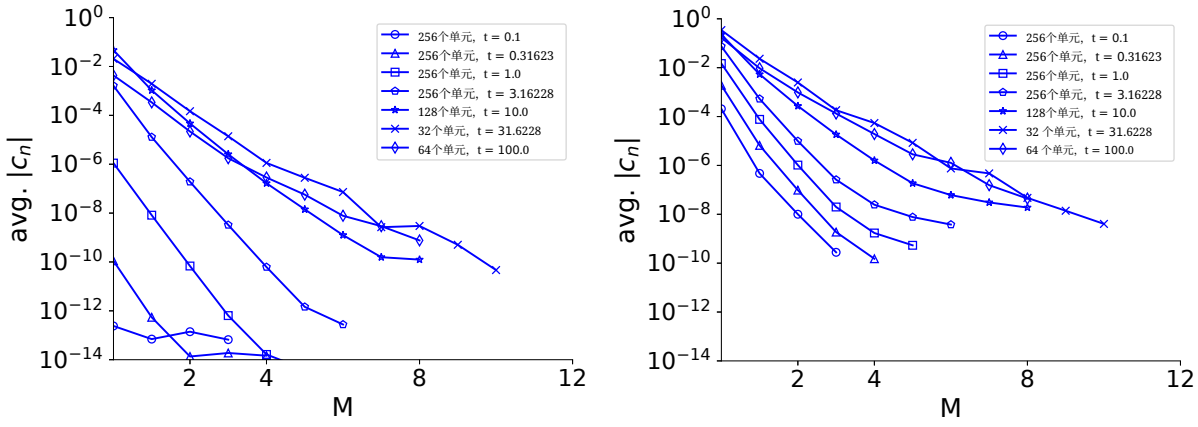


(a) $t = 0.1$ (b) $t = 0.31623$ (c) $t = 1$



(d) $t = 3.16228$ (e) $t = 10$ (f) $t = 100$

图5：光学薄恒定 C_v方形源问题在 $x_0 = 0.5, t_0 = 10$条件下的 S_2 （位于 $x = 0$左侧）和全输运（位于 $x = 0$ 右侧）解。实线表示辐射温度 $\phi^{1/4}$，点划线表示未碰撞辐射温度 $\phi_u^{1/4}$，虚线表示温度 T。



(a) 辐射能量密度， ϕ (b) 物质能量密度， e

图6：光学薄（$\sigma_a = 1$ 厘米$^{-1}$）恒定 C_v 方形源问题在 $x_0 = 0.5, t_0 = 10$条件下，由方程（44）求得的解展开系数对数线性缩放平均值。所有结果的求积阶数均为 S_{256}。所有结果均采用动网格和未碰撞源处理计算。

表 I：薄方形源 Su-Olson问题中标量通量的输运（上）和 S_2 （下）结果， ϕ ，其中 $x_0 = 0.5$， $t_0 = 10$

$\mathbf{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	**0.095317**	**0.275294**	**0.643151**	**1.20069**	**2.235815**	**0.690187**	**0.357195**
0.1	**0.095317**	**0.275294**	**0.635943**	**1.188724**	**2.219553**	**0.689743**	**0.357137**
0.17783	**0.095317**	**0.275294**	**0.619626**	**1.162044**	**2.183558**	**0.688773**	**0.357011**
0.31623	**0.095317**	**0.262715**	**0.561896**	**1.071861**	**2.064534**	**0.685719**	**0.356612**
0.45	**0.08824**	**0.203128**	**0.447114**	**0.909526**	**1.860758**	**0.681168**	**0.356016**
0.5	**0.047658**	**0.137647**	**0.358083**	**0.799027**	**1.731816**	**0.679072**	**0.35574**
0.56234	**0.003762**	**0.062776**	**0.253722**	**0.666804**	**1.574955**	**0.67616**	**0.355355**
0.75	-	**0.002793**	**0.114315**	**0.446752**	**1.273984**	**0.665459**	**0.353929**
1.0	-	-	**0.036471**	**0.275396**	**0.987815**	**0.646922**	**0.351409**
1.33352	-	-	**0.002894**	**0.145309**	**0.708221**	**0.615381**	**0.346972**
1.77828	-	-	-	**0.059674**	**0.450163**	**0.563509**	**0.339223**
3.16228	-	-	-	**0.001155**	**0.096453**	**0.369659**	**0.303466**
5.62341	-	-	-	-	**0.003632**	**0.108305**	**0.213818**
10.0	-	-	-	-	-	**0.003914**	**0.072059**
17.78279	-	-	-	-	-	-	**0.002721**

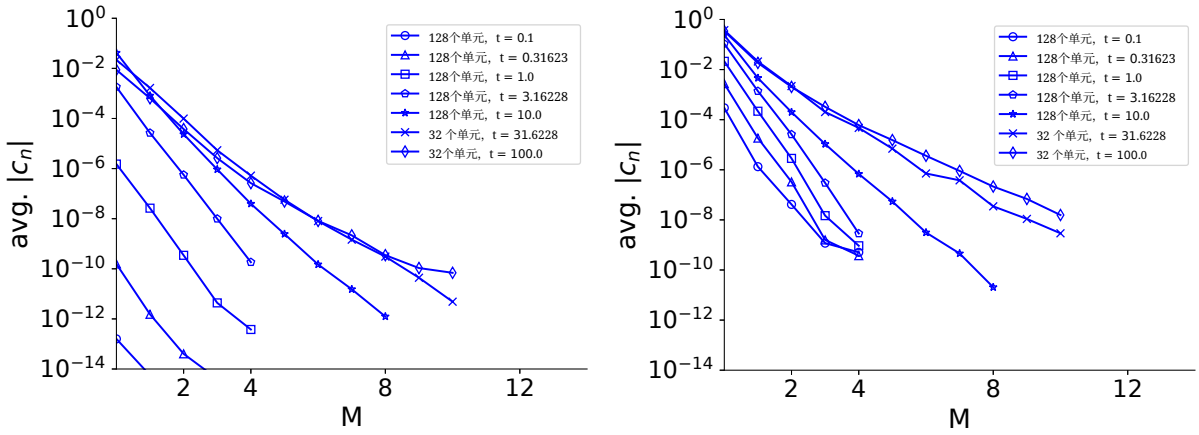
$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	**0.095317**	**0.275294**	**0.661668**	**1**.0451	1.918396	**0.659852**	**0.352728**
0.1	**0.095317**	**0.275294**	**0.645629**	**1**.034885	1.906562	**0.659502**	**0.352673**
0.17783	**0.095317**	**0.275294**	**0.604866**	**1**.012559	1.88071	**0.658738**	**0.352555**
0.31623	**0.095317**	**0.275294**	**0.515344**	**0.941841**	**1.798924**	**0.656328**	**0.352181**
0.45	**0.089213**	**0**.179984	**0.405572**	**0**.835497	**1**.67622	**0.652732**	**0.351621**
0.5	**0.047658**	**0.137647**	**0.358083**	**0.786079**	**1**.619313	**0.651071**	**0.351362**
0.56234	**0**.000000	**0.085419**	**0.299433**	**0**.722866	**1.545756**	**0.648764**	**0.351001**
0.75	-	**0**.0000000	**0.155119**	**0**.552606	**1**.338003	**0.640252**	**0.349662**
1.0	-	-	**0.027203**	**0**.369788	1.092239	**0.625397**	**0.347295**
1.33352	-	-	**0**.000000	**0.19493**	**0**.816475	**0**.599795	**0.343124**
1.77828	-	-	-	**0.056328**	**0**.532488	**0.556761**	**0.335829**
3.16228	-	-	-	-	**0.09838**	**0.384521**	**0.30198**
5.62341	-	-	-	-	**0.00028**	**0.116245**	**0.215656**
10.0	-	-	-	-	-	**0.002009**	**0.073828**
17.78279	-	-	-	-	-	-	**0.002307**
RMSE	2.656e-07	1.747e-07	1.642e-06	3.589e-07	2.647e-07	9.157e-08	6.128e-09

VI.C 带高斯源的 Su-Olson问题

回到线性化的 Su-Olson问题，我们考虑一个高斯源。这里的源项由公式（37）定义，其中未碰撞解取自 [15] 中的全输运解，或公式（56）中的 S_2解。我们设定 $x_0 = 0.5$ ，源持续时间仍为 $t_0 = 10$。在 [13], 中，光滑高斯源使解在所有时刻都能实现几何收敛。我们预期在本应用中也会得到相同结果。

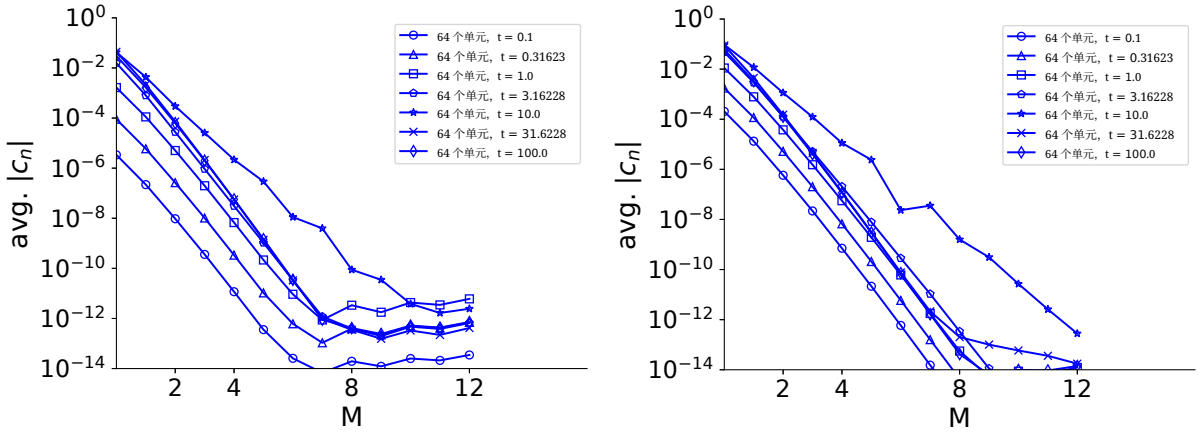
由于源项的非光滑性不会引起间断，我们可以采用比薄方形源项问题中所用网格函数简单得多的方案。我们只需估计问题域的边界，并用固定边界均匀覆盖给定空间。此处未使用动网格，因为早先在 [13] 中的测试表明，网格在光滑问题中并无帮助。不过，我们采用了未碰撞解。我们纳入高斯源，尽管它们还不足以构成具有挑战性、需要全面应用我们方法的问题，因为我们能够得到非常精确的解。

虽然 S_{256} 曾用于薄方形源的全输运解，但我们对高斯源仅使用 S_{64} 。这一选择基于在 [13] 中进行的测试，测试结果表明所需的求积点少得多



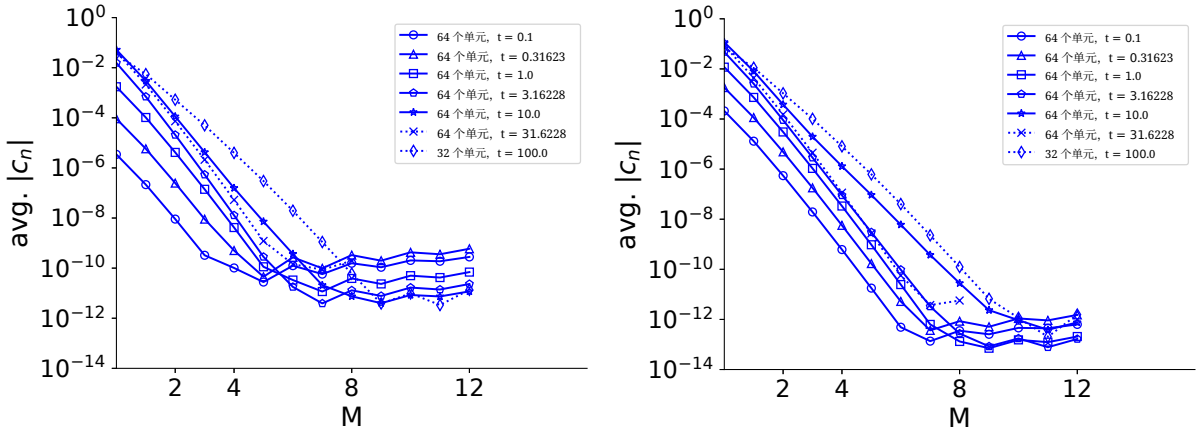
(a) 辐射能量密度，ϕ　　(b) 物质能量密度，e

图7：光学薄（$\sigma_a = 1$ 厘米$^{-1}$）S_2 恒定 C_v 方形源问题的解展开系数对数线性缩放平均值（由方程（44）求得），其中 $x_0 = 0.5$, $t_0 = 10$。除 $t = 31.6228$ 和 $t = 100$这两种情况采用标准源项处理外，所有结果均使用动网格和未碰撞源项处理计算。



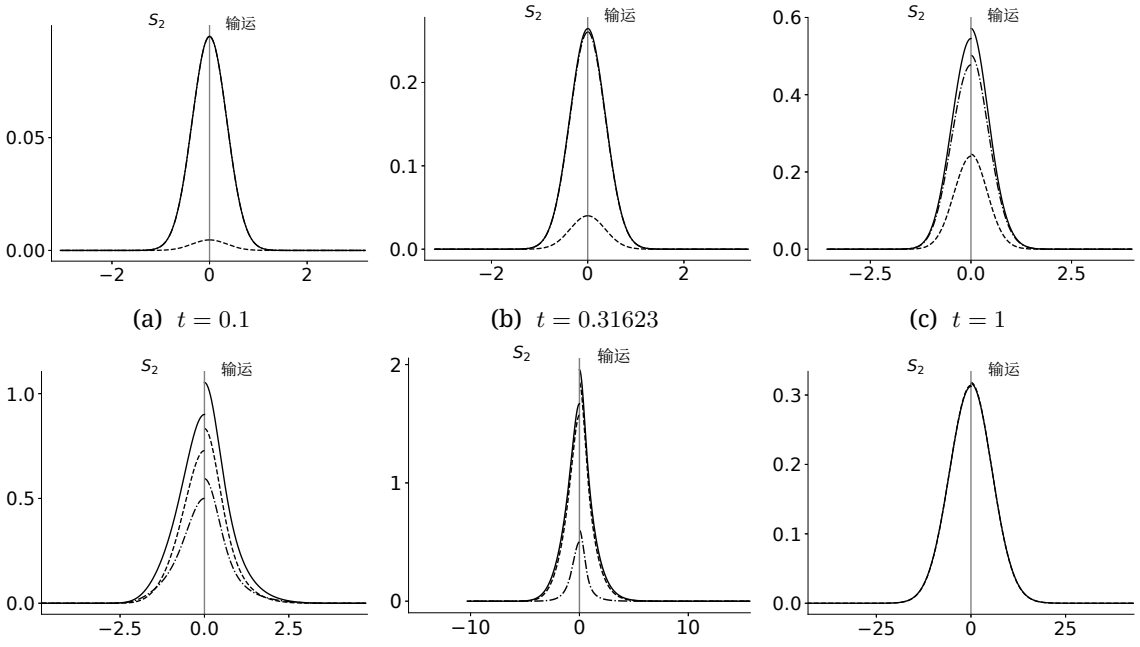
(a) 辐射能量密度，ϕ　　(b) 物质能量密度，e

图8：光学薄（$\sigma_a = 1$ 厘米$^{-1}$）Su-Olson 高斯源问题的解展开系数对数线性缩放平均值（由方程（44）求得），其中 $x_0 = 0.5$, $t_0 = 10$。所有结果的求积阶数均为 S_{16}。所有结果均使用静态网格和未碰撞源项处理计算。



(a) 辐射能量密度， ϕ (b) 物质能量密度， e

图 9：光学薄（$\sigma_a = 1$ 厘米$^{-1}$） S_2 Su-Olson 高斯源问题的解展开系数（由方程（44）求得）的对数线性缩放平均值，其中 $x_0 = 0.5$、 $t_0 = 10$。除 $t = 31.6228$ 和 $t = 100$ 情形采用标准源处理外，所有结果均使用动网格和未碰撞源处理计算。虚线表示使用动网格求得的解。



(a) $t = 0.1$ (b) $t = 0.31623$ (c) $t = 1$

(d) $t = 3.16228$ (e) $t = 10$ (f) $t = 100$

图 10： S_2 （ $x = 0$左侧）和全输运（ $x = 0$右侧）解，用于 $x_0 = 0.5$、 $t_0 = 10$条件下的光学薄 Su-Olson 高斯源问题。实线表示标量通量， ϕ；点划线表示未碰撞标量通量， ϕ_u；虚线表示物质能量密度， e。

表 II：薄方形源 Su-Olson问题中， $x_0 = 0.5, t_0 = 10$条件下物质能量密度的输运（上）和 S_2 （下）结果， e

x/t	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	**0.00468**2	**0.04093**5	**0.271**307	**0.946**87	**2.111**923	**0.70499**1	**0.3591**36
0.1	**0.00468**2	**0.04093**5	**0.268**692	**0.9371**54	**2.095**970	**0.7045**14	**0.3590**78
0.17783	**0.00468**2	**0.04093**5	**0.2626**4	**0.915**402	**2.060**646	**0.7034**74	**0.3589**49
0.31623	**0.00468**2	**0.0403**4	**0.239**814	**0.840**926	**1.943**709	**0.700**198	**0.35854**4
0.45	**0.00455**2	**0.03314**2	**0.18826**4	**0.7028**83	**1.7429**67	**0.69532**	**0.35793**8
0.5	**0.00234**2	**0.02046**9	**0.141**918	**0.6049**35	**1.615**402	**0.6930**73	**0.3576**57
0.56234	**0.00005**	**0.00635**	**0.08838**	**0.4884**6	**1.460**394	**0.6899**54	**0.3572**66
0.75	-	**0.0000**63	**0.03014**1	**0.3065**58	**1.16591**2	**0.678**498	**0.35581**6
1.0	-	-	**0.00625**	**0.17519**2	**0.8899**08	**0.65868**5	**0.3532**54
1.33352	-	-	**0.0001**62	**0.08352**	**0.6252**13	**0.6250**66	**0.3487**44
1.77828	-	-	-	**0.0293**49	**0.38688**4	**0.5700**27	**0.3408**7
3.16228	-	-	-	**0.000**183	**0.076**146	**0.3672**69	**0.30**4561
5.62341	-	-	-	-	**0.002**412	**0.1031**14	**0.2137**68
10.0	-	-	-	-	-	**0.00342**6	**0.07122**6
17.78279	-	-	-	-	-	-	**0.0026**09

x/t	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	**0.00468**2	**0.04093**5	**0.2**80241	**0**.847357	1.808991	**0**.672725	**0.35**4597
0.1	**0.00468**2	**0.04093**5	**0.2**73782	**0**.837875	1.797308	**0**.672354	**0.35**4541
0.17783	**0.00468**2	**0.04093**5	**0.26**1727	**0**.817144	1.771785	**0**.671544	**0.35**4421
0.31623	**0.00468**2	**0.04093**6	**0.2**25609	**0**.751409	**1**.691033	**0**.668989	**0.35**4041
0.45	**0.004**642	**0.03**0469	**0.1**69249	**0**.652361	**1**.569863	**0.6**65177	**0.35**3472
0.5	**0.00234**1	**0.02046**7	**0.141**916	**0.60**6256	**1**.513661	**0.6**63418	**0.35**3209
0.56234	**0.00000**0	**0.00**8542	**0**.10839	**0**.547588	**1.4**41078	**0.6**60972	**0.35**2842
0.75	-	**0.0000**00	**0.03**8396	**0.3**93514	**1**.23688	**0.6**51954	**0.35**1482
1.0	-	-	**0.00**1762	**0**.236801	**0**.997162	**0**.636229	**0.3**49077
1.33352	-	-	**0.000**000	**0**.101119	**0**.731352	**0.6**09161	**0.34**4841
1.77828	-	-	-	**0.0**19412	**0**.462775	**0.5**63768	**0.3**37432
3.16228	-	-	-	**0.000**000	**0.07**4037	**0.3**83609	**0.30**3078
5.62341	-	-	-	-	**0.00**0086	**0.1**10507	**0.21**5664
10.0	-	-	-	-	-	**0.00**1626	**0.07**2987
17.78279	-	-	-	-	-	-	**0.002**196
RMSE	1.233e-08	2.372e-08	9.65e-08	1.366e-07	4.052e-08	9.937e-08	5.936e-09

需要用来解析角度误差。

温度由公式（11）定义，解列于表 V 和表 VI，收敛结果见图 8 和图 9。解见图 10。如前述收敛图所示，即使使用标准静态网格，该问题也呈几何收敛。值得注意的是，对于图 9 中 $t = 31.6228$ 和 $t = 100$ 的 S_2 结果，采用了动网格。在这种情况下，网格以恒定速度从初始宽度移动到指定的最终宽度。这样做并非出于必要，而是为了确定动网格是否适用于这些问题。

关于全输运解与 S_2 解之间的差异，我们指出，从图 10 可以看出，与方形源相比， S_2 解在估计早期时刻的解时表现更好。这是因为早期时刻的解大多是未碰撞的，而高斯源的 S_2 与全输运未碰撞解相似。在中间时刻，全输运解具有更强的角度依赖性，因此 S_2 解的准确度较低。到了较晚时刻，碰撞会使输运解的角通量变得平滑，并减弱角度依赖性，使系统更接近扩散近似，此时 S_2 与输运解再次吻合。

表 III：薄方形源常数C_{v}问题的标量通量 ϕ 的输运（上）和 S_2 （下）结果，其中 $x_0 = 0.5$、 $t_0 = 10$，以及 $C_{\mathrm{v}0} = 0.03$吉焦 · 厘米$^{-3}$ · 千电子伏$^{-1}$

$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.095162	0.271108	0.563683	0.765084	1.96832	0.267247	0.085108
0.1	0.095162	0.271108	0.557609	0.756116	1.950367	0.266877	0.085054
0.17783	0.095162	0.271108	0.543861	0.736106	1.910675	0.266071	0.084937
0.31623	0.095162	0.258592	0.495115	0.668231	1.779896	0.263527	0.084565
0.45	0.08809	0.199962	0.396442	0.543721	1.558248	0.259729	0.084008
0.5	0.047581	0.135554	0.316071	0.453151	1.420865	0.257976	0.08375
0.56234	0.00376	0.061935	0.222261	0.349209	1.252213	0.255538	0.083392
0.75	-	0.002788	0.102348	0.21078	0.908755	0.246543	0.082061
1.0	-	-	0.034228	0.124305	0.562958	0.230831	0.079715
1.33352	-	-	0.002864	0.067319	0.27752	0.203718	0.075591
1.77828	-	-	-	0.031357	0.120054	0.158039	0.068419
3.16228	-	-	-	0.001057	0.013737	0.022075	0.036021
5.62341	-	-	-	-	0.000413	0.000814	0.001068
10.0	-	-	-	-	-	5e-06	5e-06
17.78279	-	-	-	-	-	-	-

$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.095162	0.271108	0.579404	0.649946	1.57957	0.243368	0.081882
0.1	0.095162	0.271108	0.56606	0.641494	1.567037	0.243074	0.081833
0.17783	0.095162	0.271108	0.529958	0.623092	1.539665	0.242432	0.081725
0.31623	0.095162	0.271108	0.45241	0.565417	1.453129	0.240406	0.081383
0.45	0.08906	0.177033	0.357556	0.480232	1.323479	0.237381	0.080871
0.5	0.047581	0.135554	0.31607	0.441134	1.263425	0.235984	0.080634
0.56234	-	0.084378	0.264889	0.392645	1.185561	0.234042	0.080305
0.75	-	-	0.140336	0.276699	0.962617	0.226873	0.079082
1.0	-	-	0.02637	0.175485	0.692975	0.214346	0.076927
1.33352	-	-	-	0.097064	0.392628	0.192725	0.073141
1.77828	-	-	-	0.033465	0.155709	0.156395	0.066564
3.16228	-	-	-	-	0.007509	0.03175	0.03718
5.62341	-	-	-	-	4.7e-05	0.000413	0.001075
10.0	-	-	-	-	-	-	-
17.78279	-	-	-	-	-	-	-

VI.D 高斯源的常数 C_{v} 问题

我们考虑一个与上一节具有相同源项和参数的问题，但采用定比热，因此温度到材料能量密度的转换由公式（12）给出。我们指定有量纲比热为 $C_{\mathrm{v}0} = 0.03$吉焦·厘米$^{-3}$·千电子伏$^{-1}$。解如图 11 所示。虽然我们对预测这些非线性结果的行为把握较小，但仍预计会几何收敛，因为不存在导致非光滑性的因素。

与线性化系统中的高斯源一样，我们指定了一个静态网格，使其均匀覆盖估计的实际求解域宽度。图12和图13中的收敛结果表明，这足以在所有选定时刻实现几何收敛。我们还观察到了第VI.B节中首次发现的现象：在早期时刻，标量通量的收敛速度极快。这同样是因为此时标量通量中未碰撞部分占比最高，因此求解碰撞部分更为简单。

与线性化高斯分布类似，在源项开启期间， S_2 与输运解之间的差异会增大。源项关闭后，随着散射减弱输运解的角度依赖性，这种差异也会减小。与非线性方形源类似，该解并未

表 IV：薄方形源常数 C_{v} 问题中，物质能量密度 e的输运（上）和 S_2 （下）结果； $x_0 = 0.5$、 $t_0 = 10$和 $C_{\mathrm{v}0} = 0.03$吉焦 · 厘米$^{-3}$ · 千电子伏$^{-1}$

$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.004837	0.045121	0.354022	1.613529	2.57461	1.592549	1.190296
0.1	0.004837	0.045121	0.350958	1.601467	2.568476	1.591998	1.190108
0.17783	0.004837	0.045121	0.343803	1.573757	2.554747	1.590795	1.189698
0.31623	0.004837	0.044507	0.316063	1.47078	2.507772	1.586979	1.188398
0.45	0.004705	0.036765	0.249325	1.238666	2.421019	1.581228	1.186445
0.5	0.002419	0.022562	0.183937	1.025219	2.361647	1.578549	1.185538
0.56234	5.1e-05	0.006779	0.108887	0.759317	2.280932	1.5748	1.184271
0.75	-	6.4e-05	0.034842	0.416175	2.069946	1.56071	1.179537
1.0	-	-	0.006872	0.214491	1.68516	1.535052	1.171036
1.33352	-	-	0.000168	0.094966	1.028758	1.487096	1.155611
1.77828	-	-	-	0.032116	0.471906	1.391456	1.127131
3.16228	-	-	-	0.000196	0.049604	0.471468	0.954827
5.62341	-	-	-	-	0.001163	0.019493	0.082189
10.0	-	-	-	-	-	0.000113	0.000487
17.78279	-	-	-	-	-	-	-

$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.004837	0.045121	0.364106	1.512533	2.431781	1.555683	1.178842
0.1	0.004837	0.045121	0.357116	1.497067	2.426675	1.555215	1.178665
0.17783	0.004837	0.045121	0.343553	1.462337	2.415402	1.554193	1.178277
0.31623	0.004837	0.045121	0.299658	1.343527	2.378606	1.550952	1.177048
0.45	0.004796	0.033907	0.223636	1.138096	2.319758	1.546073	1.175203
0.5	0.002418	0.02256	0.183934	1.031348	2.290735	1.543804	1.174346
0.56234	-	0.00909	0.135476	0.89324	2.251138	1.54063	1.173149
0.75	-	-	0.043524	0.56287	2.120765	1.528729	1.16868
1.0	-	-	0.001805	0.289458	1.885442	1.507188	1.160663
1.33352	-	-	-	0.106017	1.298617	1.467469	1.146151
1.77828	-	-	-	0.018336	0.530154	1.391381	1.119483
3.16228	-	-	-	-	0.023197	0.536229	0.964849
5.62341	-	-	-	-	3.1e-05	0.005921	0.056159
10.0	-	-	-	-	-	-	2.4e-05
17.78279	-	-	-	-	-	-	-

在 $t = 100$时达到平衡。因此我们得出结论：源项的非光滑性对平衡的影响不如比热的函数形式大，因为具有非光滑源项的Su-Olson问题比这个常数 C_{v} 光滑源项问题更快达到平衡。解见表VII和表VIII。

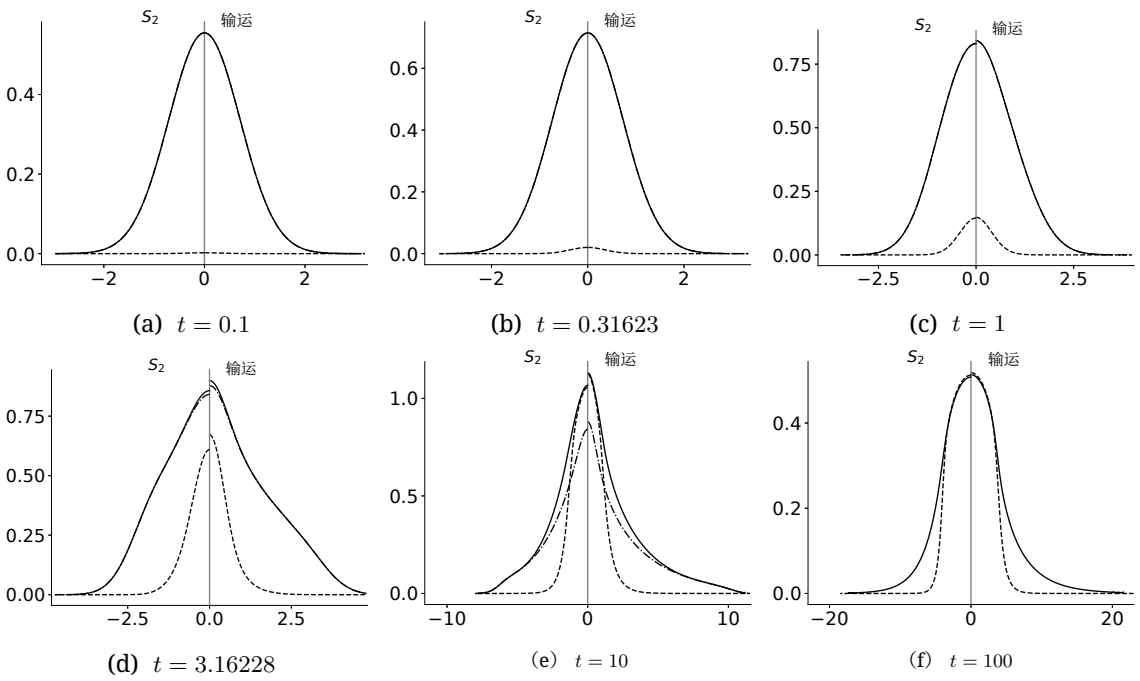
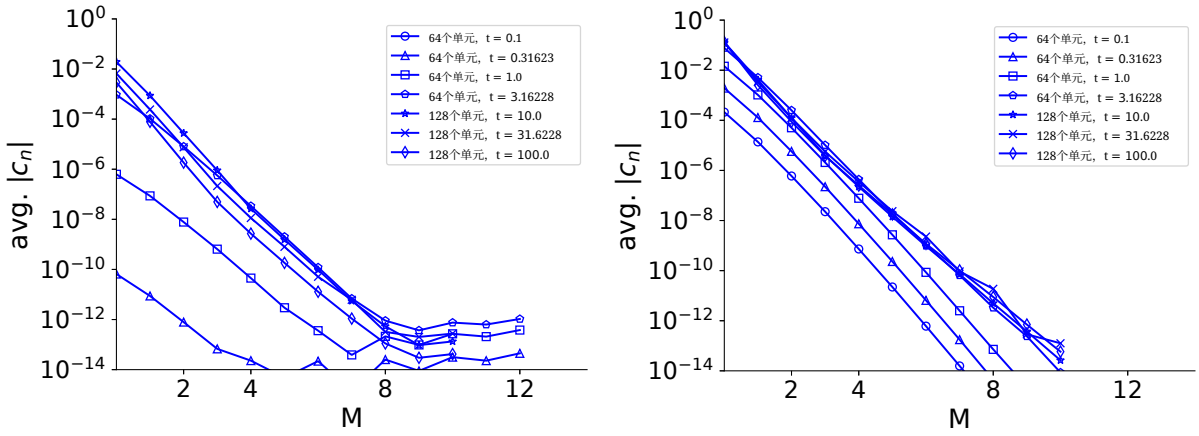


图 11：光学薄恒定C_v 高斯源问题的 S_2 （ $x = 0$左侧）和全输运（ $x = 0$右侧）解，其中 $x_0 = 0.5$、 $t_0 = 10$。实线表示辐射温度 $\phi^{1/4}$，点划线表示未碰撞辐射温度， $\phi_u^{1/4}$ ，虚线表示温度， $\bar{T}$。



（a）辐射能量密度， ϕ （b）物质能量密度， e

图 12：通过方程（44）得到的光学薄（$\sigma_a = 1$ 厘米$^{-1}$）恒定 C_v 高斯源问题的解展开系数的对数线性缩放平均值，其中 $x_0 = 0.5$、 $t_0 = 10$。所有结果的求积阶数均为 S_{16}。所有结果均采用静态网格和未碰撞源处理计算。

表 V：薄高斯源 Su-Olson问题中标量通量 ϕ 的输运（上）和 S_2（下）结果，$x_0 = 0.5$，$t_0 = 10$

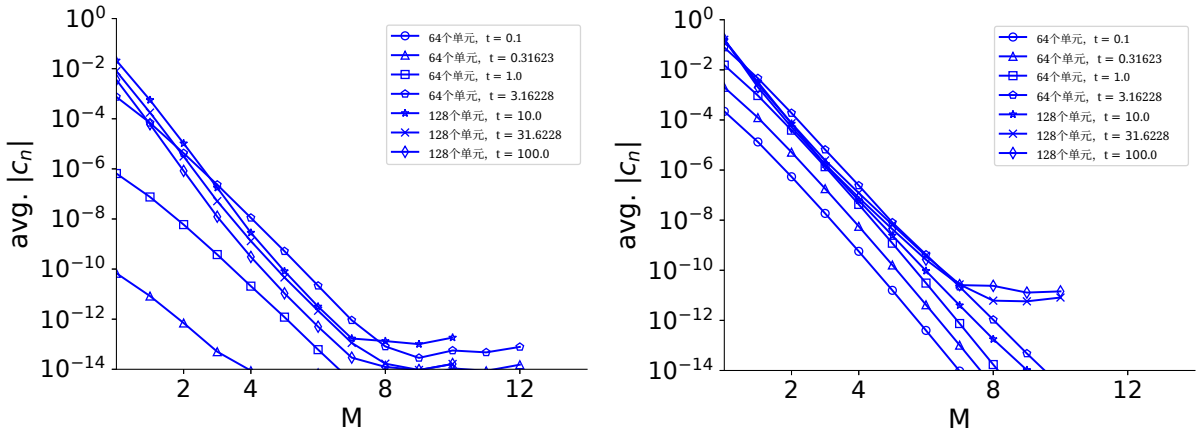
$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.094869	0.264712	0.571441	1.053107	1.956705	0.610025	0.316341
0.1	0.091217	0.255181	0.556247	1.033176	1.933017	0.609634	0.31629
0.17783	0.083721	0.235541	0.524582	0.991429	1.883176	0.608783	0.316178
0.31623	0.063836	0.182853	0.436813	0.873994	1.741091	0.6061	0.315826
0.45	0.042514	0.125118	0.334025	0.732182	1.564765	0.602104	0.315298
0.5	0.035215	0.104949	0.29568	0.67763	1.49511	0.600263	0.315054
0.56234	0.027081	0.082142	0.250049	0.611096	1.408369	0.597705	0.314714
0.75	0.010198	0.033042	0.137011	0.433926	1.163525	0.588305	0.313452
1.0	0.001799	0.006564	0.050023	0.267122	0.898484	0.572018	0.311224
1.33352	8.2e-05	0.000371	0.008965	0.139587	0.64098	0.544297	0.3073
1.77828	-	2e-06	0.000387	0.05756	0.40731	0.498676	0.300446
3.16228	-	-	-	0.00137	0.087854	0.327865	0.268818
5.62341	-	-	-	-	0.003363	0.096556	0.189497
10.0	-	-	-	-	-	0.003523	0.063953
17.78279	-	-	-	-	-	-	0.002424

$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.00467	0.040073	0.240699	0.727949	1.572225	0.594815	0.314048
0.1	0.00449	0.03858	0.23398	0.717893	1.560265	0.594488	0.313999
0.17783	0.004119	0.035509	0.219946	0.696571	1.534799	0.593775	0.313893
0.31623	0.003137	0.027317	0.180837	0.6345	1.45974	0.591526	0.313557
0.45	0.002085	0.018437	0.134764	0.554569	1.360669	0.58817	0.313054
0.5	0.001726	0.015365	0.117566	0.522032	1.319396	0.586621	0.312821
0.56234	0.001326	0.011918	0.09716	0.480715	1.266036	0.584468	0.312496
0.75	0.000497	0.004632	0.047669	0.359391	1.101318	0.576529	0.311293
1.0	8.7e-05	0.000863	0.013277	0.223358	0.893342	0.562683	0.309166
1.33352	3e-06	4.3e-05	0.001308	0.100634	0.657392	0.538848	0.305419
1.77828	-	-	1.8e-05	0.022908	0.417809	0.498866	0.298865
3.16228	-	-	-	-	0.068504	0.34004	0.268475
5.62341	-	-	-	-	0.000121	0.098551	0.191126
10.0	-	-	-	-	-	0.001487	0.064775
17.78279	-	-	-	-	-	-	0.001958
$\boldsymbol{RMSE}$	9.105e-10	8.561e-10	2.604e-09	7.839e-09	1.321e-08	6.808e-09	6.899e-05

表 VI：薄高斯源 Su-Olson问题中物质能量密度 e 的输运（上）和 S_2 （下）结果, ¯其中 $x_0 = 0.5, t_0 = 10$

$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.00467	0.040089	0.245869	0.833299	1.847977	0.623026	0.318058
0.1	0.00449	0.038593	0.238404	0.815919	1.824555	0.622608	0.318006
0.17783	0.004119	0.035517	0.222913	0.779578	1.775289	0.621695	0.317892
0.31623	0.003137	0.027313	0.18051	0.677838	1.63499	0.61882	0.317534
0.45	0.002085	0.018426	0.132108	0.556161	1.461245	0.614538	0.316998
0.5	0.001726	0.015355	0.114504	0.509791	1.392751	0.612566	0.316749
0.56234	0.001326	0.011908	0.093967	0.453643	1.307592	0.609828	0.316404
0.75	0.000497	0.004629	0.04582	0.307085	1.068295	0.59977	0.315121
1.0	8.7e-05	0.000865	0.013544	0.175481	0.812011	0.58237	0.312856
1.33352	3e-06	4.4e-05	0.001743	0.082634	0.567439	0.552834	0.308867
1.77828	-	-	5e-05	0.029302	0.35102	0.504445	0.301903
3.16228	-	-	-	0.000297	0.069582	0.325807	0.269788
5.62341	-	-	-	-	0.002245	0.091971	0.189454
10.0	-	-	-	-	-	0.003086	0.063216
17.78279	-	-	-	-	-	-	0.002324

$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.00467	0.040073	0.240699	0.727949	1.572225	0.594815	0.314048
0.1	0.00449	0.03858	0.23398	0.717893	1.560265	0.594488	0.313999
0.17783	0.004119	0.035509	0.219946	0.696571	1.534799	0.593775	0.313893
0.31623	0.003137	0.027317	0.180837	0.6345	1.45974	0.591526	0.313557
0.45	0.002085	0.018437	0.134764	0.554569	1.360669	0.58817	0.313054
0.5	0.001726	0.015365	0.117566	0.522032	1.319396	0.586621	0.312821
0.56234	0.001326	0.011918	0.09716	0.480715	1.266036	0.584468	0.312496
0.75	0.000497	0.004632	0.047669	0.359391	1.101318	0.576529	0.311293
1.0	8.7e-05	0.000863	0.013277	0.223358	0.893342	0.562683	0.309166
1.33352	3e-06	4.3e-05	0.001308	0.100634	0.657392	0.538848	0.305419
1.77828	-	-	1.8e-05	0.022908	0.417809	0.498866	0.298865
3.16228	-	-	-	-	0.068504	0.34004	0.268475
5.62341	-	-	-	-	0.000121	0.098551	0.191126
10.0	-	-	-	-	-	0.001487	0.064775
17.78279	-	-	-	-	-	-	0.001958
$\boldsymbol{RMSE}$	9.105e-10	8.561e-10	2.604e-09	7.839e-09	1.321e-08	6.808e-09	6.899e-05



(a) 辐射能量密度， ϕ 　　(b) 物质能量密度， e

图13：光学薄（$\sigma_a = 1$ 厘米$^{-1}$） S_2 常数 C_v 高斯源问题中解展开系数（由方程（44）求得）的对数线性缩放平均值，其中 $x_0 = 0.5$、 $t_0 = 10$。所有结果均使用静态网格和未碰撞源处理计算。

表 VII：薄高斯源常数 C_{v} 问题在 $x_0 = 0.5$、 $t_0 = 10$ 和 $C_{\mathrm{v0}} = 0.03$吉焦 · 厘米$^{-3}$ · 千电子伏$^{-1}$条件下的标量通量 ϕ 结果：输运（上）和 S_2 （下）

$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.094715	0.260632	0.501868	0.653649	1.639873	0.218959	0.069516
0.1	0.091069	0.251252	0.488575	0.636913	1.614763	0.21862	0.069466
0.17783	0.083585	0.231922	0.460879	0.602409	1.561824	0.217881	0.069356
0.31623	0.063732	0.180063	0.384158	0.509408	1.41001	0.215547	0.069011
0.45	0.042445	0.123229	0.294366	0.405067	1.219261	0.212063	0.068495
0.5	0.035158	0.103372	0.260874	0.367198	1.142975	0.210455	0.068256
0.56234	0.027037	0.080916	0.221011	0.322683	1.047037	0.208219	0.067923
0.75	0.010181	0.032561	0.122095	0.213179	0.768814	0.19997	0.066689
1.0	0.001796	0.006473	0.045352	0.123297	0.461235	0.185567	0.064514
1.33352	8.2e-05	0.000367	0.008352	0.064418	0.223392	0.160718	0.060695
1.77828	-	2e-06	0.000371	0.029558	0.097211	0.118847	0.054065
3.16228	-	-	-	0.001165	0.011091	0.014263	0.024308
5.62341	-	-	-	-	0.00034	0.00057	0.000634
10.0	-	-	-	-	-	4e-06	3e-06
17.78279	-	-	-	-	-	-	-

$\mathbf{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.094714	0.260323	0.477228	0.539628	1.295862	0.197266	0.066556
0.1	0.091067	0.250998	0.467159	0.53082	1.283232	0.197001	0.066511
0.17783	0.083584	0.231775	0.445829	0.512305	1.256308	0.196423	0.066411
0.31623	0.063733	0.180133	0.384035	0.459709	1.176709	0.194598	0.066097
0.45	0.042446	0.123414	0.305857	0.394987	1.071024	0.191874	0.065626
0.5	0.035159	0.103564	0.274806	0.369646	1.026763	0.190617	0.065409
0.56234	0.027038	0.081091	0.236322	0.338318	0.969319	0.188869	0.065106
0.75	0.010181	0.032613	0.132763	0.251849	0.790231	0.18242	0.063983
1.0	0.001796	0.006438	0.045179	0.164176	0.560306	0.171164	0.062005
1.33352	8.1e-05	0.000354	0.005814	0.08995	0.308784	0.151783	0.058534
1.77828	-	1e-06	0.000114	0.03286	0.12204	0.119388	0.052522
3.16228	-	-	-0.0	2e-06	0.006114	0.019949	0.02605
5.62341	-	-	-	-	4.6e-05	0.000264	0.000564
10.0	-	-	-	-	-	-	-
17.78279	-	-	-	-	-	-	-

表 VIII：薄高斯源常数 C_{v} 问题中， $x_0 = 0.5$、 $t_0 = 10$和 $C_{\mathrm{v0}} = 0.03$吉焦 · 厘米$^{-3}$ · 千电子伏$^{-1}$条件下，物质能量密度 e的输运（上）和 S_2 （下）结果

$\boldsymbol{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.004825	0.044224	0.323377	1.4684	2.455993	1.518526	1.133064
0.1	0.004638	0.042571	0.313295	1.438115	2.446023	1.51794	1.132861
0.17783	0.004255	0.039172	0.292399	1.373348	2.424567	1.516657	1.132417
0.31623	0.003241	0.030112	0.235379	1.183116	2.359381	1.512586	1.131013
0.45	0.002154	0.020302	0.170708	0.944125	2.267966	1.506441	1.128901
0.5	0.001783	0.016913	0.147332	0.851718	2.227558	1.503576	1.12792
0.56234	0.001369	0.013111	0.120189	0.740141	2.172608	1.499564	1.126549
0.75	0.000513	0.005089	0.057328	0.458276	1.96946	1.484442	1.121422
1.0	8.9e-05	0.000949	0.016339	0.231272	1.546952	1.456735	1.112196
1.33352	4e-06	4.8e-05	0.002002	0.097311	0.889883	1.4042	1.095386
1.77828	-	-	5.5e-05	0.032461	0.400128	1.294119	1.064084
3.16228	-	-	-	0.000322	0.042204	0.349552	0.857807
5.62341	-	-	-	-	0.001039	0.014856	0.054666
10.0	-	-	-	-	-	8.8e-05	0.000336
17.78279	-	-	-	-	-	-	-

$\mathbf{x/t}$	0.1	0.31623	1.0	3.16228	10.0	31.6228	100.0
0.01	0.004825	0.044206	0.317475	1.332131	2.309445	1.479441	1.120796
0.1	0.004638	0.042557	0.308253	1.31107	2.303385	1.478948	1.120606
0.17783	0.004255	0.039164	0.289032	1.265902	2.29029	1.47787	1.120189
0.31623	0.003241	0.030116	0.235788	1.131312	2.250065	1.474452	1.118869
0.45	0.002154	0.020312	0.173764	0.954656	2.192602	1.469301	1.116886
0.5	0.001783	0.016923	0.150839	0.882882	2.166882	1.466903	1.115965
0.56234	0.001369	0.013121	0.123828	0.79271	2.13172	1.463548	1.114678
0.75	0.000513	0.005092	0.059398	0.540414	2.00314	1.45095	1.109868
1.0	8.9e-05	0.000947	0.016015	0.293197	1.73921	1.428067	1.101228
1.33352	4e-06	4.7e-05	0.001515	0.113254	1.125017	1.385564	1.085536
1.77828	-	-	2e-05	0.022889	0.453017	1.302486	1.05652
3.16228	-	-	-	-	0.021263	0.375028	0.880385
5.62341	-	-	-	-	3.7e-05	0.00417	0.03231
10.0	-	-	-	-	-	1e-06	1.4e-05
17.78279	-	-	-	-	-	-	-

VII 光学厚结果

这里给出我们认为属于光学厚问题的结果。这里所说的光学厚，是指源宽度远大于一个平均自由程。我们通过指定 $\sigma_a = 800$ 厘米$^{-1}$ 和 $z_0 < 1$厘米来实现这一点（z_0 是具有量纲的 x_0）。本节给出线性化高斯源和方形源的 S_2 及输运结果，以及一个恒定 C_v 高斯源问题的结果。我们不提供恒定 C_v方形源的结果，因为我们的方法无法解析方形源所产生的非线性、非平衡且非常尖锐的波。

由于光学厚问题的结果只有在经过许多平均自由时间后才有意义，因此我们给出 $\tau \approx 0.01$，0。1， 和 1 纳秒时的结果。到这些时刻，未碰撞源已可忽略，任何不连续波前也已衰减。因此，本节中的问题不采用未碰撞源或动网格。在本节的解图中，我们展示能量密度（线性化问题）和温度（非线性问题）的扩散解。这些结果旨在展示光学厚问题中输运与扩散之间的定性差异，计算时使用了数值非通量限制非平衡扩散求解器 [23]。

VII.A 带方形源的 Su-Olson问题

为使有量纲空间域保持在可处理的范围内，我们在公式（5）和（6）中设定 $l = \frac{1}{800}$ 。这样一来，有量纲域与无量纲域相同，但系统会变得更加刚性。我们再次采用方形源（公式（36）），并令 $x_0 = 0.5$ 和 $t_0 = 0.0125$。我们不使用未碰撞源，因为我们关注的评估时刻远晚于未碰撞解衰减至零的时刻。

对于这个问题的网格，为达到令人满意的收敛效果，只需使用静态网格。我们采用第VI.A节所述的初始化方法，但初始宽度 δx 不设为一个小数值，而是设为对评估时刻解宽度的估计值，且网格边缘始终不移动。从本质上说，该网格与薄方形源所用的初始网格相同，只是覆盖了整个空间域。网格边缘采用高斯-勒让德间距，这会使静态网格边缘集中分布在源边缘附近，从而更有可能解析波前所在的区域。

解宽度初始猜测值很重要，并且随着每次运行中空间划分数量的增加而不断调整。由于在我们的 DG 公式中解可能为负值，且出现尖锐波前时更容易出现负值，因此温度使用 $T = \mathrm{sign}(e)\lfloor |e| \rfloor^{1/4}$ 计算。

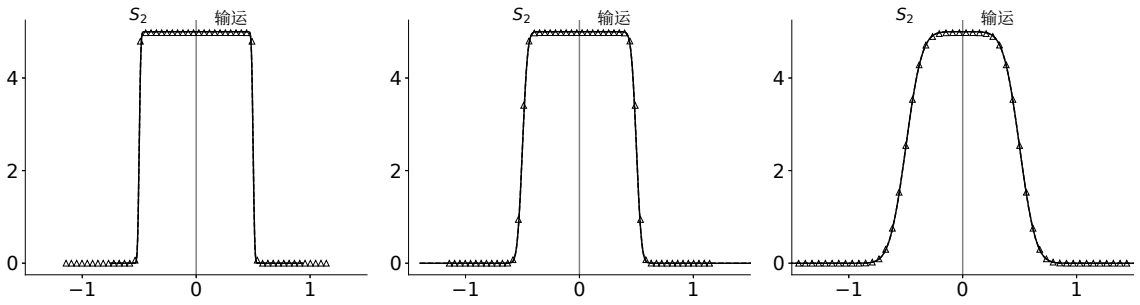
该问题的解图（图14）表明，在所选时刻，解处于局部平衡状态。与所选的薄方形源解不同，那些解中由以波速传播的不连续波决定了解的传播速度；在这里，源项开启期间，一种类似非线性热波的波向外传播。图 15 和图 16 所示的几何收敛之所以可能，是因为标量通量中的非光滑部分已衰减至零，且解处于平衡状态，从而使波前的前沿变得平滑。

我们还注意到输运解与 S_2 解之间的相似性，这一点在解图以及表 IX 和 X 中显而易见。光学厚结果与此相符，因为我们发现，随着时间推移，当两种解都达到平衡时，它们会收敛。解图还显示，输运/S_2 与扩散在定性上相符。

VII.B 带高斯源的 Su-Olson 问题

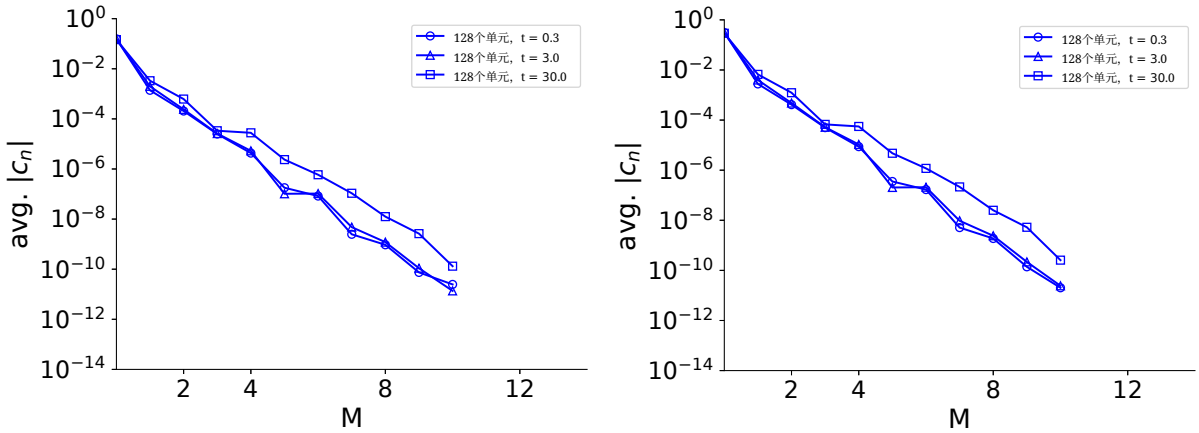
为了在光学薄和光学厚区域提供一致的示例，并试运行下一节中的常量 C_v 厚高斯源，我们在此加入一个光学厚高斯源。对于此源和非线性高斯源，我们指定长度参数 $x_0 = 0.375$。源持续时间 t_0 仍为 0。0125，且 $l = \frac{1}{800}$。同样，源项由公式（37）给出，我们不使用未碰撞源。与薄高斯源一样，无需使用动网格。

图 17 显示，与光学厚方形源一样，所选时间窗口内的解处于平衡状态。不过，此处没有波前，但解保持高斯特征。与方形源一样，输运、扩散和 S_2 解非常相似。图 18 和图 19 展示了标准间断伽辽金方法的几何收敛。我们注意到，在此问题和 Su-Olson 问题中，



(a) $t = 0.3$ (b) $t = 3$ (c) $t = 30$

图14：对于光学厚 Su-Olson 方形源问题，当 $x_0 = 0.5$, $t_0 = 0.0125$ 时，S_2（$x = 0$左侧）和全输运（$x = 0$右侧）的解。实线表示标量通量，ϕ；虚线表示物质能量密度，e。三角形表示能量密度的扩散解。在本图的尺度下，实线与虚线重合。



(a) 辐射能量密度，ϕ (b) 物质能量密度，e

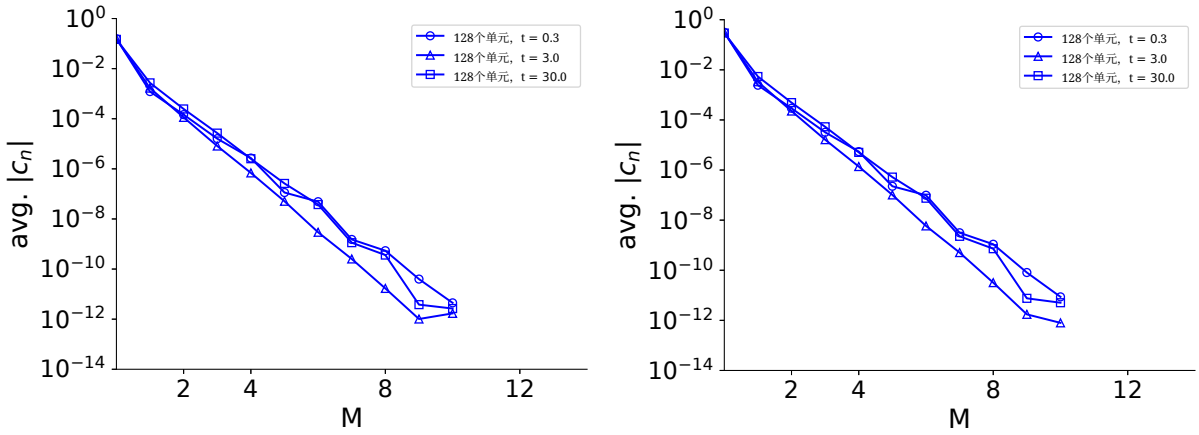
图15：光学厚（$\sigma_a = 800$ 厘米$^{-1}$）Su-Olson 方形源问题的解展开系数对数线性缩放平均值（由方程（44）求得），其中 $x_0 = 0.5$, $t_0 = 0.0125$。所有结果的求积阶数均为 S_{16}。所有结果均采用静态网格和标准源处理计算得出。

表 IX：厚方形源 Su-Olson问题的标量通量 ϕ 结果：输运（上）和 S_2 （下），其中 $x_0 = 0.5$、 $t_0 = 0.0125$

$\boldsymbol{x/t}$	0.3	3.0	30.0
-	4.999998	4.999998	4.999957
0.0579	4.999998	4.999998	4.999802
0.1158	4.999998	4.999998	4.998522
0.1737	4.999998	4.999998	4.991207
0.2316	4.999998	4.999998	4.959099
0.2895	4.999998	4.999998	4.850729
0.3474	4.999998	4.999957	4.569407
0.4053	4.999998	4.981594	4.007694
0.4632	4.997551	4.256673	3.144975
0.5211	0.141706	1.375262	2.125719
0.5789	-	0.063798	1.200785
0.6368	-	0.000274	0.552639
0.6947	-	-	0.203932
0.7526	-	-	0.05963
0.8105	-	-	0.013701
0.8684	-	-	0.002459
0.9263	-	-	0.000343
0.9842	-	-	3.7e-05
1.0421	-	-	3e-06
1.1	-	-	-

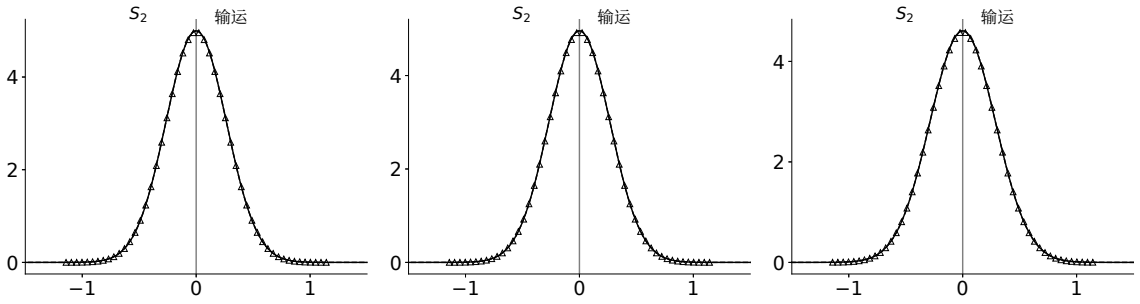
$\boldsymbol{x/t}$	0.3	3.0	30.0
-	4.999999	5.0	4.999961
0.0579	4.999999	5.0	4.999807
0.1158	4.999999	5.0	4.998528
0.1737	4.999999	5.0	4.991218
0.2316	4.999999	5.0	4.959116
0.2895	4.999999	4.999999	4.850739
0.3474	4.999999	4.999961	4.56939
0.4053	4.999999	4.981698	4.007652
0.4632	4.997908	4.256289	3.144948
0.5211	0.141029	1.375703	2.125739
0.5789	-	0.063676	1.200832
0.6368	-	0.000265	0.552668
0.6947	-	-	0.203932
0.7526	-	-	0.059617
0.8105	-	-	0.013692
0.8684	-	-	0.002455
0.9263	-	-	0.000342
0.9842	-	-	3.7e-05
1.0421	-	-	3e-06
1.1	-	-	-

方形源需要 128 个空间单元才能达到所需的收敛速度，尽管解是平滑的。这是由于长度尺度较小。



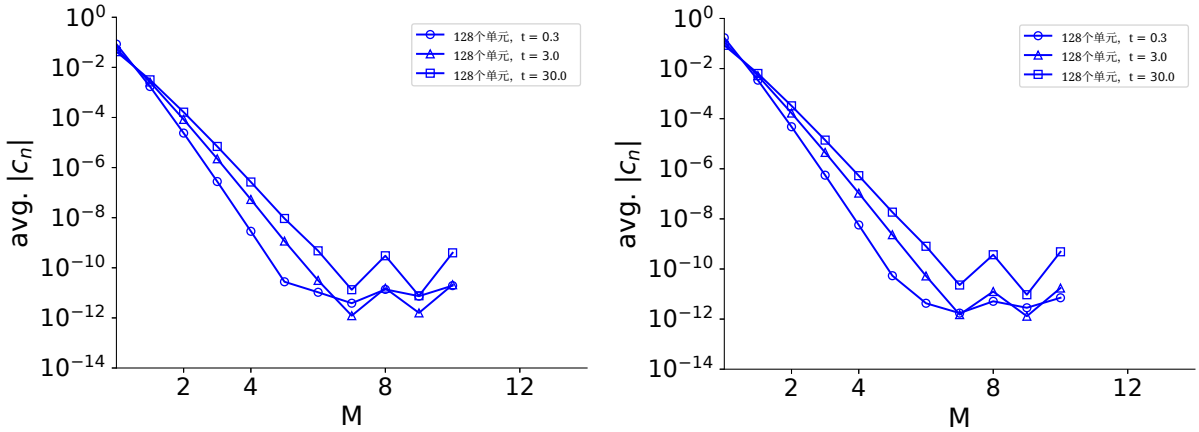
（a）辐射能量密度，ϕ　　（b）物质能量密度，e

图16：在光学厚（$\sigma_a = 800$ 厘米$^{-1}$）S_2 Su-Olson 方形源问题中，解展开系数（由方程（44）求得）的对数线性缩放平均值，其中 $x_0 = 0.5$、$t_0 = 0.0125$。所有结果均使用静态网格和标准源处理计算。



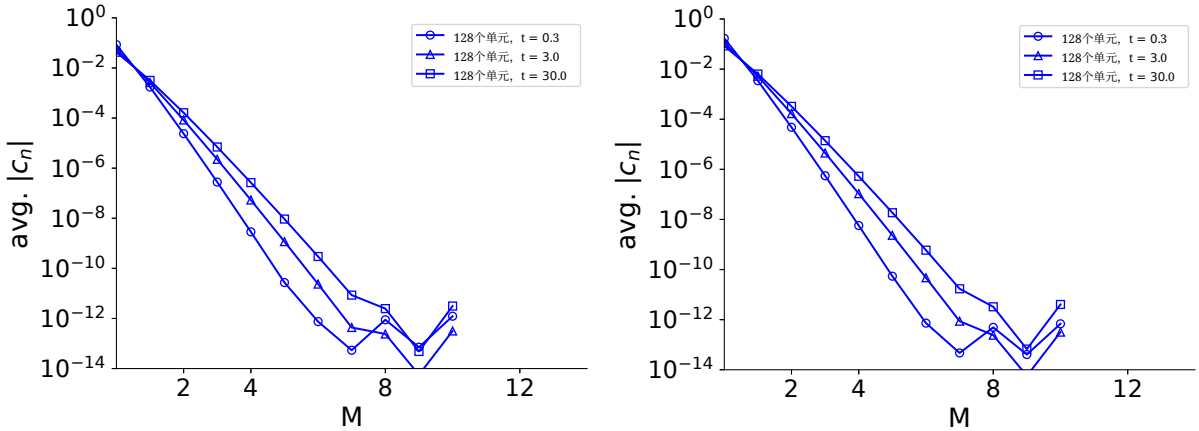
(a) $t = 0.3$　　(b) $t = 3$　　(c) $t = 30$

图 17：S_2 $x = 0$左侧和 $x = 0$右侧的全输运解，针对光学厚的 Su-Olson 高斯源问题，其中 $x_0 = 0.375$、$t_0 = 0.0125$。实线表示标量通量（ϕ），虚线表示物质能量密度（e）。三角形表示能量密度的扩散解。在本图的尺度下，实线与虚线重合。



(a) 辐射能量密度，$\bar{\phi}$　　(b) 物质能量密度，$\bar{e}$

图18：对于光学厚（$\sigma_a = 800$ 厘米$^{-1}$）Su-Olson 高斯源问题，解展开系数（由方程（44）求得）的对数线性缩放平均值，其中 $x_0 = 0.375$, $t_0 = 0.0125$。所有结果的求积阶数均为 S_{16}。所有结果均采用静态网格和标准源处理计算。



(a) 辐射能量密度，$\bar{\phi}$　　(b) 物质能量密度，$\bar{e}$

图19：对于光学厚（$\sigma_a = 800$ 厘米$^{-1}$） S_2 Su-Olson 方形高斯问题，解展开系数（由方程（44）求得）的对数线性缩放平均值，其中 $x_0 = 0.375$, $t_0 = 10$。所有结果均采用静态网格和标准源处理计算。

表 X：厚方形源 Su-Olson问题中，物质能量密度 e 的输运（上）和 S_2 （下）结果,⁻ 其中 $x_0 = 0.5$, $t_0 = 0.0125$。这些结果的收敛情况绘于图 15 和图 16。

-	0.3	3.0	30.0
-	4.999998	4.999998	4.999957
0.0579	4.999998	4.999998	4.999802
0.1158	4.999998	4.999998	4.998522
0.1737	4.999998	4.999998	4.991208
0.2316	4.999998	4.999998	4.959105
0.2895	4.999998	4.999998	4.850742
0.3474	4.999998	4.999957	4.56943
0.4053	4.999998	4.981624	4.007719
0.4632	4.997609	4.256925	3.144988
0.5211	0.140405	1.375054	2.125712
0.5789	-	0.063722	1.200762
0.6368	-	0.000273	0.552615
0.6947	-	-	0.203916
0.7526	-	-	0.059622
0.8105	-	-	0.013699
0.8684	-	-	0.002458
0.9263	-	-	0.000343
0.9842	-	-	3.7e-05
1.0421	-	-	3e-06
1.1	-	-	-

-	0.3	3.0	30.0
-	4.999999	5.0	4.999961
0.0579	4.999999	5.0	4.999807
0.1158	4.999999	5.0	4.998529
0.1737	4.999999	5.0	4.99122
0.2316	4.999999	5.0	4.959121
0.2895	4.999999	4.999999	4.850752
0.3474	4.999999	4.999961	4.569413
0.4053	4.999999	4.981729	4.007677
0.4632	4.997962	4.256541	3.144961
0.5211	0.139713	1.375495	2.125732
0.5789	-	0.063599	1.200809
0.6368	-	0.000264	0.552644
0.6947	-	-	0.203916
0.7526	-	-	0.05961
0.8105	-	-	0.013689
0.8684	-	-	0.002455
0.9263	-	-	0.000342
0.9842	-	-	3.6e-05
1.0421	-	-	3e-06
1.1	-	-	-

VII.C 常数 C_v 高斯问题

最后，我们给出了恒定 C_v 光学厚高斯源问题的结果。与该问题的线性版本一样， $x_0 = 0.375$、 $t_0 = 0.0125$和 $l = \frac{1}{800}$。我们选择的不透明度与光学薄情形中使用的相同，恒定热容为 $\mathscr{C}_{\mathrm{v}0} = 0.03$吉焦 · 厘米$^{-3}$ · 千电子伏$^{-1}$ （

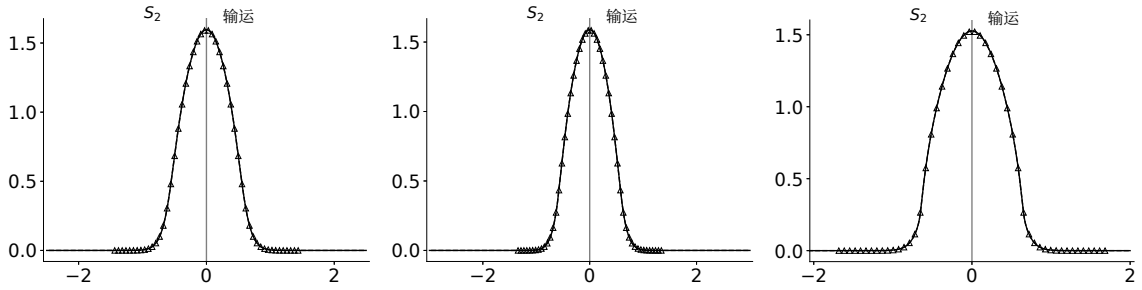
表 XI：厚高斯源 Su-Olson问题（ $x_0 = 0.375$、 $t_0 = 0.0125$）中标量通量 ϕ 的输运（上）和 S_2 （下）结果

x/t	0.3	3.0	30.0
-	4.99565	4.956221	4.607285
0.0842	4.750452	4.71669	4.414224
0.1684	4.084736	4.065342	3.882236
0.2526	3.175988	3.173439	3.13421
0.3368	2.232954	2.243553	2.322698
0.4211	1.418754	1.435689	1.579266
0.5053	0.815508	0.832457	0.986082
0.5895	0.423872	0.437156	0.565183
0.6737	0.199217	0.207914	0.297361
0.7579	0.084665	0.089558	0.143615
0.8421	0.032536	0.034938	0.063669
0.9263	0.011306	0.012344	0.025911
1.0105	0.003552	0.00395	0.009679
1.0947	0.001009	0.001144	0.003319
1.1789	0.000259	0.0003	0.001044
1.2632	6e-05	7.1e-05	0.000301
1.3474	1.2e-05	1.5e-05	7.9e-05
1.4316	2e-06	2e-06	1.9e-05
1.5158	-	-	4e-06
1.6	-	-	-

x/t	0.3	3.0	30.0
-	4.995653	4.956229	4.607284
0.0842	4.750456	4.716697	4.414223
0.1684	4.084739	4.065349	3.882238
0.2526	3.175991	3.173444	3.134214
0.3368	2.232956	2.243557	2.322703
0.4211	1.418755	1.435691	1.57927
0.5053	0.815508	0.832459	0.986085
0.5895	0.423872	0.437157	0.565185
0.6737	0.199218	0.207914	0.297362
0.7579	0.084665	0.089558	0.143614
0.8421	0.032536	0.034938	0.063669
0.9263	0.011306	0.012344	0.02591
1.0105	0.003552	0.00395	0.009679
1.0947	0.001009	0.001144	0.003319
1.1789	0.000259	0.0003	0.001044
1.2632	6e-05	7.1e-05	0.000301
1.3474	1.2e-05	1.5e-05	7.9e-05
1.4316	2e-06	2e-06	1.9e-05
1.5158	-	-	4e-06
1.6	-	-	-

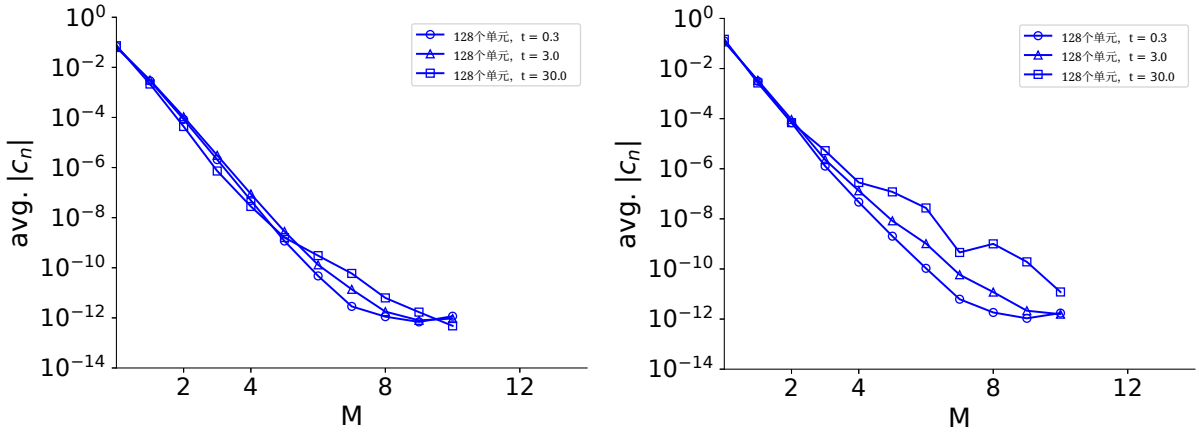
与光学薄问题中的相同）。源项仍由公式（37）给出，且不使用未碰撞解。与线性厚高斯源项问题一样，采用静态网格。

虽然与线性化高斯源项问题的结果相比，解图（图20）中的高斯剖面略有变形，但该解与线性化问题一样平滑，并且图21和图22显示出谱收敛。标量通量和物质能量密度如下



(a) $t = 0.3$ (b) $t = 3$ (c) $t = 30$

图20：对于光学厚的常数C_{v} 高斯源问题， S_2 （ $x = 0$左侧）和全输运（ $x = 0$右侧）的解，其中 $x_0 = 0.375$、 $t_0 = 0.0125$。实线表示辐射温度 $\phi^{1/4}$，虚线表示温度T。三角形表示温度的扩散解。在本图的尺度下，实线与虚线重合。



(a) 辐射能量密度， ϕ (b) 物质能量密度， e

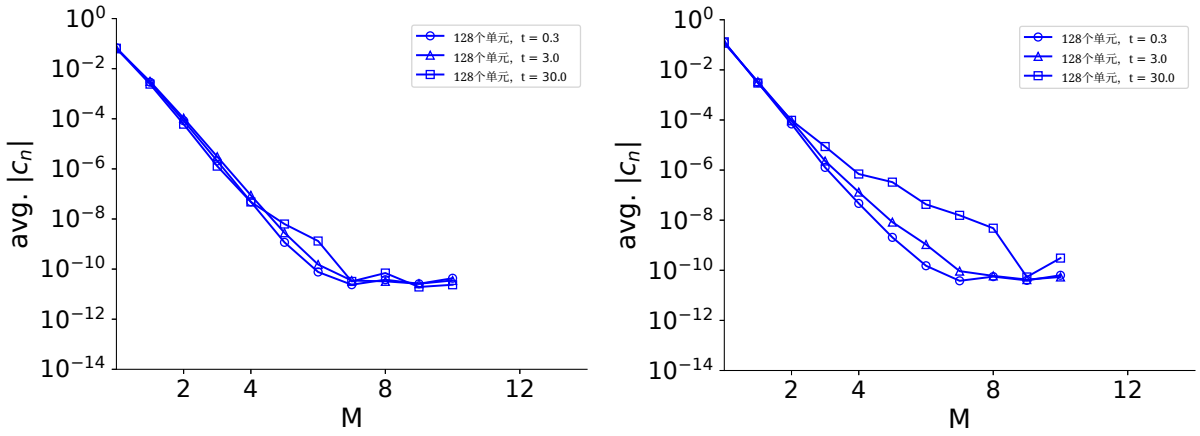
图21：对于光学厚的（$\sigma_a = 800$ 厘米$^{-1}$）常数 C_{v} 高斯源问题，解展开系数的对数线性缩放平均值（由方程（44）求得），其中 $x_0 = 0.375$、 $t_0 = 0.0125$。所有结果的求积阶数均为 S_{16}。所有结果均使用静态网格和标准源项处理计算。

表 XII：厚高斯源 Su-Olson 问题中物质能量密度 e 的输运（上）和 S_2 （下）结果，其中 $x_0 = 0.375$, $t_0 = 0.0125$

$\boldsymbol{x/t}$	0.3	3.0	30.0
-	4.995668	4.956239	4.6073
0.0842	4.750468	4.716705	4.414236
0.1684	4.084745	4.065351	3.882244
0.2526	3.17599	3.17344	3.134212
0.3368	2.232949	2.243548	2.322695
0.4211	1.418746	1.435681	1.57926
0.5053	0.8155	0.832449	0.986075
0.5895	0.423866	0.43715	0.565178
0.6737	0.199213	0.20791	0.297357
0.7579	0.084663	0.089556	0.143612
0.8421	0.032535	0.034937	0.063668
0.9263	0.011305	0.012343	0.02591
1.0105	0.003552	0.003949	0.009679
1.0947	0.001009	0.001144	0.003319
1.1789	0.000259	0.0003	0.001044
1.2632	6e-05	7.1e-05	0.000301
1.3474	1.2e-05	1.5e-05	7.9e-05
1.4316	2e-06	2e-06	1.9e-05
1.5158	-	-	4e-06
1.6	-	-	-

$\boldsymbol{x/t}$	0.3	3.0	30.0
-	4.995672	4.956247	4.607298
0.0842	4.750472	4.716712	4.414236
0.1684	4.084748	4.065358	3.882246
0.2526	3.175992	3.173446	3.134216
0.3368	2.232951	2.243552	2.3227
0.4211	1.418747	1.435684	1.579264
0.5053	0.8155	0.832451	0.986078
0.5895	0.423866	0.437151	0.565179
0.6737	0.199214	0.20791	0.297357
0.7579	0.084663	0.089556	0.143611
0.8421	0.032535	0.034937	0.063667
0.9263	0.011305	0.012343	0.025909
1.0105	0.003552	0.003949	0.009679
1.0947	0.001009	0.001144	0.003319
1.1789	0.000259	0.0003	0.001044
1.2632	6e-05	7.1e-05	0.000301
1.3474	1.2e-05	1.5e-05	7.9e-05
1.4316	2e-06	2e-06	1.9e-05
1.5158	-	-	4e-06
1.6	-	-	-

见表 XIII 和表 XIV。与线性化高斯分布一样，扩散近似在定性上是正确的。



(a) 辐射能量密度， ϕ (b) 物质能量密度， e

图22：光学厚（$\sigma_a = 800$厘米$^{-1}$） S_2 常数 C_{v} 高斯问题中解展开系数的对数线性缩放平均值（由方程（44）求得），其中 $x_0 = 0.375$、 $t_0 = 0.0125$。所有结果均采用静态网格和标准源处理计算。

表XIII：厚高斯源常数 C_{v} 问题（ S_2 上部）和 S_2 （下部）的标量通量 ϕ输运结果，其中 $x_0 = 0.375$、$t_0 = 0.0125$，以及 $C_{\mathrm{v}0} = 0.03$吉焦 · 厘米$^{-3}$ · 千电子伏$^{-1}$

x/t	0.3	3.0	30.0
-	6.494763	6.374101	5.426524
0.0789	6.11596	6.012864	5.186732
0.1579	5.085009	5.026915	4.518059
0.2368	3.682628	3.677866	3.56146
0.3158	2.248727	2.285336	2.499432
0.3947	1.081952	1.134228	1.513531
0.4737	0.352326	0.389958	0.733651
0.5526	0.060476	0.069031	0.230211
0.6316	0.00502	0.005255	0.01702
0.7105	0.000253	0.000255	0.000274
0.7895	8e-06	8e-06	8e-06
0.8684	-	-	-

x/t	0.3	3.0	30.0
-	6.494762	6.374098	5.42651
0.0789	6.115958	6.012861	5.18672
0.1579	5.085008	5.026914	4.518052
0.2368	3.682627	3.677866	3.561461
0.3158	2.248727	2.285337	2.499437
0.3947	1.081952	1.134229	1.513539
0.4737	0.352326	0.389959	0.733658
0.5526	0.060476	0.069032	0.230216
0.6316	0.00502	0.005255	0.017021
0.7105	0.000253	0.000255	0.000274
0.7895	8e-06	8e-06	8e-06
0.8684	-	-	-

表XIV：厚高斯源常数 C_{v} 问题中， $x_0 = 0.375$、 $t_0 = 0.0125$ 和 $C_{\mathrm{v0}} = 0.03$吉焦 · 厘米$^{-3}$ · 千电子伏$^{-1}$条件下，物质能量密度 e 的输运（上）和 S_2 （下）结果

x/t	0.3	3.0	30.0
-	3.490028	3.473704	3.33671
0.0737	3.444608	3.429805	3.303993
0.1474	3.309364	3.299069	3.20642
0.2211	3.086882	3.083965	3.04554
0.2947	2.780372	2.787696	2.82358
0.3684	2.389727	2.410536	2.540796
0.4421	1.913502	1.950669	2.194284
0.5158	1.363511	1.408883	1.769126
0.5895	0.82657	0.846776	1.213573
0.6632	0.436854	0.439279	0.485835
0.7368	0.210529	0.210694	0.212429
0.8105	0.093598	0.093606	0.093685
0.8842	0.038508	0.038508	0.038511
0.9579	0.014665	0.014665	0.014665
1.0316	0.005169	0.005169	0.005169
1.1053	0.001686	0.001686	0.001686
1.1789	0.00051	0.00051	0.00051
1.2526	0.000142	0.000142	0.000142
1.3263	3.6e-05	3.6e-05	3.6e-05
1.4	8e-06	8e-06	8e-06

x/t	0.3	3.0	30.0
-	3.490028	3.473704	3.336708
0.0737	3.444608	3.429805	3.303991
0.1474	3.309364	3.299069	3.206419
0.2211	3.086882	3.083965	3.04554
0.2947	2.780372	2.787696	2.823581
0.3684	2.389727	2.410537	2.540799
0.4421	1.913502	1.95067	2.194288
0.5158	1.363511	1.408884	1.769132
0.5895	0.82657	0.846774	1.213586
0.6632	0.436853	0.439278	0.485758
0.7368	0.210529	0.210693	0.212427
0.8105	0.093598	0.093606	0.093684
0.8842	0.038508	0.038508	0.038511
0.9579	0.014665	0.014665	0.014665
1.0316	0.005169	0.005169	0.005169
1.1053	0.001686	0.001686	0.001686
1.1789	0.00051	0.00051	0.00051
1.2526	0.000142	0.000142	0.000142
1.3263	3.6e-05	3.6e-05	3.6e-05
1.4	8e-06	8e-06	8e-06

VIII 结论

我们给出了光学薄介质和光学厚介质中恒定不透明度时变辐射输运问题的基准解，其中比热采用两种函数形式。这些解可供以下研究人员使用：寻求用于验证的非线性辐射输运基准的研究人员；希望获得更多位有效数字的 Su-Olson 类问题解的研究人员；以及打算用输运代码解析光学厚极限下一个平均自由程的研究人员。尽管不连续源项不便用于间断伽辽金方法，且为获得准确结果需要复杂的网格处理，但我们仍给出了方形源项的解，因为它们易于在数值代码中模拟，而且已在运行 Su-Olson 问题的代码中实现。实现我们定义的适用于间断伽辽金方法的高斯源项的研究人员，将能够收敛到比方形源项更准确的结果。

为支持我们关于结果达到基准质量的说法，我们展示了每个结果中解展开系数模的收敛情况。虽然这不一定能保证所求解系统的正确性，但确实能增强我们对解已收敛至特定容差的信心。我们还通过以高精度运行 S_2 线性化问题的基准算例，并将结果与 [8] 中最初发表的结果进行比较，进一步增强了对解的信心。此外，我们使用 S_n 代码检查了非线性问题是否存在系统误差。未来的工作将研究非恒定不透明度问题，以便为辐射输运代码提供更全面的覆盖。

致谢

本研究由洛斯阿拉莫斯国家实验室资助，合同编号为 #599008，项目为“辐射流体力学模拟验证”。

A 输运方程的未碰撞解

本节给出了公式（41）在方形源和高斯源情况下的解，这些解用于 S_2 问题中的未碰撞源处理。

A.I 高斯源

将公式（37）代入公式（41），积分结果为：

$$\overline{\phi}_u^{gs}(x,t) = \frac{1}{4}\sqrt{3\pi}x_0 e^{\frac{3x_0^2}{4}-\sqrt{3}x}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{3}x_0}(t_0-t)+\frac{x}{x_0}-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)+\right.$$
$$\left. e^{2\sqrt{3}x}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{3}x_0}+\frac{x}{x_0}+\frac{\sqrt{3}x_0}{2}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{3}x_0}(t-t_0)+\frac{x}{x_0}+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)\right)+\operatorname{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{3}x_0}-\frac{x}{x_0}+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)\right) \tag{56}$$

A.II 方形源

为计算方形源的积分公式（41）——公式（36），必须考虑源项中阶跃函数所允许的每一种积分限情况。这将得到未碰撞标量通量的分段函数。若定义：

$$F(t,\tau) = -\frac{1}{2}\exp(-t+\tau), \tag{57}$$

那么，若 $t \le t_0$,

$$\phi_u^{ss}(x,t) = \begin{cases} F\Big|_{\max(0,\tau_a)}^{\max(0,\tau_b)} & (|x| > x_0) \\ \begin{cases} 2F\Big|_{0}^{\min(t,t_0)} & (t+\sqrt{3}|x| \le \sqrt{3}x_0) \\ F\Big|_{\tau_a}^{\tau_c} + 2F\Big|_{\tau_c}^{\min(t,t_0)} & \left(t+\sqrt{3}\,|x| \ge \sqrt{3}\,x_0\right)\ \&\ \left(t-\sqrt{3}(|x|+x_0) > 0\right) \\ F\Big|_{0}^{\max(0,\tau_c)} + 2F\Big|_{\max(0,\tau_c)}^{\min(t,t_0)} & \left(t+\sqrt{3}\,|x| \ge \sqrt{3}\,x_0\right)\ \&\ \left(t-\sqrt{3}(|x|+x_0) \le 0\right) \end{cases} & (|x| \le x_0) \end{cases} \tag{58}$$

或者，如果 $t > t_0$,

$$\phi_u^{ss}(x,t) = \begin{cases} F\Big|_{\min(\tau_e,t_0)}^{\min(\tau_d,t_0)} & x_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}(t-t_0) \le x \le x_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}(t-t_0) \\ F\Big|_{\min(\tau_e,t_0)}^{\min(\tau_d,t_0)} & x > x_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}(t-t_0) \\ \begin{cases} 2F\Big|_{0}^{t_0} & t - \frac{3}{\sqrt{3}}(x_0-x) \le 0 \\ 2F\Big|_{\tau_d}^{t_0} + F\Big|_{0}^{\tau_d} & t - \frac{3}{\sqrt{3}}(x_0-x) > 0 \text{ and } t - \frac{3}{\sqrt{3}}(x_0-x) < t_0 \end{cases} & x < x_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}(t-t_0) \end{cases} \tag{59}$$

其中

$$\tau_a = t - \sqrt{3}(|x| + x_0), \tag{60}$$

$$\tau_b = t - \sqrt{3}(|x| - x_0), \tag{61}$$

$$\tau_c = t - \sqrt{3}(x_0 - |x|), \tag{62}$$

$$\tau_d = \left| t - \frac{3}{\sqrt{3}}(x - x_0) \right|, \tag{63}$$

and

$$\tau_e = \left| t - \frac{3}{\sqrt{3}}(x + x_0) \right|. \tag{64}$$

参考文献

[1] J·斯特凡。关于热辐射与温度的关系，《帝国科学院数学与自然科学部院刊》，79:S–391，1879年。

[2] R·E·马沙克。辐射对激波行为的影响。《流体物理学》，1(1)，1958年。

[3] 阿尔伯特·G·佩切克、拉尔夫·E·威廉姆森和约翰·K·伍滕二世。恒定驱动温度下的辐射穿透。技术报告 LAMS-2421，洛斯阿拉莫斯科学实验室，新墨西哥州，1960年。

[4] William Bennett 和 Ryan G McClarren。具有独立离子温度和电子温度的高能量密度辐射输运自相似解。英国皇家学会会刊 A 辑，477(2249):20210119，2021年。[5] GC Pomraning。非平衡 Marshak 波问题。定量光谱学与辐射输运杂志，21(3):249–261，1979年。[6] Ryan G McClarren、James Paul Holloway 和 Thomas A Brunner。几种几何结构下时变热辐射输运的解析 P_1 解。定量光谱学与辐射输运杂志，109(3):389–403，2008年。[7] Barry D Ganapol 和 GC Pomraning。非平衡 Marshak 波问题：输运理论解。定量光谱学与辐射输运杂志，29(4):311–320，1983年。[8] Bingjing Su 和 Gordon L. Olson。各向同性散射介质中非平衡辐射输运的解析基准算例。核能年鉴，24(13):1035–1055，1997年。ISSN 0306- 4549。doi: https://doi.org/10.1016/S0306-4549(96)00100-4。URL https://www.sciencedirect.com/ science/article/pii/S0306454996001004。[9] Bingjing Su 和 Gordon L. Olson。双温非平衡辐射输运的非灰基准结果。定量光谱学与辐射输运杂志，62(3):279–302，1999年。ISSN 0022-4073。doi: https://doi.org/10.1016/S0022-4073(98)00105-8。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407398001058。[10] Su Bingjing 和 Gordon L Olson。非平衡 Marshak 扩散问题的基准结果。定量光谱学与辐射输运杂志，56(3):337–351，1996年。[11] Ryan G McClarren 和 John G W¨ohlbier。辐射扩散和电子扩散条件下离子–电子–辐射耦合问题的解。定量光谱学与辐射输运杂志，112(1):119–130，2011年。[12] Ryan G. McClarren。非平衡扩散模型的双群辐射输运基准算例。计算与理论输运杂志，50(6-7):583–597，2022年。doi: 10.1080/23324309.2022.2032757。[13] William Bennett 和 Ryan G McClarren。采用动网格和精确未碰撞源处理的时变输运问题准确解。核能年鉴，180:109474，2023年。[14] B. D. Ganapol、R. S. Baker、J. A. Dahl 和 Raymond E. Alcouffe。均匀无限介质时变解析基准算例。技术报告 LA-UR-01-1854，洛斯阿拉莫斯国家实验室，2001年。URL https://www.osti.gov/biblio/975281。[15] William Bennett 和 Ryan G McClarren。各向同性散射无限介质时变输运问题的基准算例。arXiv 预印本 arXiv:2205.15783，2022年。[16] 苏布拉马尼扬·钱德拉塞卡。辐射输运。多佛出版社，1960年。[17] J.E. Marsden 和 A. Tromba。向量微积分。《向量微积分》第 1-93 页。W. H. Freeman，2003年。ISBN 9780716749929。URL https://books.google.com/books?id=LiRLJf2m_dwC。[18] Nico Schl¨omer、Nick Papior、Darius Arnold、Jan Blechta 和 Rasmus Zetter。nschloe/quadpy，2021年。URL https://zenodo.org/record/5541216。[19] Pauli Virtanen、Ralf Gommers 等。SciPy 1.0：用于科学计算的 Python 基础算法。《自然·方法》，17(3):261–272，2020年。doi: 10.1038/s41592-019-0686-2。[20] William Bennett 和 Ryan G. McClarren。动网格辐射输运，2022年。URL https://github.com/wbennett39/moving{_}mesh{_}radiative{_}transfer。

[21] James J Duderstadt 和 William Russell Martin。《输运理论》。输运理论，1979年。[22] RJ LeVeque、D Mihalas、EA Dorfi、E M¨uller 和 Ernst A. Dorfi。《辐射流体力学：数值方面与应用》。天体物理流体流动的计算方法：Saas-Fee高级课程第27期讲义，1997年，瑞士天体物理学与天文学会，第263–341页，1998年。[23] Kelli D Humbird 和 Ryan G McClarren。采用通量限制扩散进行高能量密度辐射输运的基于伴随的敏感性分析。《高能量密度物理》，22：12–16，2017年。