实数 n 次勾股定理

Jeffrey S. Lee[1,2,4]
Gerald B. Cleaver[1,3]

[1]早期宇宙宇宙学与弦理论小组[2]空间物理数值建模小组 天体物理、空间物理与工程研究中心[3]物理系[4]地球科学系 贝勒大学 贝尔广场一号，德克萨斯州韦科市，邮编 76706

Jeff_Lee@Baylor.edu
Gerald_Cleaver@Baylor.edu

关键词：∞次勾股定理、余弦定理、三角形最大面积、三角形最小面积

字数：4203

摘要

本文将勾股定理推广至正负实指数，使其形式为并采用定义 。 对于， 顶角为实数是必要条件，而，除其定义外不受任何限制。然而，对于，本研究发现了使顶角为实数所必需的两个重要限制：，以及 n不能超过一个临界值，该临界值取决于 γ。此外，本文还确定了相关三角形的面积，以及这些面积达到最大值或最小值的条件。

1. 引言

几个世纪以来，勾股定理一直是数学基础中的重要内容。虽然最终得到证明的费马大定理[1] 明确证明了当时，不存在勾股数，但勾股定理可以推广到更高的度数，而这些度数不必是正整数。不过，只有正整数才具有维数的物理表示（即，对于 定义线段的标量和； 定义面积的标量和； 定义体积的标量和；而 定义超体积的标量和； 在数学上没有意义，因为它会导致）。

$^{0}+{}^{0}={}^{0}\rightarrow 2=1$ 甲乙

关于采用多种方法将勾股定理推广至高维，文献中已有大量研究[2-15], 最常见的做法是考虑如下形式。 相反，*n*次勾股定理描述的是邻边长度之比（即 γ）与顶角（θ）之间的关系。 表示所应用的三角形不一定是直角三角形。 被定义为一个前提条件，且不失一般性。若 ，则该三角形只是在其所在平面内旋转了，而则意味着对三角形施加了在几何上毫无意义的非物理边长。

$$a^n + b^n = c^n$$

$\gamma \geq 1$

$0 < \gamma \leq 1$ $\gamma \geq 1$ $\gamma < 0$

顶角 θ 是 γ 和 *n*的函数，因此记作 。 当 时，顶角为复数（本文不作讨论）。 当 时，三角形为钝角三角形，且；当 时，三角形为锐角三角形，且 。在每一种 的情况下，邻边长度之比均不受限制（除外）。 $n > 2$

当 时，情况会发生显著变化。为使，必须施加这一限制。然而，即使有 ，对于仍有一项额外的强制限制：若，负实指数勾股定理的度数不得超过一个临界值，该值取决于 。如果，顶角为复数（本文也未讨论这一点）。

对于 ，在固定*a*和γ 值时，相关三角形的面积达到最大值，此时三角形为等腰直角；面积随而增大。反过来，若三角形的周长固定，则随着*n*增大，三角形面积趋近于最大值；随着γ减小，面积趋近于 0。

对于，相关三角形在周长固定时，其面积在 时达到最大，并且当时。对于有限的*n*，当达到最大值时，面积最大。 $\gamma = \sqrt{2}$ $n \to -\infty$

2. 正实数指数的 n 次勾股定理

对于图1中的一般不等边三角形，n 次勾股定理可写为

$$a^n + b^n = c^n \tag{1}$$

它还必须符合标准余弦定理,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta\,, \tag{2}$$

与 。$n \in \mathbb{R}^+$

在这项工作中，将勾股指数扩展到 以外的数，并不会使余弦定理随之扩展，因为它与 [10, 12] 不同，n维单形并不会由此产生。本文的目标是求出顶角 θ，使方程（1）符合公式（2）。

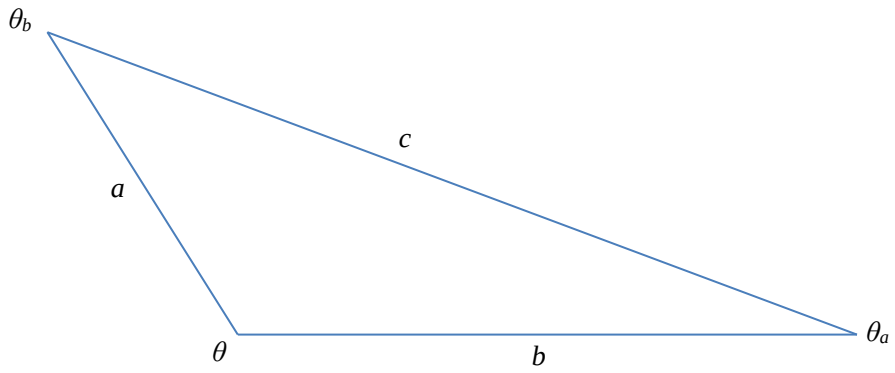

图1：一个不等边 形。

利用 ，将方程（1）改写为

$$c^2 = \left(a^n + b^n\right)^{\frac{2}{n}}, \tag{3}$$

令公式（2）和（3）相等，得到

$$\theta^{\mathbb{R}^+} = \cos^{-1}\left[\frac{\gamma^2 + 1 - \left(\gamma^n + 1\right)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma}\right], \tag{4}$$

其中，$\theta^{\mathbb{R}^+}$表示该顶角来自一种 n 度勾股定理，其中 。

$n \in \mathbb{R}^+$

如果 ，如上所述，不存在三角形；也不存在 0 度（或 0 维）的勾股定理。如果 ， 对于所有边长比都是复用 ，因此不适用于此处。然而，如果， 始终是实角，因此相应的实三角形确实存在。正如预期的那样，对于 情形，方程（4）变为 这是合理的，因为三角形已经塌缩成一条与边长比无关的直线。对于 情形，方程（4）

$n = 2$

变为，并且具有一个90°顶角的传统勾股定理也得以恢复，同样与边长比无关。

需要注意的是，只有当 n 和 γ 满足方程（4）中反余弦函数的自变量不大于 1 且不小于 -1 时，顶角才存在。然而，规定 $\left|\frac{\gamma^{n}+1-\gamma^{n}+1}{2\gamma}\right| \leq 1$ 可确保方程（4）始终得出实角。因此，不存在被禁止的边长比，且方程（4）适用于所有 $\gamma \geq 1$。

即，$n \geq 1$

2.1 $1 \leq n \leq 2$ 情况

如果 $1 \leq n \leq 2$，顶角的范围介于90° 和180° （如上所示）。方程（4）的图像如图2和图3所示。

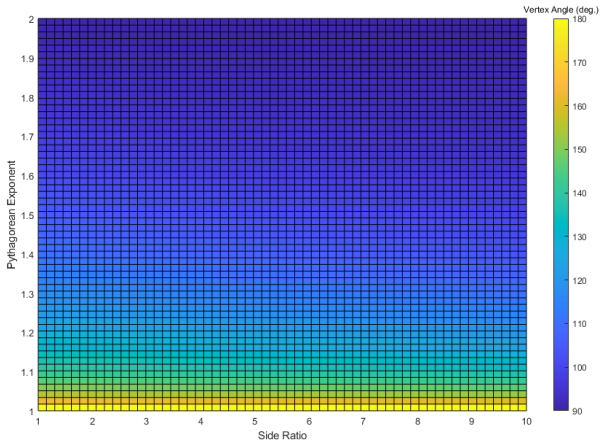

图2：对于 $1 \leq n \leq 2$，n 次勾股定理的顶角随边长比和勾股指数的变化关系。

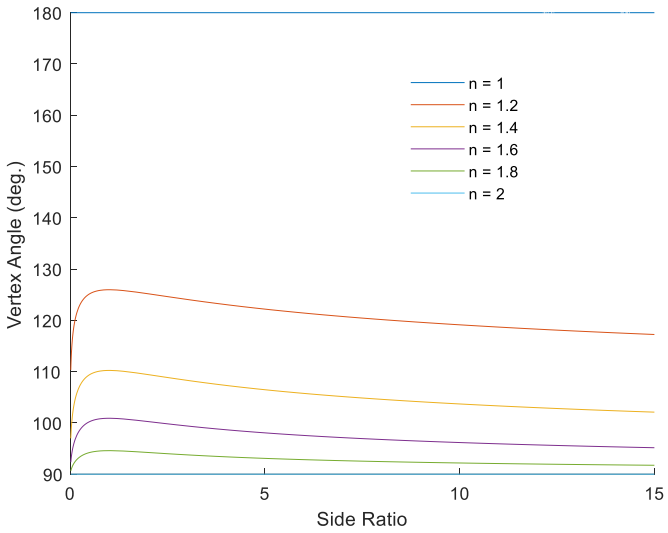

图3：对于 $1 \le n \le 2$，n 次勾股定理的顶角与边长比及勾股指数的关系。

对于任意给定的 n 值，都有一个对应的 γ 值，使顶角达到图3所示的最大值。通过令方程（4）的一阶导数等于零，可以求出该顶角以及产生该顶角的边长比。

$$\begin{aligned} &\frac{d\theta^{\mathbb{R}^+}}{d\gamma} = 0 \\ &\Rightarrow 1-\gamma^2+\left(\gamma^n-1\right)\left(\gamma^n+1\right)^{\frac{2-n}{n}} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

方程（5）的解 不是解析的，且复数解的总数会随着*n*的增大而迅速增加。然而，显然，对于*n*的所有取值， 都是一个解–它是唯一的正实数解。因此，最大顶角出现在 $\gamma = 1$ 的一个等腰三角形中。因此，将其代入方程（4），即可得到最大顶角（方程（6））。

$$\theta_{\max}^{\mathbb{R}^+} = \cos^{-1}\left(1-2^{\frac{2-n}{n}}\right), \tag{6}$$

其中， $\theta^{\mathbb{R}^+}_{\text{最大}}$ 表示任意度数 *n* 下的最大值。

方程（4）的二阶导数极其复杂，因此使用 Maple® 通过数值计算确认其为最大角。方程（6）的图像见图4。

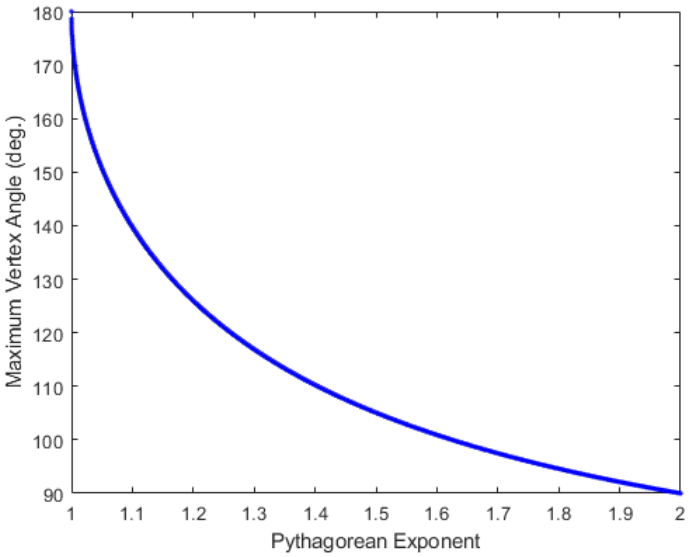

图4：$1 \le n \le 2$的最大顶角与勾股指数的关系。

2.2 $n \ge 2$ 情形

对于$n \ge 2$，方程（4）的图像如图5和图6所示。在这种情况下，顶角不超过90°，并且存在一个使方程（4）成立的最小顶点角。该顶点角及产生该顶点角的边长，也可以通过令方程（4）的一阶导数等于零来求得（如上文所述）。已知对于n的所有取值，仍然只有一个正实数解满足方程（5）；将其代入方程（4）后，即可求得最小顶角（方程（7））。因此，与第2.1节中$\gamma = 1$的最大顶角的情况一样，三角形为等腰三角形时，$\gamma = 1$，$n \le 2$，$n > 2$

$$\theta_{\min}^{\mathbb{R}^+} = \cos^{-1}\left(1 - 2^{\frac{2-n}{n}}\right), \tag{7}$$

其中$\theta_{\min}^{\mathbb{R}^+}$表示任意度数$n$对应的最小值。

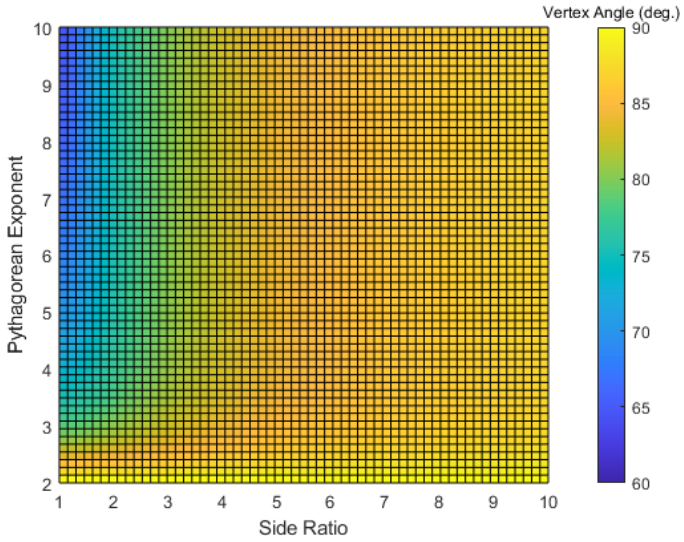

图5：n 次勾股定理的顶角与边长比及勾股指数的关系，其中 $n \geq 2$。

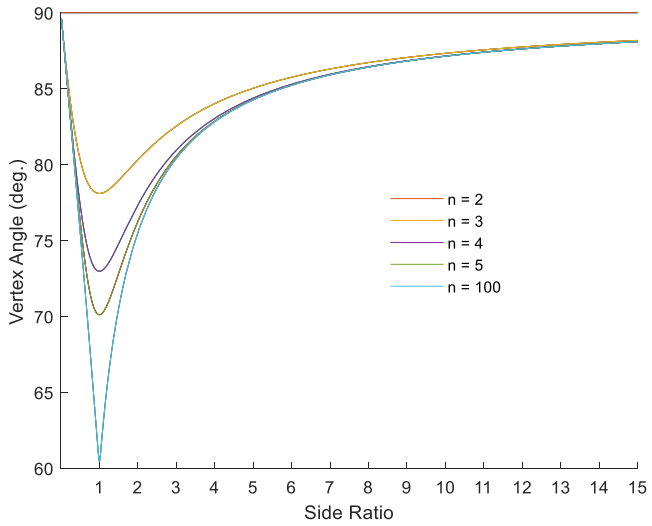

图6：n 次勾股定理的顶角与边长比及勾股指数的关系，其中 $n \geq 2$。边长比扩展至 $\gamma < 1$ 的排除区域。

也通过 Maple® 进行了数值验证，以确认该角度为最小角。方程 (7) 的图像如图 7 所示。

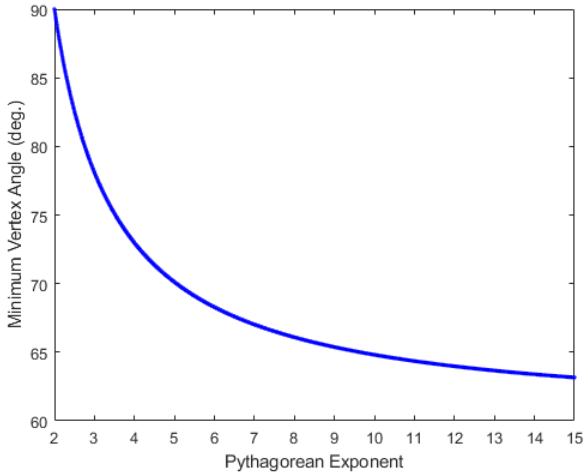

图 7：最小顶点角与勾股指数的关系。

当勾股指数趋于无穷大时，

$$\theta_\infty = \lim_{n\to\infty}\theta = \lim_{n\to\infty}\left\{\cos^{-1}\left[\frac{\gamma^2+1-\left(\gamma^n+1\right)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma}\right]\right\}, \tag{8}$$

必须将其作为分段函数求值。

情况 1[i] $(\gamma < 1)$

$$\theta_\infty(\gamma<1)=\lim_{n\to\infty}\left\{\cos^{-1}\left[\frac{\gamma^2+1-(0+1)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma}\right]\right\}=\cos^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

情况 2 $(\gamma = 1)$

$$\theta_\infty(\gamma=1)=\lim_{n\to\infty}\left\{\cos^{-1}\left[\frac{1+1-2^{\frac{2}{n}}(1)}{2}\right]\right\}=60^o$$

案例 3 $(\gamma > 1)$

$$\theta_\infty(\gamma>1)=\lim_{n\to\infty}\left\{\cos^{-1}\left[\frac{\gamma^2+1-\left(\gamma^n\right)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma}\right]\right\}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma}\right)$$

[i] 为完整起见，纳入此情况，尽管已指定 $\gamma \geq 1$。

情形2的图示见 图6，它表明无限次幂勾股定理会生成一个等边三角形，而且不出所料，这是唯一会生成等边三角形的情形。对于边长比为无限大的情形3，。因此，边长比为无限大（三角形退化为直线）的三角形所对应的无限次幂勾股定理，要求顶角与标准的勾股定理相同。公式（8）中这三种情形的变化曲线如图8所示。

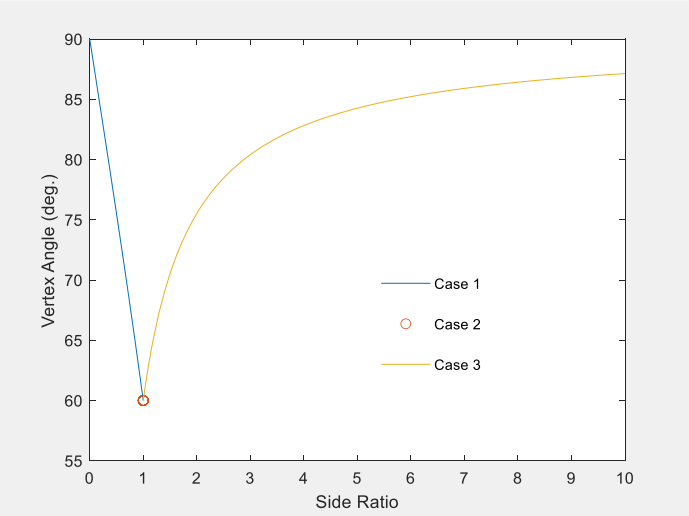

图8：使用 n = 10^6 绘制的无限次幂勾股定理图示。

3. 负实数指数下的 n 次勾股定理

第 2 节可以调整用于考察符合负指数 n 次勾股定理的实三角形，结果呈现出截然不同的图景。再次将公式（2）和（3）相等，可得

$$\theta^{\mathbb{R}^-} = \cos^{-1}\left[\frac{\gamma^2+1-\left(\gamma^n+1\right)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma}\right], \tag{9}$$

其中 $\theta^{\mathbb{R}^-}$ 表示顶角由某个版本的n次勾股定理导出，其中。

$n \in \mathbb{R}^-$

与正指数的情况不同，存在一个无限集合，其中 反余弦函数的始终为正的自变量大于 1。若，则方程(9) 得出

$$\gamma = 1$$

$$\theta^{\mathbb{R}^-} = \cos^{-1}\left[\frac{1^2+1-\left(1+1\right)^{\frac{2}{n}}}{2}\right] = \cos^{-1}\left(1-2^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\right). \tag{10}$$

$1-2^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}$ 对于所有 n，负实指数勾股定理的所有度数均允许使用等腰三角形。

然而，随着 γ 增大，$\frac{\gamma^2+1-\left(\gamma^n+1\right)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma}$（方程（9）中反余弦函数的自变量）也会增大，并可能超过 1，此时顶角将变成复数。因此，存在一个依赖于 γ 的勾股次数临界值，，它是给定边长比下能产生实数顶角的最大指数。当，可将其简化为 0_{crit}

$$\frac{\gamma^2+1-\left(\gamma^{n_{crit}}+1\right)}{2\gamma}=1 \quad \text{临界 } n$$

$$\left(\gamma^{n_{crit}}+1\right)^{\frac{1}{n_{crit}}}=\gamma-1. \tag{11}$$

方程（11）必须通过数值方法求解，其解，如图9所示。0_{crit}

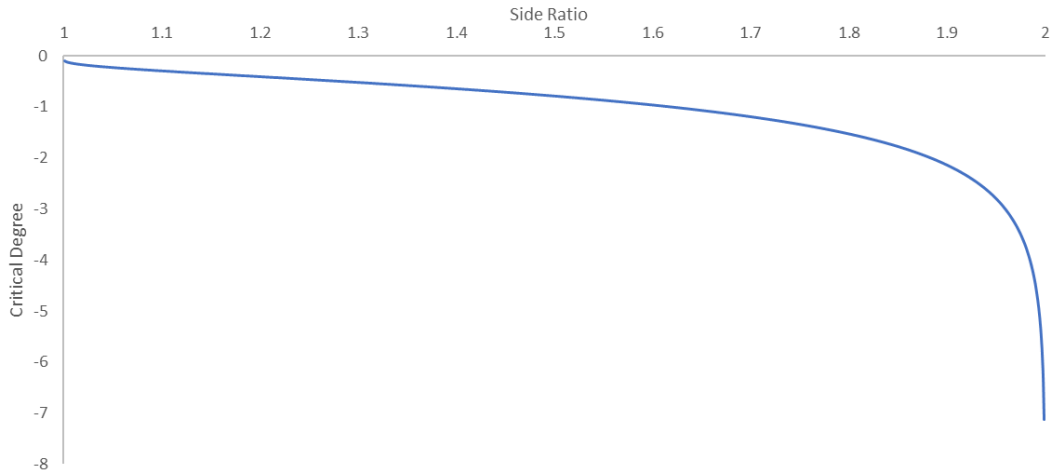

图9：毕达哥拉斯临界度作为边长比的函数。

因此，如果 $0>$，那么 n 是一个 θ 复角。另一方面，如果，将是实角，并且存在相应的实三角形。$0<$ θ 的上限并不显而易见，但请考虑方程（9）中反余弦函数的自变量。对于 n 要成为实角，必须满足 $\frac{\gamma^2+1-\left(\gamma^n+1\right)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma}\le 1$。因此，。然而，对于所有 θ 以及所有 γ 和 n，包括 $\mathbb{R}^-$。

$$(\gamma-1)^2\le\left(\gamma^n+1\right)^{\frac{2}{n}} \qquad \left(\gamma^n+1\right)^{\frac{2}{n}}\ge 1 \qquad n\to-\infty$$

这要求 (对于)，因此，。因此，次负实数指数勾股定理不能应用于边长比大于或等于 2 的实三角形。如图 10 和图 11 所示， 需要产生 的实顶角。然而，根据定义，因此，。

与 和 情形的不同之处还在于， 和 情形会产生非恒定但相等的依赖角度。根据公式（9）：当或时，

$$\theta^{\mathbb{R}^-} = \cos^{-1}\left[\frac{\gamma^2+1}{2\gamma} - \frac{\gamma}{2(\gamma+1)^2}\right].$$

3.1 $n \le n_{crit}(\gamma)$ 情形

对于 ，方程（9）的图像见图 10 和图 11。此外，对于给定的边长比，顶角存在一个最大值。与第2.1节一样，将方程（9）的（一阶导数，而非方程（4）的）设为零，即可求得该顶角及产生该顶角的边长比。

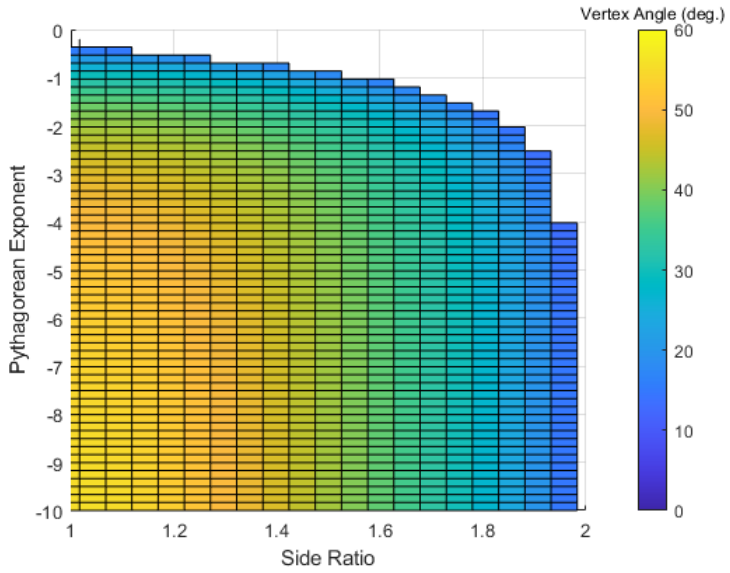

图 10：对于 $n \le n_{crit}(\gamma)$，n 次勾股定理的顶角随边长比和勾股指数变化的函数关系。图顶部和右侧缺失的部分，是由于给定 γ 时 $n > n_{crit}(\gamma)$；该部分边界的方程为 $n_{crit}(\gamma)$，如图9所示。边长比延伸至 $\gamma < 1$ 的排除区域。

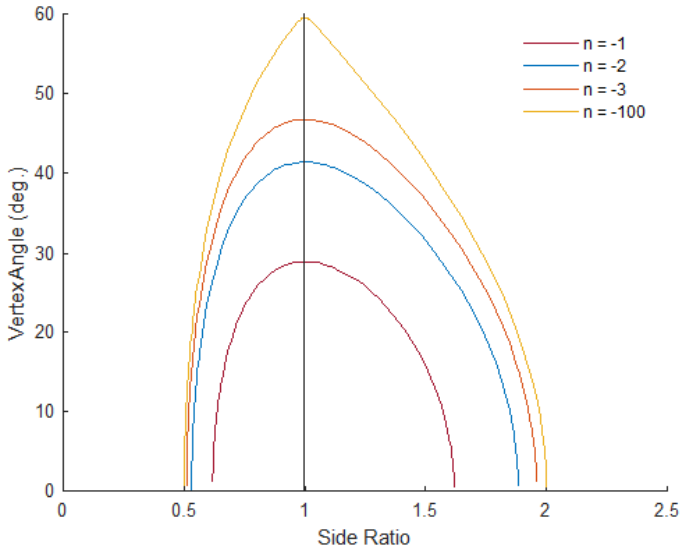

图 11：n 次勾股定理的顶角与边长比的函数关系。图线与横轴之间的间隙是由于在这些 γ 值下，$n > n_{crit}(\gamma)$。边长比扩展到了 $\gamma < 1$ 的排除区域。

与方程（5）的情况一样，方程（12）的解并非解析解。不过，显然，对于所有 n 的取值，仍然有一个解。将其代入公式（9），即可求出顶角（公式（13））；不出所料，其数学形式与方程（7）相同。

$$\frac{d\theta^{\mathbb{R}^-}}{d\gamma} = 0$$
$$\Rightarrow 1-\gamma^2+\left(\gamma^n-1\right)\left(\gamma^n+1\right)^{\frac{2-n}{n}} = 0 \tag{12}$$

$$\theta_{\max}^{\mathbb{R}^-} = \cos^{-1}\left(1-2^{\frac{2-n}{n}}\right), \tag{13}$$

其中 表示给定度数 时的最大值 n。

方程（9）的二阶导数与方程（4）的二阶导数相同，因此，也使用 Maple®进行了数值计算，以验证该角度确为最大值。方程（13）的图像如图12所示。

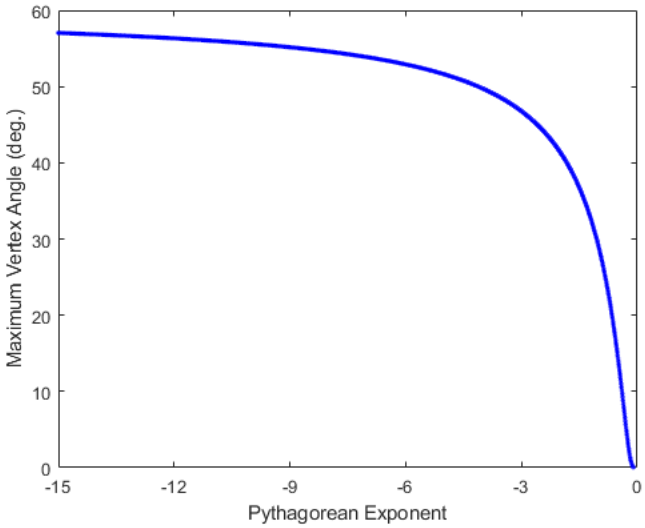

图12：最大顶角与勾股指数的关系。

当勾股指数趋于负无穷时，

$$\theta_{-\infty} = \lim_{n\to-\infty}\theta = \lim_{n\to-\infty}\left\{\cos^{-1}\left[\frac{\gamma^{2}+1-\left(\gamma^{n}+1\right)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma}\right]\right\}, \tag{14}$$

这与正指数的情况类似。即使施加了条件，方程（14）也必须作为分段函数求值，$1<\gamma<2$

情况1 $(\ )\gamma=1$

$(\ )$

$\theta_{-\infty}=\cos^{-1}1=60^{\circ}$

案例 2 $(\ )1<\gamma<2$

$$\theta_{-\infty}\left(1<\gamma<2\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Case 3 $\left(\gamma\to 2^{-}\right)$

$$\theta_{-\infty}\left(\gamma\to 2^{-}\right)=0$$

情形1与正指数下的情形2结果相同 –最大顶角为60º 因此得到一个等边三角形。此外，与正指数情形一样，等边三角形实际上永远不会出现，因为尽管γ 可以等于 1，*n*不可能是无穷大。如图13所示，负无穷次幂勾股定理可以产生实三角形，并且保留了 的要求。此外，当.....时将得到一条直线

$$1 \le \gamma < 2$$

$$\lim_{n \to n_{\text{crit}}(\gamma)} \theta = \lim_{n \to n_{\text{crit}}(\gamma)} \left\{ \cos^{-1} \left[\frac{\gamma^2 + 1 - \left(\gamma^n + 1\right)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma} \right] \right\} = 0 .$$

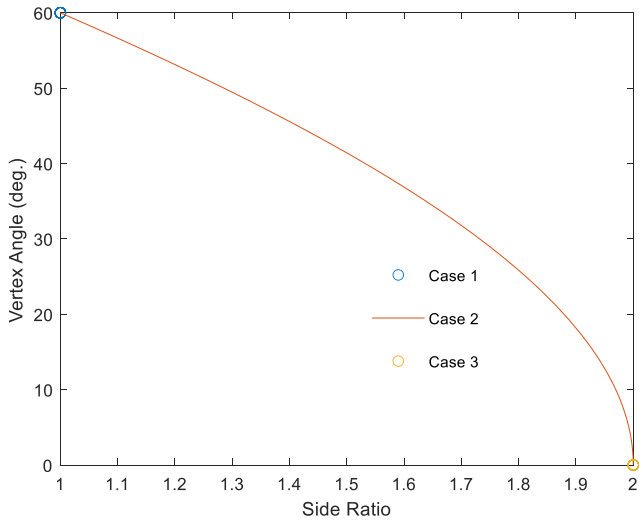

图13：负无穷次幂勾股定理的图示。

4. 相关三角形的面积

图1中顶角为实数的不等边三角形的面积为。其边长为*a*、，且由方程(1)，。因此，其面积为

b a=γ

c a= γ +

$$A = \frac{1}{2} a^2 \gamma \sin\theta .$$ (15)

应用 以及方程（4）或公式（9），具体取决于是否，分别地，方程（15）可以用以下形式表示*n* 和 γ。

$$A=\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{4\gamma^2-\left[\gamma^2+1-\left(\gamma^n+1\right)^{\frac{2}{n}}\right]^2}\ . \tag{16}$$

对.....的限制γ仍然存在：适用于，以及适用于，但是，对没有限制（除了）。

$a>0$

4.1 正实数指数的 n 次勾股定理中三角形的最大面积

方程 (16) 的图像如图 14 所示。显然，当 a 为常数且 γ 增大时，相应三角形的面积会无限增大。此外，当 a 为常数时，增大 n 会使面积增大，但与增大 γ 相比，这种影响微不足道。不过，n 对面积的影响会随着 γ 增大而增强。

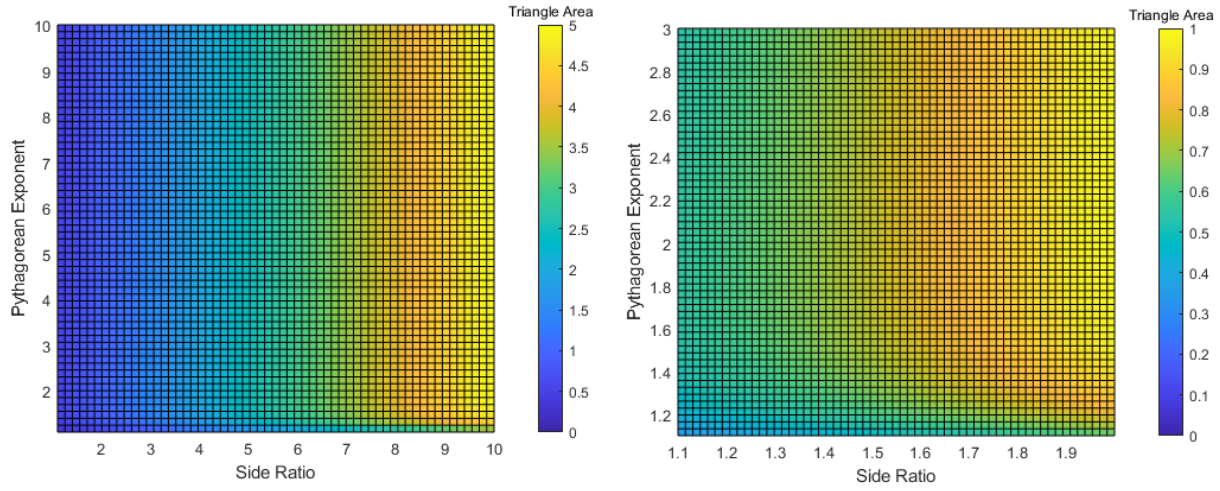

图 14：单位边长（a = 1）时的三角形面积（以无量纲单位表示）。在左图中，n 对面积的影响难以区分；而在右图中，n 对面积的影响则更加明显。

确定使三角形面积最大的条件，可以采用一种“角度”方法。根据方程 (15)，给定 a 和 γ 时，三角形的最大面积显然出现在 $\theta=90^\circ$ (对应于) 且为 $n=2$.

总之，

- 若固定 γ 和 n，增大 a 会使三角形的面积无限增大。
- 若固定 a 和 n，增大 γ 会使三角形的面积无限增大。

因此，不存在绝对最大面积三角形，因为该三角形会经历无限膨胀。唯一的最小面积是平凡解。这项分析最重要的发现是，当a和γ的值固定时，直角三角形具有最大面积。

当然，可以根据 对 n 和 γ 的依赖关系确定上述结果。由方程（4）可得，

$$\theta^{\mathbb{R}^+} = \cos^{-1}\left[\frac{\gamma^2+1-(\gamma^n+1)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma}\right] = 90^\circ$$ 由此得到

$$(\gamma^n+1)^{\frac{2}{n}} = \gamma^2+1 \tag{17}$$

因为 。 方程 (17) 对 n 的唯一实数解是 。 $n=2$

对于给定的 γ，利用方程 (16) 求出产生最大面积情形的度数，是一种替代且更严谨的方法； 给出

$$(\gamma^n+1)^{\frac{2}{n}}\left[\gamma^2+1-(\gamma^n+1)^{\frac{2}{n}}\right]\left[\left(\frac{\gamma^n}{\gamma^n+1}\right)\ln\gamma-\frac{1}{n}\ln(\gamma^n+1)\right]=0. \tag{18}$$

但是 对于 γ 或 n 的任意取值，因此，

$$\left[\gamma^2+1-(\gamma^n+1)^{\frac{2}{n}}\right]\left[\left(\frac{\gamma^n}{\gamma^n+1}\right)\ln\gamma-\frac{1}{n}\ln(\gamma^n+1)\right]=0. \tag{19}$$

$\left[\gamma^2+1-(\gamma^n+1)^{\frac{2}{n}}\right]=0$ iff $n=2$ (as shown with eq. (17)). $\left[\left(\frac{\gamma^n}{\gamma^n+1}\right)\ln\gamma-\frac{1}{n}\ln(\gamma^n+1)\right]\neq 0$, regardless of the value of γ, although it asymptotically approaches zero for increasing n. As expected, 这种稍复杂的方法得出的结果与上文采用的“角度方法”相

$n=2$

因此，对于给定的 n 度毕达哥拉斯定理，所产生的三角形面积最大的是标准勾股定理，且其产生的三角形为直角三角形。尽管由 a 和 γ 得出的三角形顶角大于 90º，但其面积更小，因为 对于钝角 。

对于给定的a和给定的n（不一定为），γ使三角形面积达到最大值的值可通过对方程（16）求导得到 从而得到 $n \geq 2$

即，$\left(\frac{\partial}{\partial \gamma} = 0\right)$A

$$\left[\gamma^2 + 1 - \left(\gamma^n + 1\right)^{\frac{2}{n}}\right]\left[1 - \gamma^{n-2}\left(\gamma^n + 1\right)^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\right] = 4\,. \tag{20}$$

然而，方程（20）在 时无解。这在物理上是合理的 因为对于给定的 γ ，不断增大 a 会使三角形持续扩大；因此不存在有限的最大面积。所有这些持续扩大的三角形（边长 a 固定）的面积中，最小值在 时取得，且为 $n \geq 0$

$$\gamma = 1$$

$$A_{\min} = a^2\left[2^{\left(\frac{3n-2}{2n}\right)}\right]\sqrt{1 - 4^{\left(\frac{1-n}{n}\right)}}\,. \tag{21}$$

方程（21）（其图像见图15）表示一个无限集合中各个等腰三角形的面积。该无限集合中的每个三角形，其面积都是所有度数相同的各种三角形中的最小值。这个无限集合中面积最大的三角形出现在无限次数情形下，记作 ，其值由方程（21）的极限给出。

最大值
最小值A

$$A_{\min_\infty}^{\max} = \lim_{n\to\infty} A_{\min} = \sqrt{6}a^2\,, \tag{22}$$

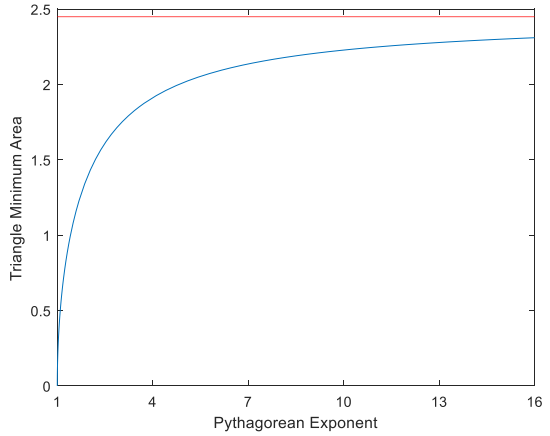

图15：正实数指数的 n 次勾股定理中，边长为单位长度（a = 1）的等腰三角形的最小面积（无量纲单位）。红线表示 。

最大值
最小值A

4.1.1 固定周长三角形的面积 (n > 0)

为了进一步探讨这些想法，考虑周长固定为 P 的三角形面积是合理的。接着，确定在该情形下使面积达到最大值的 γ and n 的取值（随后在第4.2节中，确定另一情形下的取值）。$n \in \mathbb{R}^{-}$

三角形的周长显然为

$$P = a + b + c = a\left(\gamma + 1 + \left(\gamma^{n} + 1\right)^{\frac{1}{n}}\right). \tag{23}$$

以固定周长表示的面积记为 ，它由方程 (16) 和 (23) 结合得出。A^{P}

$$A^{P} = \left\{\frac{P}{2\left[\gamma + 1 + \left(\gamma^{n} + 1\right)^{\frac{1}{n}}\right]}\right\}^{2} \sqrt{4\gamma^{2} - \left[\gamma^{2} + 1 - \left(\gamma^{n} + 1\right)^{\frac{2}{n}}\right]^{2}} \tag{24}$$

根据方程 (24)：对于固定的 P，作为 n 的函数，三角形的面积在。时达到最大值。该面积记为 ，其值为 $\gamma = 1$

$$A^{P}_{\max} = \frac{P^{2}}{16}\left(\frac{\sqrt{4^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} - 16^{\left(\frac{1}{n}\right)}}}{\left(1 + 2^{\left(\frac{1-n}{n}\right)}\right)^{2}}\right), \tag{25}$$

方程（25）表示一组周长固定、面积最大的等腰三角形的面积，这组等腰三角形中的最大面积三角形是度数为无限的成员，记作，其面积为

$$A^{P}_{\max_{\infty}} = \frac{P^{2}}{16}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} - 16^{\left(\frac{1}{n}\right)}}}{\left(1 + 2^{\left(\frac{1-n}{n}\right)}\right)^{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{36}\right)P^{2}. \tag{26}$$

由方程 (24) 可知，当 $\gamma \to \infty$ 时，面积趋近于零（如图 17 所示），因为它们会变成直线。此外，由方程 (24) 可知（如图 16 所示），固定 P 的三角形，其面积（作为 γ 的函数）将随着 $n \to \infty$ 渐近增大。这些面积记为 A_∞^P，并由下式给出

$$A_\infty^P = \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{4\gamma^2 - 1}}{(2\gamma + 1)^2}\right] P^2, \tag{27}$$

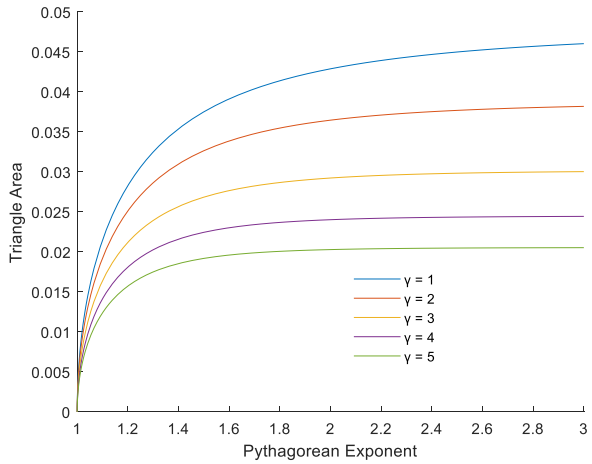

图 16：单位周长勾股三角形的面积（无量纲单位）。

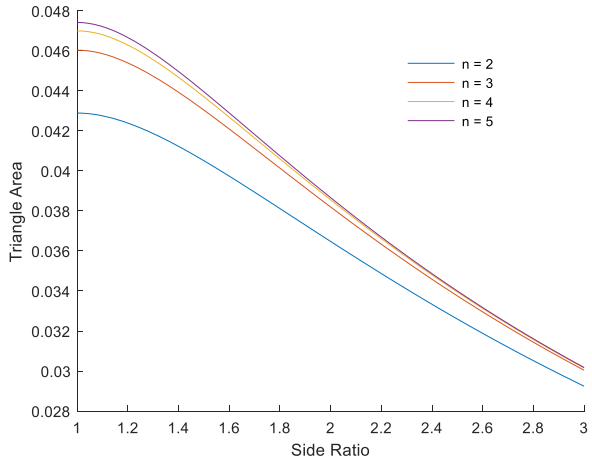

图 17：单位周长勾股三角形的面积（无量纲单位）。

4.2 负实数指数下 n 次勾股定理的三角形的最大面积

对于 $n \in \mathbb{R}^-$，方程（16）的图像如图18所示。正实数指数的面积关系同样适用于负实数指数的情形。然而，对于所有 n，顶角均为实数且为锐角；如果 a 和 γ 固定，则最大面积三角形具有最大的顶角。

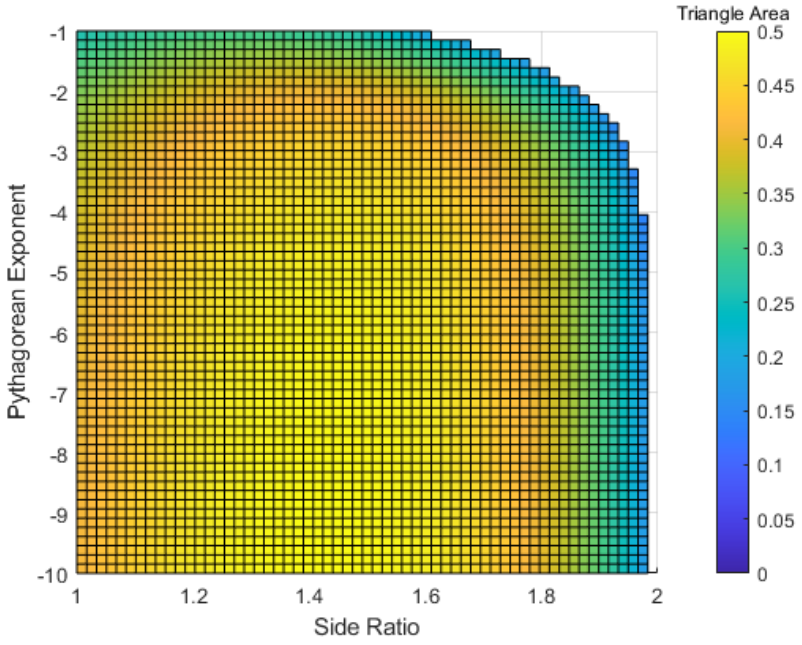

图18：单位边长为（a = 1）时的三角形面积（以无量纲单位表示）。图的右上方和右侧缺失的部分，是由于给定 γ 值时 $n > n_{crit}(\gamma)$；该部分边界的方程为 $n_{crit}(\gamma)$，如图9所示。

要确定面积最大的三角形，请考虑方程（15）和（9）。

$$A_{max} = \frac{1}{2}a^2\gamma\left(\max\left[\sin\theta\right]\right) = \frac{1}{2}a^2\gamma\left(1-\left(\min\left[\cos\theta\right]\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a^2\gamma\left\{1-\left[\min\left(\frac{\gamma^2+1-\left(\gamma^n+1\right)^{\frac{2}{n}}}{2\gamma}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

在等腰三角形的特殊情况下，对于 $\gamma = 1$ $\left(\frac{\gamma^2+1-\gamma+1}{2\gamma}\right) = 1-2^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}$ 最小值

因为 不存在。

那么三角形最大面积为

$$A_{\max}^{\gamma=1}=\frac{1}{2}a^2\gamma\sin\theta=a^2\left(2^{\left(\frac{1-n}{n}\right)}\right)\left(1-4^{\left(\frac{1-n}{n}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

考虑方程（28）的负无穷次情形，可得以下结果。

$$\lim_{n\to-\infty}\left\{\left|\frac{\gamma^2+1-\gamma^n+1}{2\gamma}\right|\right\}=\frac{\gamma}{2}$$ 极限 最小

对于符合以下条件的任意边长比。 在此负无穷次情形下，三角形最大面积为 $1<\gamma<2$

$$A_{\max_{-\infty}}=\frac{1}{2}a^2\gamma\sin\theta=\frac{1}{4}a^2\gamma\sqrt{4-\gamma^2}. \tag{30}$$

方程（30）必然满足以下要求：。此外，关于这个由负无穷次三角形构成的无限集合，还可得出三个有趣的结果：

1. 在这个集合中，有两个 γ 值会产生面积相等的三角形： 和，且其最大面积为 $\gamma=1$。2. $\gamma=\sqrt{3}$ 必然得到零面积，因为该三角形已塌缩为一条直线。

$$\gamma=2$$

3. 在这个无限集合中，面积最大的三角形对应于，其面积为。 $\gamma=\sqrt{2}$

4.2.1 固定周长三角形的面积 (n < 0)

另一方面，如果周长固定，则方程 (24) 适用，对于 ，面积最大的三角形将是等腰三角形，其面积为 。这个面积是预期的，因为 条件 和 会得到一个等边三角形，其中 ，因此，。

$$\gamma=1 \qquad n\to-\infty$$

由方程 (24) 可知，若 取此值，则得到方程 (31)。如图19所示（图中绘出了方程 (31)），面积将渐近增大，并将渐近趋近于零。 随着 。 方程 (31) 确定了固定周长、任意边长比和无限阶三角形的面积。

$$A_{-\infty}^{P}=\frac{1}{4}\left[\frac{\gamma}{(\gamma+2)^{2}}\right]\sqrt{4-\gamma^{2}}P^{2}, \tag{31}$$

其中 是具有固定周长且满足条件的三角形的渐近面积。 $A_{-\infty}^{P}$ $n \to -\infty$

在面积由方程（31）给出的无限集合中，面积最大的三角形是等腰三角形（如上所述），其面积为。

$$\frac{\sqrt{3}}{36}P^{2}$$

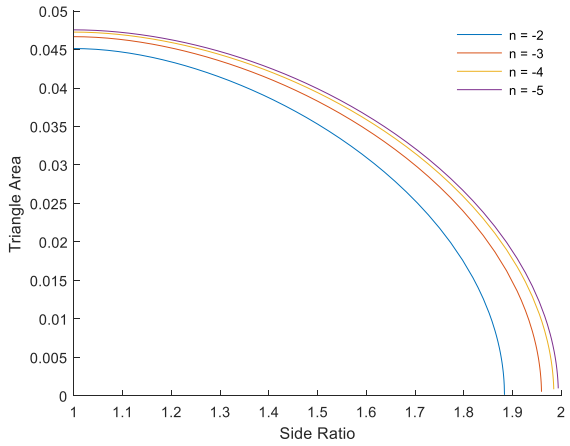

图19：单位周长勾股三角形的面积。

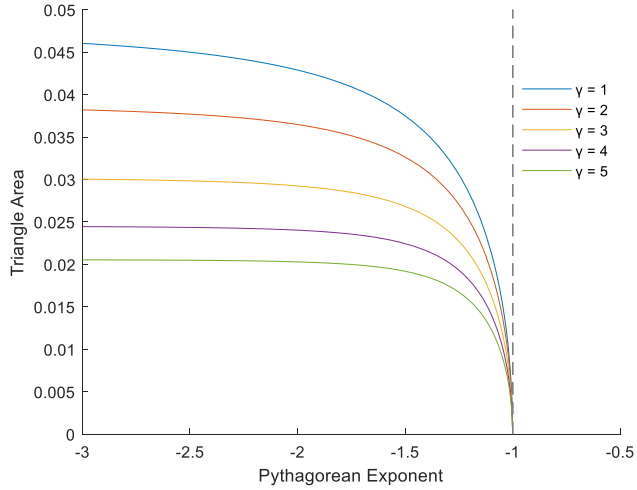

图20：单位周长勾股三角形的面积。

5. 总结

勾股定理已扩展到不受物理量纲要求限制的正负实指数。对于给定的度数，确定了邻边之比与顶角之间的关系。研究发现，对于正指数，适用于所有度数的规定不会产生复数顶角。对于 ，结果为钝角三角形；而如果 ，则为锐角三角形。然而，对于负指数，要使顶角为实数，该限制是必要条件，但并非充分条件。还必须满足以下附加要求：若， 则 需要施加。

探讨了正负实指数对应的相关三角形的面积。当 a 和 γ 的值固定时， 的面积在三角形为等腰直角三角形时达到最大，此时需要 和 。此外，三角形面积会随着 的增加而增大。另一种情况是，若三角形的周长保持不变，随着 n 增大，三角形面积趋近于最大值；随着 γ 减小，三角形面积趋近于 0。

对于 情形，当 时，具有固定周长且面积最大的三角形的边长比为。相比之下，如果度数有限且 （如果） 则顶角达到最大值时，面积最大。

参考文献

1. Faltings, G, 《R. Taylor 和 A. Wiles 对费马大定理的证明》。美国数学学会会刊，1995年。42(7)：第743-746页。2. Agarwal, R.P., 《毕达哥拉斯之前及之后的勾股定理》。当代数学进阶研究，2020年。30：第357-389页。3. Amir-Moéz, A.R.、R.E. Byerly 和 R.R. Byerly, 《酉空间中的勾股定理》。电气工程学院出版物·数学系列，1996年：第85-89页。4. Atzema, E.J., 《蒙日定理之外：勾股定理的推广》。数学杂志，2000年。73(4)：第293-296页。5. Conant, D. 和 W. Beyer, 《广义勾股定理》。美国数学月刊，1974年。81(3)：第262-265页。6. Cook, W.J., 《毕达哥拉斯定理的n维推广》。大学数学杂志，2013年。44(2)：第98-101页。7. Czyzewska, K., 《勾股定理的推广》。数学论证，1991年。24(1-2)：第305-310页。8. Donchian, P.S. 和 H. Coxeter, 《1142. 毕达哥拉斯定理的n维推广》。数学公报，1935年。19(234)：第206-206页。9. Drucker, D., 《适用于所有维度的综合勾股定理》。美国数学月刊，2015年。122(2)：第164-168页。10. Eifler, L. 和 N.H. Rhee, 《通过散度定理证明的n维勾股定理》。美国数学月刊，2008年。115(5)：第456-457页。11. Kadison, R.V., 《勾股定理：I. 有限情形》。美国国家科学院院刊，2002年。99(7)：第4178-4184页。12. Lee, J.-R., 《四面体中的余弦定理》。纯粹与应用数学，1997年。4(1)：第1-6页。13. Quadrat, J.-P.、J.B. Lasserre 和 J.-B. Hiriart-Urruty, 《面积的毕达哥拉斯定理》。美国数学月刊，2001年。108(6)：第549-551页。14. Veljan, D., 《有2500年历史的勾股定理》。数学杂志，2000年。73(4)：第259-272页。15. Yeng, S.、T. Lin 和 Y.-F. Lin, 《n维勾股定理》。线性与多重线性代数，1990年。26(1-2)：第9-13页。