arXiv:2301.02616v1 [cs.CG] 6 Jan 2023

正则 n单纯形的宽度

Sariel Har-Peled* Eliot W. Robson†

2023年1月9日

摘要

考虑正则 n-单纯形 Δ_n——它由 $n+1$ 个欧几里得空间中的点的凸包构成，其中任意两点之间的距离恰好为 1。我们证明了 Δ_n 的宽度$\approx \sqrt{2/n}$的精确界。具体而言，宽度$(\Delta_n) = \sqrt{\frac{2}{n+1}}$ 若 n 为奇数，则为Δ_n)，而宽度$(= \sqrt{\frac{2(n+1)}{n\,n+2}}$ $()$ 若 n 为偶数，则 [GK92中Ale77], 虽已给出这一众所周知的界，我们仍提供一个自成一体的初等证明，或许（也可能并不）值得一读。

1. 正则单纯形的宽度

正则 n维单纯形 Δ_n 是欧几里得空间中的 $n+1$ 个点构成的集合，其中任意两点之间的距离都恰好为 1。为简化起见，处理由 e_1、……、$e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$的凸包构成的单纯形 D_n 更为方便，其中 e_i是第 i个标准单位向量[1]。注意到$\|e_i e_j\| = \sqrt{2}$，这意味着 $D_n = \sqrt{2}\Delta_n$。D_n 的所有顶点都位于超平面 $\hbar \equiv \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \langle (x_1、\ldots\ldots、x_{n+1})\ \mathbb{1}\rangle = 1$上，其中 $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1)$。特别地，点 $\mathsf{c}_n = \mathbb{1}/(n+1)$ $\in D_n$是 D_n的中心，且到各顶点的距离相等

$$\widehat{R_n} = \|\mathsf{c}_n e_i\| = \sqrt{n\frac{1}{(n+1)^2} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{n+1} + \frac{n+1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

来自 D_n 的所有顶点。注意，能够放入 $\hbar$，且仍包含于 D_n 中的最大球，其中心位于 c_n。此外，其半径为

$$\widehat{r_n} = \left\|\mathsf{c}_n - (0, \mathsf{c}_{n-1})\right\| = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{n+1}{n(n+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

对于单位向量 u 和集合 $P \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$，令

$$\overline{\omega}(u, P) = \max_{p \in P} \langle u, p\rangle - \min_{p \in P} \langle u, p\rangle$$

表示 投影宽度 在 P 方向上的 u。的宽度 是 P 在所有方向上的最小投影宽度。

*伊利诺伊大学计算机科学系；地址：美国伊利诺伊州厄巴纳市北古德温大道201号，邮编61801；sariel@illinois.edu；http://sarielhp.org/。本论文的研究工作部分由 NSF AF 奖项 CCF-1907400 资助。

†伊利诺伊大学计算机科学系；地址：美国伊利诺伊州厄巴纳市北古德温大道201号，邮编61801；erobson2@illinois.edu；https://eliotwrobson.github.io/。[1]也就是说，e_i 除第 i个坐标为 1 外，其余坐标均为 0。

点的能量。 对于向量 $v=(v_1,\ \ldots\ldots,\ v_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$，令 $\mu(v)=\sum_i v_i/(n+1)$，并令

$$\widehat{v}=v-\mu(v)\mathbb{1},$$

设 v 是将 $\mu(v)\mathbb{1}$ 映射到 $\langle\widehat{v},\mathbb{1}\rangle=0$ 的结果。令能量为 v，则 $\sigma(v)=\|\widehat{v}\|^2$。能量就是数 v_1、……、v_{n+1} 的1-均值聚类代价。我们需要以下标准的技术性断言，它说明，如果将一个值移离质心，该集合的1-均值聚类代价就会上升。

断言 1.1。 设 $v=(v_1、\ldots\ldots、v_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个点，u 是一个点，它除第 i 个坐标外，其余坐标均与 v 相同，其中 $u_i>v_i\geq\mu(v)$。那么 $\sigma(u)>\sigma(v)$。若 $u_i<v_i<\mu(v)$，则结论同样成立。

证明：令 $\delta_i=(u_i-v_i)/(n+1)$，并注意到 $\mu(u)=\mu(v)+\delta_i$。因此，我们有

$$\sigma(u)=\sum\nolimits_j(u_j-\mu(u))^2=\sum\nolimits_j(v_j-\mu(v)+\delta_i)^2-(v_i-\mu(v)+\delta_i)^2+(u_i-\mu(v)+\delta_i)^2.$$

由于 $\sum_j(v_j-\mu(v))=0$，我们有

$$\sum\nolimits_j(v_j-\mu(v)+\delta_i)^2=\sum\nolimits_j(v_j-\mu(v))^2+\left(2\delta_i\sum\nolimits_j(v_j-\mu(v))\right)+\sum\nolimits_j\delta_i^2=\sigma(v)+(n+1)\delta_i^2.$$

重新整理上式，并利用 $u_i>v_i\geq\mu(v)$，可得

$$\sigma(u)-\sigma(v)=(n+1)\delta_i^2+(u_i-\mu(v)+\delta_i)^2-(v_i-\mu(v)+\delta_i)^2>(u_i-v_i)(u_i+v_i-2\mu(v)+2\delta_i)>0.\ \blacksquare$$

引理 1.2. 当 n 为奇数时，D_n 的宽度为 $2/\sqrt{n+1}$，且该宽度由 $\mathcal{H}=\left\{v/\sqrt{n+1}\ \middle|\ v\in\{-1,+1\}^{n+1}\right.$ 和 $\left.\langle v,\mathbb{1}\rangle=0\right\}$ 中的所有方向的投影宽度实现（不包括其他方向）。

证明：考虑一个实现 D_n 最小宽度的单位向量 z——这里，除 $\|z\|=1$ 外，我们还要求 $\langle z,\mathbb{1}\rangle=0$，因为只需考虑平行于包含 D_n 的超平面的方向。为此，令 $\beta=\max_i z_i$ 且 $\alpha=\min_i z_i$，并注意到

$$\mathrm{width}(D_n)=\overline{\omega}(z,D_n)=\max_i\langle z,\boldsymbol{e}_i\rangle-\min_i\langle z,\boldsymbol{e}_i\rangle=\beta-\alpha.$$

接下来，考虑点 u，其中对于所有 i，我们设

$$u_i=\begin{cases}\alpha & z_i<0\\ \beta & z_i\geq 0.\end{cases}$$

仔细地反复应用断言 1.1，可得 $\sigma(u)>\sigma(z)$ 若 z 的某个坐标尚未是 α 或 β，则如此。但此时，点 $\widehat{u}$ 具有 (i)“宽度” $\beta-\alpha$，(ii) $\|\widehat{u}\|>1$，以及 (iii) $\langle\widehat{u},\mathbb{1}\rangle=0$。但这意味着，$D_n$ 在 $\widehat{u}/\|\widehat{u}\|$ 上的投影宽度为 $(\beta-\alpha)/\|\widehat{u}\|<\beta-\alpha$，这与 z 的选取矛盾。

因此，z 的所有坐标必定都是 α 或 β。令 t 为 z 中等于 α 的坐标个数，并注意到

$$\sigma(z)=\|z\|^2=t\alpha^2+(n+1-t)\beta^2=1\qquad\text{and}\qquad\langle z,\mathbb{1}\rangle=t\alpha+(n+1-t)\beta=0.$$

这意味着 $\beta = -\frac{t}{n+1-t}\alpha$，因此

$$t\alpha^2 + \frac{(n+1-t)t^2}{(n+1-t)^2}\alpha^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{t(n+1-t)+t^2}{n+1-t}\alpha^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -\sqrt{\frac{n+1-t}{t(n+1)}}.$$

因此， D_n的宽度为 $\beta - \alpha = \left(1 + \frac{t}{n+1-t}\right)\sqrt{\frac{n+1-t}{t\,n+1}} = \sqrt{\frac{n+1}{t\,n+1-t}}$。最后一个量在分母取最大值时达到最小，而当 $t = (n+1)/2$ 时，分母取最大值。也就是说， D_n的宽度为 $2/\sqrt{n+1}$。

我们有 $t\alpha + t\beta = 0$，这意味着 $\alpha = -\beta$，从而 $\beta = 1/\sqrt{n+1}$。由此可得$z \in \mathcal{H}$。 ■

引理 1.3. </style}对于偶数，的宽度为 ( )。

证明： 对引理 1.2 稍作修改即可得到同样的证明。最小值在 $t = n/2$ 处取得。这意味着

$$\alpha = -\sqrt{\frac{n+1-t}{t(n+1)}} = -\sqrt{\frac{n+2}{n(n+1)}} \qquad \text{and} \qquad \beta = -\frac{t}{n+1-t}\alpha = \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+2)}}.$$

作为合理性检查，注意到 $t\alpha^2 + (n+1-t)\beta^2 = \frac{n}{2}\,\frac{n+2}{n+1} + \frac{n+2}{2}\,\frac{n}{(n+1)(n+2)} = 1$. 因此， D_n 的宽度为

$$\beta - \alpha = \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+2)}} + \sqrt{\frac{n+2}{n(n+1)}} = \frac{2(n+1)}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} = 2\sqrt{\frac{n+1}{n(n+2)}}.$$ ■

利用 $\Delta_n = D_n/\sqrt{2}$ 并对上述界进行缩放，可得如下结果。

推论 1.4。 正则 n-单纯形 Δ_n 的宽度为 $\sqrt{2/(n+1)}$ 当 n 为奇数时。宽度为 $\sqrt{\frac{2(n+1)}{n\,n+2}}$ 当 n 为偶数时。内切半径（即包含在 Δ_n内部的最大球的半径）为 $r_n = 1/\sqrt{2n(n+1)}$，而外接半径（即包围 Δ_n 的最小球的半径）为 $R_n = \sqrt{\frac{n}{2\,(n+1)}}$.

参考文献

[Ale77] R. Alexander. 单纯形的宽度与直径。*Geometriae Dedicata*, 6(1), 1977。[GK92] P. Gritzmann andV. Klee. 凸体的内、外 j-半径。*Discret. Comput. Geom.*,7: 255–280,1992。