arXiv:2301.02624v1 [math.QA] 6 Jan 2023

经典群与量子群的 Shapovalov 元素

Andrey Mudrov

谨以此文纪念 Vladimir Lyachovsky

莫斯科物理技术学院,

俄罗斯莫斯科州多尔戈普鲁德内市学院路9号，邮编141701,

莱斯特大学,

英国莱斯特市 University Road，LE1 7RH,

电子邮件：am405@le.ac.uk

摘要

单李代数的经典或量子化包络代数的 Shapovalov 元素 $\theta_{\beta,\ m}$ 由一个正根 $\mathfrak{g}$和一个正整数 β 参数化。它们将可约 Verma 模的最高向量与其子模的最高向量联系起来。我们将 $\theta_{\beta,\ m}$ 因式分解为 $\theta_{\beta,\ 1}$ 的乘积，并通过广义 Nigel-Moshinsky 算法，将 $\theta_{\beta,\ 1}$ 计算为逆 Shapovalov 型的矩阵元的留数。由此，我们通过 $\mathfrak{g}$中的 Cartan-Weyl 基，明确表示经典单李代数的 $\theta_{\beta,\ m}$。对于量子群，我们给出一种类似的表述，通过基本表示中 R矩阵（量子 L-算子）的矩阵元来表达。

关键词：Shapovalov 元素、Shapovalov形式、Verma模、奇异向量、Hasse 图、R矩阵。美国数学会分类代码：17B10，17B37

1 引言

范畴 $\mathcal{O}$ 最初由 [1]针对半单李代数引入，后来又为许多其他代数类定义，包括量子群，在数学和数学物理的各个领域都发挥着基础性作用。特别是，它涵盖有限维表示以及许多重要的无限维表示，例如抛物型维尔玛模及其推广 [2]。 $\mathcal{O}$ 中有一类特殊对象称为 Verma 模，它们具有普适性： $\mathcal{O}$ 中的所有单模都是它们的商。Verma 模中的极大真子模由极端向量生成 [3], ，这些向量是正三角子代数的不变元。因此，极端向量在表示论中至关重要。

Verma 模中的极端向量 V_λ 通过负Borel子代数（经典或量子）包络代数中的特殊元素 $\theta_{\beta,\ m}$ 与最高权为 λ 的真空向量相关联，这些元素称为 Shapovalov 元素 [4, 5]。它们由一个正根 β 和一个满足关于 λ 的德孔奇尼–卡茨–卡兹丹条件的整数 $m \in \mathbb{N}$ 来参数化。在经典情形下，该条件为 $2(\lambda+\rho,\beta) - m(\beta,\beta) = 0$，其中 ρ 是正根半和。此条件保证 Verma 模是可约的。当根 β 是单根这一特殊情形下，元素 $\theta_{\beta,\ m}$ 是单根向量 f_β 的 f_β^m 次幂，其权为 β。对于非单根 β，Shapovalov 元素是由负切瓦利生成元构成、系数取自卡当子代数的复杂多项式。它可视为一个函数 $\theta_{\beta,\ m}(\lambda)$，以泛型 Verma 模 V_λ 的最高权为自变量，取值于由负根向量生成的子代数中。

经典卡克–穆迪代数上的 Verma 模中的极端向量的描述在 [6] 中通过插值过程得以实现，该过程导出了一套具有复指数的多项式演算。另一种基于极值投影算子 [7] 的方法由 Zhelobenko 在[8]中采用。他将单李代数的 $\theta_{\beta,\ m}$ 表示为若干个带平移权的 $\theta_{\beta,\ 1}$ 的 m 副本的乘积。在 [9]中构造反变李超代数的 Shapovalov 元素时，也采用了因式分解的思想。

将 $\theta_{\beta,\ m}$ 因式分解为低次数多项式的乘积，大大简化了问题，也便于分析。例如，在量子群的情形下，这有利于研究经典极限，而这对共轭类的量子化至关重要 [10]。

关于量子群， [11]提出了一种在 Verma 模中归纳构造极端向量的方法。 [12] 中出现了 A-型 Shapovalov 元素的显式表达式，近期又在 [13]中通过其他方法得到了这些表达式。值得注意的是，$\theta_{\beta,\ 1}$ 中的有序 PBW型单项式构成了泛型不可约 Verma 模的正交基 [12]。

尽管 Zhelobenko 通过极值投影算子进行的因式分解简化了 Shapovalov

元素在经典单李代数情形下的构造，但因子的显式描述仍是一个问题。本文采用一种基于 Verma 模上的典范逆变双线性形式的替代方法。在经典情形下，该方法给出了所有 Shapovalov 元素通过根向量进行因式分解的表达式；在量子群情形下，则给出了通过伴随表示中 R矩阵的元素进行因式分解的表达式。

极端向量生成 V_λ上典范反变形式的核，该形式是在 λ 处对取值于卡当子代数的 Borel 子代数 [4] 上的“通用”Shapovalov形式进行特化得到的。该反变形式本身极其重要，并有众多应用，参见例如 [14, 15, 16, 17]。对于一般的 λ，模 V_λ 是不可约的，且该形式是非退化的。逆形式产生了量子化包络代数 [18]的正、负子代数的扩展张量积中的一个元素 $\mathcal{S}$ 。将 $\mathcal{S}$ 的正侧映射到一个辅助表示上，会得到一个元素属于负子代数的矩阵，我们称之为 Shapovalov 矩阵。其显式描述由 [18] 通过推广 $\mathfrak{sl}$（n） [19]的降算子的 Nagel-Moshinski公式而获得。它们也可以在量子情形下由动力学扭曲 [14]上的 ABRR方程 [20] 推导出来。

我们的方法将 $\theta_{\beta,m}$ 与 Shapovalov 矩阵的某些矩阵元联系起来。这种观点相当自然，因为 V_λ 上反变形式的核会导致 $\mathcal{S}$ 出现极点。我们的方法不仅将 $\theta_{\beta,m}$ 因式分解为 $\theta_{\beta,1}$ 的乘积，还借助哈斯图技术，通过广义 Nagel-Moshinsky 规则 (3.5)，以非常初等的方式有效描述 $\theta_{\beta,1}$ 。我们通过计算在德孔奇尼–卡茨–卡兹丹“超平面”上变为奇异的 $\mathcal{S}$ 的矩阵元的留数来实现这一点。

我们的方法对于经典半单李代数 $\mathfrak{g}$ 及其量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 完全平行。经典情形可以直接处理，也可以作为变形参数 $q \to 1$ 的极限情形得到。下面我们将更详细地介绍这一方法。

对于来自范畴 $\mathcal{O}$ 的模 V 以及一对非零向量 $v_b, v_a \in V$，我们关联一个 Shapovalov 矩阵元 $\langle v_b | v_a \rangle$。它属于负 Borel（包络代数）ˆ子代数 $U_q(\mathfrak{b}_-)$，并在卡当子代数上作有理扩张。在对 v_b 和 v_a 作出某些假设时，这类矩阵元给出 $\theta_{\beta,m}$ 中的因子。这些因子对约化李子代数 $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ 的正根向量作归一化，其负根向量对应物则湮灭 v_b。由此，它们成为对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ 的 Mickelsson代数 [21] 中的降算子。当 λ 满足德孔奇尼–卡茨–卡兹丹条件时，这些因子成为经某些权平移的 $\theta_{\beta,1}$ 。

向量 v_b 应当是 $\mathfrak{g}$ 中包含根 β 的最小单李子代数的最高权向量，且其权应满足条件 $(\nu_b, \beta) = {}_{(\beta,\beta)}\, 2$ 。对于有限维 V，后者等价于说 v_b 生成了一个 2 维子模，该子模属于由根空间 v_b 生成的 $\mathfrak{sl}(2)$-

子代数。

向量 v_a 确定了一个同态 $V_{\lambda_2} \to V \otimes V_{\lambda_1}$，其中 V_{λ_i} 是最高权分别为 λ_i 和 $\lambda_2 - \lambda_1$ 的不可约 Verma 模，且 $\lambda_2 - \lambda_1$ 等于 v_a 的权。迭代这一构造可得到一系列同态

$$V_{\lambda_m} \to V \otimes V_{\lambda_{m-1}} \to \ldots \to V^{\otimes m} \otimes V_{\lambda_0},$$

其中每个映射 $V^{\otimes i} \otimes V_{\lambda_{m-i}} \to V^{\otimes i} \otimes (V \otimes V_{\lambda_{m-i-1}})$ 在因子 $V^{\otimes i}$ 上都是恒等映射。我们证明 $\langle v_b^{\otimes m} | v_a^{\otimes m} \rangle$ 可因式分解为 $\langle v_b | v_a \rangle$ 的乘积。然后我们证明，在指定条件下，该矩阵元与 $\theta_{\beta,\,m}(\lambda)$ 成正比，其中 $\lambda_0 = \lambda$。

因此，我们得到$\theta_{\beta,\,m}(\lambda)$，它是 $\prod_{i=0}^{m-1} \theta_{\beta,\,1}(\lambda_i)$ 的乘积。因子 $\theta_{\beta,\,1}$ 由针对第5节情形特化的一般规则 (3.5) 计算。将 $\theta_{\beta,\,m}$ 视为 $U_q(\mathfrak{b}_-)$ 的元素时，它可表示为 $\theta_{\beta,\,1}$ 的乘积，这些因子按 v_b 的整数倍权进行了平移。若 β 含有重数为 1 的单根 α，则可以通过选择 V 使这一平移变得平凡。于是，$\theta_{\beta,\,m}$ 成为 $\theta_{\beta,\,1}$ 的 m 次幂。

值得指出的是，$\theta_{\beta,\,1}$ 可以通过任意辅助模 V及一对向量 $(v_a, v_b = e_\beta v_a)$ 得到。在德孔奇尼-卡茨-卡兹丹“超平面”上，它们除相差一个标量因子外都相同，而在超平面之外通常彼此不同。问题在于如何将 $\theta_{\beta,\,1}$ 用作因子块，以构造更高阶 m 的 $\theta_{\beta,\,m}$。因此，我们按照上文所述的特殊方式选取 (V, v_b, v_a)。另一方面，由于 $\mathcal{S}$ 的左张量分量属于正子代数$U_q(\mathfrak{g}_+) \subset U_q(\mathfrak{g})$，因此决定 $\theta_{\beta,\,1}$ 的是 V 上的 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-子模结构。一个显著的事实是，在一个可容许的 V 中，循环子模 $U_q(\mathfrak{g}_+)v_a$ 恰好同经典极限下对应于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_+$ 的 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-模的一个子商同构。这意味着，根据定理 5.3，在每种情况下，$\theta_{\beta,\,1}$ 都可以通过 $\mathrm{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_+) \otimes U_q(\mathfrak{b}_-)$ 中的 Shapovalov 矩阵元计算得到。

除第5节外，我们仅介绍该理论的 q 版本。令 q 等于 1，即可得到经典情形。然而，当 $q = 1$ 时，$\theta_{\beta,1}$ 的最终表达式会大大简化，因此我们在第5节中对其作特别讨论。

2 预备知识

设 $\mathfrak{g}$ 为单复李代数，$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 为其卡当子代数。固定一个三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$，其极大幂零李子代数为 $\mathfrak{g}_\pm$。记 $\mathrm{R} \subset \mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{g}$的根系，R^+ 为正根的子集，其单根基为 Π。此基生成根格 $\Gamma \subset \mathfrak{h}^*$，其正半群为 $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_+\Pi \subset \Gamma$。

对于正根 $\beta \in \mathrm{R}^+$ 和单根 $\alpha \in \Pi$，记 $\ell_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}_+$ 为 α 在 β中的重数，也就是说，β 在基 Π下展开时 α的系数。

在 $\mathfrak{g}$ 上选取一个伴随不变型（.,.），将其限制到 $\mathfrak{h}$ 上，并通过对偶将其转移到 $\mathfrak{h}^*$。对于每个 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，都存在唯一的元素 $h_\lambda \in \mathfrak{h}$，使得对所有 $\mu \in \mathfrak{h}^*$，$\mu(h_\lambda) = (\mu, \lambda)$。对于非各向同性的 $\mu \in \mathfrak{h}^*$，令 $\mu^\vee = \frac{2}{(\mu,\mu)}\mu$，且 $h_\mu^\vee = \frac{2}{(\mu,\mu)} h_\mu$。

基本权记作 ω_α, $\alpha \in \Pi$。它们由方程组 $(\omega_\alpha, \beta^\vee) = \delta_{\alpha,\beta}$ 确定，其中 $\alpha, \beta \in \Pi$ 均成立。

我们假设 $q \in \mathbb{C}$ 不是单位根，并且约定“所有 q”均指这一假设下的情形。几乎所有 q 指除可能有限个不同于 $q = 1$ 的值之外的所有 q。

标准 Drinfeld-Jimbo量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 是一个复 Hopf代数，其生成元为 e_α、f_α 和 $q^{\pm h_\alpha}$，它们由单根 α 标记，并满足关系 [22, 23]

$$q^{h_\alpha} e_\beta = q^{(\alpha,\beta)} e_\beta q^{h_\alpha}, \quad [e_\alpha, f_\beta] = \delta_{\alpha,\beta}[h_\alpha]_q, \quad q^{h_\alpha} f_\beta = q^{-(\alpha,\beta)} f_\beta q^{h_\alpha}, \quad \alpha, \beta \in \Pi.$$

符号 $[z]_q$（其中 $z \in \mathfrak{h} + \mathbb{C}$）表示 $\frac{q^z - q^{-z}}{q - q^{-1}}$。元素 q^{h_α} 可逆，且$q^{h_\alpha} q^{-h_\alpha} = 1$，而 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$ 和 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$ 也满足量子化Serre关系。其确切形式与本文无关，详情请见 [24]。

在 $U_q(\mathfrak{g})$上引入Hopf代数结构，其余乘法为

$$\Delta(f_\alpha) = f_\alpha \otimes 1 + q^{-h_\alpha} \otimes f_\alpha, \quad \Delta(q^{\pm h_\alpha}) = q^{\pm h_\alpha} \otimes q^{\pm h_\alpha}, \quad \Delta(e_\alpha) = e_\alpha \otimes q^{h_\alpha} + 1 \otimes e_\alpha$$

在生成元上定义，并将其扩张为同态 $U_q(\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$。反极是 $U_q(\mathfrak{g})$的代数和余代数反自同构，其在生成元上的作用由以下映射给出

$$\gamma(f_\alpha) = -q^{h_\alpha} f_\alpha, \quad \gamma(q^{\pm h_\alpha}) = q^{\mp h_\alpha}, \quad \gamma(e_\alpha) = -e_\alpha q^{-h_\alpha}.$$

余单位同态 ϵ: $U_q(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ 的取值为

$$\epsilon(e_\alpha) = 0, \quad \epsilon(f_\alpha) = 0, \quad \epsilon(q^{h_\alpha}) = 1.$$

我们将记号 f_α, e_α 扩展到所有 $\alpha \in \mathrm{R}^+$，表示相对于R^+, [24]的某种正规序而言的Lusztig根向量。众所周知，它们在 $U_q(\mathfrak{g}_\pm)$中生成一个Poincare-Birkhoff-Witt（PBW）基。

用 $U_q(\mathfrak{h})$、$U_q(\mathfrak{g}_+)$ 和 $U_q(\mathfrak{g}_-)$ 分别表示 $U_q(\mathfrak{g})$ 中由 $\{q^{\pm h_\alpha}\}_{\alpha\in\Pi}$、$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$ 和 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$ 生成的子代数。量子Borel子群定义为 $U_q(\mathfrak{b}_\pm) = U_q(\mathfrak{g}_\pm)U_q(\mathfrak{h})$；^^ 它们是 $U_q(\mathfrak{g})$ 中的Hopf子代数。我们还需要它们的扩张版本 $U_q(\mathfrak{b}_\pm) = U_q(\mathfrak{g}_\pm)U_q(\mathfrak{h})$，^其中 $U_q(\mathfrak{h})$ 是 $U_q(\mathfrak{h})$ 关于由 $[h_\alpha - c]_q$、$\alpha \in \Gamma_+$ 和 $c \in \mathbb{Q}$ 生成的乘法系的分式环。

给定一个 $U_q(\mathfrak{g})$-模 V，若非零向量 v 满足对所有 $\alpha \in \Pi$ 都有 $q^{h_\alpha} v = q^{(\mu,\alpha)} v$，则称其权为 μ。这类向量的线性张成记作 $V[\mu]$。若模 V 由权向量 $v \in V[\lambda]$ 生成，且该向量被所有 e_α 消去，则称其具有最高权 λ。这样的向量 v 称为最高向量；它在非零标量倍数的意义下唯一。

我们定义一个对合余代数反自同构和代数自同构 σ of $U_q(\mathfrak{g})$，通过以下赋值在生成元上规定它：

$$\sigma\colon e_\alpha \mapsto f_\alpha, \quad \sigma\colon f_\alpha \mapsto e_\alpha, \quad \sigma\colon q^{h_\alpha} \mapsto q^{-h_\alpha}.$$

对合 $\omega = \gamma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \gamma$ 是 $U_q(\mathfrak{g})$ 的代数反自同构，并且保持余乘法不变。

$\mathfrak{g}$-模 V 上的对称双线性形式 $(.,.)$ 称为反变形式，如果对所有 $x \in U_q(\mathfrak{g})$、v、$w \in V$，都有 $\big(xv, w\big) = \big(v, \omega(x)w\big)$。最高权模上存在唯一一个取值于 $\mathbb{C}$ 的反变形式，使最高向量的平方范数为 1。我们称此形式为典范形式，并将这一术语推广到张量积上的形式，即各张量因子上的典范形式的乘积。由于 ω 是余代数映射，这种形式是反变的。

我们回顾一下在 Borel 子代数 $U_q(\mathfrak{b}_-)$ 上取值于 $U_q(\mathfrak{h})$ 的 Shapovalov形式的定义。该形式最初为 $U(\mathfrak{g})$ 引入，并在 [4] 中得到研究。将 $U_q(\mathfrak{b}_-)$ 视为由 $U_q(\mathfrak{g}_-)$ 生成的自由右 $U_q(\mathfrak{h})$-模。三角分解 $U_q(\mathfrak{g}) = U_q(\mathfrak{g}_-)U_q(\mathfrak{h})U_q(\mathfrak{g}_+)$ 使得可以沿着和 $\mathfrak{g}_- U_q(\mathfrak{g}) + U_q(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+$进行投影$\wp$: $U_q(\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{h})$，其中 $\mathfrak{g}_- U_q(\mathfrak{g})$ 和 $U_q(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+$ 分别是由正根向量和负根向量生成的右理想与左理想。令

$$(x, y) = \wp\big(\omega(x)y\big), \quad x, y \in U_q(\mathfrak{g}).$$

由此定义的形式是 $U_q(\mathfrak{h})$-线性的且是反变的。因此，左理想 $U_q(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+$ 包含在核中，所以该形式下降为商 $U_q(\mathfrak{g})/U_q(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_+ \simeq U_q(\mathfrak{b}_-)$上的 $U_q(\mathfrak{h})$-线性形式。

最高权为 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 的 Verma 模 $V_\lambda = U_q(\mathfrak{g}) \otimes_{U_q(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{C}_\lambda$ 由一维 $U_q(\mathfrak{b}_+)$-模 $\mathbb{C}_\lambda$ 诱导而来，该模在 $U_q(\mathfrak{g}_+)$上作用平凡，在 $q^{h_\alpha} \in U_q(\mathfrak{h})$上取值 $q^{(\lambda,\alpha)}$，$\alpha \in \Pi$。其最高向量记作 v_λ，也称为真空向量。它在 $U_q(\mathfrak{g}_-)$上自由生成 V_λ。

在 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 处对 Shapovalov形式进行特化后，经由自然的 $U_q(\mathfrak{g}_-)$-模同构 $U_q(\mathfrak{g}_-) \simeq V_\lambda$（该同构将指派 $1 \mapsto v_\lambda$扩展），可得到 V_λ上的典范反变 $\mathbb{C}$-值形式 $(x, y)_\lambda = \lambda\Big(\wp\big(\omega(x)y\big)\Big)$。反过来，将 V_λ 上的典范反变形式视为 λ 的函数，若把 $U_q(\mathfrak{h})$视为 $\mathfrak{h}^*$上的多项式函数代数，则该形式可降为 Shapovalov形式。术语上稍作宽泛使用，我们也将 V_λ上的典范反变形式称为 Shapovalov 形式。

据 [25] 所述， V_λ 模上的反变形式会退化，当且仅当其最高权属于以下集合的并集

$$\mathcal{H}_{\beta,m} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid q^{2(\lambda+\rho,\beta)-m(\beta,\beta)} = 1\} \tag{2.1}$$

在 $\beta \in \mathrm{R}^+$ 和 $m \in \mathbb{N}$上，其中 $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\mathrm{R}^+}\alpha$。在经典情形下， $q = 1$, $\mathcal{H}_{\beta,\ m}$ 成为满足 2($\lambda+\rho,\beta$) $= m(\beta,\beta)$ 的权的 Kac-Kazhdan 超平面。

回顾一下，权为 $\lambda-\mu$ 且满足 $\mu \in \Gamma_+, \mu \neq 0$ 的向量 $v \in V_\lambda$ 若对所有 $\alpha \in \Pi$ 都有 $e_\alpha v = 0$，则称为极端向量。极端向量属于反变形式的核，并生成相应最高权的子模。我们将关注满足 $\beta \in \mathrm{R}^+$ 且 $m \in \mathbb{N}$ 的特殊情形，其中 $\mu = m\beta$。此时，最高权 λ 必须属于 $\mathcal{H}_{\beta,\ m}$。在同构 $V_\lambda \to U_q(\mathfrak{g}_-)$ 下， v 的像 $\theta_{\beta,\ m}$ 称为正根 β、次数为 m 的 Shapovalov 元。

对于简单的 β ，元素 $\theta_{\beta,\ m}$ 只是根向量 $\theta_{\beta,\ m} = f_\beta^m$的 m 次幂。对于非简单的 β，它是一个有理三角函数 $\mathcal{H}_{\beta,\ m} \to U_q(\mathfrak{g}_-)$。本文旨在求出非简单的 β对应的$\theta_{\beta,\ m}$ 的显式表达式。

3 Shapovalov 逆形式及其矩阵元

如下定义最低权为 $-\lambda$ 的反向 Verma $U_q(\mathfrak{g})$-模 V'_λ。将 V'_λ 的底层向量空间取为 V_λ，而表示同态 π'_λ 由 σ 扭曲，即$\pi'_\lambda = \pi_\lambda \circ \sigma$。模 V'_λ 由其最低向量 v'_λ在 $U_q(\mathfrak{g}_+)$ 上自由生成。

令 σ_λ: $V_\lambda \to V'_\lambda$ 表示向量空间同构 $xv_\lambda \mapsto \sigma(x)v'_\lambda$， $x \in U_q(\mathfrak{g}_-)$。它 intertwines 表示同态 $\pi'_\lambda \circ \sigma = \sigma_\lambda \circ \pi_\lambda$。此映射将 V_λ 上的反变形式与一个 $U_q(\mathfrak{g})$-不变配对 $V_\lambda \otimes V'_\lambda \to V_\lambda \otimes V_\lambda \to \mathbb{C}$联系起来。

假设模 V_λ 不可约。那么它的诱导配对是非退化的（ V_λ 上的反变形式也如此）。逆形式属于完备张量积 $V'_\lambda \hat{\otimes} V_\lambda$。在同构 $V_\lambda \to U_q(\mathfrak{g}_-)$、 $V'_\lambda \to U_q(\mathfrak{g}_+)$ 下，它映到一个我们记作 $\mathcal{S} \in U_q(\mathfrak{g}_+)\ \hat{\otimes} U_q(\mathfrak{g}_-)$ 的元素，并称为普适 Shapovalov 矩阵。给定一个 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-局部幂零的 $U_q(\mathfrak{g})$-模 V，其表示同态为 π: $U_q(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$，则像 $S = (\pi \otimes \mathrm{id})(\mathcal{S})$ 是一个元素取自 $U_q(\mathfrak{g}_-)$ 的矩阵。它具有关于 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 的有理三角函数依赖关系（在经典情形下为有理依赖关系）。我们假设 V 可对角化且具有有限维权空间。我们还假设 V 配备了非退化反变形式，例如，当 V 是最高权不可约模的张量幂时便是如此。沿用量子逆散射理论中的术语，我们称模 V 为辅助模。

改变最高权 λ，便得到 $\mathcal{S}$ 的有理三角函数依赖关系。作为 λ 的函数， $\mathcal{S}$ 被视为 $U_q(\mathfrak{g}_+)\,\hat{\otimes}\,\hat{U}_q(\mathfrak{b}_-)$ 中的一个元素，其中 $\hat{}\,U_q(\mathfrak{b}_-)$ 被视为由 $U_q(\mathfrak{g}_-)$ 自由生成的右 $\hat{}\,U_q(\mathfrak{h})$-模。这样，权依赖关系便由 $\mathcal{S}$ 的右张量因子承载。

在权基 $\{v_i\}_{i\in I}\subset V$, $v_i\in V[\nu_i]$ 中， S 的显式表达式可以用哈斯图 $\mathfrak{H}(V)$ 来表示。任何偏序集都对应一个这样的图。在我们的情形中，偏序由 V 上的 $U_q(\mathfrak{g}_+)$ 作用诱导。节点是基 $\{v_i\}_{i\in I}$ 的元素。箭头是连接节点 $v_i \xleftarrow{e_\alpha} v_j$ 的单根向量 e_α，其权差为 $\nu_i-\nu_j=\alpha$。如果 $\nu_i-\nu_j\in\Gamma_+\backslash\{0\}$，则节点 v_i 后继于节点 v_j。矩阵 S 是三角形的：当 $\nu_i\not\succ\nu_j$ 时， $s_{ii}=1$ 且 $s_{ij}=0$。矩阵元 s_{ij} 是有理三角函数 $\mathfrak{h}^*\to U_q(\mathfrak{g}_-)$，其取值属于权为 $\nu_j-\nu_i\in-\Gamma_+$ 的子空间。如下文将要说明的，引入一种更强的偏序也很方便。

显然，矩阵 S 只取决于 V 上的 $U_q(\mathfrak{b}_+)$-模结构。为计算某个特定元素 s_{ij}，我们可以选取一个权基，使其扩充循环子模 $U_q(\mathfrak{g}_+)v_j$ 中的基。特别地，如果 $v_i\notin U_q(\mathfrak{g}_+)v_j$，那么 $s_{ij}=0$。

我们定义 Hasse 子图 $\mathfrak{H}(v_i,v_j)\subset\mathfrak{H}(V)$，它包含从 v_j 到 v_i 的所有可能路径。当且仅当 $v_i\succeq v_k\succeq v_j$ 时，节点 $v_k\in\mathfrak{H}(V)$ 属于 $\mathfrak{H}(v_i,v_j)$。子图 $\mathfrak{H}(v_i,v_j)$ 对应于一个 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-模 $V(v_i,v_j)$，它是 $U_q(\mathfrak{g}_+)v_j$ 除以循环子模 $U_q(\mathfrak{g}_+)v_k\subset U_q(\mathfrak{g}_+)v_j$ 之和所得的商，其中 $v_k\notin\mathfrak{H}(v_i,v_j)$。计算矩阵元 s_{ij} 需要的正是模 $V(v_i,v_j)$。

我们回顾 S 遵循 [18]的一个构造。设 $\{h_i\}_{i=1}^{\mathrm{rk}\mathfrak{g}}\in\mathfrak{h}$ 是一个标准正交基。元素$q^{\sum_i h_i\otimes h_i}$属于 $U_q(\mathfrak{h})\otimes U_q(\mathfrak{h})$在 $\hbar=\ln q$-进拓扑下的完备化。取 $U_q(\mathfrak{g})$的一个R矩阵 $\mathcal{R}$，使得 $\check{\mathcal{R}}=q^{-\sum_i h_i\otimes h_i}\mathcal{R}\in U_q(\mathfrak{g}_+)\,\hat{\otimes}\,U_q(\mathfrak{g}_-)$，并令$\mathcal{C}=\frac{1}{q-q^{-1}}(\check{\mathcal{R}}-1\otimes 1)$。在 $\mathcal{C}$ 上的关键恒等式使该理论的 q版本得以建立，它是 [18]

$$[1\otimes e_\alpha,\mathcal{C}]+(e_\alpha\otimes q^{-h_\alpha})\mathcal{C}-\mathcal{C}(e_\alpha\otimes q^{h_\alpha})=e_\alpha\otimes[h_\alpha]_q,\quad\forall\alpha\in\Pi. \tag{3.2}$$

在经典极限下，$\mathcal{C}=\sum_{\alpha\in\mathrm{R}^+}e_\alpha\otimes f_\alpha$ 变为 $\mathfrak{g}$ 的不含卡当部分的极化分裂卡西米尔元。由此可得恒等式

$$[1\otimes e_\alpha,\mathcal{C}]+[e_\alpha\otimes 1,\mathcal{C}]=e_\alpha\otimes h_\alpha \tag{3.3}$$

对每个单根 α。

令 $c_{ij}\in U_q(\mathfrak{g}_-)$ 表示矩阵 $(\pi\otimes\mathrm{id})(\mathcal{C})\in\mathrm{End}(V)\otimes U_q(\mathfrak{g}_-)$ 的元素。通过删除箭头 $v_i\leftarrow v_j$ **if** $c_{ij}=0$，我们对偏序和哈斯图 $\mathfrak{H}(V)$ 进行修正。这不会影响 S 的矩阵元公式 (3.5)。

对于每个权 $\mu \in \Gamma_+$，令

$$\eta_\mu = h_\mu + (\mu, \rho) - \frac{1}{2}(\mu, \mu) \in \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}. \tag{3.4}$$

将 η_μ 视为定义在 $\mathfrak{h}^*$ 上的仿射函数，其赋值为 $\eta_\mu\colon\ \zeta \mapsto (\mu, \zeta + \rho) - \frac{1}{2}(\mu, \mu),\ \zeta \in \mathfrak{h}^*$. 注意，$\eta_{m\beta} = m\big(h_\beta + (\beta, \rho) - \frac{m}{2}(\beta, \beta)\big)$。也就是说，$[\eta_{m\beta}(\lambda)]_q$ 在 $\mathcal{H}_{\beta,m}$ 上消失（而且在经典情形下，仅在$\mathcal{H}_{\beta,m}$ 上消失）。

$\hat{}$ 对于一对非零向量 $v, w \in V$，定义矩阵元 $\langle w|v\rangle = (w, \mathcal{S}_1 v)\mathcal{S}_2 \in U_q(\mathfrak{b}_-)$，其中 $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ 表示 $\mathcal{S}$ 的 Sweedler 式记号，配对是相对于 V上的非退化反变形式而言的。其在权 λ 处的特化记为 $\langle w|v\rangle_\lambda$，可由等式 $\langle w|v\rangle_\lambda v_\lambda = \langle w|v\rangle v_\lambda \in V_\lambda$确定。对于来自 V的每个 w，映射 $V \to V_\lambda,\ v \mapsto \langle v|w\rangle v_\lambda$ 满足：对所有 $\alpha \in \Pi$，$e_\alpha \langle v|w\rangle v_\lambda = \langle \sigma(e_\alpha)v|w\rangle v_\lambda$。这是张量 $\mathcal{S}(1 \otimes v_\lambda) \in U_q(\mathfrak{g}_+)\ \hat{\otimes} V_\lambda$的$U_q(\mathfrak{g}_+)$-不变性的结果。

矩阵元 $\langle v_i|v_j\rangle$ 等于 s_{ij}，当且仅当对于所有 $k \in I$，$(v_i, v_k) = \delta_{ik}$。下文中始终如此。

固定一个“起始”节点 v_a 和一个“终止”节点 v_b，使得 $v_b \succ v_a$。那么，重标度矩阵元 $\check{}$ $s_{ab} = -s_{ba}[\eta_{\nu_b - \nu_a}]_q q^{-\eta_{\nu_b - \nu_a}}$ 可由下式计算

$$\check{s}_{ba} = c_{ba} + \sum_{k \geqslant 1} \sum_{v_b \succ v_k \succ \ldots \succ v_1 \succ v_a} c_{bk} \ldots c_{1a} \frac{(-1)^k q^{\eta_{\mu_k}} \ldots q^{\eta_{\mu_1}}}{[\eta_{\mu_k}]_q \ldots [\eta_{\mu_1}]_q} \in \hat{U}_q(\mathfrak{b}_-), \tag{3.5}$$

其中 $\mu_l = \nu_l - \nu_a \in \Gamma_+,\ l = 1, \ldots, k.$。这里对从 v_a 到 v_b的所有可能路径（有序节点序列）求和，详情见 [18]。

显然，张量 $\mathcal{S}(v_a \otimes v_\lambda)$的 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-不变性意味着

$$e_\alpha \check{s}_{ba}(\lambda) v_\lambda \propto [\eta_{\nu_b - \nu_a}(\lambda)]_q \sum_k \pi(e_\alpha)_{bk} s_{ka}(\lambda) v_\lambda. \tag{3.6}$$

矩阵元素 $s_{ka}(\lambda)$的权为 $-(\nu_b - \nu_a - \alpha)$。由此可知，$\check{}s_{ba}(\lambda)v_\lambda$ 是 V_λ 中对应于 λ 的极端向量，满足 $[\eta_{\nu_b - \nu_a}(\lambda)]_q = 0$，条件是

1. $\check{}s_{ba}(\lambda) \neq 0$,

2. λ 是所有 $s_{ka}(\lambda)$ 和所有 α 的正则点。

我们旨在 找到适用于 $\theta_{\beta,\ m}$ 且满足这些条件的矩阵元 ns.

设 V 是一个 $U_q(\mathfrak{g})$-模，带有一对向量 v_a、$v_b \in V$，使得对于 $\beta \in \mathbb{R}^+$，有 $e_\beta v_a = v_b$。我们称三元组 (V, v_b, v_a) 为 β-表示。

命题 3.1. 设 (V, v_b, v_a) 是 $\beta \in \mathbb{R}^+$ 的 β-表示。那么，对于一般的 $\lambda \in \mathcal{H}_{\beta,\ 1}$，向量 $\check{}s_{ba}(\lambda)$ $v_\lambda \in V_\lambda$ 是极端的。

证明. (3.5) 中的因子 $\frac{q^{\eta\mu_k}}{[\eta_{\mu_k}]_q}$ 在有限个零集$\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid [\eta_{\mu_k}(\lambda)]_q = 0\}$ 的并集上变得奇异。 μ_k 中没有任何一个与 β 共线，因此 $\check{}s_{ba}(\lambda)$ 在一般的 $\lambda \in \mathcal{H}_{\beta,\,1}$ 处是正则的。用同样的推理，(3.6) 中所有的 $s_{ka}(\lambda)$ 在这样的 λ 处都是正则的。最后，第一项 c_{ba} （且仅此一项）涉及 Lusztig根向量 f_β，它是 $U_q(\mathfrak{g}_-)$ 中 PBW基的一个生成元。因此，它与其他项线性无关，并且 $\check{}s_{ba}(\lambda) \neq 0$。 □

$\hat{}$ 将 $U_q(\mathfrak{b}_-)$与定义在 $\mathfrak{h}^*$ 上的有理 $U_q(\mathfrak{g}_-)$值函数相对应后，我们得出$\check{}s_{ba}$是一个 Shapovalov 元$\theta_{\beta,\,1}$ 并将其记作 θ_β。给定权的极端向量的唯一性意味着，所有满足 $v_b = e_\beta v_a$ 的矩阵元$\check{}s_{ba}$ 都给出相同的 θ_β，相差一个标量因子。然而，它们在$\lambda \notin \mathcal{H}_{\beta,\,m}$处通常并不相同。当我们希望得到$\theta_{\beta,\,m}$ 且满足 $m > 1$时，就必须更谨慎地选择 θ_β 的矩阵元，以便将它们用作构件。

请注意，在 $m = 1$的情形下，要满足上述两个条件相对容易。对于更高的 m，我们将采取不同的策略：通过构造本身满足第一个条件，并用不同的论证绕过对第二个条件的证明。

4 Shapovalov 元素的因式分解

对于一个正根 $\beta \in \Pi$，用 $\Pi_\beta \subset \Pi$ 表示在以正系数将β 按基 Π 展开时出现的单根集合。由e_α、f_α 生成且满足 $\alpha \in \Pi_\beta$ 的单李子代数 $\mathfrak{g}(\beta) \subset \mathfrak{g}$称为 β的支撑。其包络代数在 $U_q(\mathfrak{g})$中量子化为一个 Hopf子代数。

定义4.1. 设 $\beta \in \mathbb{R}^+$ 是一个正根，且 (V, v_b, v_a) 是一个 β-表示，使得对所有 $\alpha \in \Pi$，$e_\alpha v_b = 0$ 成立，并且 $(\nu_b, \beta^\vee) = 1$。我们称这样的 β-表示为可容许的。

如果三元组 (V, v_b, v_a) 是可容许的，那么 v_b 是 V 中一个 $U_q(\mathfrak{g})$-子模的最高向量。对于有限维 $\dim V < \infty$，v_b 在由 f_β、e_β 生成的 $\mathfrak{sl}(2)$-子代数中生成一个二维子模。按照要求，向量 v_b 可以纳入 V 的一个标准正交基中。

引理 4.2. 设 (V, v_b, v_a) 是一个可容许的 β-表示。对 $m \in \mathbb{N}$，令 $v_b^m = v_b^{\otimes m} \in V^{\otimes m}$。选取 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，使得所有满足 $\lambda_k = \lambda + k\nu_a$，$k = 0, \ldots, m-1$ 的 Verma 模 V_{λ_k} 均不可约。则存在一个权为 $m\nu_a$ 的 $v_a^m \in V^{\otimes m}$，使得

$$\langle v_b^m | v_a^m \rangle_{\lambda_0} = \langle v_b | v_a \rangle_{\lambda_{m-1}} \ldots \langle v_b | v_a \rangle_{\lambda_0}. \tag{4.7}$$

证明。设 λ 满足所需条件。存在一个等变映射 $\varphi_k\colon V_{\lambda_k} \to V \otimes V_{\lambda_{k-1}}$，它将最高向量 v_{λ_k} 映射到极端向量 $\mathcal{S}(v_a \otimes v_{\lambda_{k-1}}) \in V \otimes V_{\lambda_{k-1}}$。这里 $\mathcal{S}$ 是

泛　　al S $V_{\lambda_{k-1}}$的 Shapovalov 矩阵。考虑一列模同态

$$V_{\lambda_m} \xrightarrow{\varphi_m} V \otimes V_{\lambda_{m-1}} \xrightarrow{\mathrm{id}_1 \otimes \varphi_{m-1}} V \otimes (V \otimes V_{\lambda_{m-2}}) \to \ldots \xrightarrow{\mathrm{id}_{m-1} \otimes \varphi_1} V^{\otimes(m-1)} \otimes (V \otimes V_{\lambda_0}),$$

其中，id_k是作用在 $V^{\otimes k}$上的恒等算子。向量 v_{λ_m}最终变为 $\mathcal{S}(\tilde{v}_a^m \otimes v_{\lambda_0})$，其中 $\tilde{v}_a^m \in V^{\otimes m}$ 的权为 $m\nu_a$。它与 $v_a^{\otimes m}$之间通过一个来自 $\mathrm{End}(V^{\otimes m})$ 的可逆算子相关联，该算子是 $m-1$重动力学扭曲 [14]。

让我们通过将 $\mathcal{S}(\tilde{v}_a^m \otimes v_{\lambda_0})$的张量分量与 $v_b^m = v_b \otimes v_b^{m-1}$配对来计算 $\langle v_b^m | \tilde{v}_a^m \rangle_{\lambda_0}$。利用等式 $\mathcal{S}(\tilde{v}_a^m \otimes v_{\lambda_0}) = \mathcal{S}\big(v_a \otimes \mathcal{S}(\tilde{v}_a^{m-1} \otimes v_{\lambda_0})\big)$，我们将 $\langle v_b^m | \tilde{v}_a^m \rangle_{\lambda_0}$ 化简为

$$\big(v_b^{m-1}, \langle v_b | v_a \rangle^{(1)}_{\lambda_{m-1}} \mathcal{S}_1 \tilde{v}_a^{m-1}\big)\, \langle v_b | v_a \rangle^{(2)}_{\lambda_{m-1}}\, \mathcal{S}_2(\lambda_0) = \langle v_b | v_a \rangle^{(2)}_{\lambda_{m-1}} \Big\langle \omega\big(\langle v_b | v_a \rangle^{(1)}_{\lambda_{m-1}}\big) v_b^{m-1} | \tilde{v}_a^{m-1} \Big\rangle_{\lambda_0},$$

这里我们用 Sweedler 记号 $\Delta(x) = x^{(1)} \otimes x^{(2)} \in U_q(\mathfrak{b}_-) \otimes U_q(\mathfrak{g}_-)$表示$x \in U_q(\mathfrak{g}_-)$的余乘。由于对所有 $y \in U_q(\mathfrak{g}_+)$和 $\alpha \in \Gamma_+$，都有$yq^{h_\alpha} v_b = \epsilon(y) q^{(\alpha,\beta)} v_b$，我们得到

$$\langle v_b^m | \tilde{v}_a^m \rangle_{\lambda_0} = q^{-(\beta,\nu_b)} \langle v_b | v_a \rangle_{\lambda_{m-1}} \langle v_b^{m-1} | \tilde{v}_a^{m-1} \rangle_{\lambda_0}.$$

对 m 进行归纳，我们得出 $\langle v_b^m | \tilde{v}_a^m \rangle_{\lambda_0}$ 等于 (4.7) 右端，差一个因子 $q^{-m(\beta,\nu_b)}$。最后，令 $v_a^m = q^{m(\beta,\nu_b)} \tilde{v}_a^m$。这就证明了该引理对一般的情形成立，因而对所有使 (4.7) 右端有意义的 λ 都成立。 □

由上述因式分解可知，极端向量 $u = \mathcal{S}(v_a^m \otimes v_\lambda) \in V^{\otimes m} \otimes V_\lambda$ 的最小公分母包含

$$d(\lambda) = [\eta_\beta(\lambda + (m-1)\nu_a)]_q = [(\lambda + \rho, \beta) - \frac{m}{2}(\beta, \beta)]_q.$$

它来自 (4.7) 右端最左边的因子 $\langle v_b | v_a \rangle_{\lambda_{m-1}}$。记 $s_{v_b^m, v_a^m}(\lambda)$ 为矩阵元 $\langle v_b^m | v_a^m \rangle_\lambda$。由于 d 整除 $[\eta_{m\beta}]_q$，重标度矩阵元

$$\check{s}_{v_b^m, v_a^m}(\lambda) = c(\lambda) d(\lambda) s_{v_b^m, v_a^m}(\lambda) \propto \prod_{k=0}^{m-1} \theta(\lambda_k),$$

其中 $c(\lambda) = -q^{-\eta_{m\beta}(\lambda_{m-1})\,[\eta_{m\beta}(\lambda)]_q\,)()}$ 在一般的 $\lambda \in \mathcal{H}_{\beta,m}$ 处正则且不为零，因为 $d(\lambda)$ 抵消了 $\langle v_b | v_a \rangle_{\lambda_{m-1}}$ 中的极点。令 $\check{u} \overset{d}{=} d^k(\lambda) u$，其中 $k \geqslant 1$ 是该极点的最高次数。它是 $V^{\otimes m} \otimes V_\lambda$ 中的一个极端向量，在一般的 $\lambda \in \mathcal{H}_{\beta,m}$ 处正则。

事实上，令 $\mathcal{H}_\mu$ 表示 $\mu \in \Gamma_+$的零集 $\{\lambda \in \mathfrak{h}^* | [\eta_\mu(\lambda)]_q = 0\}$。那么，$\check{u}$ 的 V_λ-分量的极点只能位于 $\lambda \in \cup_{\mu<\beta} \mathcal{H}_\mu$处。但每个 μ 要么与 β 不共线，要么 $\mu = l\beta$ 与$l < m$。在这两种情况下，$\mathcal{H}_{\beta,\ m} \cap \mathcal{H}_\mu$ 的补集在 $\mathcal{H}_{\beta,\ m}$ 中都是稠密的，因为 q 不是单位根。

命题 4.3。对于一般的 $\lambda \in \mathcal{H}_{\beta,\ m}$, $\theta_{\beta,\ m}(\lambda) \propto \check{s}_{v_b^m,\ v_a^m}(\lambda)$。

证明。奇异向量 $\check{u}$ 可表示为

$$\check{u} = v_a^m \otimes d^k(\lambda)v_\lambda + \ldots + v_b^m \otimes d^{k-1}(\lambda)c(\lambda)\check{s}_{v_b^m,v_a^m}(\lambda)v_\lambda.$$

我们证明，对于一般的 $\lambda \in \mathcal{H}_{\beta,\ m}$，有 $\check{u} = v_b^m \otimes c(\lambda)\check{s}_{v_b^m,\ v_a^m}(\lambda)v_\lambda$，其中 $d(\lambda) = 0$。事实上，$\check{u}$ 的V_λ-分量在 V_λ 中张成一个 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-子模。这个张成空间中权最大的向量是极端向量，且不同于 v_λ。但对于一般的 λ，$\theta_{\beta,\ m}(\lambda)v_\lambda$ 是 V_λ 中唯一的极端向量（相差一个因子）。因此 $k = 1$ 和 $\theta_{\beta,\ m} \propto \check{s}_{v_b^m,\ v_a^m}$。 □

对每个单根 $\alpha \in \Pi_\beta$，都可以关联一个可容许的 β-表示，只需令 V 为最高权 $(\beta,\ \beta)\ \ell(\alpha,\ \alpha)\ \omega_\alpha$ 的不可约模，其中 $\ell = \ell_{\alpha,\ \beta}$ 是 α 在 β 中出现的重数。我们将此模记为 $V_{\alpha,\ \beta}$。若 $(\beta,\ \beta)\ \ell(\alpha,\ \alpha) \in \mathbb{N}$，则它是有限维的。否则，它是相对于根基为 $\Pi\backslash\{\alpha\}$ 的 Levi 子代数的抛物 Verma 模，参见下一节。

$\hat{}$ 可以将 θ_β 视为 $U_q(\mathfrak{b}_-)$ 的一个元素，从而转到其“普适形式”。接着

$$\theta_{\beta,m} = (\tau_{\nu_b}^{m-1}\theta_\beta)\ \ldots\ (\tau_{\nu_b}\theta_\beta)\,\theta_\beta, \tag{4.8}$$

$\hat{}$ 其中 τ_ν 是由 $\mathfrak{h}^*$ 按权 ν 作仿射平移所生成的 $U_q(\mathfrak{h})$ 的一个自同构，也就是说，$\hat{}\ (\tau_\nu\varphi)(\mu) = \varphi(\mu + \nu)$，$\varphi \in U_q(\mathfrak{h})$，$\mu \in \mathfrak{h}^*$。我们可以问，这种平移何时是平凡的，即 $\tau_{\nu_b}\theta_\beta = \theta_\beta$，且$\theta_{\beta,\ m}$ 恰好是 θ_β 的 m 次幂。

命题 4.4. 设 β 是一个正根。假设存在 $\alpha \in \Pi_\beta$ 使得 $\ell_{\alpha,\ \beta} = 1$。那么$\theta_{\beta,\ m} = \theta_\beta^m \in U_q(\mathfrak{b}_-)$。

证明. 设 $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ 是由单根向量 f_μ、e_μ 生成的半单子代数，且满足 $\mu \neq \alpha$。令 V 为模 $V_{\alpha,\ \beta}$，其最高权为 $\phi = (\beta,\ \beta)\ (\alpha,\ \alpha)^{\omega_\alpha}$。令 v_b 为最高向量，并且$v_a \propto f_\beta v_b$。

由于 v_a 和 v_b 都张成了它们在 V中的权子空间，因此可以将它们纳入一个标准正交基中。因此，$\langle v_b|v_a\rangle = s_{ba}$ 可以由公式 (3.5) 计算得出。我们将其写作

$$\theta_\beta(\lambda) = c_{ba} + \sum_{v_b \succ v_i \succ v_a} c_{bi}s_{ia}(\lambda).$$

最高向量 v_b 被 $\mathfrak{s}_-$ 消去，因此 v_a 与 v_b 之间的哈斯图为

$$v_b \quad \xleftarrow{e_\alpha} \quad f_\alpha v_b \quad \ldots \quad v_a,$$

其中，省略部分中的箭头是来自 $U_q(\mathfrak{s}_+)$ 的单根向量。但 f_α 的唯一副本 $\hat{}$ 位于 c_{bi} 中，而所有 s_{ia} 都属于 $U_q(\mathfrak{s}_-)U_q(\mathfrak{h}_\mathfrak{s})$，即 $U_q(\mathfrak{s})$ 的扩张的 Borel 子代数。

最后，由于 $\Pi_\mathfrak{s}$ 与 ν_b正交，对于所有 $\mu \in \mathrm{R}_\mathfrak{s}^+$，都有 $(\mu, \nu_a) = -(\mu, \beta)$。因此

$$\theta_\beta(\lambda_k) = \theta_\beta(\lambda - k\beta), \quad \theta_{\beta,m}(\lambda) = \prod_{k=0}^{m-1} \theta_\beta(\lambda - k\beta),$$

其中，乘积按从左到右的降序排列。这证明了普通幂分解，因为每个 θ_β 都带有权 $-\beta$。

□

在 $\mathfrak{sl}(n)$ 的情形下，上述命题的条件对所有的 α, β 均得到满足。

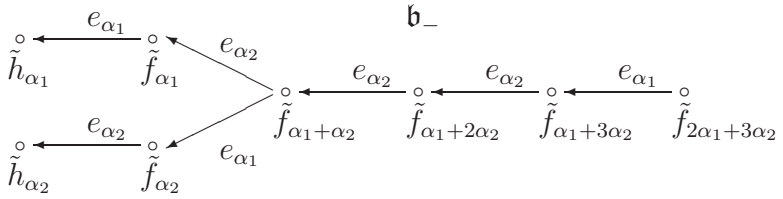
5 Shapovalov 次数为1的元素

本节描述进入 (4.8) 的因子 θ_β，其中采用特定的可容许 β-表示 (V, v_b, v_a)。我们在经典情形下给出该问题的完整解答。在 $q \neq 1$ 的情形下，我们将问题归结为计算简单有限维模 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 中矩阵 $\mathcal{C}$ 的各项；该有限维模是伴随模 $\mathfrak{g}$ 的 q-变形。其最高权为极大根 $\xi \in \mathrm{R}^+$。

为实现我们的目标，我们需要确定 Hasse 子图 $\mathfrak{H}(v_b, v_a) \subset \mathfrak{H}(V)$，它包含从 v_a 到 v_b 的所有可能路径。我们论证 $\mathfrak{H}(v_b, v_a)$ 可以从下面引入的图 $\mathfrak{H}(\mathfrak{b}_-)$ 中提取出来，并且底层的 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-模是同构的。

与 $\mathfrak{H}(\mathfrak{b}_-)$ 关联的 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-模是从 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 构造的，方法是商去正权空间的张成空间。为了将 $q \neq 1$ 的情形与经典情形区分开，并避免与根向量混淆，我们将在节点上加波浪号。权为 $-\eta \in -\mathrm{R}^{+\tilde{}}$ $\tilde{}$ 的向量 f_η 在按 $(f_\eta, f_\eta) = 1$ 归一化后，除符号外唯一确定。我们可以假设它们是经典根向量的形变。对于零权的基元素，我们取 $h_\alpha = e_\alpha f_\alpha$, $\alpha \in \Pi$。

例如，在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2$ 的情形下，图 $\mathfrak{H}(\mathfrak{b}_-)$ 为



从现在起，我们固定一个最高权为 $\phi = \sum_{(\beta,\beta)} \ell_{\alpha,\beta(\alpha,\alpha)}\omega_\alpha$，最高向量为 v_b 的$V = V_{\alpha,\ \beta}$。我们用 $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ 表示一个极大秩约化李子代数，其根系为 $\Pi_\mathfrak{l} = \mathrm{R}\backslash\{\alpha\}$；用 $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{g}_+$ 表示它的抛物扩张。

为了构造起始节点 $v_a \in V$，我们将使用以下观察。回顾一下，张量积 $W \otimes V$ 中两个最高权不可约模的奇异向量 $\sum_i w_i \otimes v_i$ 定义了一个 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-同态 $W^* \to V$（相应地也定义了 $V^* \to W$）。这里，W^* 是一个最低权为其最高权 W 的负值的不可约 $U_q(\mathfrak{g})$-模。对偶作用按标准方式借助反极 γ 定义：对于 $x \in U_q(\mathfrak{g}_+)$、$w \in W$ 和 $\varphi \in W^*$，有 $(x\varphi)(w) = \varphi\big(\gamma(x)w\big)$。同态 $W^* \to V$ 通过赋值 $\varphi \mapsto \sum_i \varphi(w_i)v_i$ 实现。我们将把这一构造应用于 $W = \tilde{\mathfrak{g}}$。

引理 5.1. 存在唯一一个（相差一个标量因子）的权为 ϕ 的奇异向量 $u \in \tilde{\mathfrak{g}} \otimes V$。

证明. 令 $J \subset U_q(\mathfrak{g}_-)$ 为最高向量 $v_b \in V$ 的湮灭子。$\tilde{\mathfrak{g}} \otimes \tilde{V}$ 中权为 ϕ 的奇异向量与被左理想 $\sigma(J) \subset U_q(\mathfrak{g}_+)$ 湮灭的零权向量 $h \in \tilde{\mathfrak{g}}$ 一一对应。取与所有 $\mu \in \Pi_{\mathfrak{l}}$ 正交的 $h \neq 0$；它在相差一个标量因子的意义下唯一。

理想 J 由元素 $\theta \in U_q(\mathfrak{g}_+)$ 生成，其中 θv_b 是覆盖 V 的 Verma 模 V_ϕ 中的奇异向量。根据构造，$\tilde{u}$ 被 $e_\alpha \in J$ 湮灭，其中 $\alpha \in \Pi_{\mathfrak{l}}$。若 $\theta v_\phi \in V_\phi$ 是权为 $\phi - m\eta$ 的奇异向量，且 $\eta \in \mathrm{R}^+ \backslash \mathrm{R}_{\mathfrak{l}}^+$，则 $m > 1$。事实上，由于 $\phi = l\omega_\alpha$，且 $l = (\beta,\beta)$ 为正有理数 ℓ_α，$_\beta(\alpha,\alpha)$，我们得到不等式 $l(\omega_\alpha, \eta^\vee) + (\rho, \eta^\vee) > 1$。于是，条件 (2.1) 中以 ϕ 替换 λ、以 η 替换 β 后，仅当 $m > 1$ 时才成立，因为 q 不是 $\tilde{}$ 的单位根。由于 $m\eta$，且 $m > 1$ 不是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的一个权，元素 $\sigma(\theta)$ 便湮灭 h。 □

注意，当 $_{(\beta,\beta)}\ \ell_{\alpha,\beta(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ 时，V 是有~~限维的~~；否则它是一个抛物 Verma 模，因为其最高权不在 De Concini-Kac-Kazhdan 超平面 $\mathcal{H}_{\eta,m}$ 上，其中 $\eta \in \mathrm{R}^+ \backslash \mathrm{R}_{\mathfrak{l}}^+$。

现在，令 $v_a \in V$ 为所选基下 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 中展开式 $u = \tilde{e}_\xi \otimes v_a + \ldots$ 里的最小权向量（我们省略了 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 因子中权较低的项）。注意，在经典情形下，若 $\eta \in \mathrm{R}^+ \backslash \mathrm{R}_{\mathfrak{l}}^+$，则向量 $f_\eta v_b$ 不为零，因为 $(\eta, \phi) > 0$。特别地，$v_a \propto f_\xi v_b \neq 0$ 对于极大根 ξ 成立。对于一般的 q，v_a 被 $U_q(\mathfrak{g}_+)\tilde{}$ 中的左理想消去，该左理想消去最低向量 $f_\xi \in \tilde{\mathfrak{g}} \simeq \tilde{\mathfrak{g}}^*$。根据引理 5.1，这样的 v_a 在 V 中相差一个标量因子而唯一。

在正根上引入偏序，记作 $\mu \prec \nu$ 当且仅当 $f_\mu \succ f_\nu$ 属于 $\mathfrak{H}(\mathfrak{b}_-)$。这与 $\mathfrak{H}(\mathfrak{g}_+) \subset \mathfrak{H}(\mathfrak{g})$ 上的偏序一致，后者恰好是根系 R^+, [26] 的哈斯图。注意，对于简单的 α，$\alpha \prec \beta$ 当且仅当 $\alpha \in \Pi_\beta$。

命题 5.2. 设 $u = \tilde{e}_\xi \otimes v_a + \ldots$ 是引理 5.1 中的奇异向量，且在 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的权基展开中，$v_a \in V$ 具有最小权。那么，由 ~ ~$v_a \in V$ 生成的 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-模对于几乎所有的 q 都同构于 $\tilde{\mathfrak{g}}(h_\alpha, f_\xi)$。

˜证明。由赋值 $f_\xi \mapsto v_a$ 确定的 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-模同态 $\tilde{\mathfrak{g}} \to V$ 可通过商 $\mathfrak{g}(\tilde{h}_\alpha, \tilde{f}_\xi)$ 分解，因为其核包含所有满足 $\eta \in \mathrm{R}_{\mathrm{I}}^+$ 的 $\tilde{f}_\eta$、所有满足 ˜ ˜$\eta \in \Pi_{\mathrm{I}}$ 的 $\tilde{h}_\eta = e_\mu \tilde{f}_\eta$，以及所有负权空间。我们只需证明，对于几乎所有的 q，它在 $\mathfrak{g}(h_\alpha, f_\xi)$ 上是同构的。由于 V 关于 q 有理地相关，只需验证它对 $q = 1$ 是单射的。但对于每个满足 $\alpha \preceq \eta \preceq \xi$ 的正根 η，向量 $f_\eta v_b$ 属于 $U(\mathfrak{g}_+)$ $f_\xi v_b$ 且不为零，因为 $(\eta, \phi) > 0$。

□

˜由此可得 $e_\beta v_a \neq 0$，因为 $e_\beta f_\xi \neq 0$。因此，对于几乎所有的 q，(V, v_b, v_a) 都是一个可容许的 β-表示。

我们更详细地考察经典情形。我们选择 $h_\alpha^\vee = \frac{2}{(\alpha,\alpha)} h_\alpha$, $\alpha \in \Pi$，作为 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}_-$ 中的一组基，使得 $\alpha(h_\alpha^\vee) = 2$。满足 $\mu \in \mathrm{R}^+$ 的根向量 f_μ 构成 $\mathfrak{g}_-$ 中的一组基。若 $\mu = \nu - \alpha$ 是正根，则由 $\alpha \in \Pi$ 标记的箭头为 $h_\alpha^\vee \xleftarrow{e_\alpha} f_\alpha$ 和 $f_\mu \xleftarrow{e_\alpha} f_\nu$。作为 $\mathfrak{H}(\mathfrak{b}_-)$ 底层结构的 $U(\mathfrak{g}_+)$-模是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_+$。

公式 (3.5) 对 θ_β 的特化需要了解矩阵 $C = (\pi \otimes \mathrm{id})(\mathcal{C}) \in \mathrm{End}(V) \otimes U_q(\mathfrak{g}_-)$，而对于 $q = 1$，该矩阵可直接得到。对于 $\nu, \gamma \in \mathrm{R}^+$，用 $C_{\nu,\gamma} \in \mathbb{C}$ 表示满足以下条件的标量：若 $\gamma - \nu \in \mathrm{R}^+$，则 $[e_\nu, f_\gamma] = C_{\nu,\gamma} f_{\gamma-\nu}$, $C_{\gamma,\gamma} = \frac{\gamma}{(\beta,\beta)\, \ell_\alpha, \beta}$；否则为 $C_{\nu,\gamma} = 0$。那么

$$(\pi \otimes \mathrm{id})(\mathcal{C})(f_\gamma v_b \otimes 1) = v_b \otimes C_{\gamma,\gamma} f_\gamma + \sum_{\nu \prec \gamma} f_{\gamma-\nu} v_b \otimes C_{\nu,\gamma} f_\nu,$$

对于所有满足 $\alpha \preceq \gamma \preceq \beta$ 的 γ。该等式给出了所需矩阵 C 的所有元素。公式 (3.5) 变为

$$\theta_\beta = C_{\beta,\beta} f_\beta + \sum_{k \geqslant 1} \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_{k+1} = \beta} (C_{\nu_{k+1},\gamma_k} \ldots C_{\nu_1,\gamma_0})(f_{\nu_{k+1}} \ldots f_{\nu_1}) \frac{(-1)^k}{\eta_{\mu_k} \ldots \eta_{\mu_1}}. \tag{5.9}$$

内部求和遍历 β 的所有划分，求和项属于 $\nu_i \in \mathrm{R}^+$，且对于 $i = 1, \ldots, k$，所有满足 $\gamma_0 = \beta$ 的 $\gamma_i = \gamma_{i-1} - \nu_i$ 都属于 R^+，并受条件 $\alpha \preceq \gamma_i$ 限制。特别地，$\gamma_k = \nu_{k+1}$。权 μ_i 定义为 $\mu_i = \gamma_0 - \gamma_i = \nu_1 + \ldots + \nu_i$。注意，在 $q \neq 1$ 情形下，相应的和可能包含这样的项：其中 C 的元素权不是根。

现在我们总结本文的结果。

˜ ˜ ˜定理 5.3。对于每个 $\alpha \prec \beta$，当 $h_\alpha, f_\beta \in \tilde{\mathfrak{g}}$ 时，重标度矩阵元 $\langle h_\alpha | f_\beta \rangle [\eta_\beta]_q$ 是一个 Shapovalov 元 $\theta_{\beta,\,1}$。对于一般的次数 $m > 1$，$\theta_{\beta,\,m}$ 由因式分解公式 (4.8) 给出，其中 $\theta_\beta = \theta_{\beta,\,1}$，移位权 $\nu_b = \frac{(\beta,\ \beta)\ \ell_{\alpha,\ \beta}}{(\alpha,\ \alpha)} \omega_\alpha$。

证明。注意，求和公式 (3.5) 只涉及由初始节点和终止节点决定的 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-模的结构。对于 U_q 的矩阵元而言，这一点显而易见；

对于嘉当因子也是如此，因为它们只取决于权之差（请注意，由一个权向量生成的循环 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-模中的权仅在加上一个常数权后才确定）。此外，子图 $\mathfrak{H}(v_a, v_b)$ 的节点可以纳入一个标准正交基中，因此 $s_{ba} \propto \langle v_b | v_a \rangle$。现在，对于几乎所有的 q，由命题 5.2、命题 4.3 和引理 4.2 可得定理。因此，对于所有使因子 (4.8) 有定义的 q，定理都成立。

□

最后我们指出，对于固定的 $\beta \in \mathbb{R}^+$，可以选取 $\alpha \in \Pi_\beta$，使得 ˜ ˜Hasse 图 $\mathfrak{H}(h_\alpha, f_\beta)$ 最简单，例如基本群最小的图。这类图可以在最小维数的基本辅助模的子图中找到。对于其关联的 $U_q(\mathfrak{g}_+)$-模，这一点同样成立。对于 $\mathfrak{g}$的所有非例外类型，路径求和公式中涉及的矩阵 $\mathcal{C}$的元素已在 [27], 命题 2.2 中计算。 $\mathfrak{g}_2$ 在 [28]中也进行了同样的计算。因此，上述对这类量子群的 Shapovalov 元素的描述完全是显式的。对于秩为 > 2的例外 $\mathfrak{g}$，问题可归结为计算 $\mathcal{C}$的相关元素。

在半单共轭类 [10], 的量子化背景下，关键是确保 $\theta_{\beta,\, m}(\lambda)$ 在 $q \to 1$时趋于 f_β^m。因式分解 (4.8) 与 $\theta_{\beta,\, 1}$ 的路径求和公式提供了有关 $\theta_{\beta,\, m}(\lambda)$ 可能出现的奇点的重要信息，并有助于分析，即使无需知道 $\mathcal{C}$的矩阵元。

致谢

本研究部分得到莫斯科物理技术学院“优先事项2030”战略学术领导力计划以及俄罗斯科学基金会项目 23-21-00282 的资助。作者感谢 Vadim Ostapenko 和 Vladimir Stukopin 富有启发性的讨论。

参考文献

[1] Bernstein, J. H., Gelfand, I. M., Gelfand, S. I.: 《关于某类 $\mathfrak{g}$-模》，《功能分析及其应用》10卷第2期（1976），87–92。

[2] Humphreys, J. 半单李代数在 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 中的表示，《数学研究生教材》第 94 卷，美国数学会，2008 年。

[3] Bernstein, J. H., Gelfand, I. M., Gelfand, S. I.：由最高权向量生成的表示的结构，《功能分析及其应用》5，第 1 期（1971），1–9。[4] Shapovalov, N. N.：关于复半单李代数包络代数上的双线性形式，《功能分析及其应用》6（1972），65–70。[5] Carlin, K. Shapovalov 元素的局部系统，《代数通讯》23，第 8 期（1995），3039–3049。[6] Malikov, F.、Feigin, B.、Fuchs, D.：Kac–Moody 代数上的 Verma 模中的奇异向量，《功能分析及其应用》20，第 2 期（1986），103–113。[7] Asherova, R. M.、Smirnov, Yu. F. 和 Tolstoy, V. N.：单李群的投影算子，《理论数学物理》8（1971），813–825。[8] Zhelobenko, D., P.：约化李代数的表示，Nauka，莫斯科，1994。[9] Musson, I.：反对偶李超代数的 Shapovalov 元素与 Jantzen 和公式，arXive:1710.10528。[10] Mudrov, A.：量子共轭类上的向量丛，arXiv:2201.04568。[11] Kumar, Sh.、Letzter, G.：受限包络代数与量子化受限包络代数的 Shapovalov 行列式，《太平洋数学杂志》179，第 1 期（1991），123–161。[12] Mudrov, A.： $U_q(sl(n+1))$ 上 Shapovalov形式的正交基，《数学物理评论》27（2015），1550004。[13] Catoiu, S.、Musson, I.： $U_q(\mathfrak{sl}(N+1))$ 的 Shapovalov 元素，arXiv:2208.05831。[14] Etingof, P.、O. Schiffmann, O.：动力学 Yang–Baxter 方程讲义，《量子群与李理论》，伦敦数学学会讲义丛书，达勒姆，1999 年，第 290 卷，剑桥大学出版社（2001）。[15] Etingof, P.I.、Kirillov, A.A., Jr：Macdonald 多项式与量子群表示，《数学研究通讯》1，第 3 期（1994），279–296。[16]Felder G.、Tarasov V.、Varchenko A.：椭圆量子 Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard 差分方程解的单值化，《国际数学杂志》10，第 8 期（1999），943–975。

[17] 阿列克谢耶夫，A.；拉霍夫斯卡，A.：余伴随轨道上的不变 $*$乘积与沙波瓦洛夫配对，《瑞士数学评论》80（2005），795–810。[18] Mudrov，A.：R矩阵与逆 Shapovalov 型，《数学物理学杂志》57（2016），051706。[19] 内格尔，J. G.；莫申斯基，M.：降低或升高包含在U_{n-1} 的不可约向量空间中的不可约向量空间的算子 U_n，《数学物理学杂志》6（1965），682–694。[20] D. 阿尔诺东、E. 比费努瓦、E. 拉古西和 P. 罗什：量子动力学杨-巴克斯特方程的通用解，《数学物理快报》44（1998），第3期，201–214。[21] 米克尔松，J.：半单李代数的步代数，《现代物理评论》4（1973），307–318。[22] 德林费尔德，V.：量子群。载于《1986年伯克利国际数学家大会论文集》，Gleason，A. V.（编），第798–820页，美国数学会，普罗维登斯（1987）。[23] 神保，M.：$U(\mathfrak{g})$的 q 差分类比与杨-巴克斯特方程，《数学物理快报》10（1985），63–69。[24] 查里，V. 和普雷斯利，A.：量子群指南，剑桥大学出版社，剑桥，1994。[25] 德孔奇尼，C.；卡茨，V. G.：单位根处量子群的表示，载于《算子代数、酉表示、包络代数与不变理论》（巴黎，1989），《数学进展丛书》92（1990），471–506。[26] 帕纽舍夫，D.：正根偏序集及其相关结构，《代数与组合杂志》23（2006），79–101。[27] 阿什顿，T.；穆德罗夫，A.：正交辛量子群的R矩阵与Mickelsson代数，《数学物理学杂志》56（2015），081701。[28]巴拉诺夫，A.、穆德罗夫，A. 和奥斯塔彭科，V.：量子例外群 G_2 及其半单共轭类，《代数与表示论》23（2020），1827–1848。