arXiv:2301.02627v1 [math.RA] 6 Jan 2023

前李代数、其乘法格与幂等自同态

Michela Cerqua 和 Alberto Facchini

摘要 我们为交换环 k （含单位元）上的任意非结合代数引入前态射和前导子的概念。我们将这些概念应用于前李 k代数以及更一般的李-可容许k代数的研究。将任意代数 $(A,\cdot)$ 关联到其伴随反交换代数 $(A,[-,-])$，可得一个函子，它将带有前态射的 k代数范畴映到反交换 k代数范畴。我们描述了前李代数中两个理想的交换子，并证明胡克=史密斯条件对前李代数成立。这使我们能够运用有关乘法格的各种概念，研究前李代数的理想乘法格。我们研究前李代数 L的幂等自同态，即 L 的半直积分解以及 L上的双模。

引言

本文旨在从理想的乘法格这一视角介绍前李代数，并研究其幂等端同态。前李代数最初由 Vinberg 在 [15] 中引入并加以研究。他将其应用于凸齐性锥的研究。他把本文所称的前李代数称为“左对称代数”。

我们为带单位元的交换环 k 上的任意非结合代数提出前态射和前导子的概念，并将其应用于前李 k代数以及更一般的 Lie-可容许 k代数的研究。将任意前李代数 $(A,\cdot)$ 与其伴随李代数 $(A,[-,-])$ 联系起来，得到一个从带前态射的前李 k代数范畴 $\mathsf{PreL}_{k,p}$ 到 Lie k代数范畴的函子。我们引入前李代数上的模 M 的概念

Michela Cerqua 电子邮箱：michela.cerqua@studenti.unipd.it · Alberto Facchini “Tullio Levi Civita”数学系，帕多瓦大学，35121 意大利帕多瓦 电子邮箱：facchini@math.unipd.it

代数 L，与结合代数的情形类似，可以通过适当的标量乘法 $L \times M \to M$，或将其视为带有前态射 λ 的 k-模M来以两种等价方式定义：$(L, \cdot) \to (\mathrm{End}({}_kM), \circ)$。前李 k代数 $(L, \cdot)$ 上的模范畴与其伴随李 k代数 $(L, [-,-])$ 上的模范畴同构。随后，我们考察前李代数中两个理想的交换子。特别地，我们证明前李代数满足 (Huq=Smith) 条件。借助交换子的概念，前李代数的理想格成为乘法格 [6, 8]。由此我们立即得到阿贝尔前李代数、素理想、前李代数的素谱、可解和幂零前李代数、亚交换和超阿贝尔前李代数、中心化子以及中心等概念。

接着，我们考察前李代数的幂等端同态，因为它们能直接说明前李代数的半直积是什么、一个前李代数对另一个前李代数的作用是什么，并引出前李代数上的双模这一概念。我们研究前李代数的“Dorroh 扩张”。与结合情形类似，我们得到范畴 PreL_k 与带单位元且带增广的前李代数范畴之间的范畴等价。

1 非结合 k-代数的初步概念

设 k 是含幺交换环。本文中，k-代数是一个 k-模${}_kM$，并配备一个额外的 k-双线性运算 $M \times M \to M$，$(x, y) \mapsto xy$（等价地说，是一个 k-模态射 $M \otimes_k M \to M$）。M 的子代数（分别为理想）是一个k-子模 N，满足对每个 x、$y \in N$ 都有 $xy \in N$（并且对每个 $x \in M$ 和 $n \in N$都有 $xn \in N$ 和 $nx \in N$，分别）。通常，若 N 是 M的一个理想，则商k-模 M/N继承一个 k-代数结构。M 的所有理想 N 与 M上的所有同余之间存在一一对应，也就是说，这些同余是满足以下条件的 M 上的等价关系 $\sim$：若 $x \sim y$ 且 $z \sim w$，则对每个 x、y、z、$w \in M$和每个 $\lambda \in k$，都有 $x + z \sim y + w$、$\lambda x \sim \lambda y$和 $xz \sim yw$。代数 M 的反代数 M^{op} 定义为在 M^{op} 上取映射 $(x, y) \mapsto yx$作为乘法。

若 M和 M'是两个 k代数，则 k-线性映射 $\varphi\colon M \to M'$若对每个 $x, y \in M$ 都满足 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$，则称其为 k-代数同态。显然，k代数在普适代数的意义下构成一个簇。此外，它还是一个 Ω群簇，也就是说，这是一个有基点的簇（即恰有一个常元），并且其运算和恒等式包含群簇的那些运算和恒等式。因此，k代数构成一个半阿贝尔范畴。Ω群的其他例子包括阿贝尔群、非幺环、交换代数、模和李代数。

如果 M 是任意一个 k-代数，则其自同态关于映射的复合 $\circ$ 构成一个幺半群，即一个带有双侧单位元的半群。k-代数 M的导子是满足以下条件的任意 k-线性映射 $D\colon M \to M$，即对于每个 x，$y \in M$，有 $D(xy) = (D(x))y + x(D(y))$。对于任意 k-代数 M，我们可以构造 k-代数的导子$\mathrm{Der}_k(M)$，其元素是 M的所有导子。

如果 M 是任意一个 k-代数，并且 $D,\ D'$ 是 M的两个导子，那么复合映射 DD' 通常不是 M 的导子，但 $DD'-D'D$ 是。因此，对于任意 k-代数 M，我们可以将李 k-代数 $\mathrm{Der}_k(M)$定义为 $\mathrm{End}({}_kM)$ 的子集，其中包含 M 的所有导子，乘法定义为 $[D,D']:=DD'-D'D$，对每个 $D,\ D'\in\mathrm{Der}_k(M)$均成立。

众所周知，对于我们的（非结合） k-代数，并没有一个通用的表示（或模）的概念。Eillenberg提出了非结合环上的双模概念；这一概念适用于Lie代数，但在研究Jordan代数和交错代数时并不方便。就模而言，情况如下。

1.1 结合 *k*-代数上的模。

给定任意一个 k-代数 M，对于每个元素 $x\in M$，我们可以考虑映射 $\lambda_x:\ M\to M$，定义为对每个 $a\in M$都有 $\lambda_x(a)=xa$。映射$\lambda:\ M\to\mathrm{End}({}_kM)$定义为对每个 $x\in M$都有 $\lambda:\ x\mapsto\lambda_x$。当且仅当 M 满足结合律时，这个 λ才是一个 k-代数态射。因此，对于任意结合 k-代数M，自然地将左 M-模定义为带有一个 k-代数同态 $\lambda:\ M\to\mathrm{End}({}_kA)$的任意 k-模 ${}_kA$。类似地，我们可以将右 M-模定义为带有一个 k-代数反同态 $\rho:\ M\to\mathrm{End}({}_kA)$的$k$-模 ${}_kA$。这里，所谓两个 k-代数 M、M'之间的 k-代数反同态 $\psi:\ M\to M'$，是指满足对每个 x、$y\in M$都有 $\psi(xy)=\psi(y)\psi(x)$的任意 k-线性映射 ψ。显然，映射 $M\to M'$ 是一个 k-代数反同态，当且仅当它是一个 k-代数同态 $M^{\mathrm{op}}\to M'$。由此可知，右 M-模与左M^{op}-模一致。更确切地说，所谓右 M-模与左M^{op}-模一致，是指右 M-模范畴与左 M^{op}-模范畴之间存在一个典范的范畴同构。类似地，左 M-模与右 M^{op}-模一致。此外，如果 M 是交换的，那么左 M-模与右 M-模一致。最后，结合 k-代数 M 上的左模 A，除了使用 k-代数同态 $\lambda:\ M\to\mathrm{End}({}_kA)$之外，也可以等价地用 k-双线性映射 $\mu:\ M\times A\to A,\ \mu:\ (m,\ a)\mapsto ma$来定义，并要求对每个 m、$m'\in M$ 和 $a\in A$都有$(mm')a=m(m'a)$。

1.2 Lie k-代数上的模。

对于任意 k-模 A，我们将用 $\mathfrak{gl}(A)$ 表示由 A 的所有k-自同态构成的 Lie k-代数 $\mathrm{End}({}_kA)$，其运算 $[-,-]$ 定义为 $[f,g]=fg-gf$。

对于任意 Lie k-代数 M 和任意元素 $x\in M$，映射 λ_x 是 Lie k-代数 $\mathrm{Der}_k(M)$ 的一个元素，通常称为 x 的伴随，或由 x 定义的内导子，通常记作 $\mathrm{ad}_M x$，而不是 λ_x；映射 $\mathrm{ad}:\ M\to$

$\mathrm{Der}_k(M) \subseteq \mathfrak{gl}(M)$，定义为 $\mathrm{ad}\colon x \mapsto \mathrm{ad}_M x$，对每个 $x \in M$ 都成立，是一个 Lie k-代数同态。

左模 在 Lie k-代数 M 上的定义是：左 k-模 A 配备一个 Lie$k$-代数同态 $\lambda\colon M \to \mathfrak{gl}(A)$。类似地，也可以将*右 M-模* 定义为 k-模 A 配备一个 k-代数反同态 $\rho\colon M \to \mathfrak{gl}(A)$。然而，任意 Lie k-代数 M 都通过同构$M \to M^{\mathrm{op}}$, $x \mapsto -x$与其对代数 M^{op} 同构。因此，对于任意 Lie k-代数 M，右 M-模范畴与左 M-模范畴是典范同构的。所以，同时引入右模和左模毫无必要，只需引入左M-模，并将它们简称为“M-模”即可。

2 Pre-Lie k-代数

一个*Pre-Lie* k-代数 是一个满足以下恒等式的 k-代数 $(M,\cdot)$:

$$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z - y \cdot (x \cdot z) \tag{1}$$

对任意 $x, y, z \in M$。

对于任意 k-代数 $(M,\cdot)$，定义交换子 $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ 对每个$x, y \in M$, 则代数 $(M, [-,-])$ 是反交换的。若 $(M,\cdot)$ 是前李代数，则可得 $(M, [-,-])$ 是一个李代数，称为前李代数 $(M,\cdot)$ 的伴随 *Lie* 代数 。

前李代数也称为 Vinberg 代数或左对称代数。最后这个名称指的是，在 (1) 中，等式左侧的前两个变量可以互换。*右对称代数* 是满足以下条件的代数：对任意 $x, y, z \in M$，$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot z) \cdot y - x \cdot (z \cdot y)$。容易看出，左对称代数范畴与右对称代数范畴同构（范畴同构由 $M \mapsto M^{\mathrm{op}}$ 给出）。

例 1 (1) 每个结合代数显然都是前李代数。

(2) 关于 $k[x_1, \ldots, x_n]^n$ 的导子。设 k 是含幺交换环，$n \geq 1$ 是一个整数，且 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 是以 n 个不定元 $x_1, \ldots, x_n$ 为变量、系数取自 k的多项式环。设 A 是自由的 $k[x_1, \ldots, x_n]$-模$k[x_1, \ldots, x_n]^n$，其自由生成元集为 $\{e_1, \ldots, e_n\}$。作为一个 k-模，A 是自由的 k-模，其自由生成元集为集合 $\{\, x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} e_j \mid i_1, \ldots, i_n \geq 0,\ j = 1, \ldots, n\}$。考虑环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 的通常导子：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}) = \begin{cases} x_1^{i_1} \ldots i_j x_j^{i_j - 1} \ldots x_n^{i_n} & \text{for } i_j > 0, \\ 0 & \text{for } i_j = 0. \end{cases}$$

在 A 上定义乘法：对每个 $u = (u_1, \ldots\ldots, u_n)$，$v = (v_1, \ldots\ldots, v_n) \in A$,

$$v \cdot u = (\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial u_n}{\partial x_j}).$$

由此可见， A 是一个前李 k-代数，见 [2, 第 2 节。3]。

(3) 秩 2 的一个例子。设 k 为任意含幺交换环，$L \cong k \oplus k$ 为秩 2 的自由 k-模，其生成元自由集为 $\{e_1, e_2\}$。在 L 上定义乘法如下：令 $e_1e_1 = 2e_1$， $e_1e_2 = e_2$， $e_2e_1 = 0$， $e_2e_2 = e_1$，并将其按 k-双线性延拓。则 L 是一个前李 k-代数 [13]。

(4) 根树。回顾一下，树 是这样一种无向图：任意两个顶点之间恰有一条路径；等价地说，它是连通无环无向图。度为 n 的根树 是一个二元组 (T, r)，其中 T 是一棵有 n 个顶点的树，其根 r 是 T的一个顶点。下文中，我们将用数字 $1, \ldots\ldots, n$为 T 的顶点编号，并将根 r 标记为 1。

令 k 为含幺交换环，令 T_n 为由所有次数为 n的根树的同构类构成的自由 k-模，其自由生成元集为该集合。令

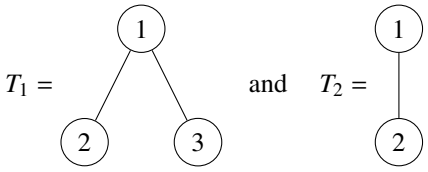
$$\mathcal{T} := \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{T}_n.$$

在 T 上定义乘法：对每一对根树 T_1, T_2，

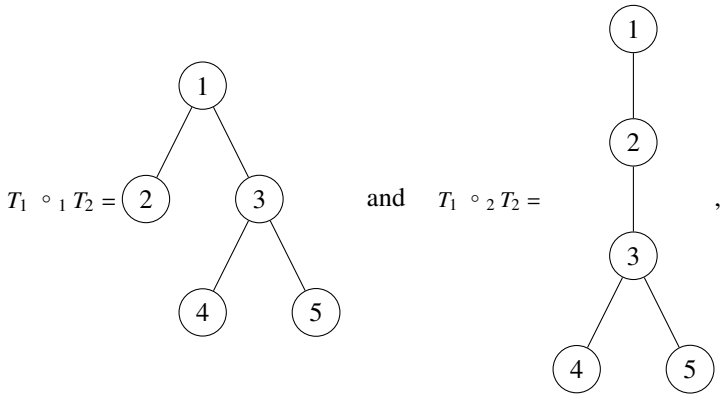
$$T_1 \cdot T_2 = \sum_{v \in V(T_2)} T_1 \circ_v T_2,$$

其中 $V(T_2)$ 是 T_2 的顶点集，而 $T_1 \circ_v T_2$ 是这样得到的根树：在 T_1 与 T_2 的不交并上，添加一条新的边，将 T_1 的根顶点与 T_2 的顶点 v 相连。$T_1 \circ_v T_2$ 的根定义为与 T_2 的根相同。要在 T 上定义乘法，将此乘法扩张为 k-双线性。

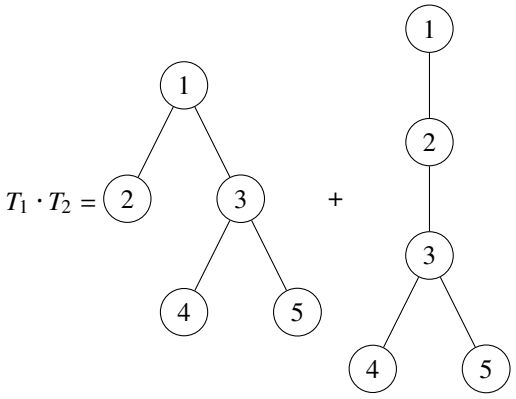
我们举一个例子。假设



Then



其中我们重新标记了 T_1 的顶点。（如果 T_1 有 n 个顶点，而 T_2 有 m 个顶点，那么在 $T_1 \circ_v T_2$ 中，将 T_1 的顶点依次重新标记为数字 $1, \ldots, n$ 和数字 $m+1, \ldots, m+n$ 是方便的。）因此



由此得到一个 pre-Lie k代数 T [4, 2]。它是一个分次 k代数，因为对于每个 n 和 m，$\mathrm{T}_n \cdot \mathrm{T}_m \subseteq \mathrm{T}_{n+m}$。可以证明，这是由一个生成元 [4]生成的自由 pre-Lie$k$代数。（T 的自由生成元是只有一个顶点的根树。）

(5) 上三角矩阵。这是一个有趣的例子，取自 [13],，所有细节均可在那里找到。设 k 是一个含幺交换环，其中 2 可逆，并设 n 是一个固定的正整数。设 M 是所有 $n \times n$ 矩阵构成的 k- 代数，U 是它的上三角矩阵子代数。设 $\varphi\colon M \to U$ 是一个 k-线性映射，它将任意矩阵 $A = (a_{ij}) \in M$ 映射为矩阵 $B = (b_{ij}) \in U$；其中，若 a_{ij} 位于主对角线上方，则为 $b_{ij} = a_{ij}$；若 a_{ij} 位于主对角线下方，则为 $b_{ij} = 0$；若 $a_{ij} = a_{ii}$ 位于主对角线上，则为 $b_{ii} = a_{ii}/2$。此外，对于每个 $A \in M$，设 A^{tr} 为矩阵 A 的转置。定义一个运算

在 U设置下，对每个 $X, Y \in U$, $X \cdot Y := XY + \varphi(XY\mathrm{tr} + YX\mathrm{tr})$。那么 $(U, \cdot)$ 是一个前李 k-代数。

正如我们在第1节中所定义的， k-代数同态 $\varphi\colon M \to M'$ 是一个 k-模态射，并且对每个 $x,\ y \in M$，都有 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$。但我们还需要另一个概念。我们称 k-模态射 $\varphi\colon M \to M'$ 为前态射，其中$M,\ M'$ 是任意的（不一定结合的） k-代数；若对每个 $x,\ y \in M$，都有$\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x)$。

引理 1. 映射 $\varphi\colon M \to M'$，其中 $(M, \cdot)$、$(M', \cdot)$ 是任意的 k-代数，当且仅当它是一个前态射 $(M, \cdot) \to (M', \cdot)$ 时，也是一个 k-代数态射$(M, [-,-]) \to (M', [-,-])$。

证明. 若 $(M,\cdot)$、$(M',\cdot)$ 是 k-代数，且 $\varphi\colon M \to M'$ 是一个映射，则

$$\varphi\colon (M,\cdot) \to (M',\cdot)$$

对于每个$a, b \in M$，它是前态射，当且仅当 $\varphi(ab) - \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ba) - \varphi(b)\varphi(a)$。这个等式可改写为 $\varphi(ab) - \varphi(ba) = \varphi(a)\varphi(b) - \varphi(b)\varphi(a)$，也就是说， $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$。

由此引理及前态射的定义，我们立即得到：

L引理 2. (a) 每个 k-代数态射都是前态射。(b) 两个前态射的复合映射是前态射。(c) 双射前态射的逆映射是前态射。

在第1节中，对于任意（不一定结合的） k-代数 M，我们已经考察了映射 $\lambda\colon M \to \mathrm{End}(_kM)$，其中 $\lambda\colon x \mapsto \lambda_x$， $\lambda_x\colon M \to M$，且 $\lambda_x(a) = xa$。我们还指出，当且仅当 M 是结合的，这个映射 λ 才是 k-代数态射。当且仅当 M 是前李代数时，映射 λ 才是前态射。

存在一个以 k-代数为对象、以此前态射为态射的范畴；也就是说，这是一个对象为 k-代数且由所有前态射 $M \to M'$ 构成态射 $M \to M'$ 的Hom集的范畴。这个范畴包含前李 k-代数（带有前态射）范畴$\mathsf{PreL}_{k,\ p}$作为满子范畴。范畴 $\mathsf{PreL}_{k,\ p}$包含前李代数及其 k-代数态射所构成的范畴 PreL_k作为子范畴，因而也包含结合代数及其态射所构成的范畴。

由引理 1 可得

定理 3. 将任意 k-代数 $(A, \cdot)$ 与其下伴反交换代数 $(A, [-,-])$ 相联系，得到一个函子 U，它从带有前态射的 k-代数范畴映到反交换 k-代数范畴。

注意，函子 U作为从范畴 $\mathsf{PreL}_{k,p}$ 到 Lie k-代数范畴的函子，是全忠实的。两个前李代数 A, A' 在 $\mathsf{PreL}_{k,p}$ 中同构，当且仅当它们的伴随李代数同构。两个在 $\mathsf{PreL}_{k,p}$ 中同构的前李代数，作为前李代数不一定同构。最简单的例子是，在实数域 $\mathbb{R}$ 上，两个 $\mathbb{R}$-代数 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$。它们是非同构的结合交换

二维 $\mathbb{R}$-代数，因此它们的伴随李代数都是二维阿贝尔 Lie $\mathbb{R}$-代数。因此，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 是 $\mathsf{PreL}_{\mathbb{R},p}$中的同构对象。所有 $\mathbb{R}$-线性映射 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 都是前态射。

注 4. 更一般地，若 k-代数 A 满足如下条件，则称其为 Lie-可容许的：令 $[x,y]=xy-yx$，可得到李代数 $(A,[-,-])$。若将 k-代数 A的结合子定义为 $(x,y,z)=(xy)z-x(yz)$，其中对所有 x,y,z in A均成立，那么它是前李代数等价于对所有 $x,y,z\in A$，$(x,y,z)=(y,x,z)$。它是 Lie-可容许代数等价于

$$(x,y,z)+(y,z,x)+(z,x,y)=(y,x,z)+(x,z,y)+(z,y,x) \tag{2}$$

对每个 x，y，$z\in A$都成立。前李代数是李容许代数。根据引理 1，函子 $U:(A,\cdot)\mapsto(A,[-,-])$ 是从带有预态射的李容许 k-代数范畴到李 k-代数范畴的全忠实函子。

与前态射的概念相对应，还有前导子的概念。我们称一个 k-模自态射 $\delta:M\to M$ 为前导子，其中 M 是任意的（不一定结合的） k-代数，当且仅当

$$\delta(xy)-\delta(x)y-x\delta(y)=\delta(yx)-\delta(y)x-y\delta(x)$$

对每个 $x,y\in M$ 都成立。

引理5. 设 k 是含幺交换环，$(A,\cdot)$ 是一个 k-代数，并且 $[-,-]:A\times A\to A$ 是在 A 上定义的运算，其中 $[x,y]:=xy-yx$ 对每个 $x,y\in A$ 都成立。那么， A 上的一个 k-模自态射 δ 是 $(A,\cdot)$ 的前导子，当且仅当它是 k-代数 $(A,[-,-])$ 的导子。

证明。 A 上的 k-模自态射 δ 是 $(A,\cdot)$ 的前导子，当且仅当 $\delta(xy)-\delta(x)y-x\delta(y)=\delta(yx)-\delta(y)x-y\delta(x)$，也就是说， $\delta([x,y])=[\delta(x),y]+[x,\delta(y)]$。

命题6. (a) k-代数的每个导子都是预导子。

(b) 若 δ 和 δ' 是 k-代数 A的两个预导子，则 $[\delta,\delta']:=\delta\circ\delta'-\delta'\circ\delta$是一个预导子。

证明。 (a)显然成立，而(b)由引理5得出。

推论7. 对于任意 k-代数 A，所有 A的预导子构成的集合$\mathrm{PreDer}_k(A)$ 在运算 $[-,-]$ 下是一个李 k-代数，其中对每个 $\delta,\delta'\in\mathrm{PreDer}_k(A)$，运算 $[-,-]$ 定义为 $[\delta,\delta']:=\delta\circ\delta'-\delta'\circ\delta$。

证明。 k-代数$(\mathrm{PreDer}_k(A),[-,-])$是 k-代数$(A,[-,-])$的所有导子构成的李代数（引理5）。

命题8. 设$(A,\cdot)$ 是任意的 k-代数。对每个 $x\in A$，定义一个 k-模态射 $d_x:A\to A$，令 $d_x(y):=xy-yx$，对每个 $y\in A$均成立。以下条件等价：

(a) 对于所有 $x \in A$， d_x都是前导子；也就是说，映射$d\colon A \to \mathrm{End}(_kA)$ 的像 $d(A)$ 包含于 $\mathrm{PreDer}_k(A)$ 中。

(b) 映射 d 是 k-代数 $(A\cdot)$ 到结合k-代数 $(\mathrm{End}(_kA), \circ)$的前态射。(c) k-代数 $(A\cdot)$ 是 *Lie*-可容许的。

证明。(a) $\Leftrightarrow$(c) 映射 $d_x\colon (A,\cdot) \to (A,\cdot)$ 是前导子，当且仅当映射 $d_x\colon (A, [-,-]) \to (A, [-,-])$ 根据引理5是导子，即当且仅当 $d_x([y,z]) = [d_x(y), z] + [y, d_x(z)]$。由于映射 d_x由$d_x(y) = [x,y]$定义，这等价于对每个x、 y、 $z \in A$, $[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$。这证明了对于每个 $x \in A$， d_x 是前导子，当且仅当 $(A, [-,-])$ 是李代数，也就是说，当且仅当 $(A,\cdot)$ 是 Lie-可容许的。

(b) $\Leftrightarrow$(c) 映射 d是前态射，当且仅当对于每个 $x, y \in A$，都有 $d_{xy} - d_x \circ d_y = d_{yx} - d_y \circ d_x$；也就是说，当且仅当对于每个 $x, y, z \in A$，都有 $d_{xy}(z) - d_x(d_y(z)) = d_{yx}(z) - d_y(d_x(z))$。这等价于 $(xy)z - z(xy) - d_x(yz - zy) = (yx)z - z(yx) - d_y(xz - zx)$。简单计算可知，这恰好就是条件 (2)，即等价于 A 是 Lie-可容许的。

若 A 是 Lie-可容许的 k-代数，则映射 d_x 是由 x诱导的A 的内前导子。

3 前李代数是伴随李代数上的模

现在我们要给出前李代数的另一种表述，以帮助理解其结构。

设 k 是含幺交换环。给定一个 pre-Lie k-代数 $(A,\cdot)$，我们已在引理2之后的段落中看到，映射 $\lambda\colon (A,\cdot) \to \mathrm{End}(_kA)$ 是一个前态射。对其应用函子 U，得到一个李 k-代数同态 $L := U(\lambda)\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$，其定义为 $L\colon a \mapsto \lambda_a$ 对每个 $a \in A$ 均成立。这个映射 L 在集合意义上等于映射 λ。换言之， L 在 k-模 $_kA$ 上定义了一个模结构，使其成为子伴随李 k-代数 $(A, [-,-])$ 上的模。此外，$[x,y] = L(x)(y) - L(y)(x)$。

这个构造可以逆转。设 $(A, [-,-])$ 是一个李 k-代数，并假设其子伴随 k-模 $_kA$ 通过李代数同态 $L\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$，具有李代数 $(A, [-,-])$ 上的模结构，且对每个 $x, y \in A$，条件 $L(x)(y) - L(y)(x) = [x,y]$ 成立。在 A 上定义新的乘法 $\cdot$：对每个 $x, y \in A$，令 $x \cdot y = L(x)(y)$。那么 $(A,\cdot)$ 是一个 pre-Lie k-代数。这两个构造互为逆构造。更确切地说，固定一个李 k-代数 A。那么，以下两个范畴 S_A 和 M_A 之间存在范畴同构，其中：

(1) S_A 是一个范畴，其对象是所有伴随李代数为固定李代数（$A, [-,-]$）的前李 k代数（$A,\cdot$）。态射是这些前李代数之间的所有前李代数同态。

(2) M_A 是一个范畴，其对象是所有满足条件 $L(x)(y) - L(y)(x) = [x, y]$（对每个 $x, y \in A$）的前李 k代数态射$L\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$。$\mathrm{M}_A$ 中两个对象 L, L' 之间的态射 $\varphi\colon L \to L'$ 是满足下列所有图表的 k-模态射 $\varphi\colon A \to A$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M \\ {\scriptstyle L(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L'(\varphi(a))} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

对每个 $a \in A$ 都成立。见 [2, 定理 1.2。7]。

3.1 前李 *k*-代数上的模。

任意非结合代数上都无法定义模，但前李代数的定义立即启发我们如何在前李代数上定义模。

一个模 M 上的前李 k-代数 A 是任意一个 k-模 M，带有一个 k-双线性映射 $\cdot\colon A \times M \to M$，使得

$$(x \cdot y) \cdot m - x \cdot (y \cdot m) = (y \cdot x) \cdot m - y \cdot (x \cdot m) \tag{3}$$

对每个 $x, y \in A$ 和 $m \in M$。

与结合代数的情形类似，前李 k-代数 $(A, \cdot)$ 上的模 M 也可以等价地定义为任意 k-模 M，并配有一个前态射$\lambda\colon (A, \cdot) \to (\mathrm{End}({}_kM), \circ)$。

例如，若 A 是任意前李 k-代数，且 I 是 I的理想，那么将乘法在 A 上的限制作为 k-双线性映射 $\cdot\colon A \times I \to I$，便可立即看出 I 是 A上的模。

定理 9. 前李 k-代数 $(A, \cdot)$ 上的模范畴与其伴随李 k-代数 $(A, [-,-])$ 上的模范畴同构。

证明. 前李代数 $(A, \cdot)$ 上的模是二元组 $({}_kM, \lambda)$，其中 ${}_kM$是一个 k-模，且 $\lambda\colon A \to \mathrm{End}({}_kM)$ 是一个前态射；李代数 $(A, [-,-])$ 上的模是二元组 $({}_kM, \lambda)$，其中 ${}_kM$是一个 k-模，且 $\lambda\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(M)$ 是一个李 k-代数态射。由引理 1 可知，它们是相同的二元组。

请注意，我们也可以用另一种方式得到第 3 节中的结果：每个前李代数显然都是其自身上的一个模，因此应用定理 9，对于每个前李代数 $(A, \cdot)$，都有一个伴随李代数 $(A, [-,-])$ 上的模 A_k 与之对应，也就是说，一个李代数同态 $L\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$，以及对于每个 $x, y \in A$，$[x, y] = L(x)(y) - L(y)(x)$。

还请注意，本节中我们在前李代数上定义的模都是左模。我们不考虑右模，因为前李代数的定义并不具有左右对称性，也就是说，前李代数的对代数并不是前李代数。

4 前李代数中两个理想的交换子。（Huq=Smith）

前李 k-代数 A的两个理想之和，即它们作为 k-子模的和A，是 A的一个理想；A 的一族理想的任意交也是 A的一个理想。因此，前李代数 A 的所有理想组成的集合 I (A) 关于 $\subseteq$构成一个完备格，并且是 A_k的所有 k-子模所成格的子格，因此 I (A) 是一个模格。此外，包含子集 X的 A 的最小理想是 A 中所有包含 X 的理想的交。

现在我们需要定义前李代数的两个理想的交换子。前李 k-代数簇 V 是一个 Barr-正合范畴，是一个 Ω-群簇，具有原模性且为半阿贝尔范畴 [12, 例（2）]。更具体地说，前李代数关于加法具有底层群结构，因此它们具有 Mal'tsev 项 $p(x, y, z) = x - y + z$。参见 [5, 命题 5.3。1]注意，对于任意 $x, y \in A$，都有 $p(p(x, y, 0), x, y)) = 0$，因此根据 [5, 命题 3.1，8]前李代数簇 V 具有原模性。 p 此外，对于所有 $x, y, z, t \in A$，都有 $p(p(x, y, t), t, z) = p(x, y, z)$（半结合性），因此根据 [5, 命题 5.3，3]V 是半阿贝尔范畴。

我们要证明，前李代数 k代数中两个理想的 Huq 交换子与 Smith 交换子相同。回顾一下，在前李代数簇 V 这一半阿贝尔簇中，前李代数 A 的两个理想 I 和 J 的 Huq 交换子，是使得典范态射$I \times J \to A/[I, J]_H$有良好定义的最小理想 $[I, J]_H \subseteq A$，其中，对任意$i \in I$和 $j \in J$，都有$(i, 0) \mapsto i + [I, J]_H$且$(0, j) \mapsto j + [I, J]_H$。也就是说， $[I, J]_H$是 A 的最小理想，使得对任意 $i \in I$和 $j \in J$，由$(i, j) \mapsto i + j + [I, J]_H$定义的映射$I \times J \to A/[I, J]_H$是前李代数态射。

命题10。 前李代数 A 的两个理想 I 和 J 的 *Huq* 交换子 $[I, J]_H$，是由子集 $\{ ij, ji \mid i \in I, j \in J \}$ 在 A 中生成的理想。

证明。映射 $\bar{\sigma}\colon I \times J \to A/[I, J]_H$，定义为 $(i, j) \mapsto i + j + [I, J]_H$，是一个前李 k-代数态射，当且仅当它保持乘法，也就是说，当且仅当对于每个 (i, j), $(i', j') \in I \times J$，都有 $\bar{\sigma}((i, j) \cdot (i', j')) \equiv \bar{\sigma}(i, j)\, \bar{\sigma}(i', j')$，也就是说，当且仅当 $ii' + jj' \equiv (i + j)\,(i' + j')$ 模 $[I, J]_H$。因此， $\bar{\sigma}$ 是前李代数态射，当且仅当 $ij' + ji' \equiv 0$ 模 $[I, J]_H$，即当且仅当 $ij' + ji' \in [I, J]_H$。结论立即得出。

Mal'tsev簇 V 中的*Smith* 交换子（见 [11]）可以定义如下：对于一个前李 k-代数 A，其 Mal'tsev 项为 $p(x, y, z)$，且有两个理想 I，J，它们属于 A；取满足以下函数为前李代数态射的最小理想 $[I, J]_S$，其中 $[I, J]_S$ 属于 A：

$$p\colon \{(x,y,z) \mid x \equiv y \pmod{I},\ y \equiv z \pmod{J}\} \to A/[I,J]_S,$$

由 $p(x,\ y,\ z) = x - y + z + [I,J]_S$ 定义。

定理 11. 两个前李代数 A 的理想 I 和 J 的 *Smith* 交换子 $[I,J]_S$ 是由子集 $\{ij, ji \mid i \in I,\ j \in J\}$ 生成的 A 的理想。因此，对于前李代数，*Huq=Smith*。

证明. 映射 $p\colon \{(b+i, b, b+j) \mid b \in A,\ i \in I,\ j \in J\} \to A/[I,J]_S$ 是前李代数态射，当且仅当对于任意 $b, b' \in A, i, i' \in I, j, j' \in J$，都有

$$p((b+i,b,b+j)(b'+i',b',b'+j')) \equiv p(b+i,b,b+j)p(b'+i',b',b'+j') \pmod{[I,J]_S},$$

也就是说，$p((b+i)(b'+i'), bb', (b+j)(b'+j')) \equiv (b+i+j)(b'+i'+j')$ 模 $[I,J]_S$。等价地，当且仅当 $0 \equiv ij'+ji'$ 模 $[I,J]_S$。因此，两个理想 I 和 J 的 Smith 交换子 $[I,J]_S$ 是由子集 $\{ij, ji \mid i \in I,\ j \in J\}$ 生成的 A 的理想。特别地，$[I,J]_H = [I,J]_S$。

从现在起，我们不再区分 Huq 交换子 $[I,J]_H$ 与 Smith 交换子 $[I,J]_S$，而统称为两个理想I和 J的交换子。注意，交换子是交换的，即 $[I,J] = [J,I]$。

我们简要讨论一下这个理想 $[I,J]$的结构。显然，若 X 是 pre-Lie k-代数 A 的任意子集，那么由 X生成的 A 的理想 $\mathrm{h}X\mathrm{i}$，也就是包含 X的 A 的所有理想的交，还可以表示为以下升链 $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots$的并 $\mathrm{h}X\mathrm{i} = \text{Ð}_{n\geq 0} X_n$；该升链由$A$的 k-子模构成：X_0是由 X生成的A的k-子模；给定 X_n，令 $X_{n+1} = X_n + AX_n + X_nA$，其中 AX_n 表示形如 ax 的乘积的所有有限和，且 $a \in A$ 和 $x \in X_n$，X_nA的情形也类似。对于理想 $[I,J]$，这具体化为：

命题 12. 设 I和 J 是前李 k-代数 A的理想。那么

$$[I,J] = IJ + \sum_{n\geq 0} S_n,$$

其中 $S_n = ((\ldots(((JI)A)A)\ldots)A)A$，在 S_n 中，因子JI右侧有 n 个等于 A 的因子。

证明. 第 *1* 步：$A(IJ) \subseteq IJ$。

由性质（1），我们有 $A(IJ) \subseteq (AI)J + (IA)J + I(AJ) \subseteq IJ$。

第 *2* 步：$A(JI) \subseteq JI$。

由第 1 步，利用对称性。

第 *3* 步：$AS_n \subseteq S_n + S_{n+1}$ 对每个 $n \geq 0$。

对 n 进行归纳法。步骤 2 给出了 $n = 0$ 的情形。假设对于某个 $n \geq 0$，有 $AS_n \subseteq S_n + S_{n+1}$。那么，$AS_{n+1} = A(S_nA) \subseteq (AS_n)A + (S_nA)A + S_n(AA) \subseteq (S_n + S_{n+1})A + S_{n+2} + S_{n+1} = S_{n+1} + S_{n+2}$。

步骤 4： $S_nA = S_{n+1}$。
根据定义。

步骤5： $(IJ)\ A \subseteq IJ + S_0 + S_1$。事实上，$(IJ)\ A \subseteq I(JA)$
$+(JI)\ A + J(IA)\ \subseteq IJ + S_1 + S_0$。

最后一步。
显然， $IJ + \acute{I}_{n\geq 0} S_n$ 是 A 的一个 k-子模，它包含 IJ 和 JI，且包含于由 $IJ \cup JI$生成的理想中。因此，只需证明它在 A的元素左乘和右乘下封闭。步骤1、3、4和5已经证明了这一点。

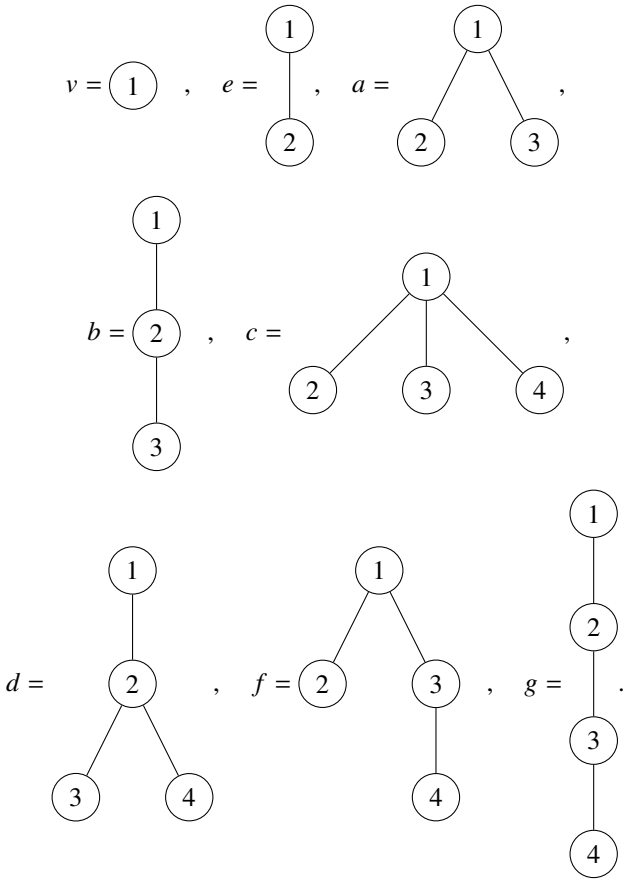
现在，我们已经对前李 k-代数 A的两个理想 I 和 J 的交换子有了恰当的概念，便可引入A所有理想的乘法格：它是由 A的所有理想构成的完备模格 I(A)，并赋予理想的交换子运算。注意，显然， $[I, J] \subseteq I \cap J$。从乘法格的角度考察前李代数，我们立即得到以下概念：前李 k-代数 A的素理想、A的（扎里斯基）素谱、半素理想、阿贝尔 Pre-Lie 代数、幂等（=完美）前李代数、导出列、可解 Pre-Lie 代数、下中心列、幂零 Pre-Lie 代数、 m-系、n-系、超阿贝尔 Pre-Lie 代数、亚交换前李代数、雅各布森根、理想的中心化子、前李 k-代数的中心、超中心。参见下一节（第 5 节）和 [8, 9, 6, 7]。

请注意，对于前李代数 A 的理想交换子，单调性条件成立；也就是说，若 $I \leq I'$ 和 $J \leq J'$ 是 A 的理想，则 $[I, J] \leq [I', J']$。

另请注意，在 $I = J = A$ 的情形下，命题 12 中对交换子的描述可简化为等式 $[A, A] = A^2 = AA$。这里， A^2 是由 A 的 k-双线性乘法诱导的 k-模态射 $\mu\colon A \otimes_k A \to A$ 的像。

5 交换子不满足结合律

本节将说明，前李代数 A 中理想的交换子一般并不满足结合律；也就是说，若 I, J, K 是 A 的理想，则 $[I, [J, K]] = [[I, J], K]$ 未必成立。在我们的例子中，代数 A 将是因子代数$A := \mathrm{T}/P$，其中 T 是第 2 节例 4 中根树构成的前李代数，而 P 是由所有至少有 5 个顶点的根树生成的 T 的理想。这样的 P 是由所有至少有 5 个顶点的根树生成的 T 的 k-子模。至多有 4 个顶点的根树（按同构分类）如下



因此，我们的前李 k-代数 A 是八维的；我们用 v, e, a, b, c, d, f, g 表示相应根树在 A 中的像。也就是说，我们称 $\{v, e, a, b, c, d, f, g\}$ 为自由 k-模 A 的自由生成元集。根据第 2 节例 4 中定义的 T 上的乘法，我们得到 A 中的乘法表为

	v	e	a	b	c	d	f	g
v	e	$a+b$	$c+2f$	$f+d+g$	0	0	0	0
e	b	$f+g$	0	0	0	0	0	0
a	d	0	0	0	0	0	0	0
b	g	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0

由乘法表可见， $A^2 = AA$ 以e、 b、 d、 g、 a、 f、 c为生成元集，并且是一个七维自由 k-模。

现在， $[A^2, A^2] = \sum_{n\geq 0}((\cdots((A^2\cdot A^2)\cdot A)\cdot\cdots\cdot A)\cdot A$，其中右侧有 n个因子等于 A。但根据乘法表，总能看出 $A^2\cdot A^2$由 $f+g$生成。此外，$(f+g)A = 0$且 $A(f+g) = 0$。因此， $[A^2, A^2]$作为自由 k-模是一维的，其自由生成元集为$\{f+g\}$。

类似地， $[A^2, A] = A\cdot A^2 + \sum_{n\geq 1}(\cdots((A^2\cdot A)\cdot A)\cdot\cdots\cdot A)\cdot A$，其中右侧有 $n+1$ 个因子等于 A。由乘法表可见， $A\cdot A^2$ 由 $a+b$、 $f+g$、 $c+2f$、 $f+d+g$生成。此外， $A^2\cdot A$ 由$\{b$、 d、 g、 $f+g\}$生成，$(A^2\cdot A)\cdot A$由 g生成，而$((A^2\cdot A)\cdot A)\cdot A = 0$。因此，$[A^2, A]$是由 b、 d、 g、 f、 a、 c生成的 k-模，并且是六维的。由此可得， $[A^2, A]\cdot A$由$\{d$、 $g\}$生成， $A\cdot([A^2, A]$由$\{c+2f$、 $f+d+g\}$生成，而$([A^2, A]\cdot A)\cdot A = 0$。由这些等式可知， $[[A^2, A], A]$由$\{d$、 g、 $c+2f$、 $f+d+g\}$生成。等价地， $[[A^2, A], A]$ 由$\{d$、 g、 f、 $c\}$生成，并且是四维的。特别地， $[A^2, A^2] \neq [[A^2, A], A]$。

下面详细说明一些直接由乘法格 $\mathbf{I}(A)$ 中的交换乘法 $[-,-]$ （交换子）导出的概念。

首先，如果前李 k-代数 A 的交换子与自身的交换子为零： $[A, A] = 0$, 那么它就是阿贝尔的。这等价于说，对于每个 $i, j \in A$，都有 $ij = 0$。也就是说，前李代数 $(A, \cdot)$ 是阿贝尔的，当且仅当对于每个 $x, y \in A$，都有 $x\cdot y = 0$。（这等价于要求加法 $+$: $A\times A \to A$ 是一个前李代数态射。）

根据定义，前李 k-代数 A的理想 I是素的，如果它真包含于 A，并且对于 A的任意理想 J, K，若 $[J, K] \subseteq I$，则 $J \subseteq I$ 或 $K \subseteq I$。前李 k-代数 A 的理想 I是半素的，如果对于 A的任意理想 J，若 $[J, J] \subseteq I$，则有 $J \subseteq I$。A 的一个理想是半素的，当且仅当它是一个素理想族的交（当且仅当它是 A 中所有包含它的理想的交）。前李 k-代数 A 的理想 P 是素的，当且仅当格 $\mathbf{I}(A/P)$ 是一致的，并且 A/P 没有非零阿贝尔理想。

注*13.* 我们也可以不取两个理想 I 和 J 的交换子 $[I, J]$，而改为考虑前李 k 代数中的另外两种“理想乘积”：可以考虑乘积 IJ，即由所有乘积 ij 生成的 A 的 k-子模；它是一个 k-子模，但通常不是 A 的理想；也可以考虑由子模 IJ 生成的理想 $\langle IJ\rangle$。注意， $IJ \subseteq \langle IJ\rangle \subseteq [I, J] = \langle IJ\rangle + \langle JI\rangle$，最后一个等式由命题 12 得出。相应地，我们将得到三种不同的“素理想”定义。下一命题（实质上包含在[8, 例 3.7]中）将证明这三种“素理想”定义彼此等价:

命题14. 对于前李代数 A 的理想 P，以下条件等价:

(a) 如果 I, J 是 A 和 $IJ \subseteq P$的理想，那么 $I \subseteq P$ 或 $J \subseteq P$。(b) 如果 I, J 是 A 和 $\langle IJ\rangle \subseteq P$的理想，那么 $I \subseteq P$ 或 $J \subseteq P$。(c) 如果 I, J 是 A 和 $[I, J] \subseteq P$的理想，那么 $I \subseteq P$ 或 $J \subseteq P$。

证明。蕴含关系 (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) 由 $IJ \subseteq \mathrm{h}IJ\mathrm{i} \subseteq [I,J]$ 这一事实立即得出。

(c) $\Rightarrow$ (a)。令 P 满足条件 (c)，并固定 A 的两个理想 I, J，使得 $IJ \subseteq P$。由于 P 是一个理想，因此 $\mathrm{h}IJ\mathrm{i} \subseteq P$。此外，$[\mathrm{h}IJ\mathrm{i}, \mathrm{h}IJ\mathrm{i}] = \mathrm{hh}IJ\mathrm{ih}IJ\mathrm{ii} \leq \mathrm{h}IJ\mathrm{i} \leq P$。由 (c) 可得 $\mathrm{h}IJ\mathrm{i} \leq P$，因此 $[I,J] = \mathrm{h}IJ\mathrm{i} + \mathrm{h}IJ\mathrm{i} \leq P$。再次由 (c) 可得，要么 $I \subseteq P$，要么 $J \subseteq P$。

命题14表明，如果前李代数 A 是一个结合代数，那么这里的素理想概念与结合代数中的素理想概念相同。命题 12 表明，对于前李代数A的任意一对理想 (I,J)，都有 $[I,J] = IJ + \mathrm{h}JI\mathrm{i} = JI + \mathrm{h}IJ\mathrm{i}$。此外，该命题证明中的步骤5表明，始终有 $IJ + JI + (IJ)\,A = IJ + JI + (JI)\,A$。

若 $[A,A] = A$，也就是说，若 $A^2 = A$（第4节最后一段），则前李 k代数 A 是幂等（或完美）的。

给定任意前李代数 A，令 Spec(A) 表示其所有素理想组成的集合。对于每个 $I \in \mathrm{I}(A)$，令 $V(I) = \{ P \in \mathrm{Spec}(A) \mid P \supseteq I \}$。那么，Spec($A$) 的所有子集$V(I)$（其中 $I \in \mathrm{I}(A)$）构成了 Spec(A) 上某个拓扑的所有闭集。赋予这一拓扑后，拓扑空间 Spec(A) 是 A 的（扎里斯基）素谱，并且是一个清醒空间 [8]。一般来说，它不是 Hochster 意义下的谱空间。例如，若 B 是一个没有单位元的布尔环，那么 B 是一个前李代数，但它的素谱不是紧致的。

如果前李代数 A 是结合代数，那么这种素谱概念就与结合代数 A的“标准素谱概念”一致，其中谱的点是 A 的素理想，闭集则是谱的子集 $V(I)$。说实话，并不存在一种将交换结合代数（带单位元）的经典素谱概念推广而来的结合代数“标准素谱概念”。正如 [1] 和 [14]所示，这类概念有好几种。例如，谱的点可以是 A的完全素理想；或者可以将 A 的谱定义为交换环 $A/[A,A]$的扎里斯基谱，其中 $[A,A]$现在表示由所有元素 $ab - ba$生成的 A 理想。

如果前李 k-代数 A 没有素理想，则称其为超阿贝尔。例如，阿贝尔前李代数是超阿贝尔的。

设 A 是一个 pre-Lie k-代数。A 的下中心列（或降中心列）是降链

$$A = A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \dots,$$

其中，对每个 $n \geq 1$，都有 $A_{n+1} := [A_n, A]$。若对于某个 $n \geq 1$，有 $A_n = 0$，则 A 是幂零的。（注意，由于交换子是交换的，也就是说 $[A_n, A] = [A, A_n]$，因此无需区分左幂零性和右幂零性。）

A [8, Definition 6.1] 的导出列 是下降列

$$A := A^{(0)} \geq A^{(1)} \geq A^{(2)} \geq \dots,$$

其中，对每个 $n \geq 0$， $A^{(n+1)} := [A^{(n)}, A^{(n)}]$。若存在某个整数 $n \geq 0$ 使得 $A^{(n)} = 0$，则前李代数 A 是可解 的。若 $A^{(2)} = 0$，则它是亚交换 的。

在乘法格中，若一个元素是极小幂等元集合的并，则称其为半单。（格 L 中的元素 m 若对每个$x \in L$， $x \leq m$ 都蕴含 $x = m$ 或 $x = 0$，则称其为极小；也就是说，它在偏序集 $L \setminus \{0\}$中是极小的。乘法格 L 中的元素 e 若 $e \cdot e = e$，则称其为幂等。） L 的“极小幂等元”是指 $L \setminus \{0\}$中的极小元素，且同时也是幂等元素。注意，对于极小元素 $x \in L$，要么 $x \cdot x = x$，要么$x \cdot x = 0$；也就是说，极小元素要么是幂等的，要么是阿贝尔的。

L 的雅各布森根是集合中所有极大元素 a 的交，其中这些元素属于$L \setminus \{1\}$且满足$1 \cdot 1 \not\leq a$。根是 L中所有可解元素的并。

6 幂等端同态、前李代数的半直积及作用

设 e 是前李 k-代数 A的一个幂等自同态。则 $A = \ker(e) \oplus e(A)$（作为 k-模的直和），其中 e 的核 $\ker(e)$ 是 A 的一个理想，其像 $e(A)$ 是 A的一个前李子-k-代数。若前李 k-代数 A作为 k-模有直和分解$A = I \oplus B$，其中 A 的一个理想是 I，而 A的一个前李子-k-代数是 B，我们就称 A是 I和 B的半直积 。我们关注半直积，因为对于任意代数结构，幂等自同态与半直积一一对应，并且与该结构对另一结构的作用这一概念以及双模相关。

以下命题的证明很简单。

命题 15. 设 A 是一个 *pre-Lie* k-代数， I 是 A 的理想，且 B 是 A的 *pre-Lie* 子-k-代数。以下条件等价:

(1) $A = I \oplus B$ 是一个 k-模。(2) 对于每个 $a \in A$，都存在唯一的 $i \in I$ 和唯一的 $b \in B$，使得$a = i + b$。(3) 存在一个 *pre-Lie* k-代数态射 $A \to B$，其在 B 上的限制是单位元，且其核为 I。(4) 存在一个 A 的幂等 *pre-Lie* k-代数自同态，其像为 B，核为 I。

现在显然，pre-Lie k-代数 A 的所有幂等自同态组成的集合，与所有有序对 (I, B) 组成的集合之间存在一一对应；其中 I 是 A的理想， B 是 A的 pre-Lie 子-k-代数，并且 A 作为 k-模是 I 与 B 的直和。

我们首先考虑内半直积。设 $(A, \cdot)$ 是一个前李k-代数，它是其理想 I 与其前李子 k-代数 B 的半直积。那么存在一个前态射 $\lambda : (B, \cdot) \to (\mathrm{End}(I_k), \circ)$，它由左乘 A 中元素给出，

即由 B 中的元素从左侧乘入（这是因为每个理想都是一个模，正如我们在第3.1节中已经指出的那样）。此外，还存在一个 k-模态射 $\rho\colon B \to \mathrm{End}(I_k)$，它由 B 中元素的右乘给出，即 $\rho\colon b \mapsto \rho_b$，其中对于每个 $i \in I$，$\rho_b(i) = i \cdot b$。此外，将单位元 (1) 应用于 B 和 $y \in I$ 中的元素 x、z，可改写为：对于任意 a、$b \in B$ 和 $i \in I$，$\rho_a(\lambda_b(i)) - \lambda_b(\rho_a(i)) = (\rho_a \circ \rho_b - \rho_{b\cdot a})(i)$。将单位元 (1) 应用于 B 中的元素 x 以及 y、$z \in I$，可改写为：对于任意 $a \in B$ 以及 i、$j \in I$，$\lambda_a(i) \cdot j - \lambda_a(i \cdot j) = \rho_a(i) \cdot j - i \cdot \lambda_a(j)$。最后，将同一单位元 (1) 应用于 B 中的元素 z 以及 x、$y \in I$，可改写为：对于任意 $a \in B$ 以及 i、$j \in I$，$\rho_a(x \cdot y) - x \cdot \rho_a(y) = \rho_a(y \cdot x) - y \cdot \rho_a(x)$。

反之，对于外半直积：

定理16. 设 I 和 B 为前李 k-代数，且 (λ, ρ) 为一对 k-线性映射 $B \to \mathrm{End}(I_k)$，满足：

(a) $\lambda\colon (B, \cdot) \to (\mathrm{End}(I_k), \circ)$ *is a pre-morphism.*
(b) $\rho_a \circ \lambda_b - \lambda_b \circ \rho_a = \rho_a \circ \rho_b - \rho_{b\cdot a}$ *for every* $a, b \in B$.
(c) $\lambda_a(i) \cdot j - \lambda_a(i \cdot j) = \rho_a(i) \cdot j - i \cdot \lambda_a(j)$ *for every* $a \in B$ *and* $i, j \in I$.
(d) $\rho_a(i \cdot j) - i \cdot \rho_a(j) = \rho_a(j \cdot i) - j \cdot \rho_a(i)$ *for every* $a \in B$ *and* $i, j \in I$.

在 k-模直和 $I \oplus B$ 上定义乘法 $*$，令

$$(i, b) * (j, c) = (i \cdot j + \lambda_b(j) + \rho_c(i), b \cdot c)$$

对每个 (i, b)、$(j, c) \in I \oplus B$，则 $(I \oplus B, *)$ 是一个前李 k-代数。

证明。 对每个 $a, b, c \in B$ 和 $x, y, z \in I$，我们有

$$\begin{aligned}&((x,a)*(y,b))*(z,c) = (x\cdot y + \lambda_a(y) + \rho_b(x), a\cdot b)*(z,c) = \\ &= ((x\cdot y)\cdot z + \lambda_a(y)\cdot z + \rho_b(x)\cdot z + \lambda_{a\cdot b}(z) + \\ &+\rho_c(x\cdot y + \lambda_a(y) + \rho_b(x)), (a\cdot b)\cdot c)\end{aligned} \tag{4}$$

and

$$\begin{aligned}&(x,a)*((y,b)*(z,c)) = (x,a)*(y\cdot z + \lambda_b(z) + \rho_c(y), b\cdot c) = \\ &= (x\cdot(y\cdot z) + x\cdot\lambda_b(z) + x\cdot\rho_c(y) + \\ &+\lambda_a(y\cdot z + \lambda_b(z) + \rho_c(y)) + \rho_{b\cdot c}(x), a\cdot(b\cdot c)).\end{aligned} \tag{5}$$

(4) 与 (5) 的差为

$$\begin{aligned}&((x\cdot y)\cdot z - x\cdot(y\cdot z) + \lambda_a(y)\cdot z - \lambda_a(y\cdot z) + \\ &+\rho_b(x)\cdot z - x\cdot\lambda_b(z) + \lambda_{a\cdot b}(z) - (\lambda_a\circ\lambda_b)(z) + \\ &+\rho_c(x\cdot y) - x\cdot\rho_c(y) + \rho_c(\lambda_a(y)) - \lambda_a(\rho_c(y)) + \rho_c(\rho_b(x)) - \rho_{b\cdot c}(x)), \\ &(a\cdot b)\cdot c - a\cdot(b\cdot c)).\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}&((y,b)*(x,a))*(z,c) - (y,b)*((x,a)*(z,c)) = \\ &= ((y\cdot x)\cdot z - y\cdot(x\cdot z) + \lambda_b(x)\cdot z - \lambda_b(x\cdot z) + \rho_a(y)\cdot z - y\cdot\lambda_a(z) + \\ &+\lambda_{b\cdot a}(z) - (\lambda_b\circ\lambda_a)(z) + \rho_c(y\cdot x) - y\cdot\rho_c(x) + \rho_c(\lambda_b(x)) - \lambda_b(\rho_c(x)) + \\ &+\rho_c(\rho_a(y)) - \rho_{a\cdot c}(y)), (b\cdot a)\cdot c - b\cdot(a\cdot c)).\end{aligned}$$

因此，为了证明，只需说明

$$\begin{aligned}&\lambda_a(y)\cdot z-\lambda_a(y\cdot z)+\rho_b(x)\cdot z-x\cdot\lambda_b(z)+\lambda_{a\cdot b}(z)-(\lambda_a\circ\lambda_b)(z)+\\&+\rho_c(x\cdot y)-x\cdot\rho_c(y)+\rho_c(\lambda_a(y))-\lambda_a(\rho_c(y))+\rho_c(\rho_b(x))-\rho_{b\cdot c}(x))=\\&=\lambda_b(x)\cdot z-\lambda_b(x\cdot z)+\rho_a(y)\cdot z-y\cdot\lambda_a(z)+\\&+\lambda_{b\cdot a}(z)-(\lambda_b\circ\lambda_a)(z)+\\&+\rho_c(y\cdot x)-y\cdot\rho_c(x)+\rho_c(\lambda_b(x))-\lambda_b(\rho_c(x))+\\&+\rho_c(\rho_a(y))-\rho_{a\cdot c}(y)).\end{aligned}\tag{6}$$

Now

$$\begin{aligned}&\lambda_a(y)\cdot z-\lambda_a(y\cdot z)=\rho_a(y)\cdot z-y\cdot\lambda_a(z) && \text{by hypotheses (c);}\\&\rho_b(x)\cdot z-x\cdot\lambda_b(z)=\lambda_b(x)\cdot z-\lambda_b(x\cdot z) && \text{by hypotheses (c);}\\&\lambda_{a\cdot b}(z)-(\lambda_a\circ\lambda_b)(z)=\lambda_{b\cdot a}(z)-(\lambda_b\circ\lambda_a)(z) && \text{by hypotheses (a);}\\&\rho_c(x\cdot y)-x\cdot\rho_c(y)=\rho_c(y\cdot x)-y\cdot\rho_c(x) && \text{by hypotheses (d);}\\&\rho_c(\lambda_a(y))-\lambda_a(\rho_c(y))=\rho_c(\rho_a(y))-\rho_{a\cdot c}(y)) && \text{by hypotheses (b);}\\&\rho_c(\rho_b(x))-\rho_{b\cdot c}(x))=\rho_c(\lambda_b(x))-\lambda_b(\rho_c(x)) && \text{by hypotheses (b).}\end{aligned}$$

将这些等式相加，便得到等式（6）。

因此，该定理刻画了一个作用 $(\lambda,\ \rho)$ 必须满足的四个性质，其中该作用是一对 k-线性映射 $B\to\mathrm{End}(I_k)$，以便构造一个由前李 k-代数 B 作用于前李 k-代数 I所得的半直积。

6.1 前李代数上的双模

半直积最重要的情形，或许是前李代数I为阿贝尔的情形；也就是说，作用（即一对 $(\lambda,\ \rho)$ k-线性映射$B\to\mathrm{End}(I_k)$）是前李 k-代数 B 对一个 k-模 M 的作用。换句话说，此时 I 是一个 B-双模。下面我们将更准确地给出前李代数上的双模的定义：

定义17. 设 A 是一个 pre-Lie k-代数。A 上的一个双模是一个 k-模 M_k，配备一对（$\lambda,\ \rho$） k-线性映射 $A\to\mathrm{End}(M_k)$，满足：

(a) $\lambda:(A,\ \cdot)\to(\mathrm{End}(M_k),\ \circ)$ 是一个前态射（即，M是一个 A-模）。(b) 对每个 $a,\ b\in B,\ \rho_a\circ\lambda_b-\lambda_b\circ\rho_a=\rho_a\circ\rho_b-\rho_{b\cdot a}$。

注意，定理16的条件（c）和（d）总是显然成立，因为在这种情况下，k-模 M 被视为阿贝尔前李代数，也就是说，其乘法为零。例如，[13]中已经出现了这一界定。注意该论文对条件（b）给出了一个巧妙的解释：在条件（b）中，左边的 $\rho_a\circ\lambda_b-\lambda_b\circ\rho_a$ 描述了作用偏离结合性的程度（对于结合代数上的双模，它总是必须为零）；右边的 $\rho_a\circ\rho_b-\rho_{b\cdot a}$描述了 ρ偏离 k-代数反同态的程度。

6.2 为前李代数添加单位元

前李代数包含结合代数这一类。对于结合代数，考虑带单位元的结合代数是很自然的；如果没有单位元，就添入一个。这种构造通常称为“Dorroh 扩张”。我们来说明，前李代数也可以进行这种构造。事实上，我们将看到，与其称这类代数为“前李代数”，不如称其为“前结合代数”。在前李 k-代数 A 中添入一个单位元，恰好就是前李 k-代数 A作用于前李k-代数 k 所构成的半直积。下面我们更精确地说明。

前李单位元 k-代数 A 中的单位元是一个元素，我们将其记为 1_A，满足 $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$，对每个 $a \in A$都成立。如果 A 有单位元，我们就称 A是含幺的。若 e 是 A 中的一个元素，且满足 $e^2 := e \cdot e = e$，则称其为幂等元素。A 的零元总是 A中的幂等元素；若单位元存在，它也是 A中的幂等元素。

设 A 是任意一个固定的前李 k-代数。那么交换结合环 k 是一个前李 k-代数，且全体前李 k-代数态射 $k \to A$ 的集合与 A的全体幂等元素构成一一对应。对于 A 中的任意幂等元素 e，相应的态射 $\varphi_e\colon k \to A$ 定义为：对每个 $\lambda \in k$，$\varphi_e(\lambda) = \lambda e$。反过来，对于任意态射 $\varphi\colon k \to A$，A 中相应的幂等元素为 $\varphi(1)$。

对于任意给定的前李 k代数 A，都可以通过一对 k-模态射 $k \to \mathrm{End}(A_k)$，即 (λ, ρ)，构造 k作用于 A的半直积；其中$\lambda_\alpha = \rho_\alpha$ 对所有 $\alpha \in k$都是乘以 α 的映射。于是，定理16中的四个条件 (a)、(b)、(c)、(d) 都自动满足，相应的半直积就是 k-模直和 $A \oplus k$，其乘法定义为

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (x \cdot y + \beta x + \alpha y, \alpha\beta)$$

对每个 $(x, \alpha), (y, \beta) \in A \oplus k$均成立。因此，$A \oplus k$ 成为具有单位元 (0, 1) 的前李 k代数。该前李代数 $A \oplus k$ 的伴随 Lie 代数是 Lie 代数 $(A, [-,-])$ 与阿贝尔李代数 k 的直和。我们将这个半直积记为 $A\#k$。

现在，令 $\mathsf{PreL}_{k,1}$ 表示所有含幺 pre-Lie k-代数构成的范畴。其对象是带有单位元的 pre-Lie k-代数 A。其态射 $f\colon A \to B$ 是满足 $f(1_A) = 1_B$ 的 k-代数态射 f。此外还涉及另一个范畴，即由所有带增广的含幺 pre-Lie k-代数组成的范畴 $\mathsf{PreL}_{k,1,a}$。其对象是所有形如 (A, ε_A) 的有序对，其中 A 是一个含幺 pre-Lie k-代数，而 $\varepsilon_A\colon A \to k$ 是 $\mathsf{PreL}_{k,1}$ 中的一个态射，且它是 φ_{1_A}: 的左逆

$$k \xrightarrow{\varphi_{1_A}} A \xrightarrow{\varepsilon_A} k.$$

态射 $f\colon (A, \varepsilon_A) \to (B, \varepsilon_B)$ 是满足 $\varepsilon_B f = \varepsilon_A$ 的 $f\colon A \to B$ in $\mathsf{PreL}_{k,1}$ 中的态射。例如，k-代数 $A\#k$ 显然是一个含幺的 k-代数，其

增广：增广是指向第二个直和项的典范投影 π_2：$A\#k = A \oplus k \to k$。

容易看出：

定理 *18.* 存在范畴等价 $F: PreL_k \to PreL_{k,1,a}$，它将 $PreL_k$ 的任意对象 A 对应到带增广的 k-代数 $F(A) := (A\#k, \pi_2)$。F 的准逆是函子 $PreL_{k,1,a} \to PreL_k$，它将每个带增广的含幺前李 k-代数 (A, ε_A) 对应到增广的核 $ker(\varepsilon_A)$。

参考文献

1. M. Ben-Zvi, A. Ma 和 M. Reyes，整数矩阵与非交换谱函子的 *Kochen-Specker* 定理，《代数杂志》**491** (2017), 28–313。2. M. Cerqua，“前李代数”，数学硕士论文，帕多瓦大学，2022。3. 白承铭，《前李代数导论》，载于《代数与应用 1：非结合代数与范畴》，A. Makhlouf（编），ISTE Ltd，2020，第 245–273 页。4. F. Chapoton 和 N. Livernet，前李代数与根树歌剧，《国际数学研究通报》**2001** (8) (2001), 395–408。5. F. Borceux 和 D. Bourn，“Mal’cev、原模的、同调的与半阿贝尔范畴”，《数学及其应用》**566**，Kluwer，2004。6. A. Facchini，从完备乘法格的视角看代数结构，可见：http://arxiv.org/abs/2201.03295，已获准发表于《环、二次型及其在编码理论中的应用》，《当代数学》，2022。7. A. Facchini 和 C. A. Finocchiaro，乘法格：极大蕴含素及相关问题，已提交发表（2022）。8. A. Facchini、C. A. Finocchiaro 和 G. Janelidze，抽象构造的素谱，《普世代数》**83** (2022), no. 1, Paper No. 8, 38 pp. 9. A. Facchini、F. de Giovanni 和 M. Trombetti，群的谱，2022 年 6 月 5 日在线发表，见《代数表示论》(2022)。10. A. Facchini 和 L. Heidari Zadeh，带双线性型的代数及幂等端同态，已提交发表，2022，08230 11 2210，网址：http://arxiv.org/abs/ 。. G. Janelidze 和 G. M. Kelly，*Mal’tsev* 簇中的中心扩张，《范畴论及其应用》**7** (2000), 219–226。12. G. Janelidze、L. Márki 和 W. Tholen，半阿贝尔范畴，《纯粹与应用代数杂志》**168** (2002), no. 2–3, 367–386。13. A. Nijenhuis，关于若干不同类型代数的一类共同性质，《新数学档案》(3) **17** (1969), 17–46。法文译本见《数学教学》(2) **14** (1968), 225–277。14. M. Reyes，阻碍函子 Spec 延拓到非交换环，《以色列数学杂志》**192** (2012), 667–698。15. E. B. Vinberg，凸齐性锥理论，《莫斯科数学会会刊》**12** (1963), 303–358。英文译本：《莫斯科数学会汇刊》**12** (1963), 340–403。