arXiv:2301.02633v1 [math.DG] 6 Jan 2023

斜对称二阶张量场协变导数散度下界的反例

STEFANO BORGHINI 和 LORENZO MAZZIERI

Abstract. 在 [3] 一篇文献中，有人声称对适当的斜对称二阶张量可以得到一个估计。不久之后，这一估计被用于声称取得了重要的分类结果：最值得注意的是，它被用来提出一项证明，即对于具有正标量曲率的真空静态时空，黑洞唯一性定理成立[6] ，并与 Besse 猜想相关 [8]。在本说明中，我们指出 [3] 所提出的论证存在问题，并给出该估计的一个反例。

1. Introduction

关于具有正标量曲率的三维静态解的黑洞唯一性定理，以及关于临界点方程解的 Besse 猜想，是当代几何分析中两个著名且彼此相关的未解问题。最近，有一系列论文 [1, 2, 3, 6,7, 8]声称在这两个问题上都取得了显著进展。在本短文中，我们指出上述论文所提出的方法存在问题，并给出反例。

为引出我们感兴趣的问题并介绍一些记号，回顾一下，三维静态解是满足以下条件的三元组 (M, g, f):

$$f\mathrm{Ric} = \nabla^2 f + \frac{\mathrm{R}}{2} f\, g\,, \qquad \Delta f = -\frac{\mathrm{R}}{2} f\,, \tag{1.1}$$

其中，(M, g) 是一个黎曼流形，f 是一个光滑函数，Ric 和 R 分别表示 g 的里奇张量和数量曲率。当 R 为正时，自然可以假设 (M, g) 是一个带边界的紧流形，且 f 在边界上为零。一个与之密切相关的问题称为临界点方程，其由以下方程组构成:

$$(1+f)\left(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{R}}{n} g\right) = \nabla^2 f + \frac{\mathrm{R}}{n(n-1)} g\,, \qquad \Delta f = -\frac{\mathrm{R}}{n-1} f \tag{1.2}$$

其中未知量由三元组 (M, g, f) 给出，(M, g) 是一个闭黎曼流形，且 f 是一个光滑函数。

在 [3]，中，作者旨在对满足正各向同性曲率条件的临界点方程解进行分类。为此，他们考虑微分二形式

$$\omega = df \wedge \iota_{\nabla f} z\,,$$

其中 z 表示无迹里奇张量，他们声称它必定为零。注意，利用 (1.2)，微分二形式 ω 可以改写为

$$\omega = \frac{1}{2(1+f)} df \wedge d|\nabla f|^2\,,$$

其中 $|\cdot|$ 是关于度量 g计算得到的范数。若 $\omega \equiv 0$，则再次利用方程（1.2），通过直接计算可以证明，g 的 Cotton 张量也必定为零。因此，要么 $n = 3$ 且 g 局部共形平坦，要么 $n \geq 4$ 且 g 具有调和魏尔张量。这两种情况下，分类都很容易得出。文中 [6][1],采用了相同的策略。

[1]请注意 该参考文献已由作者在准备本说明期间撤回 .

其中，此时微分二形式 ω 定义为

$$\omega \,=\, \frac{1}{2f} df \wedge d|\nabla f|^2 \,,$$

满足 g 和 f，且满足条件 (1.1)。在这两种情形下，ω 的消失是通过分部积分论证得出的——对于静态度量的情形，我们将在下文第 2.2 小节中描述这一论证——并且大量运用了关键估计

$$|\nabla\omega|^2 \,\geq\, |\delta\omega|^2 \,, \tag{1.3}$$

作者声称该估计在 M 中 ω 不为零的所有点上成立（见 [3] 中的引理 5.5）。所提出的 (1.3) 的证明并未充分利用 (1.1) 或 (1.2) 的全部效力。事实上，该证明基于一项局部计算，其中 M 的整体结构并不起任何作用。因此，若此证明正确，那么它应当适用于所有具有如下结构的微分二形式

$$\omega \,=\, \lambda(f)\, df \wedge d|\nabla f|^2 \,. \tag{1.4}$$

其中某个光滑函数 $\lambda = \lambda(f)$，且不论 (1.1) 或 (1.2) 是否成立。本说明旨在驳斥这样的主张：定义在黎曼流形 (M, g) 的开子集上的任意 ω，只要具有 (1.4) 中的形式，就满足估计 (1.3)。

在第3 节中，我们指出了1.3式原始证明中的问题，该证明见 [3, 引理 5。5], 而在第4 节中，我们给出了该论断的有效反例。具体而言，我们证明

对于任意光滑实函数 $\lambda \neq 0$，存在一个光滑黎曼度量 g 和一个光滑函数 f，使得 $|\nabla\omega|^2 < |\delta\omega|^2$，其中 $\omega = \lambda(f)\ df \wedge d|\nabla f|^2$。

为完整起见，我们在第2 节讨论如何利用类似于（1.3）的估计来推导出 ω 处处必须为零。

2. Analysis of a skew-symmetric 2-tensor field

为使计算更加清晰，我们倾向于采用 [3]中的张量场形式。不过，也可以像 ω那样采用微分形式的形式。我们不考虑按（2.1）定义的 P，而是考虑反对称二阶张量场 P，其定义为

$$P \,=\, \lambda(f)\, \big[df \otimes d|\nabla f|^2 - d|\nabla f|^2 \otimes df\big] \,, \tag{2.1}$$

其中 λ，f 以及 g 如上所述。在这一形式体系中，估计（1.3）等价于

$$|\nabla P|^2 \,\geq\, 2\,|\mathrm{div} P|^2 \,, \tag{2.2}$$

如 $2\,|\nabla\omega|^2 = |\nabla P|^2$（因子 2 源于微分形式与张量的范数定义略有不同，即 $|\nabla\omega|^2 = \sum_{j<k}\sum_i (\nabla_i\omega_{jk})^2$, 而 $|\nabla P|^2 = \sum_{j,k}\sum_i (\nabla_i P_{jk})^2$），且 $\delta\omega = -\mathrm{div} P$。注意，若将常数 2 替换为较小的常数 $1/n$，便可得到始终成立的下界 $|\nabla P|^2 \geq (1/n)\ |\mathrm{div} P|^2$。此外，利用 P 的特殊结构（2.1），可以显著改进这个下界，得到 $(n-1)|\nabla P|^2 \,\geq\, 2\,|\mathrm{div} P|^2$（见附录）。另一方面，估计（2.2）要求过强，一般情况下并不成立，正如下文将要讨论的。

2.1. 两个微分恒等式。

这里讨论斜对称二阶张量的一些基础但重要的性质，P 其形式为 (2.1)。

命题 2.1。 设 (M, g) 是一个 n 维黎曼流形，且 $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$。那么，斜对称二阶张量场 P 按 (2.1)定义，其中 λ为某个光滑实函数，则满足恒等式

$$\nabla P(X, Y, Z) \,+\, \nabla P(Y, Z, X) \,+\, \nabla P(Z, X, Y) \,=\, 0\,.$$

注 1. 就微分 2-形式 ω 如 (1.4)所定义，上述恒等式说明 ω 是闭的，正如 [3, 引理 54]所观察到的。注意，若 ω 如 (1.4)所定义，则很容易验证 $d\omega = (d\lambda/df)\ df \wedge df \wedge d|\nabla f|^2 = 0$。

证明。为简单起见 ty 我们采用正规坐标 $\{x^1,\dots,x^n\}$。简单计算可得

$$\nabla_i P_{jk} \;=\; \frac{\dot\lambda}{\lambda} P_{jk}\nabla_i f + \lambda\left(\nabla^2_{ij} f \nabla_k |\nabla f|^2 - \nabla_j |\nabla f|^2 \nabla^2_{ik} f\right) + \lambda\left(\nabla_j f \nabla^2_{ik}|\nabla f|^2 - \nabla^2_{ij}|\nabla f|^2 \nabla_k f\right).$$

现在只需计算即可验证，右侧三个部分对循环指标求和后结果为零。我们计算

$$\begin{aligned} P_{jk}\nabla_i f + P_{ki}\nabla_j f + P_{ij}\nabla_k f \;=\; \lambda\Big(&\nabla_i f \nabla_j f \nabla_k |\nabla f|^2 - \nabla_i f \nabla_j |\nabla f|^2 \nabla_k f \\ &+ \nabla_j f \nabla_k f \nabla_i |\nabla f|^2 - \nabla_j f \nabla_k |\nabla f|^2 \nabla_i f + \nabla_k f \nabla_i f \nabla_j |\nabla f|^2 - \nabla_k f \nabla_i |\nabla f|^2 \nabla_j f\Big) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

类似地，有

$$\nabla^2_{ij} f \nabla_k |\nabla f|^2 - \nabla_j |\nabla f|^2 \nabla^2_{ik} f + \nabla^2_{jk} f \nabla_i |\nabla f|^2 - \nabla_k |\nabla f|^2 \nabla^2_{ji} f + \nabla^2_{ki} f \nabla_j |\nabla f|^2 - \nabla_i |\nabla f|^2 \nabla^2_{kj} f = 0\,,$$

$$\nabla_j f \nabla^2_{ik}|\nabla f|^2 - \nabla^2_{ij}|\nabla f|^2 \nabla_k f + \nabla_k f \nabla^2_{ji}|\nabla f|^2 - \nabla^2_{jk}|\nabla f|^2 \nabla_i f + \nabla_i f \nabla^2_{kj}|\nabla f|^2 - \nabla^2_{ki}|\nabla f|^2 \nabla_j f = 0\,.$$

由此可得

$$\nabla_i P_{jk} + \nabla_j P_{ki} + \nabla_k P_{ij} \;=\; 0\,,$$

如上所述。 □

P 的另一个有趣性质是，它满足 Bochner 型公式，正如下述命题所证明的那样。

命题 2.2。 设 (M,g) 是一个 n维黎曼流形，并设 $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$。那么，由某个光滑实函数 λ按 $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$定义的反对称 2阶张量场 P，(2.1)满足以下恒等式

$$\frac12 \Delta |P|^2 \;=\; |\nabla P|^2 + 2\langle P \,|\, \nabla(\operatorname{div} P)\rangle + \frac{2\mathrm{R}}{(n-1)(n-2)}|P|^2 + 2\frac{n-4}{n-2}\mathrm{R}_{js}P_{sk}P_{jk} + 2\mathrm{W}_{ijks}P_{is}P_{jk}\,.$$

证明。 我们在正规坐标下进行计算。利用命题 2.1 以及 P的反对称性，我们计算得

$$\begin{aligned} \Delta|P|^2 \;&=\; 2\nabla_i(P_{jk}\nabla_i P_{jk}) \\ &=\; 2|\nabla P|^2 + 2P_{jk}\Delta P_{jk} \\ &=\; 2|\nabla P|^2 - 2P_{jk}\nabla^2_{ij}P_{ki} - 2P_{jk}\nabla^2_{ik}P_{ij} \\ &=\; 2|\nabla P|^2 + 4P_{jk}\nabla^2_{ij}P_{ik} \\ &=\; 2|\nabla P|^2 + 4P_{jk}\left(\nabla^2_{ji}P_{ik} + \mathrm{R}_{ijis}P_{sk} + \mathrm{R}_{ijks}P_{is}\right) \\ &=\; 2|\nabla P|^2 + 4P_{jk}\left(\nabla_j(\operatorname{div} P)_k + \mathrm{R}_{js}P_{sk} + \mathrm{R}_{ijks}P_{is}\right). \end{aligned}$$

为了得到所述恒等式，现在只需将黎曼曲率张量的一般公式代入

$$\mathrm{R}_{ijks} = -\frac{\mathrm{R}}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{js} - g_{is}g_{jk}) + \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{R}_{ik}g_{js} - \mathrm{R}_{is}g_{jk} + g_{ik}\mathrm{R}_{js} - g_{is}\mathrm{R}_{jk}\right) + \mathrm{W}_{ijks}$$

上面的计算中。 □

前一个命题中得到的微分恒等式在 $n=3$时会显著简化，因为此时 Weyl张量消失，因此我们得到

$$\frac12 \Delta |P|^2 \;=\; |\nabla P|^2 + 2\langle P \,|\, \nabla(\operatorname{div} P)\rangle + \mathrm{R}|P|^2 - 2\mathrm{R}_{js}P_{sk}P_{jk}\,. \tag{2.3}$$

2.2. 对3维静态解的应用。 在 [6] 基于上述 Bochner 型公式以及估计（3.4）成立这一点，有人提出了一个关于具有正标量曲率的三维静态度量的分类结果。为完整起见，我们在此重新梳理其证明。

利用公式（1.1），我们可以将（2.3）中的里奇张量代入，得到

$$\frac{1}{2}\Delta|P|^2 \;=\; |\nabla P|^2 + 2\langle P \,|\, \nabla(\operatorname{div} P)\rangle + \frac{\mathrm{R}}{2}|P|^2 + \frac{2}{f}P(\nabla f, \operatorname{div} P) - \frac{1}{2f}\langle \nabla f \,|\, \nabla|P|^2\rangle\,, \tag{2.4}$$

这可以改写为

$$\frac{1}{2}\operatorname{div}(f|P|^2) \;=\; f|\nabla P|^2 + 2f\langle P \,|\, \nabla(\operatorname{div} P)\rangle + \frac{\mathrm{R}}{2}\, f\,|P|^2 + 2P(\nabla f, \operatorname{div} P)\,.$$

由于 M 是紧致的，且 $f = 0$ 在 ∂M上成立，分部积分后我们得到

$$0 \;=\; \int_M \left[f|\nabla P|^2 - 2f|\operatorname{div} P|^2 + \frac{\mathrm{R}}{2}\, f\,|P|^2 \right] d\mu\,.$$

在此可以看出估计（2.2）的强大之处。事实上，若（2.2）成立且 $\mathrm{R} > 0$，则$|P|^2$ 必恒等于零，由此得到以下结果

命题 2.3。 设 $(M,\ g,\ f)$ 是一个具有正标量曲率且边界非空的紧致三维静态解。假设 $f = 0$ 在 ∂M 上成立，并且在内部为正。若估计 (2.2) 对某个 P 如 (2.1)中所述成立，则 P 必恒等于零，并且有

$$df \otimes d|\nabla f|^2 = d|\nabla f|^2 \otimes df\,.$$

这是 [6]中所概述策略的关键步骤。正如预期的那样，他们利用恒等式$P = 0$ 并结合静态方程，推导出 Cotton 张量必为零。借助 Kobayashi [4] 和 Lafontaine [5]的一项著名结果，即可得到分类。

正如我们将在接下来的章节中看到的，要在一般情形下证明（2.2）成立并不容易，不过我们将在附录中证明，较弱的下界 $|\nabla P|^2 \geq |\operatorname{div} P|^2$成立。这将导出

$$\int_M f|\operatorname{div} P|^2 d\mu \;\geq\; \int_M \frac{\mathrm{R}}{2}\, f\,|P|^2 d\mu\,.$$

基于这个积分不等式，可以对具有正数量曲率且存在散度为零的 P-张量的三维静态度量进行分类。

3. The issue in the proof of the estimate

这里我们重新梳理了1.3中最初提出的估计 [3, 引理 5。5], 并指出论证中的主要问题。

首先，作者找到了一个局部标准正交标架，使得张量 P具有良好的结构。证明的这部分似乎是正确的；此外，这本身也是一个有趣的事实，在附录中也会有所帮助，因此我们将其作为一个引理列在这里。在下面的陈述中，考虑向量值 1-形式 $A:\ TM \to TM$，其定义为$P(X,Y) = g(AX,Y)$。用坐标表示：$A_i^j = g^{jm}P_{im}$。

引理3.1. 设 (M,g) 是一个 n 维黎曼流形。设 $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$，并令 P 为由 (2.1) 定义的张量。设 $x \in M$ 是一点，且满足 $|P|(x) \neq 0$。那么，在 x 的一个小邻域U内，有 $|P| \neq 0$, $|\nabla f| \neq 0$, $|A\nabla f| \neq 0$，并且存在一个光滑的标准正交标架$\{E_1, \dots, E_n\}$，满足 $E_1 = \nabla f/|\nabla f|$ 和 $E_2 = AE_1/|AE_1|$。相对于此标架，张量 P 可写为

$$P \;=\; u\left(\theta^1 \otimes \theta^2 - \theta^2 \otimes \theta^1\right)\,, \tag{3.1}$$

其中，u 是一个光滑函数，而 $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ 是 $\{E_1, \dots, E_n\}$ 的对偶余标架（即，在 U中的任意一点，$\theta^i(E_j) = \delta^i_j$）。

证明。这一事实的证明见 [3], 不过，我们在此给出一个更简短且自成一体的版本。

我们先构造引理中的标准正交标架。考虑 x的一个邻域 U ，在该邻域内 $|P| \neq 0$。由 P的定义（2.1）可知， $|\nabla f| \neq 0$也属于 U。特别地，向量 $E_1 = \nabla f/|\nabla f|$在 U中定义良好。我们将 E_1补全为 U中的一个正交归一~~标架 $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$。由于对于 $i \geq 2$， $g(E_1, E_i) = 0$，因此对任意 $i \geq 2$都有 $\nabla_{\widetilde{E}_i} f = 0$，于是

$$P(\widetilde{E}_i, \widetilde{E}_j) = \lambda(f) \left(\nabla_{\widetilde{E}_i} f \, \nabla_{\widetilde{E}_j} |\nabla f|^2 - \nabla_{\widetilde{E}_i} |\nabla f|^2 \, \nabla_{\widetilde{E}_j} f \right) = 0 , \tag{3.2}$$

~~对于任意 $i, j \geq 2$。由于 $|P| \neq 0$在 U中，因此在 U的任意一点都有 $g(AE_1, E_j) = P(E_1, E_j) \neq 0$其中某个 j成立。特别地， $AE_1 \neq 0$在 U中。由于 $g(AE_1, E_1) = P(E_1, E_1) = 0$，可知 AE_1 与 E_1正交。特别地，向量 $E_2 = AE_1/|AE_1|$ 在整个 U 上都有定义，且与 E_1正交。于是，我们可以将 E_1, E_2补充为 U中的一个正交归一标架 $\{E_1, \dots, E_n\}$。这正是引理陈述中所描述的正交归一标架。特别要注意的是

$$P(E_1, E_j) = g(AE_1, E_j) = |AE_1| \, g(E_2, E_j) = |AE_1| \, \delta_{2j} .$$

根据（3.2），我们推得， P的非零项只有 P（E_1， E_2） $= -P$（E_2， E_1）。公式（3.1）得证。 □

接下来，作者计算了相对于该标架的 $|\nabla P|^2$和 $|\mathrm{div}\ P|^2$。关于 $|\nabla P|^2$ 的计算似乎是正确的。另一方面，我们认为，作者求出的散度项表达式似乎有误。简单计算可得（更多细节见附录）：

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}\, P)(E_1) &= -E_2(u) + \sum_{i=3}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_i \,|\, E_2 \rangle \, u = -E_2(u) + \sum_{i=3}^{n} \langle E_i \,|\, [E_2, E_i] \rangle \, u , \\
(\mathrm{div}\, P)(E_2) &= E_1(u) - \sum_{i=3}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_i \,|\, E_1 \rangle \, u = E_1(u) + \sum_{i=3}^{n} \langle E_i \,|\, [E_1, E_i] \rangle \, u , \\
(\mathrm{div}\, P)(E_k) &= \langle E_k \,|\, [E_1, E_2] \rangle \, u , \quad k \geq 3 .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

值得指出的是，标架 $\{E_1, \dots, E_n\}$是通过逐点论证构造的。显然，该标架是光滑的，但需要注意的是，它不一定由局部坐标系诱导。特别是，李括号 $[E_i, E_j]$不一定为零。这似乎是问题的核心：事实上，作者声称

$$\mathrm{div}\, P = -E_2(u)\theta^1 + E_1(u)\theta^2 . \tag{3.4}$$

鉴于（3.3），只要李括号不为零，这个公式似乎就是错误的。

注记2. 在 [3], 更确切地说，在 [3, 引理5.5] 证明的最后一页中，这个公式写作 $\delta\omega = E_2$（u）$\theta^1 - E_1$（u）θ^2。正如已经指出的， ω在微分形式的形式体系中对应于我们的 P，而余微分 δ显然通过公式与散度相关 $\delta\omega =$ –散度P。

4. Counterexamples to estimate (1.3)

为简单起见，我们在3维中进行讨论，但在高维中也可能构造出类似的反例。考虑定义在某个开集上的局部坐标 $\{r, x^1, x^2\}$ 、一个正光滑函数 $\phi = \phi(r)$，以及扭曲积度量

$$g = dr \otimes dr + \phi^2 (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2) .$$

那么，令 $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ 为如下形式的光滑函数 $f = \psi \circ x^1$，其中 ψ 是某个非恒定光滑实函数。接下来考虑一个斜对称二阶张量场 P，如式（2.1）所示，其中 λ 任取。在局部坐标中， P 的分量为

$$P_{\alpha\beta} = \lambda \left[\nabla_\alpha f \nabla^2_{\beta\eta} f - \nabla_\beta f \nabla^2_{\alpha\eta} f \right] g^{\eta\sigma} \nabla_\sigma f = \frac{\lambda \psi'}{\phi^2} \left[\nabla_\alpha f \nabla^2_{1\beta} f - \nabla_\beta f \nabla^2_{1\alpha} f \right] ,$$

其中希腊指标取遍 $\{r,1,2\}$。下文中，我们用 $'$表示关于 x^1 的导数，用点表示关于 r的导数。度量 g 的克里斯托费尔符号如下

$$\Gamma^r_{rr} \,=\, \Gamma^r_{ri} \,=\Gamma^i_{rr} \,=\, \Gamma^k_{ij} \,=\, 0\,,\quad \Gamma^r_{ij} \,=\, -\phi\dot\phi\delta_{ij}\,,\quad \Gamma^j_{ri} \,=\, \frac{\dot\phi}{\phi}\delta^j_i\,,$$

其中，拉丁指标取值于 $\{1,2\}$。因此很容易得出，海森矩阵的非零分量只有.

$$\nabla^2_{11} f \,=\, \psi''\,,\quad \nabla^2_{1r} f \,=\, -\frac{\phi}{\dot\phi}\,\psi'\,,$$

并且

$$P \,=\, \lambda\frac{\dot\phi}{\phi^3}(\psi')^3\left(dr\otimes dx^1 - dx^1\otimes dr\right)\,.$$

请注意，我们所处的情形与第 3 节中的情形类似，只是我们的标架

$$\{\partial/\partial r, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2\}$$

不是正交归一的。因此，为了验证我们的 P 具有式（3.1）所规定的结构，应当相对于一个标准正交标架写出其局部表达式。该标架可通过令 $E_1 = (1/\phi)\,\partial/\partial x^1$，$E_2 = \partial/\partial r$，$E_3 = (1/\phi)\,\partial/\partial x^2$ 得到。其对偶正交归一余标架为 $\theta^1 = \phi dx^1$，$\theta^2 = dr$，$\theta^3 = \phi dx^2$。容易验证，该标架满足引理 3.1 中所述的性质，并且

$$P \,=\, -\lambda\frac{\dot\phi}{\phi^4}(\psi')^3\left(\theta^1\otimes\theta^2 - \theta^2\otimes\theta^1\right)\,.$$

不过，我们更倾向于相对于由局部坐标 (r, x^1, x^2) 诱导的标架场进行计算。在这一框架下，很容易证明 ∇P 的唯一非零分量为

$$\begin{aligned}
\nabla_r P_{1r} \,&=\, -\left(\frac{\ddot\phi}{\phi^3} - 4\frac{\dot\phi^2}{\phi^4}\right)\lambda\,(\psi')^3\,,\\
\nabla_1 P_{1r} \,&=\, -\frac{\dot\phi}{\phi^3}(\lambda\,(\psi')^3)'\,,\\
\nabla_2 P_{12} \,&=\, -\frac{\dot\phi^2}{\phi^2}\lambda\,(\psi')^3\,.
\end{aligned}$$

由此很容易得出

$$\mathrm{div}P \,=\, -\frac{\dot\phi}{\phi^5}(\lambda\,(\psi')^3)'\,dr \,+\, \lambda\,(\psi')^3\left(\frac{\ddot\phi}{\phi^3} - 3\frac{\dot\phi^2}{\phi^4}\right)dx^1\,.$$

这里可以注意到，我们的计算结果与公式（3.4）之间存在差异，因为计算该公式右端会得到

$$-\frac{\dot\phi}{\phi^5}(\lambda\,(\psi')^3)'\,dr \,+\, \lambda\,(\psi')^3\left(\frac{\ddot\phi}{\phi^3} - 4\frac{\dot\phi^2}{\phi^4}\right)dx^1\,,$$

这个结果看起来非常相似，但并非 $\mathsf{div}P$ 的正确值。计算 ∇P 和 $\mathsf{div}P$ 的平方范数后，最终得到

$$|\nabla P|^2 - 2|\mathrm{div}P|^2 \,=\, 4\frac{\lambda^2\dot\phi^2(\psi')^6}{\phi^8}\left(4\frac{\dot\phi^2}{\phi^2} - \frac{\ddot\phi}{\phi}\right)\,.$$

为了使这个差值为负，只需指定函数 λ、ψ 和 ϕ，使右端为负。特别地，只需选择 ϕ，使圆括号中的量为负。例如，可以令

$$\phi \,=\, (r+c)^{-1/k},\qquad \text{for some } k>3 \text{ and some } c>0\,.$$

由此可知，采用这一选择 ϕ后，对于任意 λ 和任意 $f = \psi \circ x^1$，估计式 (2.2) 不成立。因此，下界 (1.3) 也不成立。

Appendix

为完整起见，我们指出 $|\nabla P|$ 与 $|$散度$P|$之间始终成立的正确关系。设 (M, g) 是一个 n维黎曼流形， $n \geq 3$。如第3节所述，取一点 x 使得$|P|(x)$， $\neq 0$ 并考虑由引理 $\{E_1, \ldots, E_n\}$ 3.1给出的局部标准正交标架。回忆一下，关于这个标架，张量 P 具有如下形式

$$P \;=\; u\left(\theta^1 \otimes \theta^2 - \theta^2 \otimes \theta^1\right) . \tag{4.1}$$

利用 ∇ 与度量 g的相容性，对于任意 i、 j、 k，有

$$0 = E_i\left(g(E_j, E_k)\right) = g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) + g(E_j, \nabla_{E_i} E_k)\,,$$

特别地，

$$g(\nabla_{E_i} E_k, E_k) = 0\,, \qquad g(\nabla_{E_i} E_i, E_k) \;=\; -g(E_i, \nabla_{E_i} E_k) \;=\; -g(E_i, [E_i, E_k])\,.$$

现在我们可以计算 ∇P的分量了。由于当 $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$时， $P(E_i, E_j) = 0$，因此有

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i} P(E_1, E_2) \;&=\; E_i\left(P(E_1, E_2)\right) \;-\; P(\nabla_{E_i} E_1, E_2) \;-\; P(E_1, \nabla_{E_i} E_2) \\
&=\; E_i(u) \;-\; g(\nabla_{E_i} E_1, E_1) P(E_1, E_2) \;-\; g(\nabla_{E_i} E_2, E_2) P(E_1, E_2) \\
&=\; E_i(u)\,.
\end{aligned}$$

同样，对于任意 $k \geq 3$，我们有

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i} P(E_1, E_k) \;&=\; E_i(P(E_1, E_k)) - \; P(\nabla_{E_i} E_1, E_k) \;-\; P(E_1, \nabla_{E_i} E_k) \\
&=\; -\,g(\nabla_{E_i} E_k, E_2) P(E_1, E_2) \\
&=\; -\,g(\nabla_{E_i} E_k, E_2)\, u\ ,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i} P(E_2, E_k) \;&=\; E_i(P(E_2, E_k)) - \; P(\nabla_{E_i} E_2, E_k) \;-\; P(E_2, \nabla_{E_i} E_k) \\
&=\; -\,g(\nabla_{E_i} E_k, E_1) P(E_2, E_1) \\
&=\; g(\nabla_{E_i} E_k, E_1)\, u\ .
\end{aligned}$$

同样，可计算得 $\nabla_{E_i} P(E_1, E_1) = \nabla_{E_i} P(E_2, E_2) = 0$ 以及 $\nabla_{E_i} P(E_j, E_k) = 0$，其中 j、 k为 ≥ 3。现在很容易计算 P 的散度:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} P)(E_1) \;&=\; -E_2(u) \;+\; \sum_{i=3}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_i \,|\, E_2 \rangle\, u \;=\; -E_2(u) \;+\; \sum_{i=3}^{n} \langle E_i \,|\, [E_2, E_i] \rangle\, u\,, \\
(\operatorname{div} P)(E_2) \;&=\; E_1(u) \;-\; \sum_{i=3}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_i \,|\, E_1 \rangle\, u \;=\; E_1(u) \;-\; \sum_{i=3}^{n} \langle E_i \,|\, [E_1, E_i] \rangle\, u\,, \\
(\operatorname{div} P)(E_i) \;&=\; -g(\nabla_{E_1} E_i, E_2)\, u + g(\nabla_{E_2} E_i, E_1)\, u\,, \quad i \geq 3\,.
\end{aligned}$$

利用不等式 $(\sum_{i=1}^{k} x_i)^2 \leq k \sum_{i=1}^{k} x_i^2$，经过简单计算可得

$$\begin{aligned}
\frac{|\operatorname{div} P|^2}{n-1} \;&\leq\; \sum_{k=1}^{2} \left[E_k(u)^2 + \sum_{i=3}^{n} \langle E_i \,|\, [E_i, E_k] \rangle^2 u^2 \right] + \frac{2}{n-1} \sum_{i=3}^{n} \left[\langle \nabla_{E_1} E_i \,|\, E_2 \rangle^2 + \langle \nabla_{E_2} E_i \,|\, E_1 \rangle^2 \right] u^2 \\
&\leq\; \sum_{k=1}^{2} \left[E_k(u)^2 + \sum_{i=3}^{n} \langle E_i \,|\, [E_i, E_k] \rangle^2 u^2 \right] + \sum_{i=3}^{n} \left[\langle \nabla_{E_1} E_i \,|\, E_2 \rangle^2 + \langle \nabla_{E_2} E_i \,|\, E_1 \rangle^2 \right] u^2\,.
\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\nabla P|^2 &\geq \sum_{k=1}^{2}\left[(\nabla_{E_k}P(E_1,E_2))^2+\sum_{i=3}^{n}(\nabla_{E_i}P(E_k,E_i))^2+\sum_{i=3}^{n}(\nabla_{E_k}P(E_k,E_i))^2\right]\\ &=\sum_{k=1}^{2}\left[E_k(u)^2+\sum_{i=3}^{n}\langle E_i\,|\,[E_i,E_k]\rangle^2u^2\right]+\sum_{i=3}^{n}\left[\langle\nabla_{E_1}E_i\,|\,E_2\rangle^2+\langle\nabla_{E_2}E_i\,|\,E_1\rangle^2\right]u^2\,.\end{aligned}$$

总之，我们证明了以下结论。

命题 4.1。 设 $(M,\ g)$ 为一个 n维黎曼流形， $n\geq 3$。设 $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$并设 P 为由 (2.1)定义的张量。那么，在 M 的任意点处，均有

$$|\nabla P|^2\ \geq\ \frac{2}{n-1}\,|\mathrm{div}P|^2\,. \tag{4.2}$$

证明。估计 (4.2) 可由上述计算立即得出，适用于 P 具有 (2.1) 形式的任意点，也就是说，适用于满足 $|P|\neq 0$ 的任意点。再设 x 是满足 $|P|=0$ 的一点。若 $|P|$在 x 的某个邻域内恒等于零，则在该邻域内 $|\nabla P|=|\mathrm{div}\ P|=0$，不等式 (4.2) 显然成立。否则，存在一列点 x_i 收敛至x，且满足 $|P|(x_i)\neq 0$。由于估计 (4.2) 在点 x_i 处成立，根据连续性，它在 x 处也必然成立。□

致谢。作者感谢 R. Beig、P. T. Chru´sciel 和 W. Simon 就静态真空时空的分类展开的启发性讨论。作者是意大利高等数学国家研究所 (INdAM) 下属数学分析、概率论及其应用国家小组 (GNAMPA) 的成员。

References

[1] S. Hwang、M. Santos 和 G. Yun。具有正各向同性曲率的闭广义爱因斯坦流形。 *preprint arXiv:2108.10675* 2021 *arXiv* ，。[2] S. Hwang 和 G. Yun。具有正各向同性曲率的真空静态空间。 *arXiv preprint arXiv:2103.15818*，2021年。[3] S. Hwang 和 G. Yun。具有正各向同性曲率的 Besse 猜想。 *Annals of Global Analysis and Geometry*，第 1–26 页，2022年。[4] O. Kobayashi。源自标量曲率函数的微分方程。 *J. Math. Soc. Japan* 34 4 665 675, , (): –。[5] J. Lafontaine。关于 Obata 微分方程推广的几何。 1982 ´ ´ ´ ´ ´ *J. Math. Pures Appl.* , (): –。[6] X. Xu 和 J. Ye。闭的三维真空静态空间。 *Inventiones mathematicae*，第 1–17 页，2022年。[7] G. Yun 和 S. Hwang。具有正各向同性曲率的 V-静态空间。 *arXiv preprint arXiv:2103.16039*，2021年。[8] G. Yun 和 S. Hwang。三维流形上的临界点方程与 Besse 猜想。 *preprint arXiv:2208.10887* 2022 *(9)* 62 1 63 72, 1983 *arXiv* ，。

S. Borghini, Università degli Studi di Trento, via Sommarive 14, 38123 Povo (TN), Italy
Email address: stefano.borghini@unitn.it

L. Mazzieri, Università degli Studi di Trento, via Sommarive 14, 38123 Povo (TN), Italy*Email address*: lorenzo.mazzieri@unitn.it