简单阿廷环上的滤过斜导子

Adam Jones，William Woods

2023年1月9日

arXiv:2301.02639v1 [math.RA] 6 Jan 2023

摘要

给定一个完备正滤过环 (R, f) 和一个相容斜导子 (σ, δ)，我们可以构造其斜幂级数环 $R[[x; \sigma, \delta]]$。由于拓扑障碍，即使 δ 是一个内 σ-导子，一般而言我们也无法将其“扭转消除”，即通过重新参数化找到一个滤过同构 $R[[x; \sigma, \delta]] \cong R[[x'; \sigma]]$，尽管根据斜多项式环的理论本应如此；当 σ 是一个内自同构时，情况也类似。我们找到了能够消除乘法数据中的扭曲的一般条件，并利用这些条件分析 $R[[x; \sigma, \delta]]$ 的结构，重点考察 R 为某个（非交换）诺特离散赋值环上的矩阵环这一最简单的情形。

目录

1 引言 **2**
1.1 半单阿廷环中的极大序.2 1.2 斜导子的去扭曲.4 1.3 理想收缩与单性.5 1.4 一致维数.5

2 预备知识 **6**
2.1 滤过环与离散赋值环.6 2.2 半单阿廷环上的斜导子.6 2.3 相容滤过与斜幂级数环.7 2.4 离散赋值环.8

3 重新参数化滤过斜导子 **9**
3.1 相同滤过的条件.9

4 半单阿廷环上的斜导子 11
4.1 归约为轨道.11 4.2 内自同构的去扭曲.13 4.3 内 σ-导子的去扭曲.14

5 应用 **15**
5.1 多项式元素.15 5.2 一致维数.16

1 引言

设 R 是一个环，且 (σ,δ) 是 R 上的斜导子：也就是说，σ 是 R 的自同构，而 δ 是 R 上的左 σ-导子，即一个满足 $\delta(ab)=\delta(a)b+\sigma(a)\delta(b)$ 的线性映射 $R\to R$，对所有的 a、$b\in R$ 均成立。于是，我们可以定义斜多项式环 $R[x;\sigma,\delta]$，它是唯一一个作为左 R-模等于 $R[x]$，且乘法由 $xr=\sigma(r)x+\delta(r)$ 给出的环，对所有的 $r\in R$ 均成立。

在斜多项式环理论中（见下文 §1.2），众所周知，若 σ 是 R 的内自同构，则存在某个 $x'\in R[x;\ \sigma、\ \delta]$，使得 $R[x;\ \sigma、\ \delta]=R[x';\ \delta']$，其中 δ' 是某个导子；同样，若 δ 是 R 的内 σ- 导子，则存在某个 $x'\in R[x\ ;\ \sigma\ 、\ \delta]$，使得 $R[x\ ;\ \sigma\ 、\ \delta]=R[x'\ ;\ \sigma]$。这是该理论中一项至关重要且经常使用的简化：例如见 [7, §2.3(iii)、定理 14.9] 或 [6, 命题 3.10]。

我们主要关注斜幂级数环，其中有许多额外的拓扑困难需要处理。

首先：给定任意环 R 以及 R 上任意斜导子 (σ,δ)，一般而言，若不对乘法数据施加某种收敛条件，就无法在左模 $R[[x]]$ 上定义上述形式的良定义乘法。我们的主要动机来自对某些有限秩 pro-p 群的完备群代数（这些完备群代数也称为岩泽代数）的研究，在这种情况下，以下概念是合适的。若 (R,v) 是完备的 $\mathbb{N}$-滤过环，且 (σ,δ) 与 v 相容（定义见下文 2.4），则可定义斜幂级数环

$$R[[x;\sigma,\delta]]=\left\{\sum_{n\geq 0}r_nx^n:r_n\in R\right\},$$

这也是一个完备的 $\mathbb{N}$-滤过环。（若 v 的取值属于 $\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ 而非 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，则我们可以定义一种适当的有界斜幂级数环概念——详情见 [10] ——但本文不讨论这类环。）

其次：假设存在 $t\in R$，使得 $\delta(r)=tr-\sigma(r)t$，即一个内 σ-导子。那么，若通过将变量从 x 改为 $x'=x+t$来重新参数化斜多项式环，我们会发现 $R[x;\ \sigma,\ \delta]=R[x';\ \sigma]$：从 x 变为 x'时，我们称之为将 δ从 $R[x$中解扭；σ，$\delta]$。这很有益，因为形如 $R[x';\ \sigma]$（导子为零）的环通常更容易理解。（也存在类似的过程，可以将内自同构 σ 解扭。）然而，经过这样的重新参数化后，通常无法保证即使作为左 R-模也有 $R[[x]]=R[[x']]$（见例 3.1），这意味着这种简化并非总是可行。

1.1 半单阿廷环中的极大序

本文的主要结果利用去扭曲这一概念来分析斜幂级数环的结构。为了陈述这一结果，我们需要对基环施加更多条件，因为一般的滤过环具有过于病态的性质，以至于我们无法得出多少有意义的结论。

我们感兴趣的环记作 $\mathcal{O}$，通常是某些完备滤过半单阿廷环 Q 中的特定极大序。这些环往往性质良好，使得乘法数据 (σ,δ) 的内在部分总能从 $\mathcal{O}[[x;\ \sigma,\delta]]$ 中去扭曲出来，因此可以运用我们的方法对这些斜幂级数环进行研究。

这类环非常常见，因为从一个足够良好的滤过环 R出发，可以构造出这样的环 $\mathcal{O}$，它与 R 密切相关，见 [1, §3，定理 C

及其证明]。例如，本文作者通过将 R 上的斜幂级数环与 Q 上的斜幂级数环联系起来，证明了 [10] 中的结果（$\mathcal{O}$）。

简言之，本文始终将 Q 视为半单阿廷环，并假设其关于滤过 v_Q是完备的。显然，根据阿廷-韦德伯恩定理， Q同构于有限个除环 F_1、 $\cdots$、 F_d上的全矩阵环的直积；我们通常只需在这些矩阵环中取极大序，就能构造出 Q 中的极大序 $\mathcal{O}$ 。更具体地说，我们假设数据 $(Q, \mathcal{O}, v_Q)$ 满足以下部分或全部假设：

假设。

(H1) 我们可以将 Q 表示为乘积 $Q = A_1 \times \cdots \times A_d$，其中环 A_1、.....、 A_d 构成 Q、 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_d$ 的极小非零理想，其中 A_i中有某个极大序 $\mathcal{O}_i$。并且对于每个 $i = 1$、.....、 d，给定

- 一个完备离散赋值环 D_i （定义见下文 §2.4），
- 其戈尔迪商环 F_i （配备其诱导滤过 v_{F_i}：见 §2.4），
- 全矩阵环 $M_n(D_i) \subseteq M_n(F_i)$（配备矩阵滤过 $M_n(v_{F_i})$：见定义 2.1.2），

• 滤过环同构 ι_i： $A_i \to M_n(F_i)$，使得 $\mathcal{O}_i = \iota_i^{-1}(M_n(D_i))$。在此背景下，我们将用 D 和 F 分别表示 D_i 和 F_i 的乘积，并分别赋予它们相应的乘积滤过（见定义 2.1.1），有时将其记作 v_D 和 v_F。有时，将 $M_n(F)$ 与 $= M_n(F_1)$ 识别为 $\times \cdots \times M_n(F_d)$ 也会很方便。我们将用 ι： $Q \to M_n(F)$ 表示诱导的滤过同构，并假设$v_Q = M_n(v_F) \circ \iota$。**(H2)** 斜导子 (σ, δ) 与 v_Q 相容（定义见下文 §2.3 ）。**(H3)** 自同构 σ 将 Q 的极小非零理想 A_1、 ..... 、 A_d 传递地互相置换。

此外，给下面这个假设命名会很方便：

(S) 在 **(H1)** 的背景下， $d = 1$：也就是说， Q 是单阿廷环， F 是除环， D 是完备离散赋值环，等等。

备注。

• 假设 **(H1)** + **(S)** 是 §3，尤其是 3.14] 的背景：我们的 Q 在那里称为$\curvearrowleft Q(B)$，并且可以将其实现为称作 Q 的阿廷环的一个单商环。

• 由 **(H1)** 可知， v_F是 F 上的 $J(D)$-进滤过，因此 v_Q 是 Q上的 $J(\mathcal{O})$-进滤过。

• 假设 **(H2)** 是研究滤过斜幂级数环时的一个关键假设：许多自然且重要的滤过斜幂级数环例子都满足某种相容性判据（例如参见 $[10, 13, 19]$, $[20, \text{§§2.4–2.5}]$），而这个相容性判据确保环乘法定义良好（见 §1.2）。特别要注意的是，它与 **(H1)** 一起意味着 σ 保持 $\mathcal{O}$。

• 假设 **(H3)** 是一种温和的简化。事实上，我们的结果也适用于更一般的情形：$Q \cong \prod_{i=1}^{d} M_{n_i}(F_i)$（注意， n_i 可能不同！），且 σ 有多个轨道；只需应用 §4.1 中的技巧，即可轻松归约到满足 **(H3)** 的情形。

在这些假设下，我们的主要结果使我们能够将斜幂级数环$\mathcal{O}[[x;\ \sigma, \delta]]$ 实现为一种形式，从而将问题归结为研究除环 D_i 上的斜幂级数环；这是一项容易得多的任务：

定理 A. 若 $(Q, \mathcal{O}, v_Q)$ 满足假设 (H1-3)，且 F, D, v_F, ι 的定义如各项假设的陈述所示，则在 F 上存在一个斜导子 (τ, θ)，它与 v_F 相容；并且存在一个滤环同构 $\varphi\colon \mathcal{O}[[x;\ \sigma, \delta]] \to M_n(D[[y;\ \tau, \theta]])$，它扩张了 $\iota|_{\mathcal{O}}$，其中 y 是某个 $a \in \mathcal{O}^\times, t \in J(\mathcal{O})$ 对应的 $ax - t$ 的像。

注意，这个陈述是有意义的，因为若 (τ, θ) 与 v_F 相容，而 v_F 是 $J(D)$-进滤过，那么可知 τ 和 θ 保持 D，因此 (τ, θ) 限制为 D 上的相容偏导子。

由定理 A 还可得，$\mathcal{O}[[x;\ \sigma, \delta]]$ 的克鲁尔维数等于 $D[[y;\ \tau, \theta]]$ 的克鲁尔维数；采用与 [20, §3.1 和定理 3.3] 类似的方法可知，该维数为 2。

1.2 斜导子的解扭

为证明主要结果，我们首先找出乘法数据 (σ, δ) 的内在部分可从 $R[[x;\ \sigma, \delta]]$ 中去扭曲的一般条件：

记号。给定一个环 R 和一个可逆元 $a \in R^\times$，我们将用 c_a 表示 R 的内自同构，其定义为对所有 $r \in R$，$\mathsf{c}_a(r) = ara^{-1}$。此外，给定一个元素 $t \in R$，我们将用 $\mathsf{d}_{\sigma,t}$ 表示 R 的内 σ-导子，其定义为对所有 $r \in R$，$\mathsf{d}_{\sigma,t}(r) = tr - \sigma(r)t$。

设 R 是一个环，(σ, δ) 是 R 上的斜导子，并固定 $a \in R^\times$ 和 $t \in R$。在研究斜多项式环时，重新参数化环 $R[x;\ \sigma, \delta]$ 往往很有用，即用一个新的、更方便的变量 $y \in R[x;\ \sigma, \delta]$ 替换变量 x，通常取为 $y = ax$ 或 $y = x - t$。容易看出，$R[ax] = R[x - t] = R[x]$ 是 R-模，而对乘法数据的计算表明

$$(ax)r = a(\sigma(r)x + \delta(r)) = (a\sigma(r)a^{-1})(ax) + a\delta(r)$$

and

$$(x - t)r = \sigma(r)x + \delta(r) - tr = \sigma(r)(x - t) + \delta(r) - (tr - \sigma(r)t),$$

由此我们可以得出

- $R[x;\ \sigma, \delta] = R[ax;\ \mathsf{c}_a\sigma, a\delta]$,
- $R[x;\ \sigma、\ \delta] = R[x - t;\ \sigma、\ \delta - \mathsf{d}_{\sigma,\ t}]$

作为环。这种重新参数化是研究斜多项式环的有力工具，因为它实际上意味着内自同构和 σ-导子可以“解缠”，从而变得平凡。

对于滤过斜幂级数环 $R[[x;\ \sigma, \delta]]$，由于拓扑的限制，我们不再能任意重新参数化：也就是说，给定一个可能的新变量 $y \in R[[x;\ \sigma, \delta]]$，何时 $R[[x]] = R[[y]]$ 作为模成立便不再显而易见。我们的第二个主要结果给出了明确且适用范围广的充分条件。

定理 B. 设 (R, v) 是一个完备滤过环，并假设 (σ, δ) 是 R 上的相容斜导子。固定 $a \in R^\times$ 和 $t \in R$。

(i) 若 $v(a) = v(a^{-1}) = 0$，则 $R^b[[x;\ \sigma, \delta]] = R^b[[ax;\ \mathsf{c}_a\sigma, \mathsf{c}_a\delta]]$ 是滤过环。

(ii) 若 $v(t) \geq 1$，则 $R^b[[x;\ \sigma, \delta]] = R^b[[x - t;\ \sigma, \delta + \mathsf{d}_{\sigma,\ t}]]$ 是滤过环。

（此处“作为滤过环”是指它们作为环相等，且式 (2.1) 中定义的标准滤过相等：也就是说，用式 (2.1) 的记号表示，在第 (i) 部分中有 $f_{v,x} = f_{v,ax}$，在第 (ii) 部分中有 $f_{v,x} = f_{v,x-t}$。）

这在第 3 节末尾得到了证明。

1.3 理想收缩与单性

在 §5 中，我们将证明一些由主要定理推得的结果。其中第一个结果探讨以下问题： $R[[x;\ \sigma,\delta]]$ 何时是单环?

设 $R \subseteq S$ 是环。若 $I \lhd S$ 满足 $I \cap R = 0$，则称其为 R-不交的。

设 R 是单环，且 (σ,δ) 是 R 上的斜导子。我们常常希望知道在什么条件下 $R[x;\ \sigma,\delta]$ 也是单环：例如参见 [5, §3]或 [18]。这显然等价于以下说法：$R[x;\ \sigma,\delta]$ 没有非零的 R-不交理想。然而，当 $\delta = 0$ 时，由 x 生成的理想是一个非零的 R-不交理想；类似地，通过去扭曲，当 δ 是内导子时，一般也存在非零的 R-不交理想。这表明内导子在 $R[x;\ \sigma,\delta]$ 的单性中发挥着作用。

“内”的正确推广如下。以下结论等价 [12, 定理 2.6，推论 2.7]:

(i) $R[x;\ \sigma,\delta]$ 具有非零的 R-不交理想；(ii) δ 是一个准代数 σ-导子，即存在 R的一个端同态 θ 、 R的一个内θ-导子 D，以及元素 $0 \neq a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, b \in R$（对某个 $n \geq 1$），使得

$$a_n\delta^n(r) + a_{n-1}\delta^{n-1}(r) + \cdots + a_1\delta(r) = bD(r)$$

对所有 $r \in R$均成立。（事实上， n 和 θ 可以选取得满足 $\theta = \sigma^n$ [12, §2]。）

还有一些等价条件是用不变多项式和半不变多项式的语言表述的。关于这些问题的许多其他结果，以及相关历史文献的参考资料，见 [11, 12]。有关涉及 R-不交理想的条件有何用处的示例，参见 [9, 定理 3.4] 或 [4, §3] 。

定理 C. 若假设数据（$Q, \mathcal{O}, v_Q$）满足假设（H1–3） + (S)，则 $\sigma;\ \delta]]$ 没有非零的 $\mathcal{O}[x;\ \sigma,\delta]$-不交理想。因此，若 $Q[x;\ \sigma,\delta]$ 是一个单环，则 $Q \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[[x;\ \sigma,\delta]]$ 是一个单环。

1.4 一致维数

回顾一下，右R-模 M 的一致维数（也称 Goldie 维数或 Goldie 秩）定义如下。当且仅当存在一致子模 $U_1, \ldots, U_n \leq M$，它们两两交为零，且 $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \leq M$是 [17, 2的本质子模时，我们定义 udim(M_R) $= n$ 。2.9]。若 R 是一个环，我们记 r.udim(R) :=udim(R_R) 表示其（右）一致维数。

在许多重要情形下，一致维数在斜多项式扩张下保持不变。例如，Goodearl 和 Letzter 证明，若 R是素诺特环 [7, 引理 1.2], ，则 r.udim($R[x;\ \sigma,\delta]$) =r.udim(R)；Matczuk [16] 则证明，在更广泛的情形下这一等式也成立，其中包括 R 为半素右 Goldie 环的情形。

近来，Letzter 和 Wang 在论文 [14] 中开启了对斜幂级数扩张下一致维数的研究。设 $S = R[[x;\sigma]]$ 是纯自同构斜幂级数扩张（即 $\delta = 0$）：那么，若 R 是半素右诺特的，根据 [14, 定理 2.8]，有 r.udim(S) =r.udim(R)。

当然，若 (R, v) 是完备正滤环，(σ, δ) 是 R 上相容的斜导子，并且 δ 恰好是定理 A(ii) 中所述形式的内 σ-导子，即 $\delta = \mathrm{d}_{\sigma,\, t}$，其中 $t \in R$ 满足 $v(t) \geq 1$，那么由定理 A 可得 $R[[x;\ \sigma, \delta]] = R[[y;\ \sigma]]$，令 $y = x + t$ 后亦然。这使我们立即进入 [14], 的语境，从而得出在此语境下也有 r.udim$(R[[x;\ \sigma, \delta]]) =$ r.udim(R)。

现在假设满足假设（H1–3）$+$ (S)，并采用相应的记号：特别地，回顾一下 $\mathcal{O} \cong M_n(D)$。

我们仅在这些相当严格的限制下证明以下结果，但据我们所知，这是关于具有非平凡导子的斜幂级数扩张的首个此类结果；不同于上一段，它采用与 [14] 不同的方法，涵盖了某些外部 σ-导子的情形。我们希望，结合 [1, §3 中概述的滤过环局部化过程以及定理 C], ，这将推动人们进一步研究更一般的滤过斜幂级数环。在 §5.2 中，我们证明：

定理 D. 若假设数据 $(Q, \mathcal{O}, v_Q)$ 满足假设（H1-3）$+$ (S)，则 r.udim$(\mathcal{O}[[x;\ \sigma, \delta]]) =$ r.udim$(\mathcal{O})$。

2 预备知识

2.1 滤过环与离散赋值环

我们关于滤过的约定（本文中的滤过总是分离的 $\mathbb{Z}$-滤过）如下。

环 R 上的（环）滤过是一个函数 $f\colon R \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$，满足对所有 r、$s \in R$ 均有以下性质：

(i) $f(1) = 0$, (ii) $f(r + s) \geq \min\{f(r)\ f(s)\}$, (iii) $f(rs) \geq f(r) + f(s)$, (iv) $f(r) = \infty$ 当且仅当 $r = 0$。

简言之，我们称 (R, f) 为滤过环。如果 f 的取值属于 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$，则称 (R, f) 为 $\mathbb{N}$-滤过或正滤过。

定义 2.1。

1. 若 (A, f_A) 和 (B, f_B) 是滤过环，则其乘积滤过 $f := f_A \times f_B$ 在 $R = A \times B$ 上定义为 $f(a, b) = \min\{f_A(a)\ f_B(b)\}$。2. 若 (A, f) 是滤过环且 $n \geq 2$ 是一个整数，则矩阵滤过 $g := M_n(f)$ 在 $M_n(A)$ 上定义为 $g(\sum a_{ij}e_{ij}) = \min_{i,j}\{f(a_{ij})\}$，其中 $\{e_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ 是 $M_n(A)$ 的标准矩阵单位集。

2.2 半单阿廷环上的偏导子

设 R 是一个环。若 $\sigma \in \mathrm{Aut}(R)$，且 δ 是 R 的一个（左）σ-导子，则称数对 (σ, δ) 是 R 上的一个斜导子；这意味着 δ 是一个线性映射，满足 $\delta(rs) = \delta(r)s + \sigma(r)\delta(s)$，对所有 $r, s \in R$ 均成立。

以下是一些基本性质：

设 Q 是一个半单阿廷环（不带拓扑），可表示为 $Q = \prod_{i=1}^{d} A_i$ 个双边理想的乘积，其中每个 $A_i \cong M_{n_i}(F_i)$ 作为环同构于某个正整数 n_i 和除环 F_i。设 (σ, δ) 是 Q 上的一个斜导子。下面列出一些众所周知的事实。

性质 2.2.

1. 存在指标 $\{1, \dots, d\}$ 的一个置换 ρ，使得 $\sigma(A_i) = A_{\rho(i)}$ 且 $\delta(A_i) \subseteq A_i + A_{\rho(i)}$。因此，若 $\mathcal{S}$ 是 ρ 的一个轨道，令 $B := \prod_{i \in \mathcal{S}} A_i$ 且 $\sigma' = \sigma|_B, \delta' = \delta|_B$，则可得 (σ', δ') 是 B 的一个斜导子。 [3, 1.1–1.3]2. 假设 ρ 在 $\{1, \dots, d\}$ 上传递地置换。于是 $n_1 = \cdots = n_d (= n,$ 例如$)$，因此存在一个同构 $\iota\colon Q \to M_n(F_1 \times \cdots \times F_d)$。记 $F := F_1 \times \cdots \times F_d$，则可将 σ 写成 $\eta \circ M_n(\tau)^\iota$，其中 η 是 Q 的一个内自同构，而 τ 是 F 的一个自同构。 [3, 2.1–2.4] (此处及下文，$M_n(\tau)^\iota$ 表示 $\iota^{-1} M_n(\tau) \iota$。) 3. 进一步假设 η 是平凡的，因此 $\sigma = M_n(\tau)^\iota$。那么 $\delta = \varepsilon + M_n(\theta)^\iota$，其中 ε 是 Q 的一个内 σ-导子，而 θ 是 F 的一个 τ-导子。 [3, 2.5]

注 2.3. 事实上，在性质 2.2.3 的语境下，若 $d > 1$，则有更强的结论：θ 可以取为零映射，因此 δ 本身就是一个内 σ-导子 [3, 1.4]。然而，在滤过环的语境下，我们允许 θ 非零，因为这种额外的灵活性对于确保分解 $\delta = \varepsilon + M_n(\theta)^\iota$ 与滤过相容至关重要。

2.3 相容滤过与斜幂级数环

定义 2.4. 设 (R, v) 是一个滤过环，(σ, δ) 是 R 上的一个斜导子。若对所有 $0 \neq r \in R$，均有 $v(\sigma(r)) = v(r)$ 且 $v(\delta(r)) > v(r)$，则称 (σ, δ) 与 v （弱）相容。

注 2.5. 这比作者在 [10], 中使用的“相容性”概念更一般，后者可以称为强相容性。

定义 2.6. 设 (R, v) 是一个完备正滤过环，即 R 是一个带有分离离散滤过 v 的环：$R \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，并且相对于该滤过，$R$ 是完备的。
集合 $R[[x]] := \prod Rx^n$的元素是关于任意$n \geq 0 r_i \in R$的形式和，它是一个左 R-模。这是一个完备滤过 R-模，其标准滤过

$$f := f_{v,x} : R[[x]] \to \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

定义为

$$f\left(\sum_{i \geq 0} r_i x^i\right) = \inf_{i \geq 0} \{v(r_i) + i\}, \tag{2.1}$$

该滤过是分离且离散的。注意，$R[x]$ 在 $R[[x]]$中稠密。

R 上的斜导子 (σ, δ) 使 $R[x]$ 成为一个环，其乘法由规则 $xr = \sigma(r)x + \delta(r)$唯一确定。我们将此环记为 $R[x;\ \sigma, \delta]$。

若 (σ, δ) 与 v 相容，则它以相同方式在 $R[[x]]$ 上诱导出良定义的结合乘法：见 [10,命题 1.17] （参见 [19, 引理 2.1] 或 [13, §3.4]），我们将此环记为 $R[[x;\ \sigma, \delta]]$。如上所定义的函数 f 在 $R[[x;\ \sigma, \delta]]$ 上是正环滤过，并且 $R[[x;\ \sigma, \delta]]$ 关于 f 是完备的。

2.4 离散赋值环

定义 2.7。遵循 Ardakov [1], ，我们将离散赋值环定义为具有如下性质的诺特整环 D ：对于每个非零 $x \in Q$（D，即商除环），要么有 $x \in D$ ，要么有 $x^{-1} \in D$。

我们首先证明， D 具有与交换离散赋值环非常相似的性质。

引理 2.8. 设 D 是一个离散赋值环。

(i) D 是一个局部环。(ii) D 的所有右（分别为左）理想都是主理想。(iii) D 的右（分别为左）理想构成的格是全序的。(iv) D 的所有右（分别为左）理想都是双边理想。

证明. 用 [15]的语言来说， D 是斜域 $Q(D)$ 的一个诺特全序子环，结论 (i–iii) 由 [15, 命题 1.2. 15] 得出。
下文中 (iv) 的证明改编自 [2, 引理 1]。我们给出右理想的证明；左理想的证明当然类似。

假设 D 存在不是双边理想的右理想，并令 J 为此类右理想中的极大者。由 (ii)， $J = aD$ 对某个 $a \in D$成立；于是，对某个 $r \in D$，有 $ra =: b \notin aD$ ，根据假设。由 (iii)，这意味着 $aD \subsetneq bD$, ，因此对某个 $s \in D$有 $a = bs$ 。结合这两个等式可知， $b = rbs$。

现在，由 J的极大性可知 $Db \subseteq DbD = bD$，因此对某个 $t \in D$有 $rb = bt$ 。特别地， $b = bts$，所以 $b(1 - ts) = 0$。但是 b 不可能为零；由于 D 是一个整环，我们必有 $ts = 1$，因而（因为诺特环是戴德金有限的） $st = 1$。由此可得$at = b$，这与 $b \notin aD$的假设矛盾。 □

命题 2.9. 设 D 是一个离散赋值环。

(i) $J(D) = \pi D$ ，其中 π 是某个正规元。(ii) D 的每个非零理想都具有 $\pi^n D$ 的形式，其中 $n \in \mathbb{N}$ 是某个元素。

证明。(i) 是引理 2.8 的直接推论。

为证明 (ii)：注意到引理 2.8(iv) 还蕴含 D 是一个 FBN环 [17, 6.4.7], ，因此由 [8, 定理 9.13] 可得 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \pi^n D = 0$ 。现在我们完全按照交换情形进行论证：事实上，由引理 2.8(iii)，非零理想 aD 必须满足 $\pi^{n+1} D \subsetneq aD \subseteq \pi^n D$ ，其中 n 是某个元素；由此可得，对于某个 $u \in D \setminus \pi D$，有 $a = \pi^n u$ ，而它必定是一个单位，因为引理 2.8(i) 如此断定。 □

上述命题中的元素 π as 将称为 D的一致化元。

下文中， D 仍表示一个完备离散赋值环，并且我们还设 $F = Q(D)$、 $\mathcal{O} = M_n(D)$ 和 $Q = M_n(F)$。另记 v_F 为 F 上由 $J(D)$ 诱导的进滤过，并假设 (τ, θ) 是 F 上与 v_F 相容的斜导子；同样，记 v_Q 为 Q 上的 $J(\mathcal{O})$-进滤过，并假设 (σ, δ) 是 Q 上与 v_Q 相容的斜导子。这样我们基本上处于假设（H1–3） + (S) 的情形。以下结论不难验证。

推论 2.10。

(i) 设 $\mathcal{S}$ 是 D 中由 π 生成的乘法封闭集。则 $F = \mathcal{S}^{-1}D = D\mathcal{S}^{-1}$。此外， π 在 $D[[y$ 中是正规子群；τ、$\theta]]$ 和 $F\otimes_D D[[y;\ \tau、\ \theta]] = \mathcal{S}^{-1}D[[y;\ \tau、\ \theta]] = D[[y;\ \tau、\ \theta]]\mathcal{S}^{-1}$。(ii) 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{O}$ 中由 π 生成的乘法封闭集（其中，我们将 D 与其在 $\mathcal{O}$ 中的对角嵌入等同）。则 $Q = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}\mathcal{S}^{-1}$。此外， π 在$\mathcal{O}[[x$ 中是正规子群；σ、$\delta]]$ 和 $Q\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}[[x;\ \sigma、\ \delta]] = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{O}[[x;\ \sigma、\ \delta]] = \mathcal{O}[[x;\ \sigma、\ \delta]]\mathcal{S}^{-1}$。

□

3 重新参数化滤过斜导子

在本节中，设 (R, v) 是一个完备正滤过环。还假设 R 具有一个与 v 相容的斜导子 (σ, δ)，并取 $y \in R[x]$ ，使得 $R[x] = R[y]$ （左 R-模的等式）。

给定一个元素 $\sum_{i=0}^{m} r_i y^i \in R[y]$，我们可以定义函数

$$f_{v,y} : \sum_{i=0}^{m} r_i y^i \mapsto \inf_{i\geq 0}\{v(r_i) + i\}.$$

注意，$f_{v,x}$ 是 (2.1) 中定义的标准环滤过。相比之下，对于任意元素 $y \in R[x]$，函数 $f_{v,y}$ 不一定是环滤过；即使它是环滤过，通常也不等价于 $f_{v,x}$。

例 3.1。取 $y := x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$，并令 v 为 $\mathbb{Z}_p$ 上的 p-进赋值。则对所有 n，有 $f_{v,x}((x+1)^n) = 0$，但 $f_{v,y}((x+1)^n) = n$。特别地， $\mathbb{Z}_p[x] = \mathbb{Z}_p[y]$，但 $\mathbb{Z}_p[[x]] \neq \mathbb{Z}_p[[y]]$。
在本节中，我们确定两族元素 $y \in R[x]$ ，使得 $f_{v、\ x}$ 和 $f_{v、\ y}$ 作为函数相等。

3.1 相同滤过的条件

沿用上述记号，我们首先证明，当 $y = x - t$ 对某个满足 $v(t) \geq 1$ 的 $t \in R$ 成立时，$f_{v、\ x}$ 和 $f_{v、\ y}$ 相等。
对所有 n，写作 $(x - t)^n = x^n + \beta_{n、\ 1}x^{n-1} + \cdots + \beta_{n、\ n-1}x + \beta_{n、\ n}$。

引理 3.2. 对所有 n、i，我们有 $v(\beta_{n、\ i}) \geq i$。

证明。首先，注意到 $(x - t)\beta_{n、\ i}x^{n-i} = \sigma(\beta_{n、\ i})x^{n+1-i} + (\delta(\beta_{n、\ i}) - t\beta_{n、\ i})x^{n-i}$，因此（为方便记号，记 $\beta_{n、\ 0} := 1$），我们可以将 $(x - t)^{n+1}$ 计算为

$$\begin{aligned}(x-t)\left(\sum_{i=0}^{n}\beta_{n,i}x^{n-i}\right) &= \sum_{i=0}^{n}\sigma(\beta_{n,i})x^{n+1-i} + \sum_{j=0}^{n}(\delta(\beta_{n,j}) - t(\beta_{n,j}))x^{n-j}\\ &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(\sigma(\beta_{n,i}) + \delta(\beta_{n,i-1}) - t\beta_{n,i-1})x^{n+1-i} + (\delta(\beta_{n,n}) - t\beta_{n,n}),\end{aligned}$$

在第二个求和中令 $j = i + 1$。也就是说，

$$\begin{cases}\beta_{n+1,0} = 1,\\ \beta_{n+1,i} = \sigma(\beta_{n,i}) + \delta(\beta_{n,i-1}) - t\beta_{n,i-1} \quad (1 \leq i \leq n),\\ \beta_{n+1,n+1} = \delta(\beta_{n,n}) - t\beta_{n,n},\end{cases}$$

由此，通过对 n 使用归纳法即可得出该结论。 □

引理 3.3. 设 $p(x) \in R[x]$ 是一个多项式，且 $t \in R$ 满足 $v(t) \geq 1$。则$f_{v,x}(p(x-t)) \geq f_{v,x}(p(x))$。

证明。记 $p(x) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_m x^m$。则

$$\begin{aligned} p(x-t) = \sum_{n=0}^{m} r_n (x-t)^n &= \sum_{n=0}^{m} r_n \left(\sum_{i=0}^{n} \beta_{n,i} x^{n-i} \right) && \text{setting } \beta_{n,0} := 1 \\ &= \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{n=j}^{m} r_n \beta_{n,n-j} \right) x^j && \text{where } j := n-i, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f_{v,x}(p(x-t)) &= f_{v,x} \left(\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{n=j}^{m} r_n \beta_{n,n-j} \right) x^j \right) \\ &= \inf_{0 \leq j \leq m} \left\{ v \left(\sum_{n=j}^{m} r_n \beta_{n,n-j} \right) + j \right\} \\ &\geq \inf_{0 \leq j \leq m} \inf_{j \leq n \leq m} \{ v(r_n) + v(\beta_{n,n-j}) + j \} && \text{由于 } v \text{ 是一个滤过} \\ &\geq \inf_{0 \leq j \leq m} \inf_{j \leq n \leq m} \{ v(r_n) + n \} && \text{by Lemma 3.2} \\ &= \inf_{0 \leq n \leq m} \{ v(r_n) + n \} \\ &= f_{v,x} \left(\sum_{n=0}^{m} r_n x^n \right) = f_{v,x}(p(x)). \end{aligned}$$

□

命题 3.4。设 $t \in R$ 使得 $v(t) \geq 1$。则 $f_{v,\ x} = f_{v,\ x-t}$。

证明。任取元素 $p(x) \in R[x]$。则

$$\begin{aligned} f_{v,x}(p(x)) &\leq f_{v,x}(p(x+t)) && \text{applying Lemma 3.3 to } -t \\ &= f_{v,x-t}(p(x)) && \text{changing variables } x \mapsto x-t \text{ throughout} \\ &\leq f_{v,x-t}(p(x-t)) && \text{applying Lemma 3.3 to } t \\ &= f_{v,x}(p(x)) && \text{changing variables } x \mapsto x+t \text{ throughout,} \end{aligned}$$

由此可得 $f_{v,\ x}(p(x)) = f_{v,\ x-t}(p(x))$。 □

接下来，我们证明当 $y = ax$ 时，$f_{v,x}$ 和 $f_{v,y}$ 相等，其中 $a \in R^\times$ 且 $v(a) = v(a^{-1}) = 0$。令 $(ax)^n = \gamma_{n,0} x^n + \gamma_{n,1} x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n,n-1} x + \gamma_{n,n}$。

引理 3.5. $v(\gamma_{n,i}) \geq i$。

证明。与引理 3.2 中一样，计算 $(ax)^{n+1} = ax(\gamma_{n,0} x^n + \gamma_{n,1} x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n,n-1} x + \gamma_{n,n})$ 得到

$$\begin{cases} \gamma_{n+1,0} = a\sigma(\gamma_{n,0}), \\ \gamma_{n+1,i} = a\sigma(\gamma_{n,i}) + a\delta(\gamma_{n,i-1}) \quad (1 \leq i \leq n), \\ \gamma_{n+1,n+1} = a\delta(\gamma_{n,n}), \end{cases}$$

并且我们可以像引理 3.2 中那样进行归纳法。 □

引理 3.6. $f_{v,x}(p(ax)) \geq f_{v,x}(p(x))$.

证明。

$$\begin{aligned} p(ax) = \sum_{n=0}^{m} r_n (ax)^n &= \sum_{n=0}^{m} r_n \left(\sum_{i=0}^{n} \gamma_{n,i} x^{n-i} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{n=j}^{m} r_n \gamma_{n,n-j} \right) x^j \qquad \text{where } j := n-i, \end{aligned}$$

因此

$$f_{v,x}(p(ax)) = f_{v,x} \left(\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{n=j}^{m} r_n \gamma_{n,n-j} \right) x^j \right),$$

证明过程现在与引理 3.3 的证明完全相同。 □

命题 3.7。$f_{v,\ x} = f_{v,\ ax}$。

证明。任取一个元素 $p(x) \in R[x]$。于是

$$\begin{aligned} f_{v,x}(p(x)) &\leq f_{v,x}(p(a^{-1}x)) && \text{applying Lemma 3.6 to } a^{-1} \\ &= f_{v,ax}(p(x)) && \text{changing variables } x \mapsto ax \text{ throughout} \\ &\leq f_{v,ax}(p(ax)) && \text{applying Lemma 3.6 to } a \\ &= f_{v,x}(p(x)) && \text{changing variables } x \mapsto a^{-1}x \text{ throughout,} \end{aligned}$$

由此可得 $f_{v,\ x}(p(x)) = f_{v,\ ax}(p(x))$。 □

最后，我们固定任意一个 $y \in R[x]$，使得 $R[x] = R[y]$ 和 $f_{v,\ x} = f_{v,\ y}$。将这个共同的滤过记为 f。于是：

定理 3.8. $R[[x]] = R[[y]]$ 作为滤过左 R-模。

定理 B 的证明。在情形 (i) 中，令 $y = ax$，于是根据命题 3.7，$f := f_{v,\ x} = f_{v,\ y}$；在情形 (ii) 中，令 $y = x - t$，并使用命题 3.4。两种情形下，$R[x] = R[y]$。现在，定理 3.8 蕴含 $R[[y]]$ 和 $R[[x]]$ 可视为滤过模，而乘法数据已在 §1.2 中计算，因此结论成立。 □

4 半单阿廷环上的斜导子

4.1 归约到轨道

目前，我们不假设任何假设（H1–3），并令 (R, v) 为任意滤过环，使得 R（作为未滤环）存在分解 $R \cong B \times C$。

我们将滥用记号，将 $R = B \times C$（视为未滤环）。我们还将 B（分别地，C）记作 R 的理想 $B \times 0$（分别地，$0 \times C$），因此存在包含映射 $j_B \colon B \to R$ 和 $j_C \colon C \to R$，以及投影映射 $\pi_B \colon R \to B$ 和 $\pi_C \colon R \to C$。

进一步假设，R 上的滤过是完备且正的，并且 R 承认一个斜导子 (σ, δ)，该斜导子在 B 和 C 上的限制分别为斜导子。（也就是说，令 $\sigma_B = \pi_B \sigma j_B$ 和 $\delta_B = \pi_B \delta j_B$，则 (σ_B, δ_B) 是 B 上的斜导子，C 上也同样如此。）

分别用 v_B 和 v_C 表示 v 在 B 和 C 上的限制。一般而言，即使 (σ, δ) 与 v相容，也未必有 (σ_B, δ_B) 与 v_B相容，因此我们必须将讨论限制在分解 $R \cong B \times C$ 与滤过 v 相互作用良好的情形。下面的引理可由乘积滤过的定义直接推出，参见定义 2.1。

引理 4.1. 若 $v = v_B \times v_C$，则 (σ_B, δ_B) 与 v_B 相容，且 (σ_C, δ_C) 与 v_C 相容。 □

因此，在假设 $v = v_B \times v_C$ 的条件下，我们可以定义滤过环

- $B[[x_B; \sigma_B, \delta_B]]$，带有滤过 f_B，满足 $f_B|_B = v_B$和 $f_B(x_B) = 1$,
- $C[[x_C; \sigma_C, \delta_C]]$，带有滤过 f_C，满足 $f_C|_C = v_C$和 $f_C(x_C) = 1$,

如 (2.1) 所示。

命题 4.2. 假设 $v = v_B \times v_C$。则存在一个滤环同构φ: $R[[x; \sigma, \delta]] \to B[[x_B; \sigma_B, \delta_B]] \times C[[x_C; \sigma_C, \delta_C]]$。

证明。容易验证映射

$$\varphi : R[[x; \sigma, \delta]] \to B[[x_B; \sigma_B, \delta_B]] \times C[[x_C; \sigma_C, \delta_C]]$$
$$\sum_{i \geq 0} r_i x^i \mapsto \left(\sum_{i \geq 0} \pi_B(r_i) x_B^i, \sum_{i \geq 0} \pi_C(r_i) x_C^i \right)$$

and

$$\theta\colon\ B[[x_B; \sigma_B, \delta_B]] \times C[[x_C; \sigma_C, \delta_C]] \to R[[x; \sigma, \delta]]$$
$$\left(\sum_{i \geq 0} b_i x_B^i, \sum_{i \geq 0} c_i x_C^i \right) \mapsto \sum_{i \geq 0} (j_B(b_i), j_C(c_i)) x^i$$

是所需的互逆滤过同构。 □

设 Q' 是一个任意的半单阿廷滤过环，它允许一个斜导子 (σ, δ)，并将 Q' 的极小非零理想记为 $A_1, \ldots, A_e$，使得 $Q' = \prod_{i=1}^{e} A_i$。若 A_i 分属多个 σ-轨道，则按照性质 2.2.1，将由 σ 在集合 $\{A_1, \ldots, A_e\}$ 上诱导的指标集 $\{1, \ldots, e\}$ 的置换记为 ρ。设 $\mathcal{S}$ 是 ρ 的若干个轨道的并，并设（为避免平凡情形） $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 均非空。现在令 $B' = \prod_{i \in \mathcal{S}} A_i$ 和 $C' = \prod_{i \in \mathcal{S}'} A_i$: 由性质 2.2.1 可知，$(\sigma_{B'}, \delta_{B'})$ 限制为 B' 上的斜导子， C' 上的情形亦然。

现在假设每个 $A_i \cong M_{n_i}(F_i)$，其中 $n_i \geq 1$ 是某个正整数，且 F_i 是完备离散赋值环 D_i的戈尔迪商环。令 $\mathcal{O}_i$ 为 A_i 中 $M_{n_i}(D_i)$的原像，因此 $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_e$ 是 Q'中的极大序。此外，若 $j = \rho(i)$，则 $A_j = \sigma(A_i)$，故 $M_{n_i}(F_i) \cong M_{n_j}(F_j)$，这意味着 $n_i = n_j$和 $F_i \cong F_j$。

假设这些环都赋有其自然滤过：也就是说，

- 每个 D_i 都保留其离散赋值，而 F_i 继承 $J(D_i)$-进赋值（见 §2.4），
- $M_{n_i}(D_i)$ 和 $M_{n_i}(F_i)$赋有相应的矩阵滤过（见定义 2.1.2），
- $\mathcal{O}_i$和 A_i在上述同构下分别继承自 $M_{n_i}(D_i)$ 和 $M_{n_i}(F_i)$ 的滤过，并且

- $\mathcal{O}'$ 和 Q' 分别赋予来自 $\mathcal{O}_i$ 和 A_i的乘积滤过（见定义 2.1.1）。

那么，如上所定义的 $\mathcal{O}'$、B' 和 C' 将满足命题 4.2 的假设。此外，若将 $\mathcal{S}$ 取为 ρ 的一个单独轨道，且其包含 $|\mathcal{S}| = d$，那么（重新编号使得 $\mathcal{S} = \{1, \dots, d\}$，并记作 $n = n_1 = \cdots = n_d$ 之后）如上所定义的环 $\mathcal{O} := \mathcal{O}' \cap B'$、其戈尔迪商环 $Q := B'$ 等等，都将满足假设（H1–3）。

4.2 解开内自同构

在本小节中，我们采用假设（H1–3）的全部条件，并沿用其中的记号。

不失一般性，如有必要，可重新排列 A_i，然后令 $\sigma(A_i) = A_{i+1}$，其中 $1 \le i \le d-1$，且 $\sigma(A_d) = A_1$。

现在可以应用性质 2.2.2。特别地，存在一个分解 $\sigma = \eta \circ M_n(\tau)^\iota$，其中 η 是 Q 的一个内自同构，例如对某个 $a \in Q^\times$，有 $\eta = \mathsf{c}_a$，而 τ 是 F 的一个自同构。

引理 4.3. η 和 $M_n(\tau)^\iota$ 都保持 $\mathcal{O}$。

证明。由于 η 是 Q的内自同构，它会保持每个 A_i。但 $\sigma(A_i) = A_{i+1}$（指标按模 d理解），所以 $M_n(\tau)^\iota$ 必将 A_i 映到 A_{i+1}，因此 τ 将F_i 映到 F_{i+1}。然而，由于 σ 和 η 连续，可知 τ 连续，因此$D_{i+1} = \mathcal{O}_{i+1} \cap F_{i+1} = \tau(D_i)$，于是 $M_n(\tau)^\iota$保持 $\mathcal{O}$。由此可知，$\eta = \sigma \circ M_n(\tau^{-1})^\iota$保持 $\mathcal{O}$。 □

本小节的目标是通过作变量替换 $x \mapsto x'$来“解开” η，即求一个元素 $x' \in \mathcal{O}[[x;\, \sigma, \delta]]$ 使得

$$\mathcal{O}[[x; \sigma, \delta]] = \mathcal{O}[[x'; M_n(\tau)^\iota, \delta']].$$

根据定理 B(i)，只需证明 $v(a) = v(a^{-1}) = 0$：这将推出 $a, a^{-1} \in \mathcal{O}$，于是我们可以令 $x' = a^{-1}x$，得到 §1.2 中的 $\delta' = a^{-1}\delta$。

当然，一般而言，a 不一定具有这一性质：例如，如果 $\mathcal{O}$ 是一个完备离散赋值环，且其中心一致化元为 π，那么对所有 $r \in \mathbb{Z}$，都有 $\mathsf{c}_a = \mathsf{c}_{\pi^r a}$，而 $v(\pi^r a)$通常不为零。令人惊讶的是，这种朴素的障碍是唯一会出现的障碍。

命题 4.4. 存在一个元素 $b \in Q^\times$、Q的一个内自同构 $\eta' = \mathsf{c}_b$，以及 F的一个自同构 τ'，使得 $\sigma = \eta' \circ M_n(\tau')^\iota$且 $v(b) = v(b^{-1}) = 0$。

证明。设 $a = (a_1, \dots, a_d) \in Q^\times$：那么，由引理 4.3 可知，对每个$i$，都有 $a_i \mathcal{O}_i a_i^{-1} = \mathcal{O}_i$。令 $k_i = v(a_i)$，即 $a_i \in J(\mathcal{O}_i)^{k_i} \setminus J(\mathcal{O}_i)^{k_i+1}$。因此，若 π_j是 D_j的一个一致化元，I_j是 $M_n(D_j)$的单位矩阵，且 $\tilde{\pi}_j := \iota^{-1}(\pi_j I_j)$，那么对某个 $b_j \in \mathcal{O}_j$，有 $a_j = b_j \tilde{\pi}_j^{k_j}$，其中$v(b_j) = 0$。设 $b = (b_1, \dots, b_d)$，于是 $v(b) = 0$。

由推论 2.10(ii)，$\tilde{\pi}_j$ 在 $\mathcal{O}_j$中是正规元，因此右理想 $b_j\mathcal{O}_j$ 实际上是一个双边理想。此外，由命题 2.9(ii)和 Morita 等价可知，由于理想 $b_j\mathcal{O}_j$ 包含值为 0 的元素b_j，它必定等于 $\mathcal{O}_j$。因此，b_j 是 $\mathcal{O}_j$中的一个单位，并且我们有 $v(b_j) = v(b_j^{-1}) = 0$。

现在对所有 $r \in Q$ 令 $\eta'(r) = brb^{-1}$，并令 $\tau'(s) = \Pi\tau(s)\Pi^{-1}$，其中 $\Pi = (\pi_1^{k_1} I_1, \dots, \pi_d^{k_d} I_d)$。结论现在可由简单计算得出。 □

4.3 内部 σ-导子的去扭曲

在本小节中，令 (R, f) 为任意一个允许相容斜导子的 $\mathbb{Z}$-滤过环，其中斜导子为 (σ, δ)，并将 R 的 f 级集记为 F_nR，其中 $n \in \mathbb{Z}$。此外，我们还假设

- 对于某个环 A，有 $R = M_n(A)$
- 对于 A 上的某个滤过 g，有 $f = M_n(g)$
- 对于 A 的某个自同构 τ，有 $\sigma = M_n(\tau)$，并且
- $\delta = M_n(\theta) + \varepsilon$，其中 θ 是 A 的一个 τ-导子，而 ε 是 R 的一个内部 σ-导子，即 $\varepsilon = \mathsf{d}_{\sigma,\, u}$ 其中存在某个 $u \in R$。

（参见性质 2.2.3。）我们将 R 中标准的矩阵单位集合记作 $\{e_{ij}\}_{1 \le i,\, j \le n}$。

本小节的目标是通过变量替换 $x \mapsto x'$ 来“解扭” ε，也就是说，找出一个元素 $x' \in R[[x;\ M_n(\tau)\ \delta]]$，使得

$$R_{\ge 0}[[x; M_n(\tau), \delta]] = R_{\ge 0}[[x'; M_n(\tau), M_n(\theta)]]$$

其中，显然 $R_{\ge 0}$ 是 R 的正过滤子环。与前面一样，若有 $f(u) \ge 1$，则由定理 B(ii) 可知结论成立。不过这也难以期待，尽管这次原因不那么显而易见：例如，若 A 是一个完备离散赋值环（其一致化元为 π）的分式除环，则对所有 $r \in \mathbb{Z}$，都有 $M_n(\theta) + \mathsf{d}_{M_n(\tau)\, u} = M_n(\theta + \mathsf{d}_{\tau,\ \pi^r}) + \mathsf{d}_{M_n(\tau)\, u - \pi^r I}$，而 $v(u - \pi^r I)$ 可能小于 1。不过，在温和条件下，这仍然是唯一会出现的障碍。

命题 4.5。在上述设定下，存在一个元素 $u' \in R$、一个 τ-导子 θ' of A，以及一个 σ-内导子 $\varepsilon' = \mathsf{inn}(u')$ of R，使得 $\delta = M_n(\theta') + \varepsilon'$ 且 $f(u') \ge 1$。

证明。将 $u = \sum_{i,j} u_{ij} e_{ij}$ 写成具有某些系数 $u_{ij} \in A$ 的形式。令 $1 \le p$、$q \le n$ 为任意元素，并考虑矩阵单位 $e_{pq} \in R$。根据假设，$\delta(e_{pq}) \in F_1R$，因此

$$\varepsilon(e_{pq}) \equiv -M_n(\theta)(e_{pq}) \mod F_1R. \tag{4.1}$$

不过，我们可以将这个同余式 (4.1) 的左端显式计算为

$$\varepsilon(e_{pq}) = \sum_{i,j} (u_{ij} e_{ij} e_{pq} - e_{pq} u_{ij} e_{ij}) = \sum_i u_{ip} e_{iq} - \sum_j u_{qj} e_{pj},$$

而 (4.1) 的右端恰为 $-\theta(1_A) e_{pq}$，其值为零。因此，我们可以将 (4.1) 改写为 $\sum_i u_{ip} e_{iq} - \sum_j u_{qj} e_{pj} \equiv 0$ 模 F_1R，并令对应的元素相等，从而得到

$$\begin{cases} u_{ip} \in F_1A & i \ne p \\ u_{qj} \in F_1A & j \ne q \\ u_{pp} - u_{qq} \in F_1A, & \end{cases}$$

因此，由于 p 和 q 是任意的，我们得到 $u \equiv u_{11} 1_R$ 模 F_1R。

现在令 $u' := u - u_{11} 1_R$，并定义 $\theta'(a) := \theta(a) + u_{11} a - \tau(a) u_{11}$ 以及 $\varepsilon' := \mathsf{d}_{M_n(\tau)\, u'}$，证毕。 □

结论：在这种情况下，利用定理 B(i)，我们可以转化为 $\delta = M_n(\theta)$ 的情形。

定理 A 的证明。首先，命题 4.4 表明，存在某个 $\tau \in \mathsf{Aut}(F)$ 以及某个 $b \in Q^\times$ 满足 $v(b) = v(b^{-1}) = 0$，使得 $\sigma = \mathsf{c}_b \circ M_n(\tau)^\iota$，并且二者都保持 $\mathcal{O}$

由与引理 4.3 相同的论证可知。因此，根据定理 B(i)，我们可以设 $x' = b^{-1}x$ 以得到$\mathcal{O}[[x;\ \sigma, \delta]] = \mathcal{O}[[x';\ M_n(\tau)^\iota, \delta']]$，对于 $M_n(\tau)^\iota$-导子 $\delta' := b^{-1}\delta$。

其次，命题 4.5 表明，存在某个 τ-导子 θ of F 以及某个 $u \in Q$，满足 $v(u) \geq 1$，使得 $\delta' = M_n(\theta)^\iota + \mathrm{d}_{M_n(\tau)^\iota,\ u}$。因此，根据定理 B(ii)，我们可以令$x'' = x' - u$，从而得到 $\mathcal{O}[[x';\ M_n(\tau)^\iota, \delta']] = \mathcal{O}[[x'';\ M_n(\tau)^\iota,\ M_n(\theta)^\iota]]$。

最后，这些映射

$$\begin{aligned} \mathcal{O}[[x''; M_n(\tau)^\iota, M_n(\theta)^\iota]] &\to M_n(D)[[y; M_n(\tau), M_n(\theta)]] \\ \sum_{i\geq 0} q_i (x'')^i &\mapsto \sum_{i\geq 0} \iota(q_i) y^i \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_n(D)[[y; M_n(\tau), M_n(\theta)]] &\to M_n(D[[z; \tau, \theta]]) \\ \sum_{i\geq 0} \left(\sum_{j,k=1}^{n} c_{ijk} e_{jk} \right) y^i &\mapsto \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_{i\geq 0} c_{ijk} z^i \right) e_{jk} \end{aligned}$$

现在可以验证为滤过环同构，且 $v_{\mathcal{O}} = M_n(v_D) \circ \iota$。 □

5 应用

在整个 本节中，我们假设我们的数据 $(Q, \mathcal{O}, v_Q)$ 满足假设（H1–3）+(S).

5.1 多项式元素

定义 5.1. $R[[x]]$（分别为 $R[[x;\ \sigma, \delta]]$）的多项式元素是 $R[x]$（分别为 $R[x;\ \sigma, \delta]$）中的一个元素。

我们首先回顾魏尔斯特拉斯预备定理对斜幂级数环的以下重要推广，该推广本质上归功于 Venjakob。

定理 5.2. $D[[y;\ \tau, \theta]]$ 中的每个非零右理想都含有一个非零多项式元素。

证明. 令 v 为 $J(D)$-进滤过，π 为 D的一致化元。由推论 2.10(i)，每个非零元素 $r \in D[[y; \tau, \theta]]$ 均可写为 $r = (s_0 + s_1 y + s_2 y^2 + \ldots)\pi^m$，其中所有 $s_i \in D$，且 $\inf_{i\geq 0}\{v(s_i)\} = 0$。因此，$s = s_0 + s_1 y + s_2 y^2 + \ldots$ 满足 [19, 定理 3.1], 的假设，故 {19}推论 3.2]的右侧版本表明，s 可唯一表示为 $s = Pu$，其中 $u \in D[[y;\ \tau, \theta]]^\times$ 且 $P \in D[y;\ \tau, \theta]$。

特别地，若 A 是 $D[[y;\ \tau, \theta]]$ 的非零右理想，那么对于任意非零的 $r \in A$，我们都可以像上面那样将其写成 $r = Pu\pi^m$。由于 π 在 $D[[y;\ \tau, \theta]]$ 中是正规元，根据推论 2.10(i)，它就是某个单位 $u' \in D[[y;\ \tau, \theta]]$ 的 $r = P\pi^m u'$，因此多项式元素 $P\pi^m$ 也是 A 的一个元素。 □

备注。推论 2.10(i) 还推出了关于 $F \otimes_D D[[y;\ \tau, \theta]]$ 的类似结果。

推论 5.3。 $\mathcal{O}[[x;\ \sigma, \delta]]$ 的每个非零（双边）理想都包含一个非零多项式元素。

证明。定理 A 告诉我们，存在一个同构 $\varphi\colon \mathcal{O}[[x;\ \sigma,\delta]] \to M_n(D[[y;\ \tau,\theta]])$，它扩张了 ι，且满足 $y = \varphi(ax - t)$。特别地，若 $P \in D[[y;\ \tau,\theta]]$ 是变量 y 的多项式，则 $\varphi^{-1}(PI)$（其中 I 是单位矩阵）是变量 x 的多项式。由定理 5.2 和 Morita 等价，即可得到结论。 □

定理 C 的证明。第一个结论只是重述推论 5.3。

对于第二个结论，取 I的一个非零理想 $Q \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[[x;\ \sigma,\delta]]$。那么， $J := I \cap \mathcal{O}[[x;\ \sigma,\delta]]$显然是 $\mathcal{O}[[x;\ \sigma,\delta]]$的一个理想。根据推论 2.10(ii)，将 I中的任意非零元乘以正则元 π 的适当次幂，就能得到 J中的一个元素，因此 $J \neq 0$。

因此，根据第一个结论，我们知道 $J \cap \mathcal{O}[x;\ \sigma,\delta] \neq 0$，于是 $I \cap Q[x;\ \sigma,\delta] \neq 0$。但是，由于我们假设 $Q[x;\ \sigma,\delta]$ 是单的，必然有 $I \cap Q[x;\ \sigma,\delta] = Q[x;\ \sigma,\delta]$。特别地， $1 \in I$，因此 $I = Q \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[[x;\ \sigma,\delta]]$。 □

5.2 一致维数

本小节继续探讨 [14] 关于斜幂级数环的一致维数（Goldie 秩）的研究。正如我们在引言中所述，当导子是内导子时，定理 B 有时使我们能够直接归结到 [14] 的结果。不过，在假设（H1–3） + (S) 这一特殊情形下，我们现在可以证明关于 $\mathcal{O}$ 上的斜幂级数环的类似结果，其中导子可以是任意的。

定理 D 的证明。由定理 A 可知 $\mathcal{O}[[x;\ \sigma,\delta]] \cong M_n(D[[y;\ \tau,\theta]])$，其中 (τ,θ) 是某个适当的斜导子，因此 r.udim($\mathcal{O}[[x;\ \sigma,\delta]]$) $= n$(r.udim($D[[y;\ \tau,\theta]]$)) [17,例 2.11(iii)]。同理，r.udim($\mathcal{O}$) $= n$(r.udim(D))，当然，r.udim(D) $= 1$，因为 D 是一个诺特整环 [17, 例 2.11(i)]。

还需证明 r.udim($D[[y;\ \tau,\theta]]$) $= 1$。因此，设 U是 $D[[y;\ \tau,\theta]]$的一个一致右理想，并设 I 是任意一个非零右理想。由定理 5.2， $U \cap D[y;\ \tau,\theta] \neq 0$和$I \cap D[y;\ \tau,\theta] \neq 0$，因此，由于 $D[y;\ \tau,\theta]$ 是素环，根据定理 1.2.9(iii)]，，它们的交集（$U \cap I$）$\cap D[y;\ \tau,\theta]$ 也非零。特别地，这表明 U是 $D[[y;\ \tau,\theta]]$的一个本质右理想，因此 r.udim($D[[y;\ \tau,\theta]]$) $= 1$。 □

参考文献

[1]K. Ardakov. 幂零 Iwasawa 代数中的素理想。《数学新进展》，190(2):439–503，2012年。[2] H.-H. Brungs. 广义离散赋值环。《加拿大数学杂志》，21:1404–1408，1969年。[3] G. Cauchon 和 J.C. Robson. 端同态、导子与多项式环。《代数杂志》，53:227–238，1978年。[4] E. Cisneros、M. Ferrero 和 M. I. Gonz´alez. 斜多项式环与斜劳伦多项式环的素理想。《冈山大学数学杂志》，32:61–72，1990年。[5] John Cozzens 和 Carl Faith. 单诺特环。剑桥大学出版社，2008年。[6] K. R. Goodearl. 斜多项式环与量子化魏尔代数中的素理想。《代数杂志》，150:324–377，1992年。[7] K. R. Goodearl 和 E. S. Letzter. 量子矩阵的坐标环的素因子代数。《美国数学会会刊》，121(4):1017–1025，1994年。

[8] K. R. Goodearl 和 R. B. Warfield, Jr. 《非交换诺特环导论》。剑桥大学出版社，2004年。[9] Ronald S. Irving. 交换环上 Ore 扩张的素理想，II。《代数杂志》，58:399–423，1979年。[10] Adam Jones 和 William Woods. 素基环上的斜幂级数环（预印本）。https://arxiv.org/abs/2112.10242.[11] T. Y. Lam、K. H. Leung、A. Leroy 和 J. Matczuk. 不变与半不变多项式环。载于 L. Rowen（编），《环论》，第247–261页。魏茨曼科学出版社，1989年。[12] Andr´e Leroy 和 Jerzy Matczuk. Ore 扩张的扩张中心与 X-内自同构。《代数杂志》，145:143–177，1992年。[13] Edward S. Letzter. 诺特斜幂级数环的素理想。《以色列数学杂志》，192:67–81，2012年。[14] Edward S. Letzter 和 Linhong Wang. 自同构型斜幂级数环的 Goldie 秩。arXiv:0812.2010v3，2011年。[15] Hidetoshi Marubayashi 和 Freddy van Oystaeyen. 《素除子与非交换赋值理论》。《数学讲义》，2059。施普林格，2012年。[16] Jerzy Matczuk. Ore 扩张的 Goldie 秩。《通讯代数》，23(4):1455–1471，1995年。[17] J.C. McConnell 和 J.C. Robson. 《非交换诺特环》。美国数学会，2001年。.[18] Johan Oinert、Johan Richter 和 Sergei D. Silvestrov. 极大交换子环与 Ore 扩张的单性。《代数及其应用杂志》，12(4)，2013年。[19] Otmar Venjakob. 非交换魏尔斯特拉斯预备定理及其在岩泽理论中的应用。《纯粹与应用数学杂志》，559:153–191，2003年。[20] William Woods. 迭代局部斜幂级数环中的维数理论。《代数与表示论》。在线发表： https://doi.org/10.1007/s10468-022-10144-3，2022年。