双缝实验能否区分不同的量子诠释?

Ali Ayatollah Rafsanjani , [1, 2] * MohammadJavad Kazemi , [3] Alireza Bahrampour, [1] 和 Mehdi Golshani[2]
[1] *Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran, Iran* [2] *School of Physics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), Tehran, Iran* [3] *Department of Physics, Faculty of Science, University of Qom , Qom, Iran*

尽管量子力学取得了惊人的成功，但由于测量问题和量子到达时间问题等一些基本问题，该理论的预测在某些情况下并不十分明确且唯一。尤其是，对于屏幕上粒子探测事件的联合时空分布，不同的量子理论表述和诠释会得出各种不同的预测。虽然这些差异通常很小，我们的研究表明，通过一种非常规的双缝实验配置，可以在实验上区分这些预测；利用当今的单原子干涉测量技术即可实现这种配置。这项实验将增进我们对量子力学基础的理解。

arXiv:2301.02641v2 [quant-ph] 1 Aug 2023

一、引言

在教科书中的量子理论里，时间是一个参数，而非自伴算符 [1], 因此，尚无公认的方法能从第一原理（即玻恩规则）计算事件的时间概率分布 [2]。然而，既然时钟确实存在，而且量子实验中也常规地进行时间测量 [3, 4],那么，一套完备的量子理论就必须能够预测探测事件的时间统计。例如，在著名的双缝实验中，每个粒子在探测屏上的探测时间和位置同样都是随机的 [5–10]。因此，我们可以提出这样一个问题：屏幕上的位置—时间联合概率密度$\mathbb{P}(\mathbf{x}\ t)$是多少？尽管这个问题由来已久 [11–15], 却至今仍未解决 [16–22]。事实上，到达时间分布的不确定性甚至使累积到达位置分布也无法得到明确预测，$\int \mathbb{P}(\mathbf{x}\ t)\ dt$；而这通常是在非时间分辨的双缝实验中测量的 [23]。

尽管如此，通常的实验都是在远场（或散射）区进行的，在该区域中，半经典分析通常已足够 [2, 16]。在这种分析中，假设粒子沿经典轨迹运动，并使用量子动量分布计算到达时间分布 [9, 24, 25]。然而，由于即使在自由空间中也存在量子回流效应 [26], ，位置概率密度的量子力学时间演化与其所依据的匀速运动假设并不一致，尤其是在近场干涉现象中 [27]。事实上，随着超快探测器技术的最新进展（例如见 [28–31]），不久后便有可能研究近场区；在该区域中，半经典近似会失效，因此需要进行更深入的分析 [16, 32]。

为解决这一问题，人们基于量子理论的各种诠释和表述，尝试引入合适的到达时间分布。一方面，根据（广义）标准正则诠释认为，到达时间分布是一种广义可观测量，可由满足某些必要对称性的正算符值测度（POVM）描述[12, 13, 33, 34]。另一方面，在玻姆力学 [35], 、纳尔逊随机力学 [36], 和多相互作用世界诠释 [37],等基于真实轨迹的量子理论表述中，可以根据粒子轨迹 [8, 21, 22, 38, 39]得到到达时间分布。此外，在其他方法中，则通过对探测过程进行唯象建模来计算到达时间分布，例如存在吸收边界时的（广义）路径积分形式 [15, 40–42], 、具有复势或吸收边界的薛定谔方程[43–47], 等 [48–54]。

原则上，这些方法得出的结果有所不同。然而，在大多数实验情形中，差异通常很小；据我们所知，迄今为止，在差异显著的情形下，这些方案都尚未得到严格的实验验证 [9, 39]。能够探测这些差异的实验无疑会增进我们对量子力学基础的理解。本文旨在通过数值模拟表明，只需使用水平屏幕而非垂直屏幕，就可以利用著名的双缝实验研究这些差异：见图1。借助当前的激光冷却和磁光阱技术，可以利用玻色–爱因斯坦凝聚体实现这类实验，将其作为可控的相干物质波源 [55–57]。此外，我们的数值研究表明，使用快速单原子探测器即可达到粒子探测所需的时空分辨率，例如文献 [58, 59] 中所述的最新延迟线探测器，或文献 [7, 60]中使用的探测器。

本文的结构如下：在第II节，我们研究主要提出的本征到达分布。随后，在第III 节，我们在具有垂直和水平屏幕的双缝装置中，比较不同探测方案下的这些分布。在第IV节，我们研究屏幕反作用，并在第V节进行总结。

* aliayat@physics.sharif.edu

II. “内禀”到达分布

本节首先回顾半经典近似，然后仔细考察两种主要提出的本征到达时间分布 [19, 39] 及其相关的屏幕可观测量。在这些方法中，没有考虑探测器在粒子探测之前对波函数演化的影响。我们将在第IV节讨论这一影响。

A. 半经典近似

如前所述，在探测器放置得远离初始波函数支撑区域的实验中（即远场区域），通常使用半经典到达时间分布来描述粒子飞行时间 [25, 61–64]。在此近似中，假设粒子在制备与测量之间作经典运动。在这种方法中，到达时间的随机性被理解为动量不确定性的结果，因此到达时间分布由动量分布 [16, 20, 39, 65]得出。在一维情形中，经典到达时间为

$$t = m(L - x_0)/p_0, \tag{1}$$

该公式适用于质量为m 的自由运动粒子：它在初始 $t=0$ 时位于 x_0，动量为 p_0，并沿直线到达远处的点 L。因此，˜对于动量波函数为 $\psi_0(p)$的粒子，假设 $\Delta x_0 \ll |L - \langle x\rangle_0|$，半经典到达时间分布为 [65]

$$\Pi_{\rm SC}(t|x=L) = \frac{mL}{t^2}|\tilde{\psi}_0(mL/t)|^2. \tag{2}$$

这一分析可以推广到三维空间。此时，粒子到达屏幕表面的到达时间分布 $\mathbb{S}$ 由 [39]给出

$$\Pi_{\rm SC}(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S}) = \frac{m^3}{t^4}\int_{\mathbb{S}} |\tilde{\psi}_0(m\mathbf{x}/t)|^2\, \mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}, \tag{3}$$

其中，$d\mathbf{S}$ 是指向外侧的面元。另一个应当要求的主要分布是屏幕上的联合位置-时间概率分布，也称为“屏幕可观测量” [13]。根据条件概率的定义，发现粒子位于 dS 且时间处于区间 $[t, t+dt]$ 内的联合概率可写为 $\mathbb{P}(\mathbf{x}\ t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})dSdt = [\Pi(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})dt]\times[\mathbb{P}(\mathbf{x}|\mathbf{x}\in\mathbb{S},t)dS]$.。在这方面，可以利用这样一个事实：$\psi_t(\mathbf{x})$是在薛定谔绘景中以时间为 t为条件的系统状态。这意味着 $|\psi_t(\mathbf{x})|^2$ 指的是给定特定时间 t [17, 18, 66]时的位置概率密度。因此，在半经典近似下，联合时空概率密度为

$$\mathbb{P}_{\rm SC}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}\in\mathbb{S}) = N_{\rm SC}\Pi_{SC}(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})\,|\psi_t(\mathbf{x})|^2 \tag{4}$$

其中，$N_{\rm SC}\equiv 1/\int_{\mathbb{S}} dS\,|\psi_t(\mathbf{x})|^2$ 是归一化常数，且 $dS = \mathbf{n}\cdot d\mathbf{S}$，其中$\mathbf{n}$ 是 $x\in\mathbb{S}$处的外向单位法向量。

B. “标准”方法

基于量子理论标准规则研究到达时间问题的最初尝试，是 Aharonov 和 Bohm 在20世纪60年代初进行的 [67]，，Paul 也进行了相关研究 [68]。这种方法从对经典到达时间表达式进行对称量子化开始（1），如下所示 [69]:

$$\hat{t}_{AB} = mL\,\hat{p}^{-1} - \frac{m}{2}\,(\hat{p}^{-1}\,\hat{x} + \hat{x}\,\hat{p}^{-1}), \tag{5}$$

其中，$\hat{}x$和 $\hat{}p = -i\,\partial/\partial x$ 分别是通常的位置算符和动量算符，而 t_{AB} 称为 Aharonov-Bohm时间算符。该算符与自由哈密顿算符满足正则对易关系，$[\hat{}t_{AB},\ \hat{}\ p^2/2m] = i\hbar$，并据此建立了能量-时间不确定关系 [70, 71]。然而，尽管 $\hat{}\ t_{AB}$ 是厄米的（数学文献中称为对称的），它并非自伴算符[72]——这一事实与泡利定理[1]相符。这种非自伴性的根源，可以理解为动量表象中 $p=0$ 处的奇点，$\hat{}\ t_{AB} \to (i\hbar m/2)(p^{-2} - 2p^{-1}\partial_p)$[72]。尽管如此，$\hat{}\ t_{AB}$ 的（广义）本征函数虽然不正交，却构成一个过完备集，并给出一个正算符值测度，据此定义到达时间分布如下 [70, 72]:

$$\Pi_{\rm STD}(t|x=L) = \frac{1}{2\pi\hbar}\sum_{\alpha=\pm}\left|\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\theta(\alpha p)\sqrt{\frac{|p|}{m}}\,\tilde{\psi}_t(p)e^{\frac{i}{\hbar}Lp}\right|^2, \tag{6}$$

˜其中，$\theta(\cdot)$ 是 Heaviside阶跃函数，$\psi_t(p)$ 是动量表象中的波函数，可由初始波函数 $\psi_0(p)$ 得到，即$\tilde{\psi}_t(p) = \tilde{\psi}_0(p)\,\exp\left[-itp^2/2m\hbar\right]$. 一些作者将分布 $\Pi_{\rm STD}$及其在存在相互作用势时的推广称为“标准到达时间分布” [19, 73–76]。事实上，Grot、Rovelli 和 Tate 通过对称正则化处理了式（5）中的奇点，并利用标准玻恩规则得到了式（6） [71]。许多研究探讨了存在相互作用势时式（5）和式（6）的推广 [19, 34, 77–82]。基于这些进展，研究表明，通过空间限制也可以消除自由到达时间算符的非自伴性 [78, 83]，，并且上述到达时间分布可以由限制盒中的到达时间分布在盒长趋于无穷时的极限导出 [79]。此外，最近有研究从非相对论量子力学的时空对称扩展中推导出了分布（6） [84]。

式（6）的三维推广由 Kijowski 通过 [12]公理化方法推导得出。所假设的公理可由概率论原理、标准量子力学的数学结构以及伽利略不变性 [85]推出。基于这些公理，Kijowski 构造了以下自由粒子穿过二维平面时的到达时间分布 $\mathbb{S}$，即

$$\Pi_{\mathrm{STD}}(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S}) = \frac{1}{2\pi\hbar}\sum_{\alpha=\pm}\int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{p}_{\parallel} \times \left|\int_{-\infty}^{\infty} dp_{\perp}\,\theta(\alpha\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\sqrt{\frac{|\mathbf{p}_{\perp}|}{m}}\,\tilde{\psi}_t(\mathbf{p})e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_{\perp}}\right|^2, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{p}_{\perp}\equiv(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{p}_{\parallel}\equiv\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\perp}$ 分别是 $\mathbf{p}$ 相对于 $\mathbb{S}$ 的垂直分量和平行分量，而$\mathbf{n}$ 是平面 $\mathbb{S}$的外法线。事实上，他首先证明了上述表达式适用于支撑集位于 $p_{\perp}$正（或负）值范围内的波函数。然后，他 唯一地 推导出以下（Aharonov-Bohm 到达时间算符三维版本的）自伴变体，方法是要求时间算符为自伴算符，并使其通过玻恩规则对这些特殊情况导出（7）式 [12, 85]:

$$\hat{t}_L = \mathrm{sgn}(\hat{p}_{\perp})\left[mL\hat{p}_{\perp}^{-1} - \frac{m}{2}(\hat{p}_{\perp}^{-1}\hat{x}_{\perp} + \hat{x}_{\perp}\hat{p}_{\perp}^{-1})\right], \quad (8)$$

其中 $\hat{x}_{\perp}\equiv\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n}$ 和 L $(\equiv\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})$ 表示探测表面与原点之间的距离 [86]。最后，对于任意波函数，都可以由这个自伴算符推导出方程（7）。此外，考虑这个时间算符时，除了探测平面内位置算符的分量 $\hat{\mathbf{x}}_{\parallel}\equiv\hat{\mathbf{x}}-(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$，Kijowski 还通过玻恩规则得到了探测屏上的联合位置-时间分布如下 [85]:

$$\mathbb{P}_{\mathrm{STD}}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}\in\mathbb{S}) = \sum_{\alpha=\pm}|\psi_{\mathbb{S}}^{\alpha}(\mathbf{x},t)|^2, \quad (9)$$

其中，$\psi_{\mathbb{S}}^{\pm}(\mathbf{x}\ t)$ 是基于算符 $\hat{}\ t_L$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_{\parallel}$的共同本征态的波函数。明确地说

$$\psi_{\mathbb{S}}^{\pm}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3\mathbf{p}\,\theta(\pm\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\sqrt{\frac{|\mathbf{p}_{\perp}|}{m}}\tilde{\psi}_t(\mathbf{p})e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}. \quad (10)$$

请注意，对9式在整个屏幕平面上进行积分，可以重新得到7式所描述的到达时间分布。联合时空概率分布（9式）及其对任意自旋粒子的推广，也已由 Werner 以另一种公理化方式推导出来 [13]。此外，不难看出，结果（7式）和（9式）可以通过对 Aharonov-Bohm时间算符（及其三维推广）进行正则化得到；Grot、Rovelli 和 Tate 在一维情形中采用的也是这一做法 [71]。然而，关于这一分布，人们提出了一些悖论性的行为，我们将在附录B中讨论。

C. 量子通量与玻姆方法

受经典直觉启发，另一个适合作为屏幕可观测量的候选量，是量子概率流垂直于屏幕表面的分量，$\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)\cdot\mathbf{n}$，其中

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = -\frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left[\psi_t^*(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla}\psi_t(\mathbf{x})\right], \quad (11)$$

且 $\mathbf{n}$ 是屏幕 $\mathbb{S}$的外法线。该方案适用于处于一般外势中的粒子，也适用于一般的屏幕表面，不一定是无限平面。人们尝试通过多种方法推导这一方案，例如针对散射情形的玻姆力学方法，在 [88] 中作为近似的退相干历史方法，或在 [89] 中利用扩展概率的概念得到精确公式，等等 [52, 53, 90]。然而，即使波函数只包含方向与 $\mathbf{n}$ 相同的动量，由于 [26] 所述的回流效应，$\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)\cdot\mathbf{n}$ 也可能为负。这一性质与标准的概率概念不相容。

不过，这个问题可以从玻姆观点来处理：利用玻姆轨迹可以证明，$\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)\cdot\mathbf{n}$ 的正值和负值分别对应于沿$\mathbf{n}$的方向或与其相反的方向，在 $\mathbb{S}$ 到达点$\mathbf{x}$ 的粒子 [91, 92]。对此，Leavens 通过一维玻姆力学证明，从两侧到达 $x=L$ 的到达时间分布可以由概率流的绝对值求得：[38, 93]

$$\Pi_{\mathrm{QF}}(t|x=L) = \frac{|J(L,t)|}{\int dt\,|J(L,t)|}, \quad (12)$$

这避免了上述问题。此外，最近 Juric 和 Nikolic 从不同的角度处理了这个问题 [50]。在 Juric-Nikolic 的分析中，负概率流被解释为零到达概率密度；这一解释源于一种物理直觉：在这种情况下，粒子是在离开，而非到达。

作为到达时间模型的一种操作性表述，$\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)\cdot\mathbf{n}$ 的三维论证见 [90]。此外，到达表面 $\mathbb{S}$ 时，式（12）的推广形式为 [8, 16, 19, 94]

$$\Pi_{\mathrm{QF}}(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S}) = \frac{\int_{\mathbb{S}} dS|\mathbf{J}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}|}{\int dt\int_{\mathbb{S}} dS|\mathbf{J}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}|}, \quad (13)$$

其中 $dS=\mathbf{n}\cdot d\mathbf{S}$ 是面元的大小$d\mathbf{S}$ 其方向朝外，位于$\mathbf{x}\in\mathbb{S}$。为了说明（13），并将其推广到联合到达分布的情形，我们可以采用玻姆观点。在该理论中，每个粒子都有一条由初始位置决定的特定轨迹，因此，在时间间隔内通过以 $d\mathbf{S}$ 为中心、位于$\mathbf{x}\in\mathbb{S}$处的面元的粒子

在 t 和 $t+dt$之间，与$\rho_t(\mathbf{x})|\mathbf{v}(\mathbf{x}\ t)\cdot d\mathbf{S}|dt$成正比，其中 $\mathbf{v}(\mathbf{x}\ t)=\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)/|\psi_t(\mathbf{x})|^2$是粒子的玻姆速度。因此，利用量子平衡条件 [95, 96], $\rho_t(\mathbf{x})=|\psi_t(\mathbf{x})|^2$，并进行归一化后，联合到达分布可表示为概率流密度的绝对值，如下所示

$$\mathbb{P}_{\mathrm{QF}}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})=\frac{|\mathbf{J}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}|}{\int dt\int_{\mathbb{S}}dS|\mathbf{J}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}|}. \tag{14}$$

现在，对所有 $\mathbf{x}\in\mathbb{S}$ 积分式 (14)，即可得到屏幕表面 $\mathbb{S}$ 的三维到达时间分布 (13)。需要注意的是，对于经典粒子系综，式 (14) 不一定成立，因为时空点 $(\mathbf{x}\ t)$ 处的正向或负向概率流，通常可能由从任意方向到达 $\mathbf{x}$、时刻为 t 的所有粒子共同贡献。尽管如此，由于玻姆速度场是单值的，粒子轨迹在时空中的任何一点都不会彼此相交，因此在特定时空点 $(\mathbf{x}\ t)$ 处，只有一条轨迹会对概率流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)$ 作出贡献。此外，这意味着当 $\mathbf{v}(\mathbf{x}\ t)\cdot\mathbf{n}>0$ 时，我们可以说轨迹因而粒子是从内部穿过屏幕的；当 $\mathbf{v}(\mathbf{x}\ t)\cdot\mathbf{n}<0$时则相反。因此，可以定义到达 $\mathbb{S}$ 两侧的到达时间联合概率分布：

$$\mathbb{P}^{\pm}_{\mathrm{QF}}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})=\frac{\mathbf{J}^{\pm}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}}{\int dt\int_{\mathbb{S}}dS\ \mathbf{J}^{\pm}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}}, \tag{15}$$

其中 $\mathbf{J}^{\pm}(\mathbf{x}\ t)=\pm\theta(\pm\mathbf{J}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)$。此外，注意到有些轨迹可能会多次穿越 $\mathbb{S}$ ——我们称之为多次穿越轨迹（见图 1 中典型的玻姆轨迹）。推导式（14）的过程允许多次穿越轨迹重复计数（见图 2(a)）。然而，可以将探测表面视为一道势垒，阻止已穿越的粒子返回其内侧（见图 2(c)）。在这种情况下，建议使用如下定义的截断概率流：

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x},t):=\begin{cases}\mathbf{J}(\mathbf{x},t) & \text{if } (\mathbf{x},t) \text{ is a first exit through } \mathbb{S}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{16}$$

其中（$\mathbf{x}\ t$）是穿过边界表面 $\mathbb{S}$的首次逸出事件，若经过 $\mathbf{x}$ 的轨迹在时刻 t首次离开内部区域 $\mathbb{S}$，且此前从未离开过，则称该事件发生于此时刻 $t=0$[16, 87, 97]。式（16）中的限制条件意味着，基于该条件的联合概率分布应通过轨迹数值计算：

$$\tilde{\mathbb{P}}_{\mathrm{QF}}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})=\frac{\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}}{\int dt\int_{\mathbb{S}}dS\ \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}}. \tag{17}$$

当然，探测屏并不总是势垒——
如表面（见图2（b））， 并且可以假设存在一个点状探测器，使多次穿越轨迹对分布作出贡献，因此在这种情况下可以使用（14）。

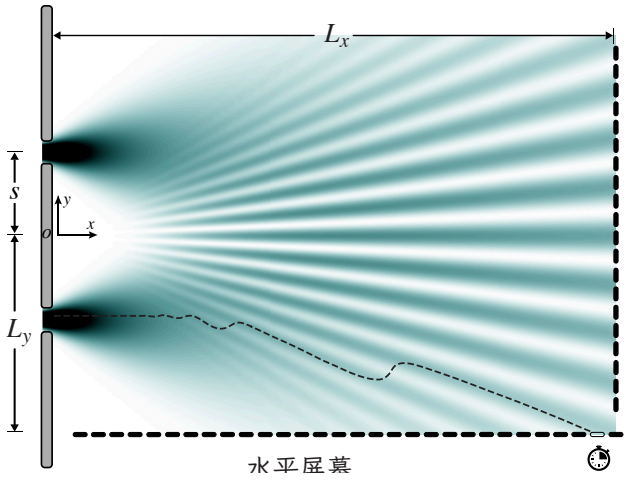

图1. **双缝实验装置示意图**。 将双缝中心视为坐标原点，两条狭缝之间的距离为 $2s$。垂直屏幕和水平屏幕分别置于 $x=L_x$ 和 $y=L_y$处。黑色虚线表示一条典型的玻姆轨迹——它经过递归运动后到达水平屏幕。除了记录粒子的到达位置外，合适的单粒子探测器还可以通过适当的时钟记录到达时间。

III. 双缝实验中的“内禀”屏幕可观测量

本节将研究上一节讨论的双缝实验相关方案。我们比较这些方案在垂直屏幕和水平屏幕情况下的结果（见图 1），并考察不同的探测方案。研究水平屏幕的主要动机是，在玻姆视角下，非经典粒子沿方向运动；典型的玻姆轨迹见图 1。这种行为是由概率流在方向分量的符号变化所致。对于 x，$\mathbf{J}$ 的分量以及粒子沿方向的玻姆运动而言，则不会出现这种行为。

如图 1所示，该装置包含两个位于 $y=\pm s$ 的相同狭缝，屏幕分别放置在 $x=L_x$ 和$y=L_y$处，分别对应垂直屏幕和水平屏幕。为避免锐边狭缝处菲涅耳衍射带来的数学复杂性，假设狭缝具有软边缘，产生的波在 y 方向具有相同的高斯分布。因此，对于每个狭缝，我们可以将波函数视为一个不相关的二维高斯波包，其在

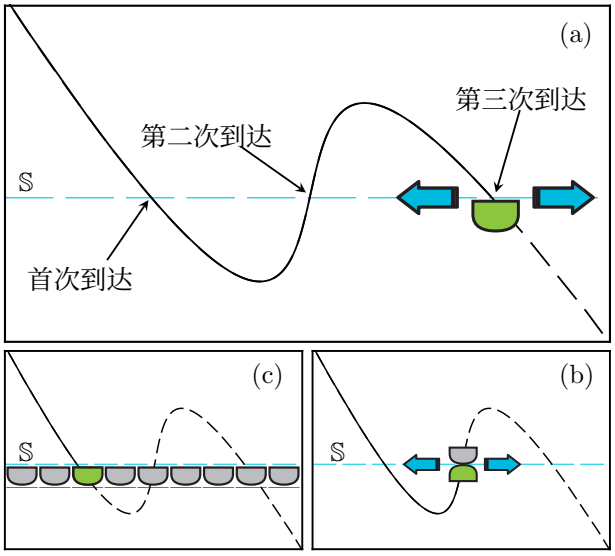

图 2. **屏幕表面上的不同粒子探测方案** 𝕊。 从玻姆观点来看，粒子可能在表面上做往复运动 𝕊，并多次穿过该表面（例如，参见图中绘制的轨迹。1）。假设采用不同的探测器类型，便可以探测屏幕上各种可能的可观测量。图 (a) 描绘了一条可能的粒子轨迹，它穿过 𝕊 三次。在该图中，一个可移动的点状探测器放置在 𝕊上，它可以扫描整个屏幕，并探测仅从一侧到达的粒子；而在图 (b) 中，一个双面点探测器放置在 𝕊上，它可以沿其移动，并探测从上方和下方到达的粒子。此外，还可以设想 (c) 使用并排探测器阵列覆盖整个屏幕表面 𝕊。最后一种配置会阻断粒子轨迹，不允许穿过屏幕的粒子返回。在此方案中，我们只探测来自一侧的 *first-arrivals* 粒子。

每个维度上的形式为

$$\psi_G^{(i)}(x,t) = (2\pi s_t^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left\{\frac{(x-x_0^{(i)}-u_x t)^2}{4\sigma_0 s_t}\right\} \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar} m u_x (x - x_0^{(i)} - \frac{u_x t}{2})\right\} \quad (i=1,2), \quad (18)$$

其中， m 为粒子的质量， σ_0 为初始弥散， u_x为波包的速度， $x_0^{(i)}$ 为波包的初始位置，换言之，即 i号狭缝的位置，而$s_t = \sigma_0(1 + i\hbar t/(2m\sigma_0^2))$。因此，当粒子穿过狭缝时，总波函数为

$$\psi(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_G^{(1)}(x,t)\psi_G^{(1)}(y,t) + \psi_G^{(2)}(x,t)\psi_G^{(2)}(y,t)], \quad (19)$$

其中上标 (1) 和 (2) 分别对应上方和下方的狭缝。这种高斯叠加态形式在文献中十分常见 [8, 98–101]，而且借助量子技术可行地实现，因为即使不使用狭缝，也能轻易制备和控制这种状态 [102, 103]， [56]。此外，可以通过在波包之间加入相对相位来推广方程（19），附录中对此进行了讨论A 和 B。本文选择亚稳态氦原子作为干涉粒子，其质量为 $m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg，并采用以下参数： $s = 10\,\mu$m、$\sigma_x = 0.04\,\mu$m、 $\sigma_y = 0.5\,\mu$m、 $u_x = 3$ m/s 和 $u_y = 0$ m/s。根据已开展的实验，这些数值是可行的 [104]。此外，由于亚稳态氦原子的内能较大，因此能够以很高的效率探测到它 [59, 105]。

A. 垂直屏幕

垂直屏幕与双缝相距不同距离时的到达时间分布如图所示。3。可以看出，该分布对于所有方法，其平均到达时间都接近经典匀速运动中的相应量。为了计算到达屏幕的平均到达时间，我们使用第 II 节中介绍的各方法的到达时间分布，即公式（3）、（7）和（13），得到

$$\bar{t}_{\mathbb{S}} = \int_0^\infty dt\ \Pi(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})\, t, \quad (20)$$

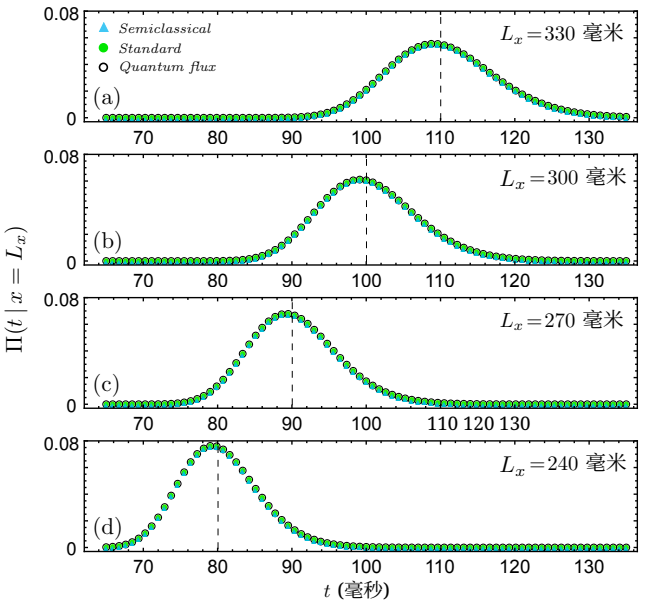

图 3. **双缝装置垂直屏幕上的到达时间分布**。面板 (a)、(b)、(c) 和 (d) 分别显示屏幕距离为 $L_x = 330$、300、270、240 毫米时的到达分布 $\Pi(t|x = L_x)$。竖直虚线表示三种方法得到的平均到达时间，三种方法的结果都完全吻合。在所有面板中，深青色三角形标记表示半经典近似，绿色填充圆形标记表示标准方法，黑色空心圆形标记表示量子通量方法。

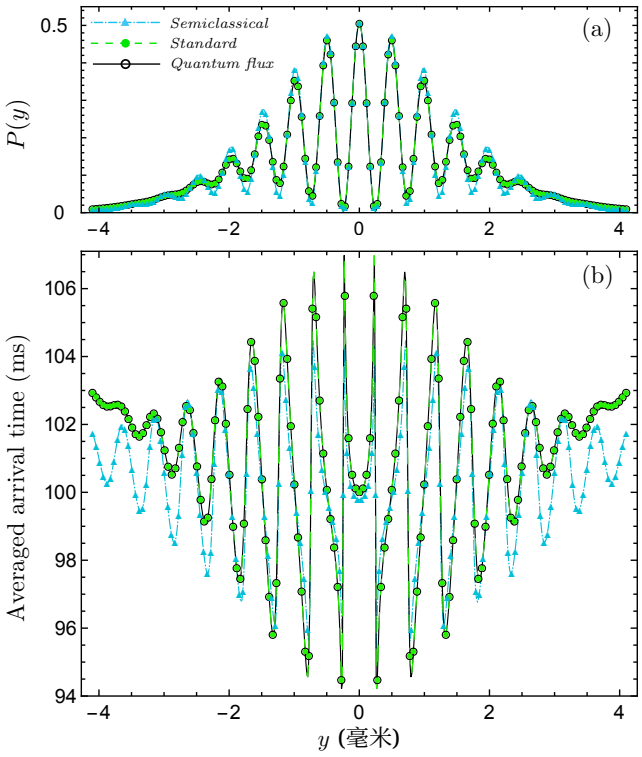

图 4. **垂直屏幕双缝实验的时空到达统计**。面板 (a) 表示累积到达位置概率密度。面板 (b) 显示屏幕上各点的平均到达时间。在所有面板中，深青色点划线（带三角形标记）表示半经典近似，绿色虚线（带绿色实心圆标记）表示标准方法，黑色实线（带黑色空心圆标记）表示量子通量方法。

作为表面 $\mathbb{S}$ 处的平均到达时间。此外，我们还可以利用联合概率分布计算屏幕上每个点的平均到达时间，表示为

$$\bar{t}_{\mathbf{x}} = \frac{\int_0^\infty dt\ \mathbb{P}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})\, t}{\int_0^\infty dt\ \mathbb{P}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})}. \tag{21}$$

对于放置在4毫米处的垂直屏幕，图 $L_x = 300$ 展示了这一可观测量。显然，标准方法和量子通量方法的结果相同，且与纳尔逊力学得到的 [8] 结果相似。不过，它们与半经典近似的结果不同。然而，无论采用哪种方法计算干涉图样，其预测的累积位置分布与其他方法的结果相差不大（图4-a）。这一可观测量可以利用联合分布计算如下：

$$P(\mathbf{x}|\mathbf{x}\in\mathbb{S}) = \int_0^\infty dt\ \mathbb{P}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}\in\mathbb{S}). \tag{22}$$

如前所述，应注意，$|\psi_t(\mathbf{x})|^2$ 只是特定时刻的条件位置概率密度，t而非位置—时间联合概率密度，因此累积的干涉图样 $P(\mathbf{x}|\mathbf{x}\in\mathbb{S})$ 并非由 $\int dt|\psi_t(\mathbf{x})|^2$ [10] 给出。

B. 水平屏幕

在本节中，我们将比较在配有水平探测屏的双缝装置中所提出的方案（见图1）。为此，图??绘出了若干水平屏幕上的到达时间分布，这些屏幕分别位于 $L_y = 15$、20、25 和 30 μm 处。在图中，黑色实线、绿色虚线和蓝色点划线分别表示分布Π_{STD}， Π_{QF} 和 Π_{SC} 。此外，竖直线表示与这些到达时间分布对应的粒子到达屏幕的平均时间 $t_{\mathbb{S}}$。从图中可以看出，尽管各平均值几乎重合，但分布彼此不同。此外，正如预期的那样，随着屏幕与双缝中心之间的距离

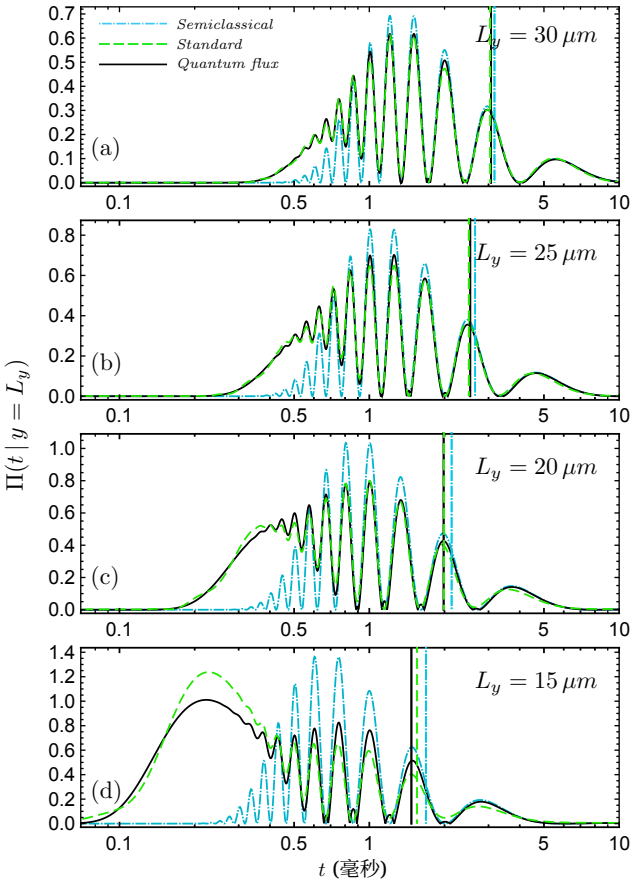

图 5. **双缝装置水平屏幕上的到达时间分布**。面板 (a)、(b)、(c) 和 (d) 分别显示了不同屏幕距离 $L_y = 30$，25，20，15 μm 处的到达分布 $\Pi(t|y = L_y)$。竖线表示平均到达时间。在所有面板中，深青色点划线表示半经典近似，绿色虚线表示标准方法，黑色实线表示量子通量方法。

逐渐减小，分布之间的差异会增大。这些差异大多出现在较早的时刻，对应于在近场到达 $\mathbb{S}$ 的粒子。此外，我们观察到，Π_{SC} 的表现与 Π_{QF}和 Π_{STD}大不相同。分布 Π_{QF}和 Π_{STD}大致一致；然而，对于位于 $L_y = 15\,\mu$m 处的屏幕，标准通量分布与量子通量分布在$t \approx 0.2$毫秒附近出现了显著差异。

为了获得更全面的认识，我们可以查看图6中的联合时空到达分布。在该图中，水平屏幕表面位于 $\mathbb{P}_{\rm SC}$，$\mathbb{P}_{\rm STD}$ 和 $\mathbb{P}_{\rm QF}$m 处，三个面板分别绘出了联合分布。这些密度图清晰地展示了上述到达分布方案之间的差异。从图中可以看到，形状各异的条纹彼此分离，这意味着粒子会在一些互不相连的时空区域内到达屏幕。在插图中可以看出，这些区域的形状因方案而异。半经典近似的联合密度（图6-a）中，条纹彼此分隔明显；而标准分布（图6-b）中的条纹则更加连续。此外，在量子通量方案的图样（图6-c）中，每两条条纹之间都有凹槽，这是因为式（$\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)\cdot\mathbf{n}$中的14）中的符号发生了变化。图6的所有面板中，典型条纹之间的“时间无到达窗口”持续时间介于 0.01 至 0.2 ms 之间，空间延展范围约为 0.3 至 2 mm。现有技术完全能够在实验中探测这些时空尺度[60, 104], , 可用于检验这些结果。

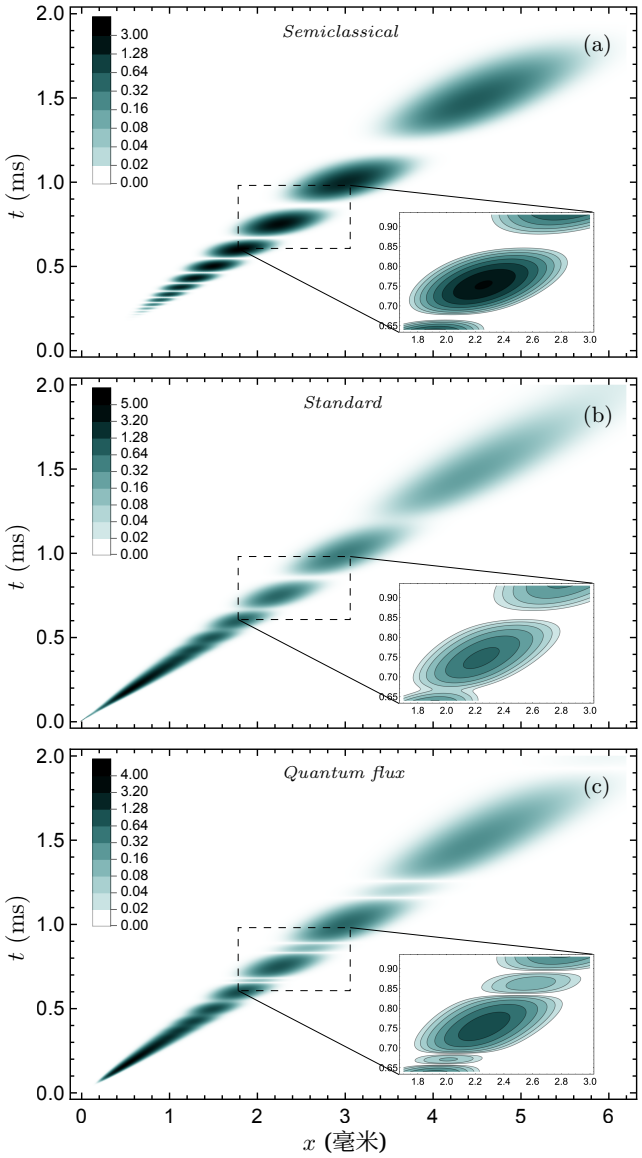

图 6. **双缝装置水平屏幕上的联合时空概率分布**。图 (a)、(b) 和 (c) 分别表示半经典近似、标准方法和量子通量方法预测的本征分布。插图：联合分布的放大等高线图。

与垂直屏幕的情况一样，可以通过公式（21）和（22）计算屏幕上各点的平均到达时间和累积位置干涉图样。图7（a）—（b）展示了这两个量在水平屏幕上的情况，该屏幕位于 $y = 15\,\mu$米处。与垂直屏幕不同，半经典近似得到的累积位置分布与另外两种方案完全不同。标准方法和量子通量方法得到的累积位置分布也有明显差异

。如图7（b）所示，三种方法得到的平均到达时间起初相同，并在 $x \approx 5$ 毫米处开始出现偏离；随后，这些曲线约在 $x \approx 25$毫米处再次汇合。标准方法和量子通量方法所得平均到达时间的最大偏差出现在 $x \approx 19$ 毫米处，此处已处于远场区域——初始波函数的宽度为 $\sim O(10^{-3})$ 毫米，小于 19 毫米。因此，可以将图7（b）灰色区域中的平均到达时间作为实际目标，用于实验比较这些方法。为此，我们研究该区域若干点的到达时间分布，将其称为局部到达分布。

给定屏幕上的特定位置 $\mathbf{x}$ 时的到达时间分布可按如下方式获得

$$\Pi_{\mathbf{x}}(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S}) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})}{\int_0^\infty dt\ \mathbb{P}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})}. \tag{23}$$

利用各方案对应的联合分布，我们绘制了图7(c)-(f)，展示了 $\Pi_{\mathbf{x}}(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})$ 在屏幕上的 $x = 16.2$、17.4、18.4、19.2 毫米处的 $L_y = 15\,\mu$m。图 7(c)-(f) 中，量子通量方案得出的黑色断续曲线与另外两种方法得出的平滑曲线形成对比，这种差异可能

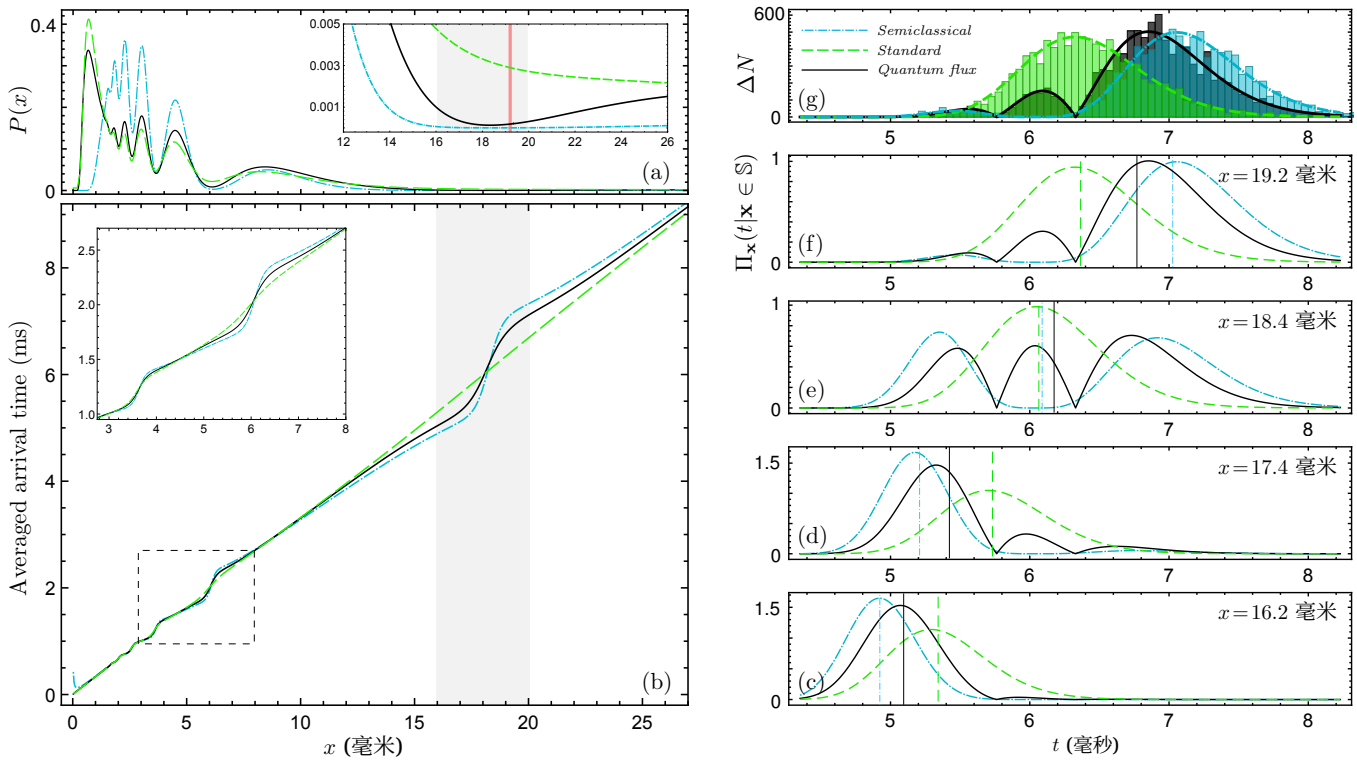

图 7. **水平屏幕双缝实验的时空到达统计**。面板 (a) 表示累积到达位置概率密度。该面板中的插图是主图中靠近水平轴区域的放大图。面板 (b) 显示屏幕上各点的平均到达时间。该面板中的插图是主图中虚线方框所标区域的放大图。面板 (c)、(d)、(e) 和 (f) 显示屏幕上分别位于 $\mathbb{S}$ m 处、选自面板 (b) 灰色区域的 $x = 16.2, 17.4, 18.4, 19.2$ 毫米各点的局部到达时间概率密度 $\Pi_{\mathbf{x}}(t|\mathbf{x} \in \mathbb{S})$。这些面板中的竖线表示平均到达时间。面板 (g) 包含与面板 (f) 的概率密度相对应的直方图，该直方图由 10^4 数值随机抽样生成。在所有面板中，深青色点划线表示半经典近似，绿色虚线表示标准方法，黑色实线表示量子通量方法。

被理解为概率流 y 分量符号变化的结果：请注意，量子通量分布等于概率流的绝对值。局部平均到达时间之间差异的成因，从这些局部到达分布中更容易看出。原则上，可以使用快速、高分辨率的单原子探测器 [60, 105] 对这些分布进行探测。尤为重要的是，Keller 等人最近研制的延迟线探测器 [58]似乎适合我们的用途：它能够以 220 ps 的时间分辨率和 177μm 的空间分辨率，对单原子探测事件进行分辨，速率可达每秒数个 10^6 事件。

我们通过数值研究估计，这些局部到达分布可以利用约 10^4 个探测事件很好地重建。例如，在图7中，图（f）中概率密度对应的直方图绘制在图（g）中，所用方法是10^4 数值随机抽样。很容易估算，记录 10^4 个粒子探测事件，就能以约为的统计误差确定局部平均到达时间 10^{-2}毫秒，而不同方案的局部平均到达时间之差几乎都大于 10^{-1}毫秒。利用累积位置分布，从图7(a) 可以估算，如果到达屏幕的粒子总数约为 10^8, ，那么在 10^4 毫米附近约有 $x = 19.2$ 个粒子，空间区间为（19。1，19。3）。随着激光冷却和磁光阱技术的最新进展 [105], ，制备包含如此数量粒子的亚稳态氦原子相干系综已完全可行 [58]。

人们可能会倾向于认为，量子通量与标准平均到达时间之间的差异，仅仅是由于改变了 $\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)\cdot\mathbf{n}$ 的符号所致，但在下文中我们将表明，即使不考虑 $\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)\cdot\mathbf{n}$ 的负部分所作的贡献，这些方案仍然具有显著差异：见图 8。

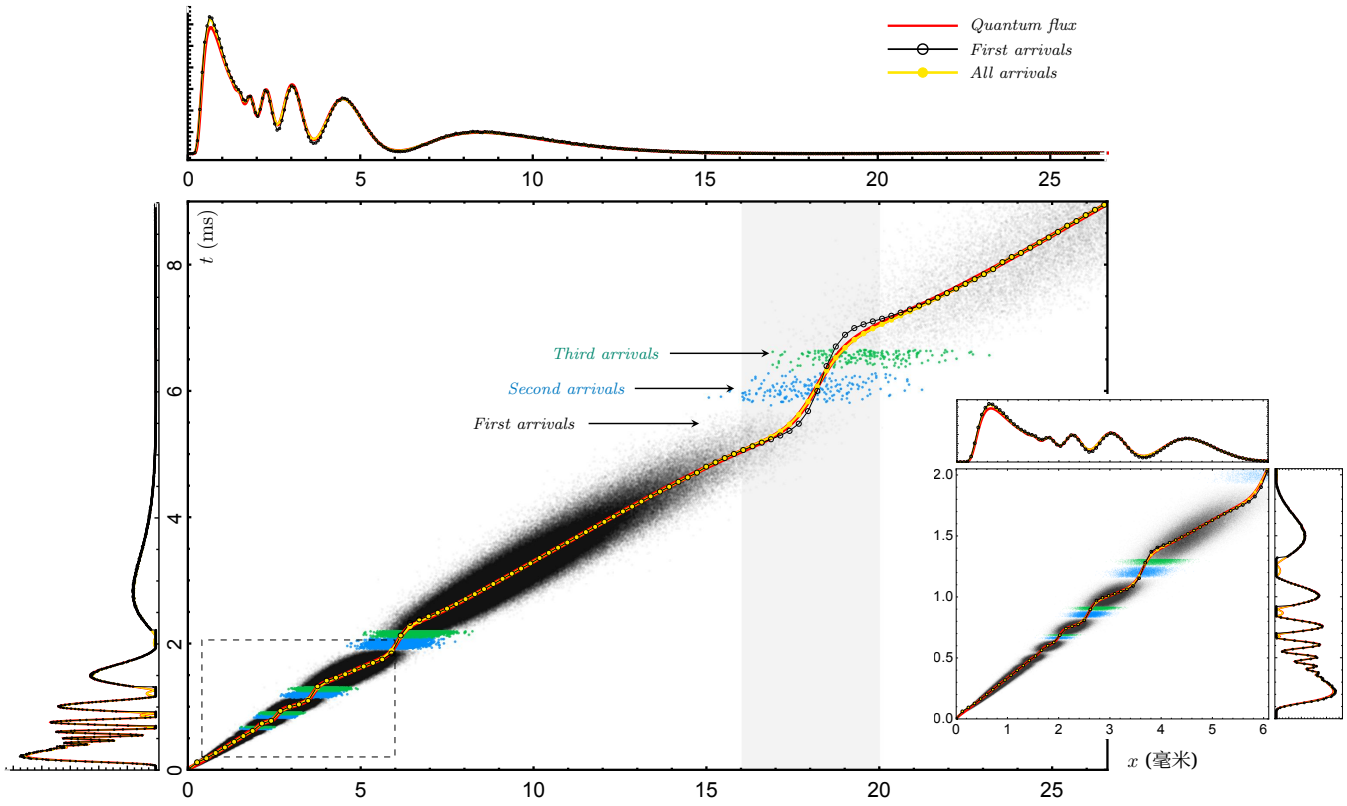

图 8。 **带有水平屏幕的双缝实验的时空玻姆到达统计**。 中央图中的内部曲线是通过不同探测方案获得的平均到达时间（见图 2），使用 10^8 模拟的玻姆轨迹得到。左侧和顶部图分别是边缘到达时间分布和边缘到达位置分布。散点图使用 2×10^6 玻姆轨迹生成，散点图中的黑色、蓝色和绿色点分别表示玻姆粒子首次、第二次和第三次到达屏幕。插图是虚线矩形区域的放大图。红色实线表示量子通量方法，带空心圆标记的黑色实线表示首次到达方案，带实心圆标记的黄色实线表示全部到达方案。

C. 探测方案

正如我们在第 IIC 节所提到的，根据玻姆确定性观点，存在几种探测已到达粒子的可能方案，尤其是对于具有递归运动的水平屏幕表面（见图 1 和 2）。可以假设使用一个点状探测器扫描整个水平屏幕，探测表面 $\mathbb{S}$ 上所有已到达的粒子，我们称之为 点探测 方案。在该方案中，一种选择是使用单侧探测器，探测到达 $\mathbb{S}$ 顶部或底部的粒子。在这种情况下，量子概率流的正、负部分分别对应于到达 $\mathbb{S}$ 顶部或底部的粒子（如图 2(a) 所示），我们必须使用公式（15）来计算屏幕可观测量。此外，我们还可以选择一个双侧探测器（或两个单侧探测器），探测从 $\mathbb{S}$ 两侧到达的所有粒子，并随时间进行多次实验重复（如图 2 (b) 所示）。在这些情况下（即点探测方案中），粒子到达探测点之前，其前方没有势垒我们可以使用公式（14）获得屏幕可观测量，如前两小节所述。

正如我们在第IIC节已经展示的那样，无论粒子是从 $\mathbb{S}$的上方还是下方到达，量子概率流的绝对值都会给出轨迹密度，进而给出到达 $\mathbb{S}$各点的总到达联合分布。标准方法同样如此，不过点探测方案中的两种提案存在一个微妙差别。在玻姆方法中讨论点探测时，会考虑多次穿越的可能性，而分布包含所有到达于 $\mathbb{S}$的情形。尽管如此，在标准方法中，式（ $\psi_{\mathbb{S}}^{+}(\mathbf{x}\ t)$ 和$\psi_{\mathbb{S}}^{-}(\mathbf{x}\ t)$ 有一种诠释，它们分别对应于沿着与屏幕外法线10相同或相反的方向到达 $\mathbb{S}$ 的粒子$\mathbf{n}$。然而，值得注意的是，与玻姆诠释不同，由于标准诠释中没有定义粒子轨迹，因此询问它是否只计算屏幕每一侧的首次到达，还是也包括

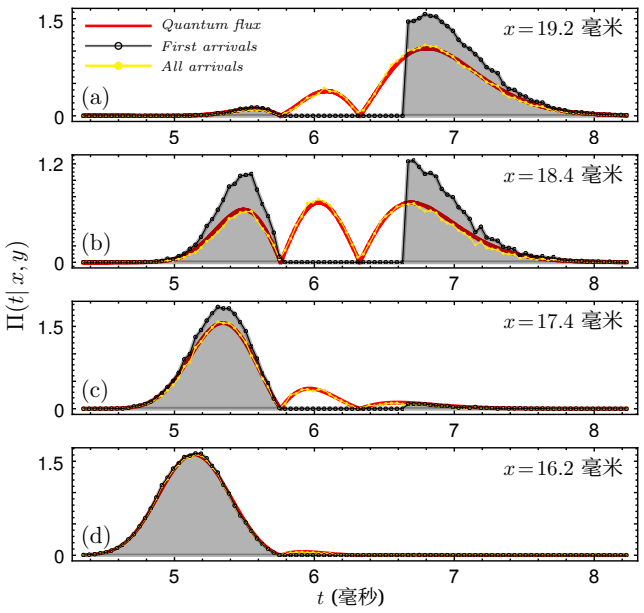

图 9。 **双缝装置中水平屏幕若干点处的局部到达时间分布**。 面板 (a)、(b)、(c) 和 (d) 展示了局部到达时间概率密度， $\Pi_{\mathbf{x}}(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})$，对应屏幕上 $x=16.2$、17。4、18。4、19。2 毫米处的点 $\mathbb{S}$ 分别位于 $y=15\,\mu$m 处，这些点位于图（8）的灰色区域内。每个点的采样宽度约为 $\delta x=0.25$ 毫米，并且 10^8 通过模拟玻姆轨迹获得这些分布。

粒子的递归运动。在标准量子力学中，只有一次到达，因为一旦进行了测量，粒子的状态便不再与初始状态 [81] 存在因果联系。

或者，除了点探测方案外，还可以假设在粒子路径前方设有一个连续平面势垒，作为探测表面或屏幕表面，粒子无法穿过该表面。根据屏幕的长度和位置，探测过程有几种可能性。每种情况下，特定数量的粒子路径都会对到达时间分布有所贡献。在最简单的情况下，屏幕会阻挡所有到达水平表面 $\mathbb{S}$的轨迹，我们只探测首次到达。在这种设置下，我们不再能使用量子通量方法来表示玻姆轨迹首次遇到该表面的情形；因此，由于截断概率流的定义（见式（16）及其˜对应的联合分布， $\mathbb{P}_{\rm QF}(\mathbf{x}\ t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})$，见式（17），屏幕可观测量必须通过数值分析获得。通过计算玻姆轨迹，我们可以找到首次到达屏幕的位置和时间，进而计算到达时间分布；其数学定义如下：

$$\tilde{\Pi}_{\rm QF}(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})=\int_{\mathbb{S}}\tilde{\mathbb{P}}_{\rm QF}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})dS. \qquad (24)$$

此外，其他可观测量，例如累积空间分布以及探测表面上的平均到达时间，也可以用类似的方法进行定义，并通过数值计算得出˜——只需将 $\mathbb{P}_{\rm QF}(\mathbf{x}\ t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})$代入方程（21）和（22）即可。此外，我们还可以完成计算，求出粒子第二次和第三次到达表面的情况（无论是否存在势垒）。

在图8中，我们展示了玻姆轨迹模拟的数值结果。背景散点图表示 2×10^6 条轨迹的到达位置和时间。在图中，第二次和第三次到达分别以蓝色和绿色显示。在这里，我们可以更清楚地理解为何将量子通量密度图（图6(c)）中的凹槽解释为玻姆轨迹多次穿越的结果。中间的三幅图显示了首次到达和所有到达的平均时间，即 10^8 条轨迹的模拟结果，并将其与量子通量方法进行比较。正如预期，所有到达的平均时间与量子通量曲线吻合。然而，在上一节讨论的区域（介于 $x=16.2$毫米和 $x=19.2$ 毫米之间），首次到达的平均时间偏离了所有到达的平均时间。

为仔细考察图8 中的偏差区域（灰色区域），绘制了图9 ，以展示屏幕位置 $x=16.2$、17。4、18。4、19。2 毫米处的到达时间分布。可以看出，在量子通量分布的首个递归点，首次到达分布会下降至零。这意味着，存在类势垒屏幕时，这些点处的局部到达分布会出现很大的时间间隙。这些间隙可归因于玻姆轨迹的不相交性质；该性质会使粒子沿概率流场的方向单向运动。

IV. 屏幕反作用

原则上，探测器的存在可能会在粒子被探测之前改变波函数演化，这种现象称为探测器反作用。为了更全面地研究探测统计，我们应当考虑这一效应。然而，由于测量问题和量子芝诺效应 [11, 106, 107], ，要从基础层面对探测器效应进行全面研究存在困难，而且理想探测器 [108]的建模方式也不那么显而易见。尽管如此，人们还是提出了一些现象学上彼此不等价的模型，例如存在吸收边界时的广义费曼路径积分方法 [15, 40–42], 含复势的薛定谔方程¨、带吸收边界（或复罗宾边界）条件的薛定谔方程 [47], ¨, 等等 [43–47], [50]。这些方法所得的结果并不相同，对它们之间的差异进行详细研究是一个有趣的课题。本节将简要回顾吸收边界规则（ABR）和带吸收边界的路径积分（PAB）模型，然后在带水平屏幕的双缝装置中对它们进行比较。

A. 吸收边界规则

在上述现象学模型中，吸收边界条件方法与玻姆力学的相容性最高 [45]。在到达时间问题中应用吸收边界条件（ABC），最初由Werner提出 [43]，最近又由Tumulka等人采用多种方法重新推导并加以推广 [44–47]。尤其是，最近有研究表明，在一个恰当（但不显而易见）的极限下，虚势方法所得的探测时间和位置分布与吸收边界规则一致 [47]。根据这一规则，粒子波函数 ψ 按照自由薛定谔方程演化¨，而探测屏的存在则通过在探测屏上施加以下边界条件来建模，$\mathbf{x} \in \mathbb{S}$,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \psi = i\kappa\psi, \tag{25}$$

其中 $\kappa > 0$是一个常数，用于表征探测器的类型，其中 $\hbar\kappa/m$ 表示探测器最敏感的动量。该边界条件确保波数为 κ 的波被完全吸收，而其他波数的波则部分被吸收、部分被反射 [44, 109]。在吸收边界规则中，探测事件的联合时空分布由量子通量给出。考虑到（25），该分布为

$$\mathbb{P}_{\mathrm{ABR}}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}\in\mathbb{S}) = \frac{|\psi_{\mathrm{ABC}}|^2}{\int dt \int_{\mathbb{S}} dS |\psi_{\mathrm{ABC}}|^2}, \tag{26}$$

其中 ψ_{ABC} 表示满足上述吸收边界条件的自由薛¨定谔方程的解。该分布可以用玻姆轨迹来理解。玻姆粒子的运动方程，$\mathbf{X} = (\hbar/m)\mathrm{Im}\,[\nabla\psi_{\mathrm{ABC}}/\psi_{\mathrm{ABC}}]$与边界条件（25）共同表明，轨迹只能向外穿越边界 $\mathbb{S}$，因此不存在多次穿越轨迹。假设当玻姆粒子到达 $\mathbb{S}$时探测器便会触发，那么探测事件的概率分布由（26）给出，因为玻姆粒子的初始分布为 $|\psi_{\mathrm{ABC}}(x,0)|^2$ [44]。

B. 吸收边界路径积分

在几篇论文 [15, 40–42], 中，Marchewka 和 Schuss 发展了一种有趣的方法，利用费曼路径积分方法计算吸收表面的探测效应。他们为波函数提出了一个分离原理，据此我们可以将（有界波函数）视为两部分之和，$\psi(\mathbf{x}\ t) = \psi_1$

$(\mathbf{x}\ t) + \psi_2(\mathbf{x}\ t)$，使得 $\psi_1(\mathbf{x}\ t)$ 对应于波函数的存活部分，它与 $\psi_2(\mathbf{x}\ t)$ 正交，并在时刻 t 独立演化 [41]。

因此，我们可以得到粒子的存活概率，记为 $S(t)$，即粒子在 t 时刻之前未被吸收的概率，其表达式为 $\int_{\mathbb{D}} d^3\mathbf{x}$ $|\psi_1(\mathbf{x}\ t)|^2$，其中积分在吸收区域之外的定义域 $\mathbb{D}$ 上进行。通过将路径积分离散化为时间间隔 $[0, t]$，并剔除在每个时间间隔 $[t', t'+\Delta t']$ 内、对所有 $t' < t$ 而言到达吸收表面 $\mathbb{S}$ 的轨迹，就能得到存活概率，进而

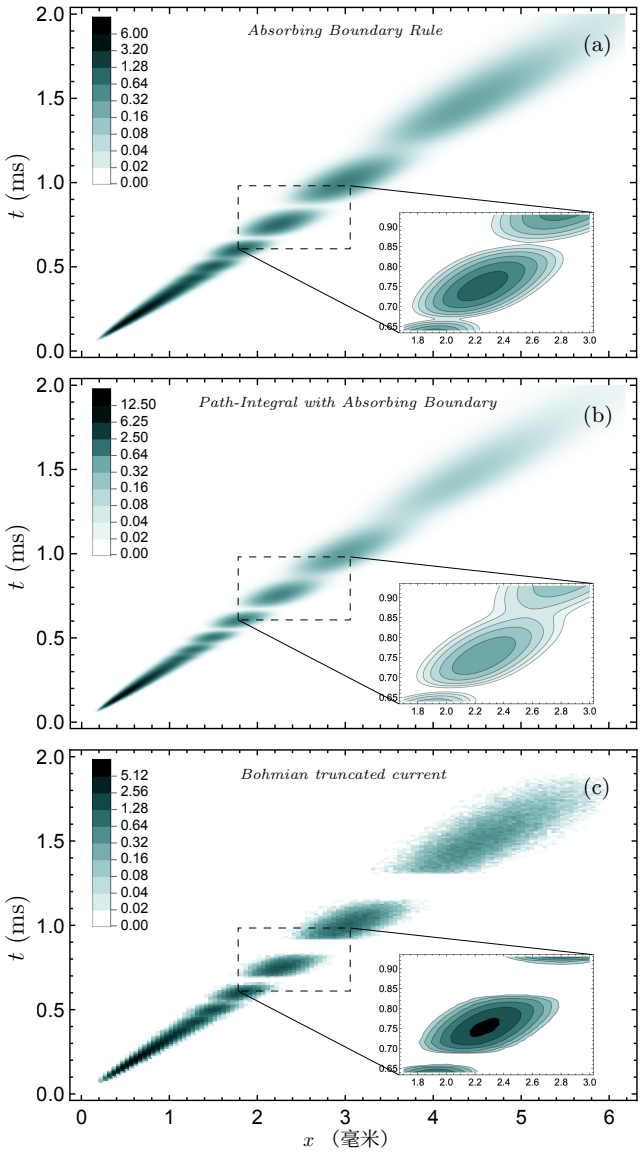

图10。**双缝装置水平屏幕上的联合时空概率分布**。面板（a）和（b）分别是由考虑屏幕反作用的方法预测的联合到达分布，即吸收边界作用和吸收边界路径积分。面板（e）是由玻姆截断流得到的联合到达分布，该分布通过数值模拟 10^7 条玻姆轨迹计算得到。插图：联合分布的放大等高线图。

得到吸收概率。基于这一分析，我们可以将指向表面的单向概率流定义为 $\frac{d}{dt}[1-S(t)]$,，它给出了 $\mathbb{S}$ 上任意一点处多维概率流密度的法向分量

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n} = \frac{\lambda\hbar}{m\pi}\,|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{x},t)|^2 \times \exp\left\{-\frac{\lambda\hbar}{m\pi}\int_0^t dt'\oint_{\mathbb{S}} dS|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{x}',t')|^2\right\}, \tag{27}$$

其中 $dS = \mathbf{n}\cdot d\mathbf{S}$ 是表面元的大小 $d\mathbf{S}$，$\mathbf{n}$ 是吸收表面的单位外法线 $\mathbb{S}$，且 λ 是一个具有长度量纲的比例因子 [40, 69]。此外，$\psi(\mathbf{x}\ t)$ 是薛定谔方程的解，在定义域 $\mathbb{D}$内有界且归一化。此外，法向分量 $\mathbf{J}(\mathbf{x}\ t)\cdot\mathbf{n}$ 被假定为在时刻 $\mathbf{x}$ 处于屏幕上的点 t [15, 42]观测到粒子的概率密度。

C. 双缝实验中的屏幕反作用

为了完成第 III 节所进行的研究，我们将研究带有水平屏幕的双缝实验中的屏幕反作用。为此，我们比较到达分布——

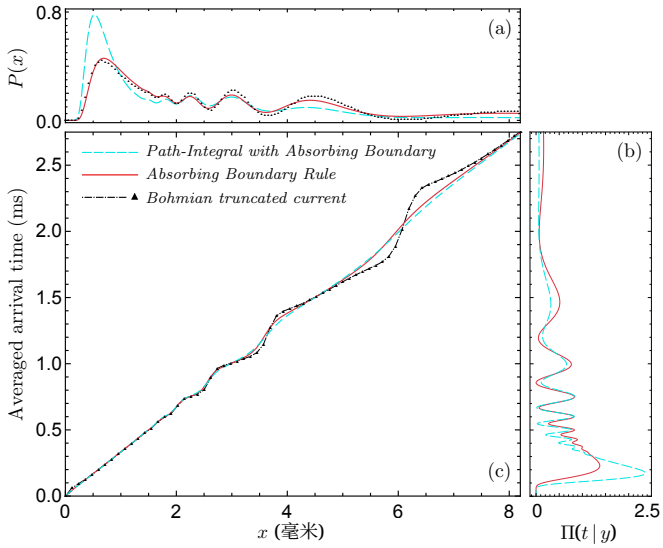

图 11. **带吸收水平屏幕的双缝实验的时空到达统计**。面板 (a) 表示累积干涉图样，面板 (b) 显示屏幕上的到达时间分布，面板 (c) 中的曲线表示屏幕上各点的平均到达时间。在所有面板中，红色实线表示吸收边界规则，青色虚线对应带吸收边界的路径积分法，黑色三角标记对应使用玻姆截断流方法得到的曲线。

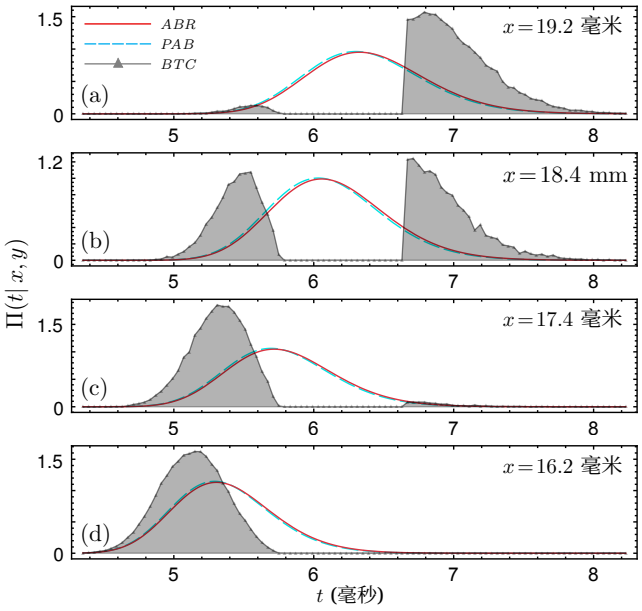

FIG.**双缝装置中水平屏幕上若干点的局部到达时间分布**。图（a）、（b）、（c）和（d）分别显示屏幕上位于 $y = 15\,\mu$ m 处的 $x = 16.2$、17。4、18。4、19。2 毫米处的局部到达时间概率密度 $\Pi_{\mathbf{x}}(t|\mathbf{x}\in\mathbb{S})$。带三角形标记的黑色实线表示由玻姆截断流（BTC）得到的首次到达方案。该方案在每个点的数值采样宽度约为 $\delta x = 0.25$ 毫米，并通过模拟 10^8 条玻姆轨迹得到这些分布。红色实线表示吸收边界规则（ABR），青色虚线表示通过带吸收边界的路径积分法（PAB）得到的局部到达分布。

由吸收边界规则（ABR）、带吸收边界的路径积分法（PAB）和玻姆截断流（BTC）得到的分布。

我们继续采用第 III 节中的相同初始条件，并为吸收边界规则选择 $\kappa = 1\,\mu\text{m}^{-1}$。该$\kappa$ 值会使所选初始波函数的吸收概率达到最大值——接近 0。4。此外，为了进行更有意义的比较，我们考虑$\lambda = 1\,\mu$吸收边界路径积分法中的 m，使其吸收概率与吸收边界规则相同。三种方法得到的联合到达时间—位置分布如图10所示。如图所见，吸收边界规则和吸收边界路径积分法的分布——即图10中的 (a) 和 (b) 面板——彼此之间比与 BTC 方法的结果更加相似。不过，它们之间仍有差异，在放大区域中尤为明显。吸收边界规则的联合密度比分布于吸收边界路径积分法的联合密度更加均匀。图10 中 (c) 面板条纹之间的空白区域，是由于递归轨迹被消除所致——换言之，这是由于图8中的第二次和第三次到达被消除所致。

为了进行更详细的比较，图11 中展示了空

间和时间边缘分布。此外，本图中央面板比较了相关的局部平均到达时间。PAB方法导致边缘分布存在显著差异；最大差异约为 $x \approx 0.8$ 毫米，似乎很容易通过实验检验。与先前关于本征分布的结果不同，虽然平均到达时间之间存在显著差异，但在这一可观测量上，吸收边界规则和PAB方法的结果吻合良好。不过，在 $x = 6$毫米附近，这两种方法与BTC的平均到达时间存在显著差异。图12绘出了屏幕上一些位置的局部到达时间分布，显示出类似的行为。

V. 总结与讨论

波函数何时、何地坍缩？在量子理论中，如何对探测器建模？这些正是我们在本研究中探讨的问题。我们试图表明，这些问题并没有公认的答案，即使对于蕴含着量子力学核心的 [110]双缝实验也是如此。这是一次对测量问题[80]的实际探究。为此，我们针对采用水平探测屏的双缝装置，对这些问题的主要现有解答进行了数值比较。结果表明，得益于当前的单原子探测技术，这些方案会导出在实验上可区分的预测。

在本研究中，我们提出将亚稳态氦原子作为物质波的合适相干源；不过，其他源也可能带来一些实际改进。例如，使用质量更大的凝聚态原子可以使差异更加明显。最近，S. Roncallo及其同事提出了一项有趣的实验，利用被俘获在加速器环中的^{87}Rb玻色–爱因斯坦凝聚体 [111]，来检验各种到达时间方案[51]。此外，成对的纠缠原子（例如在双重双缝装置中）可能会产生更容易区分的预测 [21, 22, 112]。

最后值得注意的是，尽管光子实验可能具有一些实际优势，但其理论分析要复杂得多。这部分是由于相对论中的定位—因果性问题 [113–116]。对所提出的光子实验进行理论研究，将是对本

项工作的有趣拓展，留待未来研究。

致谢

我们衷心感谢 S.Goldstein、S. Das、M. Khorrami、L. Maccone、H. M. Wiseman、H. Nikolic、W. Struyve 和 E. Galapon、K. Sacha 和 M. H. Barati，感谢他们给予的友善反馈和有益评论。

附录 A：相对相位的影响

有人可能会提出，通过在初始波函数中选择适当的相对相位 φ，可以增大不同方法之间的差异，如下所示：

$$\psi(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_G^{(1)}(x,t)\psi_G^{(1)}(y,t) + \mathrm{e}^{i\varphi}\psi_G^{(2)}(x,t)\psi_G^{(2)}(y,t)],$$

对于带电粒子，可以利用阿哈罗诺夫-玻姆效应产生并控制这一相对相位[117, 118]，；对于中性粒子，可以利用阿哈罗诺夫-卡西尔效应 [119]，也可以采用其他方法 [120, 121]，[122]。首先

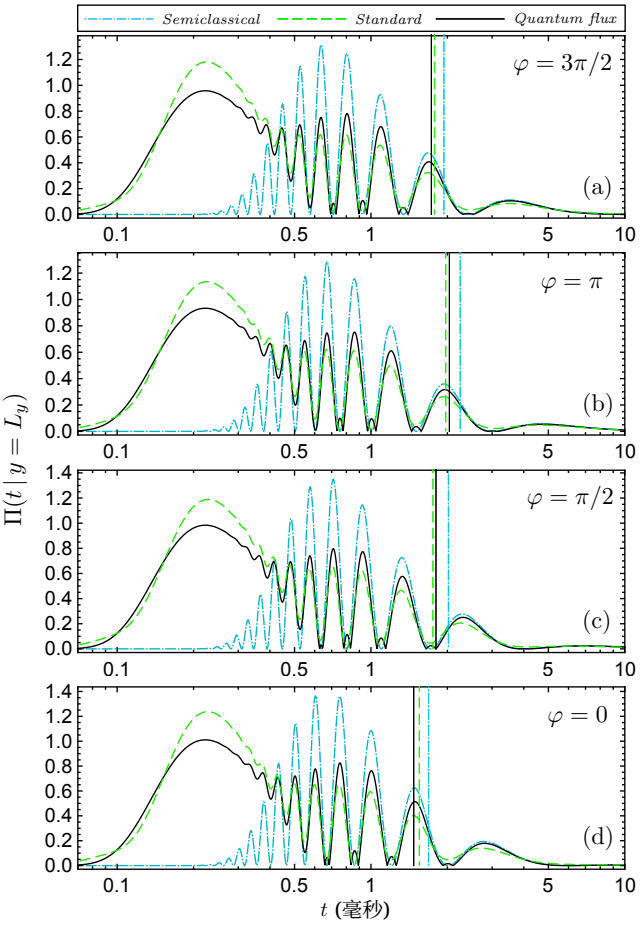

图 13. **双缝装置水平屏幕处的到达时间分布**。 面板 (a)、(b)、(c) 和 (d) 分别显示屏幕距离为 $L_y = 15\,\mu$m 时，四种不同相对相位 $\phi = 1.5\,\pi, \pi, 0.5\,\pi, 0$ 对应的到达分布 $\Pi(t|y = L_y)$。竖线表示平均到达时间。在所有面板中，深青色点划线表示半经典近似，绿色虚线表示标准方法，黑色实线表示量子通量方法。

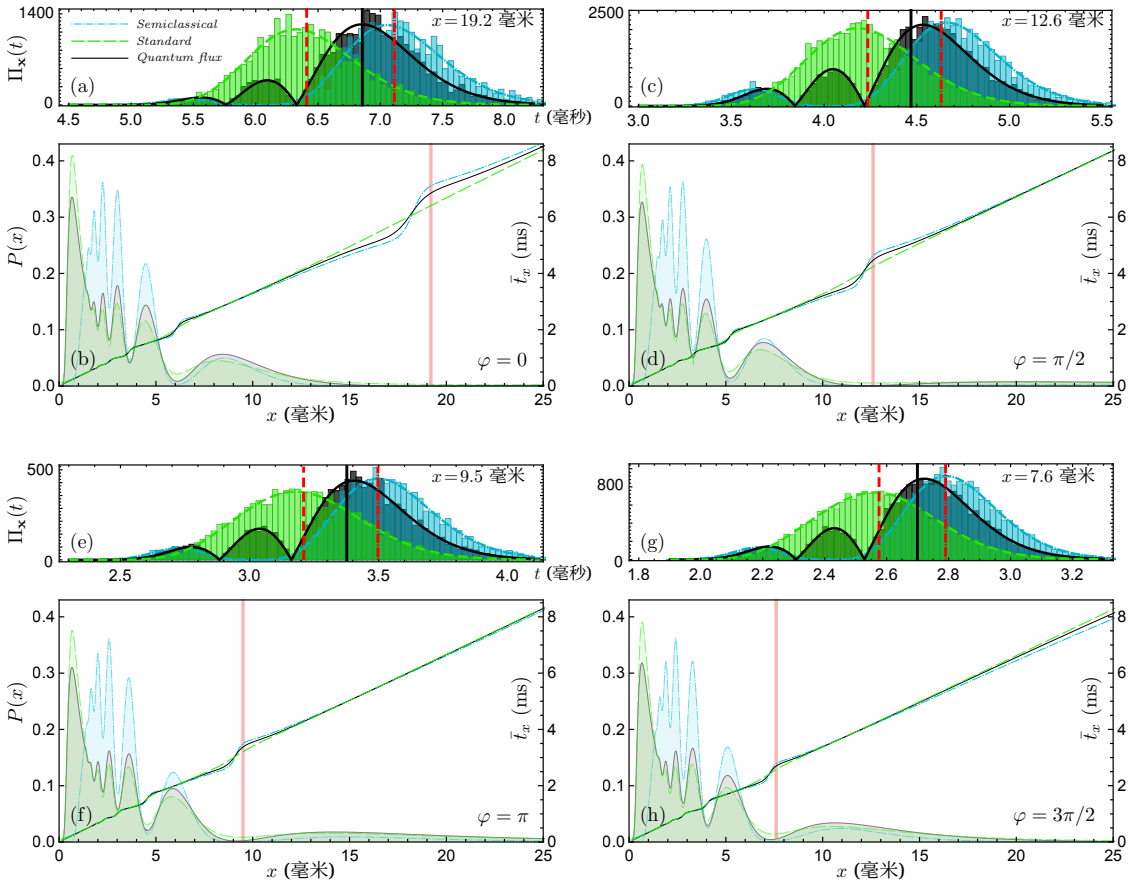

图14. **水平屏幕双缝实验的时空到达统计**。图(b)、(d)、(f)和(h)中的填充曲线显示了水平屏幕位于 $L_y = 15\,\mu$米处时双缝实验的累积位置概率密度。这些图中的内嵌图表示屏幕上各点的平均到达时间， $\bar{t}_{\mathbf{x}}$。图(a)、(c)、(e)和(g)分别显示了屏幕上 $\varphi = 0$处、 $\varphi = 0.5\,\pi$毫米处、 $\varphi = \pi$处和 $\varphi = 1.5\,\pi$处各点局部到达时间概率密度的直方图， $\Pi_{\mathbf{x}}(t|\mathbf{x} \in \mathbb{S})$；这些位置分别为 $x = 19.2$毫米、 $x = 12.6$毫米、 $x = 9.5$毫米和 $x = 7.7$毫米，并在下方图中用红线标出。直方图对应于局域分布的概率密度，这些分布由数值随机抽样生成。在所有图中，深青色点划线表示半经典近似，绿色虚线表示标准方法，黑色实线表示量子通量方法。

我们可以研究的量是粒子在水平屏幕上的到达时间分布。如图13所示，改变相对相位会使分布图样以及相应的平均到达时间发生偏移。不过，各分布之间以及各平均值之间的差异并没有太大变化。图14展示了到达位置分布，以及屏幕上各点处的平均到达时间。与前图一样，改变相对相位会使这些量的图样发生偏移。利用这种图样偏移，可以为实验研究提出一个操作范围。随着相对相位改变，我们可以调整不同到达位置分布上平均到达时间偏差区域的位置（见图14中的红色实线）。

事实上，到达粒子的数量与预测量之间差异的尺度存在权衡。为了比较不同相位的影响得更精确，我们在图14 的每个面板中绘制了指定点处局部到达分布的直方图，即平均值差异最大的点。这些点以图14 中的红色竖线标出（偏差区域）。在此分析中，我们将穿过双缝的粒子总数固定为 10^8, 因此，到达偏差区域的粒子数量会有所变化：在10^4 附近约有 $x = 19.2$ 毫米，对应 $\phi = 0$； 2×10^4附近约有 $x = 12.6$ 毫米，对应 $\phi = 0.5\,\pi$； 3×10^4附近约有 $x = 9.5$ 毫米，对应 $\phi = \pi$；以及 5×10^4附近约有 $x = 7.7$ 毫米，对应 $\phi = 1.5\,\pi$。这些偏差区域以指定点为中心，假定厚度为 0.2 毫米。图14 中的直方图表明，预测分布与数值实验的拟合在$x = 7.7$ 毫米附近最佳，而在 $x = 19.2$ 毫米附近的分布拟合最差。不过，后一个区域

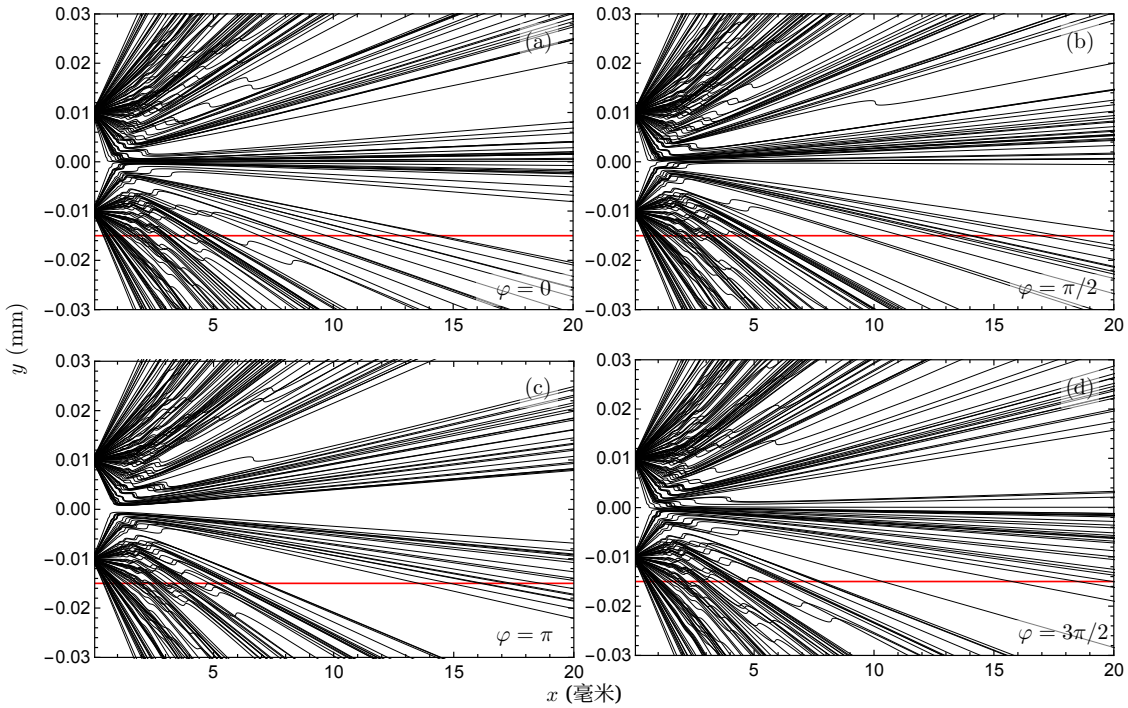

图15。**四种不同相对相位下穿过双缝的粒子的玻姆轨迹**。所有面板中的初始条件相同，每个面板均计算了200条轨迹。面板(a)、(b)、(c)和(d)分别对应相对相位 $\phi = 0$、 $0.5\,\pi$、 π、 $1.5\,\pi$。

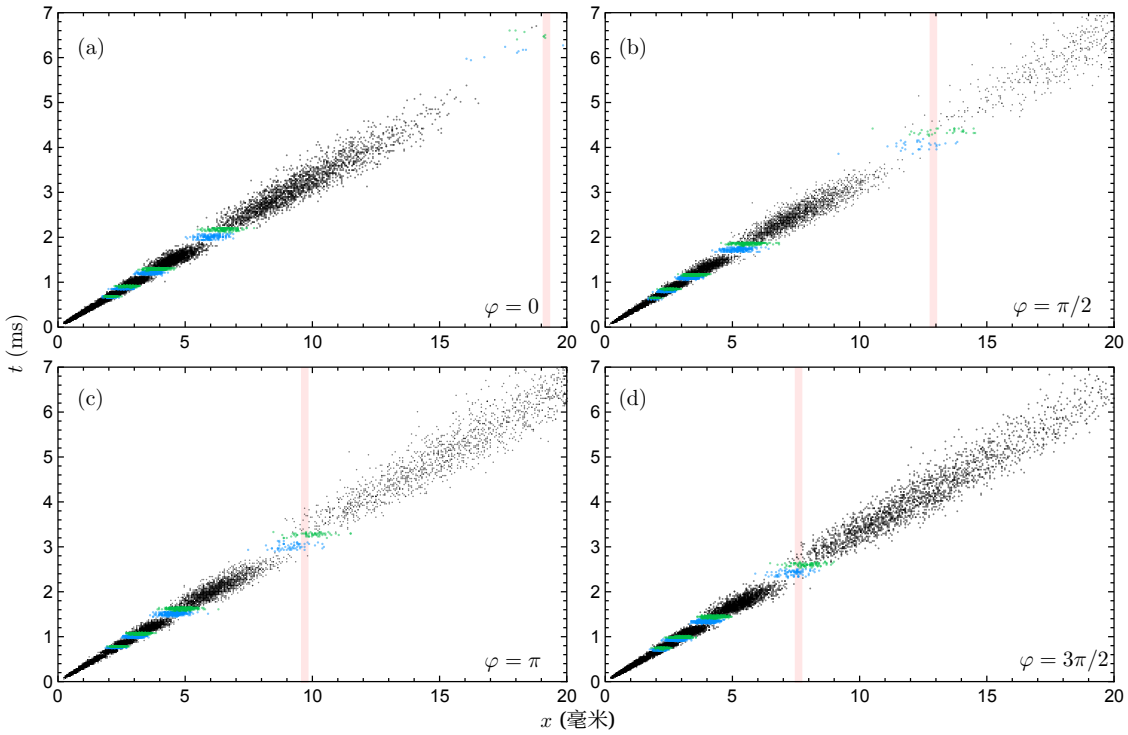

图16。**四种不同相对相位下到达水平屏幕的粒子的散点图**。所有面板中的初始条件相同，每张散点图均使用 2×10^4 条玻姆轨迹生成。面板(a)、(b)、(c)和(d)分别对应相对相位 $\phi = 0$、 $0.5\,\pi$、 π、 $1.5\,\pi$。红色竖线对应补充图14中的红线。

前一区域的平均到达时间差异最大，而后一区域的差异最小。

图15 展示了不同相对相位对玻姆轨迹的影响。改变相位会导致粒子轨迹发生偏移。值得注意的是，可以利用弱测量技术在实验中重建轨迹系综 [123, 124], , 并将其与到达分布进行比较 [125, 126]。图16展示了到达水平屏幕的粒子的到达时间和位置散点图（图15中的水平红线）。从这些图中可以推断，平均到达时间的偏差区域（即图14 和16中的红色实线竖线）对应于发生玻姆多次穿越的区域。薄激光片作为探测屏，似乎适合用于观察这些区域中的到达分布[51, 127, 128]。

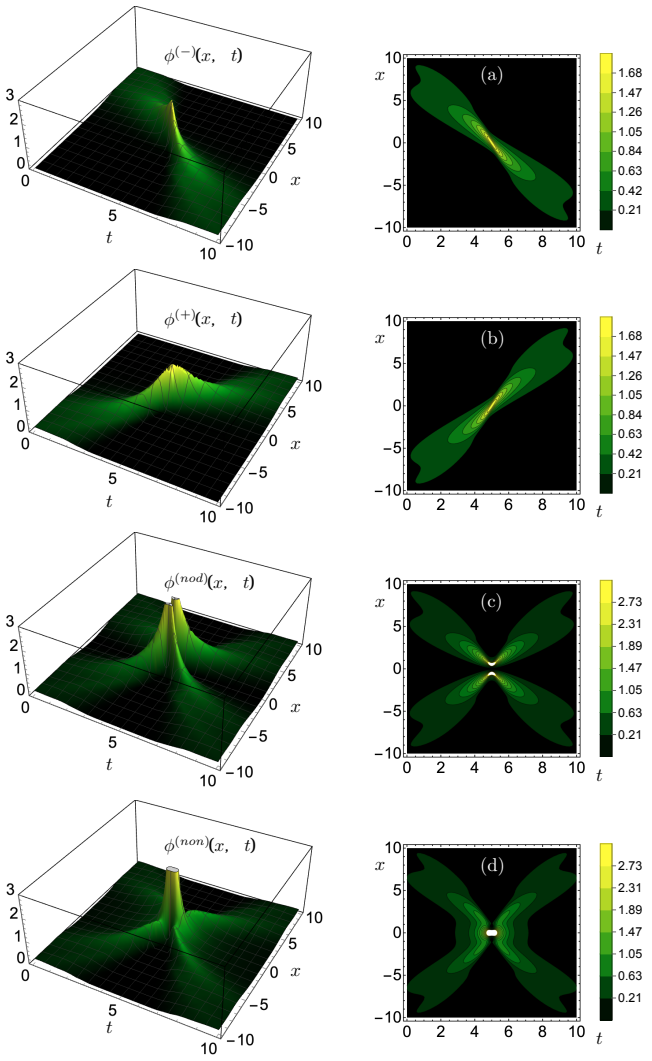

图1<左右基底和偶-奇基底下到达时间算符本征函数的正则化自由演化。对于所有情况，到达点均设为原点，时间本征值为 $\tau = 5$。正则化参数为 $\epsilon = 0.1$，其他所有常数均为 $\hbar = m = 1$。(a)、(b)、(c)和(d)分别对应左基底、右基底、奇基底和偶基底。

附录B：Leavens-Mugadebates 与 Galapon 幺正坍缩解释

关于 [129], Leavens 讨论了 Kijowski到达时间分布所引发的一些悖论性行为。其他作者也对这一主题发表过评论[19, 74, 129–131]。Leavens 的一条评论是，Kijowski分布预测在某些物理上不允许的区域存在非零到达概率。例如，即使波函数在某一点对所有时刻都为零，Kijowski到达时间分布仍可能预测该点具有非零概率 [131]；波函数在某一点为零意味着粒子不会出现在该点，因此可以预期到达时间分布也会呈现相同的行为。在我们的双缝装置中，当水平屏幕放置在 $L_y = 0$且相对相位设为 $\varphi = \pi$时，就会出现这种情况。此时，位置概率密度 $|\psi|^2$在所有时刻于屏幕上均为零，而 Kijowski到达时间分布却为正。请注意，在这种情况下，玻姆到达时间分布的表现符合预期（见图15）。

在 [131], Galapon 和 Sombillo 认为，如果对到达时间算符的本征函数作出恰当诠释，标准方法就能避免这个问题。要理解他们的分析，我们需要考察时间算符本征函数的幺正时间演化。到达时间算符的简并本征函数

$\hat{}t_L$ 在动量表象中的本征值为 τ 的右-左基底 [132]可以表示为：

$$\tilde{\phi}_\tau^{(\pm)}(p) = \langle p|\tau^{(\pm)}\rangle = \sqrt{\frac{|p|}{m}}\frac{e^{-ipL/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ip^2\tau/2m\hbar}\Theta(p),$$

其中 L是到达点。为了得到位置空间中相应的振幅 $\langle x|e^{-i\hat{}Ht}|\tau^{(\pm)}\rangle$，我们需要在动量空间中对其积分。然而，该积分发散，因此我们引入一个收敛因子 $e^{-\epsilon p^2}$ 使得 [131]:

$$\phi^{(\pm)}(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0}\int \tilde{\phi}^{(\pm)}(p)e^{ipx/\hbar - ip^2t/2m\hbar}e^{-\epsilon p^2}dp.$$

到达时间本征函数的这种时间演化呈现出一种有趣的行为；当 $t = \tau$时，演化中的本征函数会变成一个在到达点处具有奇异支撑的函数 L （即，当 $\epsilon \to 0$时，积分会发散，见图 17的 (a) 和 (b) 面板）。基于这一观察，Galapon 提出，可将波函数位置不确定性最小时的瞬间解释为粒子的出现时刻 [80, 131]。这一机制表明，量子粒子可以通过平滑的幺正演化实现物质化，

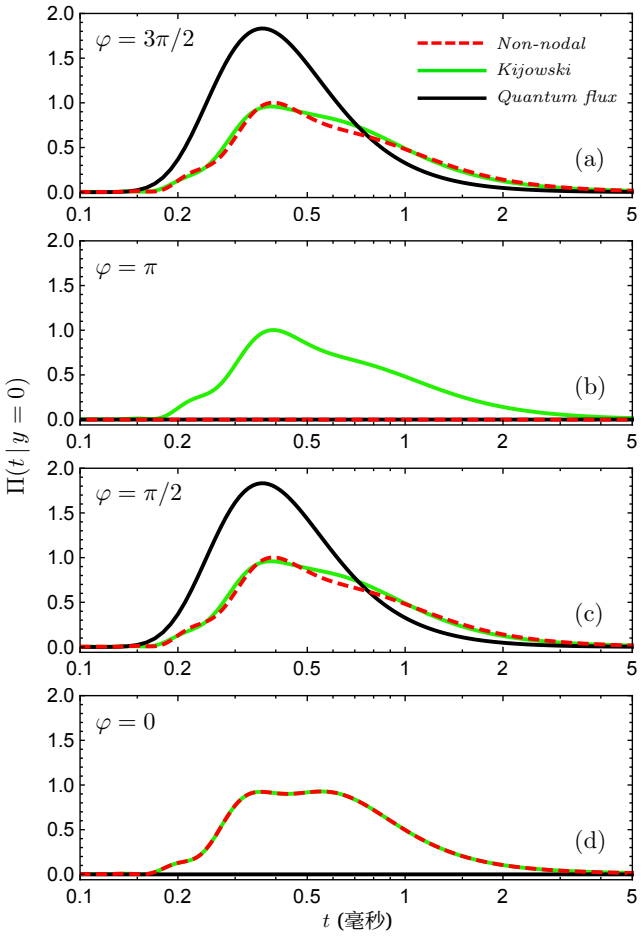

图18。**到达位于 $L_y = 0$ 的水平屏幕的粒子的到达时间分布，对应四种不同的相对相位**。面板 (a)、(b)、(c) 和 (d) 分别显示了屏幕距离为 m 时，四种不同相对相位下的到达分布 $\Pi\ t|y = L_y$ $L_y =$ 0 μ $\phi\ =\ 1.5\,\pi\ \ \pi\ \ 0.5\,\pi\ \ 0$ ( )。在所有面板中，红色虚线表示非节点结果，绿色实线表示 Kijowski 方法的预测，黑色实线表示量子通量方法。

而非在测量时突然坍缩。在传统描述中，初始波函数先经历幺正演化，然后在探测时刻坍缩；而在 Galapon 幺正坍缩方法[80]，中，顺序则恰好相反：初始波函数粒子在制备后立即坍缩为到达时间算符的某个本征函数，随后该本征函数依据薛定谔方程自然演化为一个在探测器位置具有奇异支撑的函数。值得注意的是，右左本征函数 $|\tau^{(\pm)}\rangle$ 并非到达时间算符唯一的基。这些本征函数的叠加形成偶奇宇称基 $(|\tau^{(+)}\rangle \pm |\tau^{(-)}\rangle)/\sqrt{2}$，其在动量表象中的形式为 [131]:

$$\tilde{\phi}_\tau^{(odd)} = \frac{\phi_\tau^{(+)} + \phi_\tau^{(-)}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{|p|}{m}} \frac{e^{-ipX/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip^2\tau/2m\hbar} \mathrm{sign}(p)$$

$$\tilde{\phi}_\tau^{(even)} = \frac{\phi_\tau^{(+)} - \phi_\tau^{(-)}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{|p|}{m}} \frac{e^{-ipX/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip^2\tau/2m\hbar}$$

偶宇称本征函数也称为非节点本征函数，而奇宇称本征函数则称为节点本征函数。非节点本征函数表现出与左右本征函数相同的行为：当时间等于到达时间算符的本征值时，它们会变为在到达点具有奇异支集的函数。这种幺正坍缩可以解释为粒子出现在到达点。然而，节点本征函数在所有时刻于到达点处均为零 t，尽管它在 $t = \tau$处具有最小的位置不确定度（见图17的（c）和（d）面板）。Galapon 和 Sombillo 指出，如果初始波函数的支集包含正、负动量，那么该态可以坍缩为到达时间算符的非节点或节点本征函数。因此，如果只关注伴随粒子探测（出现）的到达时间测量，那么相关的到达时间分布仅来自非节点本征函数，即 $\Pi^{(non)} \equiv |\langle\tau^{(non)}|\psi_0\rangle|^2$。在图18中，将非节点到达时间分布 $\Pi^{(non)}$与 Kijowski 到达时间分布和量子通量进行比较；所考虑的是一个双缝装置，水平屏幕放置在 $L_y = 0$处，并取不同的相对相位。如图18所示，与量子通量到达时间分布一样，当 $\varphi = \pi$时，非节点到达时间分布按预期会消失，而 Kijowski 到达时间分布则没有这一行为。这一事实清楚地揭示了这些方案之间的差异，可以通过所提出的双缝装置直接检验。

---

[1] 正如泡利所示， [133], 如果哈密顿量谱是离散的或有下界，那么就不存在与哈密顿量正则共轭的自伴时间算符。[2] 经过数十年的相关理论争论， [69, 73],看来，唯一达成共识的看法是：一般而言，如何计算时间分布并没有共识。一方面，有些作者认为，尽管泡利提出了反对意见 [134, 135]，仍可通过多种方式引入恰当的时间算符 [71, 78, 79, 82, 85, 136]。另一方面，另一些作者认为，尽管存在量子芝诺悖论 [106, 107], ，事件的时间分布仍可在不直接使用自伴时间算符的情况下，按照标准诠释进行处理，而且所得结果与玻姆诠释的结果相同——

诠释 [44, 45, 47–50]。另一些作者则讨论了不同方法所得结果之间的差异 [3, 8, 16, 19, 39, 51, 74, 112, 129–131, 137, 138] 。[3] T. c. v. Zimmermann、S. Mishra、B. R. Doran、D. F. Gordon 和 A. S. Landsman，Phys. Rev. Lett. 116，233603（2016）。[4] M. Kataoka、N. Johnson、C. Emary、P. See、J. P. Grif- fiths、G. A. C. Jones、I. Farrer、D. A. Ritchie、M. Pepper 和 T. J. B. M. Janssen，Phys. Rev. Lett. 116，126803（2016）。[5] P. Kolenderski、C. Scarcella、K. D. Johnsen、D. R. Hamel、C. Holloway、L. K. Shalm、S. Tisa、A. Tosi、K. J. Resch 和 T. Jennewein，《科学报告》4，1（2014）。[6] S. Frabboni、A. Gabrielli、G. Carlo Gazzadi、F. Giorgi、G. Matteucci、G. Pozzi、N. S. Cesari、M. Villa 和 A. Zoccoli，《超显微学》116，73（2012）。[7] C. Kurtsiefer、T. Pfau 和 J. Mlynek，《自然》386，150（1997）。[8] H. Nitta 和 T. Kudo，Phys. Rev. A 77，014102（2008）。[9] S. Das、M. N¨oth 和 D. D¨urr，Phys. Rev. A 99，052124（2019）。[10] S. Das、D.-A. Deckert、L. Kellers 和 W. Struyve，arXiv 预印本 arXiv:2211.13362（2022）。[11] G. Allcock，Annals of Physics 53，253（1969）。[12] J. Kijowski，Rep. Math. Phys. 6，361（1974）。[13] R. Werner，J. Math. Phys. 27，793（1986）。[14] B. Mielnik，《物理学基础》24，1113（1994）。[15] A. Marchewka 和 Z. Schuss，Phys. Rev. A 63，032108（2001）。[16] N. Vona、G. Hinrichs 和 D. D¨urr，Phys. Rev. Lett. 111，220404（2013）。[17] L. Maccone 和 K. Sacha，Phys. Rev. Lett. 124，110402（2020）。[18] E. O. Dias 和 F. Parisio，Phys. Rev. A 95，032133（2017）。[19] S. Das 和 M. N¨oth，《英国皇家学会会刊A辑》477，20210101（2021）。[20] S. Das 和 W. Struyve，Phys. Rev. A 104，042214（2021）。[21] M. J. Kazemi 和 V. Hosseinzadeh，Phys. Rev. A 107，012223（2023）。[22] A. Ayatollah Rafsanjani、M. Kazemi、V. Hossein- zadeh 和 M. Golshani，《到达时间中的非局域干涉》，arXiv 电子预印本，arXiv:2307.04811（2023），arXiv:2307.04811 [quant-ph].[23]请注意，海森堡位置算符描述的是特定时刻的位置测量，而非随机时刻的位置测量 [139，140]。换言之，$|\psi_t(x)|^2$ 只是 *conditional* 位置概率密度 $\mathbb{P}(x|t)$ [17, 18, 116, 131], , 而非位置—时间 *joint* 概率密度 $\mathbb{P}(x\ t)$ [10, 85, 87]。[24] D. S. Shucker，《泛函分析杂志》38，146（1980）。[25] S. Wolf 和 H. Helm，Phys. Rev. A 62，043408（2000）。[26] A. J. Bracken 和 G. F. Melloy，《物理学杂志A辑：数学与一般物理》27，2197（1994）。[27] H. F. Hofmann，Phys. Rev. A 96，020101（2017）。[28] B. Korzh、Q.-Y. Zhao、J. P. Allmaras、S. Frasca、T. M. Autry、E. A. Bersin、A. D. Beyer、R. M. Briggs、B. Bum- ble、M. Colangelo 等，《自然·光子学》14，250（2020）。[29] S. Steinhauer、S. Gyger 和 V. Zwiller，Applied Physics Letters 118，100501（2021）。[30] H. Azzouz、S. N. Dorenbos、D. De Vries、E. B. Ure˜na，以及 V. Zwiller，AIP Advances 2，032124 (2012). [31] M. Rosticher, F. Ladan, J. Maneval, S. Dorenbos, T. Zijlstra, T. Klapwijk, V. Zwiller, A. Lupa¸scu, 和 G. Nogues，Applied Physics Letters 97, 183106 (2010). [32] F. Delgado, J. G. Muga, 和 G. Garc´ıa-Calder´on，Phys. Rev. A 74, 062102 (2006). [33] G. C. Hegerfeldt 和 J. G. Muga，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 43, 505303 (2010). [34] G. C. Hegerfeldt, J. G. Muga, 和 J. Mu˜noz，Phys. Rev. A 82, 012113 (2010). [35] D. Bohm，Phys. Rev. 85, 166 (1952). [36] E. Nelson, Phys. Rev. 150, 1079 (1966). [37] M. J. W. Hall, D.-A. Deckert, 和 H. M. Wiseman，Phys. Rev. X 4, 041013 (2014). [38] C. R. Leavens，Phys. Rev. A 58, 840 (1998). [39] S. Das 和 D. D¨urr，Sci. Rep. 9, 2242 (2019). [40] A. Marchewka 和 Z. Schuss，Physics Letters A 240, 177 1998( ). [41] A. Marchewka 和 Z. Schuss，Phys. Rev. A 61, 052107 (2000). [42] A. Marchewka 和 Z. Schuss, Phys. Rev. A 65, 042112 (2002). [43] R. Werner，载于《Annales de l'IHP Physique th´eorique》，第 47 卷（1987），第 429–449 页。[44] R. Tumulka，Annals of Physics 442, 168910 (2022). [45] R. Tumulka，Phys. Rev. A 106, 042220 (2022). [46] V. Dubey, C. Bernardin, 和 A. Dhar，Phys. Rev. A 103, 032221 (2021). [47] R. Tumulka, Communications in Theoretical Physics (2022). [48] T. Juri´c 和 H. Nikoli´c，The European Physical Journal Plus 137, 1 (2022). [49] D. Jurman 和 H. Nikoli´c，Physics Letters A 396, 127247 2021( ). [50] T. Juri´c 和 H. Nikoli´c, arXiv 预印本 arXiv:2207.09140 (2022). [51] S. Roncallo, K. Sacha, 和 L. Maccone，Quantum 7, 968 (2023). [52] J. A. Damborenea, I. L. Egusquiza, G. C. Hegerfeldt, 和 J. G. Muga，Phys. Rev. A 66, 052104 (2002). [53] J. Muga, S. Brouard, 和 D. Macias，Annals of Physics 240, 351 (1995). [54] J. J. Halliwell，Phys. Rev. A 77, 062103 (2008). [55] M. Andrews, C. Townsend, H.-J. Miesner, D. Durfee, D. Kurn, 和 W. Ketterle，Science 275, 637 (1997). [56] Y. Shin, M. Saba, T. A. Pasquini, W. Ketterle, D. E. Pritchard, 和 A. E. Leanhardt，Phys. Rev. Lett. 92, 050405 2004( ). [57] A. D. Cronin, J. Schmiedmayer, 和 D. E. Pritchard，Rev. Mod. Phys. 81, 1051 (2009). [58] M. Keller, M. Kotyrba, F. Leupold, M. Singh, M. Ebner, 和 A. Zeilinger，Phys. Rev. A 90, 063607 (2014). [59] R. I. Khakimov, B. Henson, D. Shin, S. Hodgman, R. Dall, K. Baldwin, 和 A. Truscott，《自然》540, 100 (2016). [60] C. Kurtsiefer 和 J. Mlynek，Applied Physics B 64, 85 (1996). [61] A. Gliserin, M. Walbran, 和 P. Baum，Review of Sci- entific Instruments 87, 033302 (2016). [62] C. Kurtsiefer, T. Pfau, C. R. Ekstrom, 和 J. Mlynek, Applied Physics B 60, 229 (1995). [63] J. R. Copley 和 T. J. Udovic，Journal of research of the National Institute of Standards and Technology 98, 71 1993( ).

[64] A. Kothe, J. Metje, M. Wilke, A. Moguilevski, N. Engel, R. Al-Obaidi, C. Richter, R. Golnak, I. Y. Kiyan, 和 E. F. Aziz，Review of Scientific Instruments 84, 023106 (2013). [65] N. Vona 和 D. D¨urr，《概率流在时间测量中的作用》（Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，2015），第 95–112 页。[66] J. C. Arce，Phys. Rev. A 85, 042108 (2012). [67] Y. Aharonov 和 D. Bohm，《物理评论》122, 1649 (1961). [68] H. Paul，《物理学年鉴》464, 252 (1962). [69] J. Muga 和 C. Leavens，Physics Reports 338, 353 (2000). [70] R. Giannitrapani，《国际理论物理学杂志》36, 1575 (1997). [71] N. Grot, C. Rovelli, 和 R. S. Tate, Phys. Rev. A 54, 4676 1996( ). [72] I. L. Egusquiza 和 J. G. Muga，Phys. Rev. A 61, 012104 1999( ). [73] G. Muga, R. S. Mayato, 和 I. Egusquiza，《量子力学中的时间》，第 734 卷（Springer Science & Business Media，2007）。[74] I. Egusquiza, J. Muga, B. Navarro, 和 A. Ruschhaupt, Physics Letters A 313, 498 (2003). [75] C. Leavens, Physics Letters A 338, 19 (2005). [76] C. Leavens, Physics Letters A 362, 256 (2007). [77] E. A. Galapon，《数学物理学杂志》45, 3180 2004( ). [78] E. A. Galapon, R. F. Caballar, 和 R. T. B. Jr，Phys. Rev. Lett. 93, 180406 (2004). [79] E. A. Galapon, F. Delgado, J. G. Muga, 和 I. n. Egusquiza，Phys. Rev. A 72, 042107 (2005). [80] E. A. Galapon，Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 465, 71 2009( ). [81] P. C. M. Flores 和 E. A. Galapon，Phys. Rev. A 99, 042113 2019( ). [82] E. A. Galapon，Phys. Rev. Lett. 108, 170402 (2012). [83] E. A. Galapon, Proceedings of the Royal Society of Lon- don. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 458, 2671 (2002). [84] E. O. Dias 和 F. Parisio，《物理评论A辑》95, 032133 (2017). [85] J. Kijowski，Phys. Rev. A 59, 897 (1999).[86]sgn($\hat{p}_\perp$) 算符的存在保证了该时间算符的自伴性，但会导致对易关系发生改变，即

$$[t_K \ H] \ = \hat{} \ , \hat{} \ i\hbar$$

sgn($\hat{p}_\perp$). [87] M. Daumer, D. D¨urr, S. Goldstein, 和 N. Zangh`ı，Jour- nal of Statistical Physics 88, 967 (1997). [88] J. Halliwell 和 J. Yearsley，Physics Letters A 374, 154 (2009). [89] S. Boonchui 和 A. Hutem，Journal of Physics A: Math- ematical and Theoretical 46, 105305 (2013). [90] V. Hannstein, G. C. Hegerfeldt, 和 J. G. Muga, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics 38, 409 2005( ). [91] C. Leavens，Physics Letters A 178, 27 (1993). [92] W. R. McKinnon 和 C. R. Leavens, Phys. Rev. A 51, 2748 1995( ). [93] C. Leavens，《超晶格与微结构》23, 795 (1998). [94] M. M. Ali, A. S. Majumdar, D. Home, 和 S. Sengupta，Phys. Rev. A 68, 042105 (2003).

[95] D. D¨urr、S. Goldstein 和 N. Zanghi，《统计物理学杂志》67，843（1992）。[96] A. Valentini 和 H. Westman，《英国皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》461，253（2005）。[97] G. Gr¨ubl 和 K. Rheinberger，《物理学杂志A辑：数学与一般物理》35，2907（2002）。[98] M. J. W. Hall、D.-A. Deckert 和 H. M. Wiseman，Phys. Rev. X 4，041013（2014）。[99] A. Viale、M. Vicari 和 N. Zangh`ı，Phys. Rev. A 68，063610（2003）。[100] T. Paul 和 T. Qureshi，Phys. Rev. A 95，042110（2017）。[101] S. Mishra、A. Venugopalan 和 T. Qureshi，Phys. Rev. A 100，042122（2019）。[102] A.-p. Fang、Y.-l. Chen、F.-l. Li、H.-r. Li 和 P. Zhang，Phys. Rev. A 81，012323（2010）。[103] J. Laurat、G. Keller、J. A. Oliveira-Huguenin、C. Fabre、T. Coudreau、A. Serafini、G. Adesso 和 F. Illuminati，《光学杂志B辑：量子与半经典光学》7，S577（2005）。[104] A. R. Barnea、O. Cheshnovsky 和 U. Even，Phys. Rev. A 97，023601（2018）。[105] W. Vassen、C. Cohen-Tannoudji、M. Leduc、D. Boiron、C. I. Westbrook、A. Truscott、K. Baldwin、G. Birkl、P. Cancio 和 M. Trippenbach，Rev. Mod. Phys. 84，175（2012）。[106] B. Misra 和 E. G. Sudarshan，《数学物理学杂志》18，756（1977）。[107] M. A. Porras、A. Luis 和 I. Gonzalo，Phys. Rev. A 90，062131（2014）。[108] 参见近期一些探讨这些问题的有趣论文，尤其是与到达时间问题[46, 50]相关的研究。[109] T. Fevens 和 H. Jiang，《工业与应用数学学会科学计算杂志》21，255（1999）。[110] Y. Aharonov、E. Cohen、F. Colombo、T. Landsberger、I. Sabadini、D. C. Struppa 和 J. Tollaksen，《美国国家科学院院刊》114，6480（2017）。[111] S. Pandey、H. Mas、G. Drougakis、P. Thekkeppatt、V. Bolpasi、G. Vasilakis、K. Poulios 和 W. von Klitzing，《自然》570，205（2019）。[112] C. Anastopoulos 和 N. Savvidou，Phys. Rev. A 95，032105（2017）。[113] G. C. Hegerfeldt，Phys. Rev. Lett. 54，2395（1985）。[114] C. T. Sebens，《物理学基础》49，365（2019）。[115] M. J. Kazemi、H. Hashamipour 和 M. H. Barati，Phys. Rev. A 98，012125（2018）。[116] D. R. Terno，Phys. Rev. A 89，042111（2014）。[117] Y. Aharonov 和 D. Bohm，Phys. Rev. 115，485（1959）。[118] H. Batelaan 和 A. Tonomura，《今日物理》62，38（2009）。[119] Y. Aharonov 和 A. Casher，Phys. Rev. Lett. 53，319（1984）。[120] I. Aitchison，《自然》341，109（1989）。[121] O. Carnal 和 J. Mlynek，Phys. Rev. Lett. 66，2689（1991）。[122] J. D. Perreault 和 A. D. Cronin，Phys. Rev. Lett. 95，133201（2005）。[123] S. Kocsis、B. Braverman、S. Ravets、M. J. Stevens、R. P. Mirin、L. K. Shalm 和 A. M. Steinberg，Science 332，1170（2011）。[124] W. P. Schleich、M. Freyberger 和 M. S. Zubairy，《物理评论A辑》

《物理评论A辑》87，014102（2013）。[125] T. M. Coffey 和 R. E. Wyatt，arXiv 预印本 arXiv:1109.4436（2011）。[126] T. M. Coffey、R. E. Wyatt 和 W. C. Schieve，Phys. Rev. Lett. 107，230403（2011）。[127] H. Ott，《物理学进展报告》79，054401（2016）。[128] A. Goussev，《物理评论A辑》91，043638（2015）。[129] C. Leavens，Physics Letters A 303，154（2002）。[130] C. Leavens，Physics Letters A 345，251（2005）。[131] D. L. B. Sombillo 和 E. A. Galapon，Annals of Physics 364，261（2016）。[132] J. Muga、C. Leavens 和 J. Palao，《物理评论A辑》58，4336（1998）。[133] W. Pauli，载于《物理学百科全书》第5/1卷，S. Flugge 编（施普林格，柏林，1958），第60页。

[134] E. Galapon，《伦敦皇家学会会刊》A辑：数学、物理与工程科学 458, 451 (2002). [135] J. Leon 和 L. Maccone，《物理学基础》47, 1597 2017( ). [136] P. C. Flores 和 E. A. Galapon，Phys. Rev. A 105, 062208 2022( ). [137] C. Anastopoulos，《国际理论物理学杂志》58, 890 (2019). [138] S. Das 和 W. Struyve，Phys. Rev. A 104, 042214 (2021). [139] D. D¨urr、S. Goldstein 和 N. Zangh`ı，《统计物理学杂志》116, 959 (2004). [140] D. D¨urr 和 S. Teufel，载于《量子力学中的多尺度方法》（施普林格，2004），第 41–58 页。