arXiv:2301.02644v1 [math.RT] 6 Jan 2023

准映射中的 $\mathfrak{sl}_2$ 2-表示

RAPHAEL ROUQUIER

1. Introduction

Kac-Moody 代数的 2-表示有两大类构造方法[Rou2]。一类是代数方法，例如通过分圆箭图 Hecke 代数的表示；另一类使用可构造层，例如箭图簇上的可构造层。这里我们描述一种新型的 2-表示，它使用相干层构造。

我们的动机之一是发展 Kac-Moody 代数 2-表示理论的仿射化。人们希望建立可对称化 Kac-Moody 代数仿射化的 2-表示理论，或者更确切地说，建立更大的 Maulik-Okounkov 代数的 2-表示理论 [MauOk]。

（几何）表示论的一个经典主题是，仿射化源于退化。作者与 Shan、Varagnolo 和 Vasserot [ShaVarVas, VarVas] 提出，与对称 Kac-Moody 代数正部相关的幺半范畴的仿射化，应当是导出范畴中的一个全幺半子范畴；该导出范畴由相应箭图的表示模叠的导出余切层上的 $\mathcal{O}$-模构成。即便在 $\mathfrak{sl}_2$的情形下，这个范畴的生成元与关系描述仍然缺失。

本文源于对相干层范畴上的 2-表示进行更深入理解的努力。Cautis、Kamnitzer 和 Licata 已给出若干构造（例如参见 [CauKaLi]）。我们在此研究另一种几何框架。Feigin、Finkelberg、Kuznetsov、Mirkovi´c 和 Braverman [FeiFiKuMi, Bra] 利用从 $\mathbf{P}^1$ 到旗簇的带基点拟映射空间（zastava 空间），构造了复半单李代数的 Verma 模。我们在此考察 $\mathfrak{sl}_2$的情形，此时 zastava 空间是光滑的，且就是仿射空间。我们证明，zastava 空间上的相干层为 $\mathfrak{sl}_2$ 提供了 Naisse-Vaz 意义下的 2-Verma 模 [NaiVa1]。加入超势并考虑矩阵分解后，我们得到 $\mathfrak{sl}_2$的简单 2-表示的一种实现。

感谢 Sergei Gukov 进行了有益的讨论。

2. Zastavas and correspondences

2.1. 准映射。我们固定一个域 k，并考虑定义在 k 上的簇。从 $\mathbf{P}^1 \to$ 到 $\mathbf{P}^1$、次数为 d 且将 ∞ 映到 ∞ 的映射空间，可识别为满足以下条件的多项式对 (g, h) 所构成的空间：g 和 h 没有公共根，$\deg(g(z) - z^d) < d$ 且 $\deg h < d$。

日期：2023年1月9日。作者衷心感谢美国国家科学基金会（资助编号 DMS-1702305）和西蒙斯基金会（资助编号 #376202）提供的支持。

从 $\mathbf{P}^1 \to$ 到 $\mathbf{P}^1$、在 ∞ 的一个邻域内定义且将 ∞ 映到 ∞ 的准映射的 Zastava 空间 V_d，是由上述多项式对构成的空间，但不要求它们没有公共根。存在一个同构

$$\mathbf{A}^{2d} \xrightarrow{\sim} V_d,\ (a,b) \mapsto (g(z) = a_1 + a_2 z + \cdots + a_d z^{d-1} + z^d, h(z) = b_1 + b_2 z + \cdots + b_d z^{d-1}).$$

$\mathbf{T} = \mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m$ 在 V_d上有作用。第一个 $\mathbf{G}_m$作用通过对变量z 进行缩放实现，权重为 -2。第二个 $\mathbf{G}_m$作用则以权重 2 标量作用于 $h(z)$。

2.2. 对应。设 $Y_d = V_d \times \mathbf{A}^1$。我们将 V_d 上的 T 作用扩展为 Y_d上的作用，令 T 在 $\mathbf{A}^1$ 上的作用权重为 $(-2,0)$。

我们有如下带有 T 作用的仿射簇图表

$$\begin{array}{ccc} & Y_d & \\ {\scriptstyle (g,h,z_0)\mapsto(g,h)} \swarrow & & \searrow {\scriptstyle (g,h,z_0)\mapsto((z-z_0)g,(z-z_0)h)} \\ V_d & \overset{\phi_d}{\qquad} \quad \overset{\psi_d}{\qquad} & V_{d+1} \end{array}$$

我们有如下函子

$$F_d = \psi_{d*} \circ \phi_d^* : D^b_{\mathbf{T}}(V_d\text{-qcoh}) \to D^b_{\mathbf{T}}(V_{d+1}\text{-qcoh})$$
$$E_d = \phi_{d*} \circ \mathbf{L}\psi_d^* : D^b_{\mathbf{T}}(V_{d+1}\text{-qcoh}) \to D^b_{\mathbf{T}}(V_d\text{-qcoh}).$$

2.3. 万能 Verma 模。设 $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ 为 $\mathfrak{sl}_2$的量子包络代数。它是由 e、f 和 $k^{\pm 1}$ 生成的 $\mathbf{Q}(v)$-代数，满足以下关系

$$ke = v^2 ek,\ kf = v^{-2} fk,\ ef - fe = \frac{k - k^{-1}}{v - v^{-1}}.$$

万能 Verma 模 M_κ 是定义在 $\mathbf{Q}(v,\kappa)$ 上的 $U_v(\mathfrak{sl}_2)$-模，其基为 $(m_d)_{d\geq 0}$，其中

$$k(m_d) = \kappa v^{-2d} m_d,\ e(m_d) = \delta_{d,0} m_{d-1} \text{ and } f(m_d) = \frac{v^{d+1} - v^{-d-1}}{v - v^{-1}} \cdot \frac{\kappa v^{-d} - \kappa^{-1} v^d}{v - v^{-1}}$$

将 κ特化为 v^λ，得到最高权为 λ的 Verma 模。

2.4. 几何实现。设 $\mathcal{C}$ 为双分次向量空间 N 构成的范畴，其中 $\dim(\bigoplus_{i\leq n,\ j\in\mathbf{Z}} N_{ij}) < \infty$ 对所有 n均成立。取双分次维数给出一个同构

$$K_0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}((v)) \otimes \mathbf{Z}[t^{\pm 1}],\ N \mapsto \sum_{i,j} v^i t^j \dim N_{ij}.$$

我们用 $\mathcal{T}_d$ 表示由对象$N \otimes \mathcal{O}_{V_d}$（$N \in \mathcal{C}$）生成的 $D^b_{\mathbf{T}}(V_d\text{-qcoh})$的满三角子范畴。

给定类为 $P \in \mathbf{Z}((v)) \otimes \mathbf{Z}[t^{\pm 1}]$ 的 $N \in \mathcal{C}$，并给定 $C \in D^b_{\mathbf{T}}(V_d\text{-qcoh})$，我们将 $P \cdot C$ 记作 $D^b_{\mathbf{T}}(V_d\text{-qcoh})$ 中的对象 $N \otimes_k C$（其在同构意义下良定义）。

我们置 $E = \bigoplus_{d\geq 0} E_d$ 和 $F = \bigoplus_{d\geq 0} tv^{-2d} F_d[1]$。下面的命题是下文引理 2.2 的直接推论。它是 Braverman 和 Finkelberg[BraFi] 一项结果的变体。

命题 2.1。 $[E]$ 和 $[F]$ 在 $M = \bigoplus_{d\geq 0} \mathbf{Q}(v,t) \otimes_{\mathbf{Z}[v,t]} K_0(\mathcal{T}_d)$ 上的作用给出了 $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ 的一个作用，并且存在一个表示的同构

$$\mathbf{Q}((v)) \otimes_{\mathbf{Q}(v)} M_{tv^{-1}} \xrightarrow{\sim} M,\ m_d \mapsto (1-v^2)^d [\mathcal{O}_{V_d}].$$

2.5. 模。设 $A_d = k[V_d] = k[a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d]$ 为一个双分次代数，其中 $\deg(a_i) = (2(d-i+1), 0)$，且 $\deg(b_i) = (2(d-i+1) -2)$。

设 $B_d = k[Y_d] = k[a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d, c]$ 为一个双分次代数，其中 $\deg(a_i) = (2(d-i+1), 0)$，$\deg(b_i) = (2(d-i+1) -2)$，且 $\deg(c) = (2, 0)$。

A_d 通过乘法在 B_d 上有一个双分次作用，而 A_{d+1} 在B_d 上的双分次作用则由乘法与代数态射复合给出

$$f : A_{d+1} \to B_d,\ a_i \mapsto a_{i-1} - ca_i \text{ and } b_i \mapsto b_{i-1} - cb_i$$

其中我们将 $a_0 = b_0 = b_{d+1} = 0$ 和 $a_{d+1} = 1$ 置于 B_d中。

通过等价 Γ: $D^b_{\mathbf{T}}(V_d\text{-qcoh}) \xrightarrow{\sim} D^b_{bigr}(A_d\text{-Mod})$，函子 E_d 和 F_d 变为

$$F_d = B_d \otimes_{A_d} - : D^b_{bigr}(A_d\text{-Mod}) \to D^b_{bigr}(A_{d+1}\text{-Mod})$$
$$E_d = B_d \otimes^{\mathbf{L}}_{A_{d+1}} - : D^b_{bigr}(A_{d+1}\text{-Mod}) \to D^b_{bigr}(A_d\text{-Mod}).$$

引理 2.2。 我们有 $[E_d(A_{d+1})] = \frac{1}{1-v^2}[A_d]$ 和 $[F_d(A_d)] = \frac{(1-t^{-2}v^{2(d+1)})(1-v^{2(d+1)})}{1-v^2}[A_{d+1}]$.

证明。我们有 $B_d \simeq A_d \otimes k[c]$ 作为双分次 A_d-模，第一条陈述由此得证。

第二个陈述由下文的引理 2.3 得出。 □

引理 2.3. 存在一个双分次 A_{d+1}-模的正合列

$$0 \to t^{-2}v^{2(d+1)} \frac{1-v^{2(d+1}}{1-v^2} A_{d+1} \to \frac{1-v^{2(d+1)}}{1-v^2} A_{d+1} \to B_d \to 0.$$

证明。设 $C = k[a_1, \ldots, a_d, c', b_1, \ldots, b_d, c'']$。态射 f是以下代数态射的复合：

$$f_1 : k[a_1, \ldots, a_{d+1}, b_1, \ldots, b_{d+1}] \to k[a_1, \ldots, a_d, c', b_1, \ldots, b_{d+1}]$$
$$b_i \mapsto b_i,\ a_i \mapsto \begin{cases} -c'a_1 & \text{for } i = 1 \\ a_{i-1} - c'a_i & \text{for } 1 < i \leq d \\ a_d - c' & \text{for } i = d+1 \end{cases}$$
$$f_2 : k[a_1, \ldots, a_d, c', b_1, \ldots, b_{d+1}] \xrightarrow{\sim} k[a_1, \ldots, a_d, c', b_1, \ldots, b_{d+1}]$$
$$a_i \mapsto a_i,\ c' \mapsto c',\ b_i \mapsto \begin{cases} b_i & \text{for } i \leq d \\ b_{d+1} + c' & \text{for } i = d+1 \end{cases}$$
$$f_3 : k[a_1, \ldots, a_d, c', b_1, \ldots, b_{d+1}] \to C$$
$$a_i \mapsto a_i,\ c' \mapsto c',\ b_i \mapsto \begin{cases} -c''b_1 & \text{for } i = 1 \\ b_{i-1} - c''b_i & \text{for } 1 < i \leq d \\ b_d - c'' & \text{for } i = d+1 \end{cases}$$

$$f_4 : C \to k[a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d, c]$$

$$a_i \mapsto a_i,\ b_i \mapsto b_i,\ c' \mapsto c,\ c'' \mapsto c.$$

第一个态射使 $k[a_1, \dots, a_d, c', b_1, \dots, b_{d+1}]$ 成为一个自由的 $k[a_1, \dots, a_{d+1}, b_1, \dots, b_{d+1}]$-模，其基为 $(1, c', \dots, c'^d)$。

第三个态射使 C 成为以 $(1, c'', \dots, c''^d)$ 为基的自由 $k[a_1, \dots, a_d, c', b_1, \dots, b_{d+1}]$-模。最后一个态射使 $k[a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d, c]$ 适合纳入一个 C-模的正合列

$$0 \to C \xrightarrow{c'-c''} C \xrightarrow{f_4} k[a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d, c] \to 0.$$

令 L_1（分别为 L_0）为以 $(e_{ij})_{0 \le i,j \le d}$（分别为 $(f_{ij})_{0 \le i,j \le d}$）为基的自由 A_{d+1}-模。我们有一个 A_{d+1}-模的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_1 & \xrightarrow{d_1} & L_0 & \xrightarrow{d_0} & k[a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d, c] & \longrightarrow & 0 \\ & & \sim\downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \sim\downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow[c'-c'']{} & C & \xrightarrow[f_4]{} & k[a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d, c] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 C 上的 A_{d+1}-模结构来自 $f_3 \circ f_2 \circ f_1$，$k[a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d, c]$ 上的结构来自 $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$，并且

$$d_0(f_{ij}) = c^{i+j}$$

$$d_1(e_{ij}) = \begin{cases} f_{i+1,j} - f_{i,j+1} & \text{for } 0 \le i, j < d \\ -(a_1 f_{0j} + a_2 f_{1j} + \cdots + a_{d+1} f_{dj} + f_{d,j+1}) & \text{for } i = d,\ 0 \le j < d \\ b_1 f_{i0} + b_2 f_{i1} + \cdots + b_{d+1} f_{id} & \text{for } j = d \end{cases}$$

$$\alpha_1(e_{ij}) = c'^i c''^j$$

$$\alpha_0(f_{ij}) = c'^i c''^j$$

注意，d_1 和 d_0 是双分次模的态射，且

$$\deg(e_{ij}) = \begin{cases} (2(i+j+1), 0) & \text{for } j \ne d \\ (2(i+d+1), -2) & \text{for } j = d \end{cases} \text{ and } \deg(f_{ij}) = (i+j, 0).$$

A_{d+1}-模 L_0 由 $\{d_1(e_{ij})\}_{0 \le i < d,\ 0 \le j \le d}$ 和 $(f_{i0})_{0 \le i \le d}$ 生成。因此，复形 $0 \to L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \to 0$ 同伦等价于一个如下形式的复形

$$0 \to \bigoplus_{0 \le j \le d} A_{d+1} e_{d,j} \to \bigoplus_{0 \le i \le d} A_{d+1} f_{i,d} \to 0.$$

引理由此得出。 □

3. 2-Representations2-表示

现在我们构造 F 和 F^2 的自同态，从而得到一个 2-表示结构。

- 令 $\rho_d\colon Y_d \to \mathbf{A}^1$ 为投影映射。它给出一个态射 $k[X] = \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}) \to \Gamma(\mathcal{O}_{Y_d})$，从而得到一个态射 $k[X] \to \mathrm{End}(F_d)$。

- $\mathbf{G}_a$ 在 $V_d \times V_{d+1}$ 上有一个作用，定义为 $u \cdot \big((g,h),(g',h')\big) = \big((g,h),(g',h'+u)\big)$。它给出一个映射 $\mathrm{Lie}(\mathbf{G}_a) = k \to \Gamma(\mathcal{T}_{V_d \times V_{d+1}})$，我们用 ω' 表示 1 的像，它是 $V_d \times V_{d+1}$上的一个向量场。

态射 $\phi_d \times \psi_d\colon Y_d \to V_d \times V_{d+1}$ 是一个闭浸入，我们将 Y_d 与其像等同。存在一个典范同构

$$F_d \xrightarrow{\sim} \pi_{2*}\big(\mathcal{O}_{Y_d} \otimes \pi_1^*(-)\big) \tag{1}$$

其中 $\pi_1\colon V_d \times V_{d+1} \to V_d$ 是第一投影，$\pi_2\colon V_d \times V_{d+1} \to V_{d+1}$ 是第二投影。

令 ω'' 为规范映射复合后的 ω' 的像

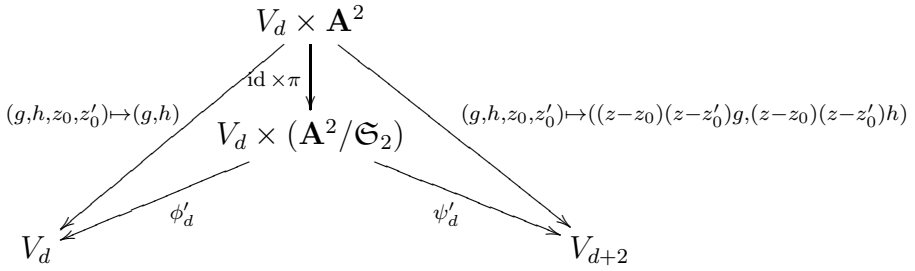
$$\Gamma(\mathcal{T}_{V_d \times V_{d+1}} \otimes \mathcal{O}_{Y_d}) \to \Gamma(\mathcal{N}_{Y_d/(V_d \times V_{d+1})}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{V_d \times V_{d+1}}}(\mathcal{O}_{Y_d}, \mathcal{O}_{Y_d}).$$

通过同构 (1)，ω'' 定义了一个元素 $\omega \in \mathrm{Hom}(F_d, F_d[1])$。

- 存在一个同构

$$V_d \times \mathbf{A}^2 \xrightarrow{\sim} Y_d \times_{V_{d+1}} Y_{d+1},\ ((g,h,z_0,z_0') \mapsto \big((g,h,z_0),((z-z_0)g,(z-z_0)h,z_0')\big).$$

存在一个交换图



对于某些映射 ϕ_d' 和 ψ_d'，其中 $\pi : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2/\mathfrak{S}_2$ 是商映射。

因此，我们得到一个同构

$$F_{d+1}F_d \xrightarrow{\sim} \psi_{d*}'((\mathcal{O}_{V_d} \boxtimes \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^2})) \otimes \phi_d'(-)). \tag{2}$$

设 ∂ 是 $k[X_1,X_2] = \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^2})$ 的自同态，其定义如下：

$$\partial(P) = \frac{P(X_1,X_2) - P(X_2,X_1)}{X_2 - X_1}.$$

它诱导出 $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^2})$ 的一个自同态，因此，通过同构 (2)，得到 $F_{d+1}F_d$ 的一个自同态 T。

上述 $((E_d)_d, X, T)$ 的数据给出了 $\mathfrak{sl}_2^+$ 的一个 2-表示，但它不能扩展为 $\mathfrak{sl}_2$ 的一个 2-表示。不过，$((E_d)_d, X, T, \omega)$ 的数据则给出了 Naisse 和 Vaz 定义的一个 2-Verma 模（参见 [NaiVa1] 和 [NaiVa2，定义 4.1]）。

定理 3.1. 函子 E_d, F_d 和自然变换 X, ω, T 在 $\bigoplus_d \mathcal{T}_d$ 上为 $\mathfrak{sl}_2$ 定义了一个 2-Verma 模，该模等价于 [NaiVa1，第 5.2] 节中的泛 2-Verma 模。

证明。我们证明，我们的构造等价于 Naisse-Vaz 万能 Verma 模[NaiVa1, §5.2]。

令 $\Omega_d = \mathrm{Ext}^*_{A_d}(A_d/(b_1, \dots, b_d)\ A_d/(b_1, \dots, b_d))$。分次代数 $\Lambda(b_1^*, \dots, b_d^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^*_{k[b_1,\dots,b_d]}(k, k)$ 的典范 Koszul 同构诱导出一个分次代数同构

$$\iota : k[a_1, \dots, a_d] \otimes \Lambda(b_1^*, \dots, b_d^*) \xrightarrow{\sim} \Omega_d.$$

我们用 ω_i 表示 $(-1)^{d+1-i} b^*_{d+1-i}$ 在 Ω_d 中的像，用 x_i 表示 $(-1)^i a_{d+1-i}$的像。我们有 $\Omega_d = k[x_1, \dots, x_d] \otimes \Lambda(\omega_1, \dots, \omega_d)$。

考虑代数同态 $h\colon A_d \otimes A_{d+1} \to B_d,\ r \otimes s \mapsto rf(s)$。我们令 $a_i = a_i \otimes 1, b_i = b_i \otimes 1$, $a'_j = 1 \otimes a_j$ 和 $b'_j = 1 \otimes b_j$ 分别表示 $1 \le i \le d$ 和 $1 \le j \le d+1$。

态射 h 是满射，其核是由 $b_i = b'_i + \tilde{c} b_i - b_{i-1}$生成的理想，其中 $\tilde{c} = a_d - a'_{d+1}$。

设 $R = k[a_1, \dots, a_d, \tilde{c}] \subset A_d \otimes A_{d+1}$ 和 $I = \bigoplus_{1 \le i \le d+1} Rb_i$是 $L = \bigoplus_{1 \le i \le d+1} Rb'_i \oplus \bigoplus_{1 \le i \le d} Rb_i$ 的一个 R-子模。态射 h 限制为代数的满射同态$S_R(L) \to B_d$，其核由 L生成。

I 在 $\mathrm{Hom}_R(L, R) = \bigoplus_{1 \le i \le d+1} Rb'^*_i \oplus \bigoplus_{1 \le i \le d} Rb^*_i$中的正交补为

$$I^\perp = \bigoplus_{1 \le i \le d+1} R(b'^*_{i+1} + b^*_i - \tilde{c} b'^*_i).$$

定义

$$\Omega_{d,d+1} = \mathrm{Ext}^*_{A_d \otimes A_{d+1}}\Big(\big(A_d/(b_1, \dots, b_d)\big) \otimes \big(A_{d+1}/(b_1, \dots, b_{d+1})\big), B_d\Big).$$

The 分解 $A_d \otimes A_{d+1} = S_R(L) \otimes k[a'_1, \dots, a'_d]$ 诱导出一个同构

$$\Omega_{d,d+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^*_{S_R(L)}(S_R(L)/(L), B_d)$$

因此

$$\Omega_{d,d+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^*_{S_R(L)}(S_R(L)/(L), S_R(L)/(I)) \xrightarrow{\sim} \Lambda_R(\mathrm{Hom}_R(L, R)/I^\perp).$$

令 ω_i 为 $\Omega_{d,\ d+1}$ 中对应于 $(-1)^{d+2-i} b'^*_{d+2-i}$ 在 $\mathrm{Hom}_R(L, R)/I^\perp$ 中的像的元素。令 y_i 为 $(-1)^i a_{d+1-i}$ 在 $\Omega_{d,\ d+1}$ 中的像，ξ 为 $\tilde{c}$ 的像。我们有 $\Omega_{d,\ d+1} = k[y_1, \dots, y_d, \xi] \otimes \Lambda(\omega_1, \dots, \omega_{d+1})$。$\Omega_d$ 和 Ω_{d+1} 在 $\Omega_{d,\ d+1}$ 上的作用由乘法给出，其前面接有代数态射

$$\Omega_d \to \Omega_{d,d+1},\ x_i \mapsto y_i,\ \omega_i \mapsto \omega_i + \xi\omega_{i+1}$$
$$\Omega_{d+1} \to \Omega_{d,d+1},\ x_i \mapsto y_i + \xi y_{i-1},\ \omega_i \mapsto \omega_i.$$

令 $\mathcal{T}'_d$ 为 $D^b_{bigr}(\Omega_d)$ 的全三角子范畴，由对象 $N \otimes k[x_1, \dots, x_d]$（$N \in \mathcal{C}$）生成。

存在一个三角范畴等价 $R\mathrm{Hom}^\bullet_{A_d}(A_d/(b_1, \dots, b_d)\ -)\colon \mathcal{T}_d \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}'_d$。该等价将 E_d 和 F_d 的作用与 $\Omega_{d,d+1} \otimes_{\Omega_d} -$ 和 $\Omega_{d,d+1} \otimes_{\Omega_{d+1}} -$的作用交织起来。这表明我们的构造与 Naisse 和 Vaz 的构造等价。 □

4. Finite-dimensional Simple modules

现在我们固定 $n \geq 0$。我们通过在泛 2-Verma 模上定义一个超势并考察矩阵分解，来定义 $\mathfrak{sl}_2$ 的一个简单 2-表示。

令 $(g,\ h) \in V_d$。我们有

$$\frac{h(z^{-1})}{g(z^{-1})} = z\frac{b_d + b_{d-1}z + \cdots + b_1 z^{d-1}}{1 + a_d z + \cdots + a_1 z^d} = z\sum_{i\geq 0}(b_d v_{i,d} + \cdots + b_1 v_{i-d+1,d})z^i$$

对于某些多项式函数 $v_{i,\ d}$ 关于 a_1、.....、a_d，满足 $v_{0,\ d} = 1$ 以及 $v_{i,\ d} = 0$ 对于 $i < 0$。

我们定义一个态射 $W_{d,\ n}$： $V_d \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$，其定义为

$$W_{d,n}\big((g,h),(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\big) = \sum_{i=0}^{n}\gamma_{i+1}(b_d v_{i,d} + \cdots + b_1 v_{i-d+1,d})$$

其中我们令 $\gamma_{n+1} = 1$。

注意，$W_{d+1,n} \circ (\psi_d \times \mathrm{id}) = W_{d,n} \circ (\phi_d \times \mathrm{id})$，我们将该态射记为 $W_{d,n}\ Y_d \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$。我们赋予 $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}\ k[\gamma_1,\ldots,\gamma_n]$ 一个 $(\mathbb{G}_m)^2$ 作用，其中 $\deg(\gamma_i) = (2(n+1-i),\ 0)$。这使得 $W_{d,n}$ 成为次数为 $(2(n+1)\ -2)$ 的齐次映射。

我们将 $\mathcal{T}_{d,n}$ 记为 $W_{d,n}$ 在 $V_d \times \mathbb{A}^n$ 上的 $(\mathbb{G}_m)^2$-等变矩阵分解的同伦范畴。§2.2 和 §2.4 中的函子 E_d 和 F_d 可扩展为范畴$\mathcal{T}_{d,n}$ 与$\mathcal{T}_{d+1,n}$之间的函子。

命题 4.1. 我们有 $\mathcal{T}_{d,n} = 0$，若 $d > n$。

$[E]$ 和 $[F]$ 在 $\bigoplus_{d=0}^{n-1} \mathbb{Q} \otimes K_0(\mathcal{T}_{d,n})$ 上的作用给出一个 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的作用，相应的表示是一个维数为 $n+1$ 的单表示。

(E, F, T, X) 的数据定义了 $\mathfrak{sl}_2$ 在 $\bigoplus_{d=0}^{n}\mathcal{T}_{d,\ n}$ 上的一个 2-表示，它等价于 [Rou2, §4.3.2] 的简单 2-表示 $\mathcal{L}(n)$ 的对象所成有界复形的同伦范畴。

证明。若 $d > n$，则

$$W_{d,n} = b_d(\gamma_1 + \sum_{i=1}^{n}\gamma_{i+1}v_{i,d}) + b_{d-1}(\gamma_2 + \sum_{i=2}^{n}\gamma_{i+1}v_{i-1,d}) + \cdots + b_{d-n+1}(\gamma_n + v_{1,d}) + b_{d-n}.$$

因此，矩阵分解的同伦范畴$\mathcal{T}_{d,\ n}$ 为 0。

现在假设 $d \leq n$。我们有

$$W_{d,n} = b_d(\gamma_1 + \sum_{i=1}^{n}\gamma_{i+1}v_{i,d}) + b_{d-1}(\gamma_2 + \sum_{i=2}^{n}\gamma_{i+1}v_{i-1,d}) + \cdots + b_1(\gamma_d + \sum_{i=d}^{n}\gamma_{i+1}v_{i-d+1,d}).$$

令 $P_n = k[x_1,\ldots,x_n]$ 为一个分次代数，其 $\deg(x_i)$ 为 $= 2$。定义

$$A_{d,n} = (A_d \otimes k[\gamma_1,\ldots,\gamma_n])/(\{b_r\}_{1\leq r\leq d}\bigcup\{\gamma_r + \sum_{i=r}^{n}\gamma_{i+1}v_{i-r+1,d}\}_{1\leq r\leq d}).$$

包含映射诱导出一个同构

$$k[a_1,\dots,a_d]\otimes k[\gamma_{d+1},\dots,\gamma_n]\xrightarrow{\sim} A_{d,n}.$$

与该同构的逆复合

$$k[a_1,\dots,a_d,\gamma_{d+1},\dots,\gamma_n]\xrightarrow{\sim} P_n^{\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_{n-d}},\ a_i\mapsto e_{d-i+1}(x_1,\dots,x_d),\ \gamma_i\mapsto e_{n-i+1}(x_{d+1},\dots,x_n)$$

我们得到分次代数的一个同构

$$P_n^{\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_{n-d}}\xrightarrow{\sim} A_{d,n}.$$

我们将 $A_{d,n}$ 视为一个 Z-分次代数，其中 $\deg(a_i)=2(d-i+1)$，且 $\deg\gamma_i=2(n+1-i)$。

我们有一个等价 $D^b(A_{d,n}\text{-模gr})\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}_{d,n}$。

设 $\mathcal{T}'_{d,n}$ 为 $W_{d,n}$ 在 $Y_d\times\mathbf{A}^n$ 上的 $(\mathbf{G}_m)^2$-等变矩阵分解的同伦范畴。设 $B'_{d,n}=A_{d,n}\otimes k[c]$。我们有一个等价 $D^b(B'_{d,n}\text{-模gr})\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}'_{d,n}$。令$B_{d,n}=B'_{d,n}\otimes_{A_{d+1}[\gamma_1,\dots,\gamma_n]}A_{d+1,n}$。我们有

$$B_{d,n}=B'_{d,n}/(\gamma_{d+1}+\sum_{i=d+1}^{n}\gamma_{i+1}\sum_{j=0}^{i-d}v_{j,d}c^{i-j-d})$$

且包含映射诱导出一个同构

$$k[a_1,\dots,a_d,c,\gamma_{d+2},\dots,\gamma_n]\xrightarrow{\sim} B_{d,n}.$$

与该同构的逆复合

$$k[a_1,\dots,a_d,c,\gamma_{d+2},\dots,\gamma_n]\xrightarrow{\sim} P_n^{\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_{n-d-1}}$$

$$a_i\mapsto e_{d-i+1}(x_1,\dots,x_d),\ c\mapsto -x_{d+1},\ \gamma_i\mapsto e_{n-i+1}(x_{d+2},\dots,x_n)$$

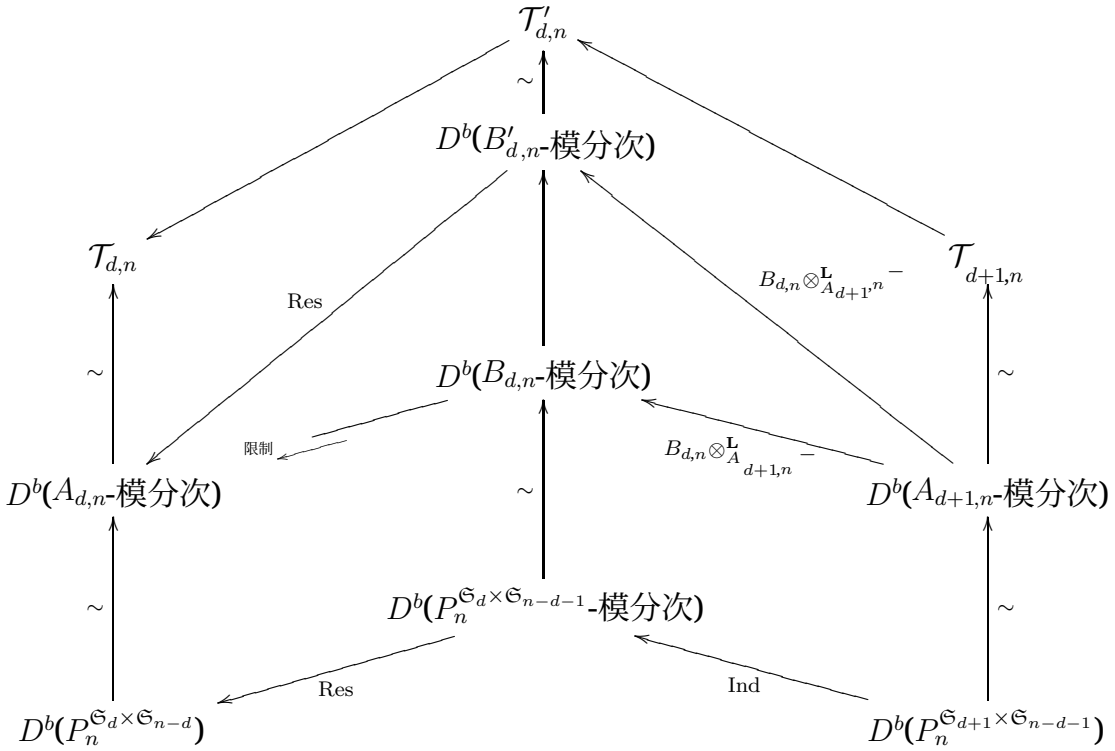
我们得到一个分次代数的同构

$$P_n^{\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_{n-d-1}}\xrightarrow{\sim} B_{d,n}.$$

存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
P_n^{\mathfrak{S}_{d+1}\times\mathfrak{S}_{n-d-1}} & \hookrightarrow & P_n^{\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_{n-d-1}}\\
\sim\downarrow & & \downarrow\sim\\
k[a_1,\dots,a_{d+1},\gamma_{d+2},\dots,\gamma_n] & \longrightarrow & k[a_1,\dots,a_d,c,\gamma_{d+2},\dots,\gamma_n]\\
\sim\downarrow & & \downarrow\sim\\
A_{d+1,n} & \longrightarrow & B_{d,n}\\
\uparrow & & \uparrow\\
A_{d+1}[\gamma_1,\dots,\gamma_n] & \xrightarrow[f]{} & B_d[\gamma_1,\dots,\gamma_n]
\end{array}$$

我们推导出存在一个交换图



由此可得，$\mathcal{T}_{d,\ n}$ 等价于有限生成分次（$k[a_1,\dots,a_d]\otimes k[\gamma_{d+1},\dots,\gamma_n]$）-模的有界导出范畴，其中 $\deg(a_i)=2(d-i+1)$，且 $\deg(\gamma_i)=2(n+1-i)$。类似地，$W_{d,\ n}$ 在 $Y_d\times\mathbf{A}^n$ 上的（$\mathbf{G}_m$）²-等变矩阵分解的同伦范畴，等价于有限生成分次（$k[a_1,\dots,a_d]\otimes k[\gamma_{d+1},\dots,\gamma_n]$）-模的有界导出范畴，其中 $\deg(a_i)=2(d-i+1)$，且 $\deg(\gamma_i)=2i$。由此我们恢复了通常的构造，即 $\mathfrak{sl}_2$ 的简单 2-表示 $\mathcal{L}(n)$（的同伦范畴）（参见 [Rou1，第 5.2] 节和 [Rou2，第 4.3.2] 节）。□

这一构造是 [NaiVa1，§7] 中基于添加微分的构造的 Koszul 对偶对应物。

References

[Bra] A. Braverman，《通过仿射李代数进行瞬子计数 I：仿射旗流形的等变 J 函数与 Whittaker 向量》，载于《代数结构与模空间》，第 113–132 页，CRM 讲义丛书，第 38 卷，美国数学会，2004年。

[BraFi] A. Braverman 和 M. Finkelberg，《通过等变 K 理论研究有限差分量子 Toda 格》，《变换群》10（2005年），363–386。

[考卡利] S. Cautis、J. Kamnitzer 和 A. Licata，相干层与范畴化 $\mathfrak{sl}_2$-作用，《杜克数学杂志》154（2010年），135–179。

[FeiFiKuMi] B. Feigin、M. Finkelberg、A. Kuznetsov 和 I. Mirkovi´c, 《半无限旗 II：拟映射空间的局部与整体交叉上同调》，载于《微分拓扑、无限维李代数及其应用》，第 113–148 页，美国数学会，1999年。[MauOk] D. Maulik 和 A. Okounkov, 《量子群与量子上同调》，Ast´erisque 408（2019年）。[NaiVa1] G. Naisse 和 P. Vaz, 《Verma 模范畴化的一种方法》，《伦敦数学会会刊》117（2018年），1181–1241。[NaiVa2] G. Naisse 和 P. Vaz, 《关于量子 $\mathfrak{sl}_2$ 的 2-Verma 模》，《Selecta Mathematica》24（2018年），3763–3821。[Rou1] R. Rouquier，2-Kac-Moody 代数，预印本 arXiv:0812.5023。[Rou2] R. Rouquier，箭图 Hecke 代数与 2-Lie 代数，《代数学通报》19（2012年），359–410。[ShaVarVas] P. Shan、M. Varagnolo 和 E. Vasserot，量子环代数的相干范畴化：SL(2) 情形，《纯粹与应用数学杂志》，2022年。[VarVas] M. Varagnolo 和 E. Vasserot，K理论 Hall 代数、量子群与超量子群，预印本 arXiv:2011.01203。

UCLA Mathematics Department, Los Angeles, CA 90095-1555, USA.电子邮箱地址：rouquier@math.ucla.edu