arXiv:2301.02645v1 [math.GT] 6 Jan 2023

广义考夫曼-哈拉里猜想成立

RHEA PALAK BAKSHI、HUIZHENG GUO、GABRIEL MONTOYA-VEGA、SUJOY MUKHERJEE 和 J´OZEF H. PRZYTYCKI

摘要。对于行列式为素数 p，的纽结约化交替图，Kauman-Harary 猜想指出，纽结的每一种非平凡 Fox p着色都会为其各条弧赋予不同的颜色。本文证明了一个猜想的推广。该猜想由 Asaeda、Przytycki 和 Sikora 于十九年前提出：对于行列式为素数 δ，的素链环约化交替图中的任意一对不同弧，都存在一种能够将它们区分开的 Fox δ着色。

目录

1. 交替猜想的历史 1 2. 预备知识 2 3. 广义 Kauman-Harary 猜想的证明 3 4. 非素交替链环 6 5. Fox 着色示例 7 6. 杂项 8 6.1. 伪着色 8 6.2. 未来方向 12 致谢 13 参考文献 13

1. 交替猜想的历史

1998年，Louis H. Kauman 和 Frank Harary 提出了以下猜想 [HK]:

交替猜想。设 D 是一个纽结 K 的约化交替图，其行列式为 p，其中 p 为素数。那么，每个非平凡的 p-着色都会为 D 的不同弧赋予不同的颜色。

这个猜想如今称为 Kauman-Harary猜想。该猜想已针对有理纽结[KL、PDDGS], Montesinos 纽结 [APS], 某些 Turk's head 纽结 [DMMS], 以及代数纽结 [DS]。2009年，omas W. Maman 和 Pablo Solis 运用伪着色的概念证明了这一猜想。Marta M. Asaeda、Adam S. Sikora 和本文第 h 位作者提出了这一猜想的一个推广，称为广义 Kauman-Harary（GKH）猜想，见 2004 [APS]。他们在同一篇论文中证明了该猜想对 Montesinos 链环成立。本文将证明该猜想在一般情形下成立。

本文结构如下。在下一节中，我们介绍 GKH 猜想，并在第3节证明该猜想。在第4节中，我们重新表述并证明适用于非素交替链环的猜想。第5节通过一些例子展示这些结果。最后一节讨论伪着色，并提出一些开放问题。

2020数学学科分类号。主要：57K10 次要：57M12。关键词和短语。链环行列式、双重分支覆盖、Fox 着色、Kauman-Harary猜想、纽结与链环、伪着色。

2. 预备知识

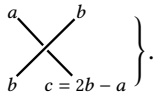
本节陈述 GKH 猜想的原始版本和另一版本。猜想的原始版本与广义版本之间的区别在于，前者针对行列式为素数的链环，而广义版本针对行列式不一定为素数的链环。需要注意的是，行列式为素数的链环只有霍普夫链环。

广义 Kauman-Harary 猜想。 若 D 是素链环 L 的约化交替图，则 D 的不同弧代表 $H_1(M_{(2)L}, \mathbb{Z})$ 中的不同元素，其中 $M_{(2)L}$ 表示沿着 L 分支的 S^3 双重分支覆盖。

GKH 猜想由 [APS] 提出，其使用沿着 S^3 分支的 L 双重分支覆盖的同调。在本文中，我们利用素链环 L 的图示 D，通过其 Fox 着色的通用[1]群 $Col(D)$ 来使用这一猜想的图示版本。

定义 2.1。 群 $\boldsymbol{Col(D)}$ 是一个阿贝尔群，其生成元以 D 的弧为索引，记作 $arcs(D)$，其关系由 D 的交叉点给出 $2b - a - c = 0$。更确切地说，

$$Col(D) = \left\{ arcs(D) \mid \right\}.$$



众所周知，$Col(D) = \mathbb{Z} \oplus H_1(M_{(2)L}, \mathbb{Z})$ (例如，参见 [Prz1])。

定义 2.2。 令 $Col^{trivial}(D) \cong \mathbb{Z}$ 为 D 的平凡着色群。该群嵌入于 $Col(D)$ 中，商群 $Col(D)Col^{trivial}(D)$ 称为 ***Fox*** 着色约化群。记作 $Col^{red}(D)$。

注意，对于链环 L 的图示 D，$Col^{red}(D) = H_1\left(M_{(2)L}, \mathbb{Z}\right)$；而对于非分裂交替链环，该群是有限的，且行列式非零。

以下猜想的前两条陈述与原始 GKH 猜想等价，而第 (c) 部分则给出了一个扩展。

猜想 2.3（广义 Kauman-Harary 猜想的等价形式）

设 D 为一个交替素链环的约化交替图，并令 $\delta(D)$ 表示其行列式的绝对值。

(a) 令 $Z^{|arcs|}$ 表示自由阿贝尔群 $Z^{|arcs|} = \{arcs(D) \mid \emptyset\}$。考虑映射 $Z^{|arcs|} \xrightarrow{\beta} Col(D)$。*en* β 在 D 的弧上是单射，即对于 $i \neq j$，$\beta(a_i) \neq \beta(a_j)$。*(b)* 图 D 有 t 个 *Fox* $\delta(D)$-着色 $y_1, y_2, \ldots, y_t$，使得对于每一对不同的弧 a_i, a_j，都存在 y_k 使得 $y_k(a_i) \neq y_k(a_j)$。*(c)* 若 $Col^{red}(D) = Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \cdots \oplus Z_{n_s}$ 且 $n_{i+1} | n_i$，那么存在 s 个 *Fox* n_1-着色，能够区分 D 的所有弧。注意，s 严格小于 D 的交叉点数。

注 *2.4*。猜想 *2.3* 的 *(a)* 部分和 *(b)* 部分彼此等价，因为对于有限群 G，我们有 $G \cong Hom(G, Z_{n_1}) \cong Hom(G, Z_{\delta(D)})$，其中 $G = Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \cdots \oplus Z_{n_s}$，且 $n_{i+1} | n_i$ 和 $\delta(D) = n_1 n_2 \cdots n_s$。特别地，$Hom(Col^{red}(D), Z_{\delta(D)}) \cong Hom(Col^{red}(D), Z_{n_1}) \cong Col^{red}(D)$。因此，我们可以研究一个群或其对偶。为了区分群中的元素，我们常常分析它到给定环的同态（对偶元素）。例如，参见 [*Lan*]，。

[1]与基本群和基本幺半群类似，这个群通常称为 Fox 着色基本群。

3. 广义考夫曼-哈拉里猜想的证明

GKH 猜想的证明安排如下。首先，我们定义链图 D 的交叉矩阵 $C'(D)$ 和着色矩阵 $L(D)$。按照 [MS]，我们证明着色矩阵的每一列都表示一个非平凡的 Fox $\delta(D)$-着色。然后，利用链环 D 的镜像的着色矩阵是 L的转置这一事实，我们证明猜想 2.3 的 (b) 部分，等价地，也就是 (a) 部分。此外，我们还证明着色矩阵的各列生成群 $Col^{red}(D)$，并利用这一事实证明猜想 2.3 的 (c) 部分。

定义 *3.1.* 图表 D 的 ***Fox k*-着色是一个函数** $f: arcs(D) \to Z_k$，满足如下性质：每条弧都由 $Z_k = \{0, 1, 2, 3, \ldots, k-1\}$ 中的一个元素着色，并且在每个交叉点处，下交叉的颜色之和模 k等于上交叉颜色的两倍。也就是说，在交叉点 v处，若上交叉的颜色为 b，下交叉的颜色为 a 和 c，则 $2b - a - c \equiv 0$模 k。示意见图 *3.1*。图表 D 的 ***Fox*** k-着色群记作 $Col_k(D)$，***Fox*** k-着色的数量记作 $col_k(D)$。类似于定义 *2.2*，我们用平凡着色群除群 $Col_k(D)$，并将所得商群记作 $Col_k^{red}(D)$。

描述着色空间的矩阵 $Col(D)$ 被 Maman 和 Solis 称为按交叉点任意固定排序所得的交叉矩阵 [MS]。这里我们不假设图是交替的。

定义 3.2。 为约化链图的交叉点指定一个顺序 D。弧集由此继承交叉点集的顺序。这样，上弧的编号就与交叉点相同。该 交叉矩阵[2] 属于 D，记作 $C'(D)$，是一个 $n \times n$ 矩阵，其中每一行对应一个给出关系的交叉点 $2b - a - c = 0$ （见图 *3.1*）。矩阵的各项定义如下[3]:

$$C'_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{if } a_i \text{ is the over-arc at } c_i, \\ -1 & \text{if } a_j \text{ is an under-arc at } c_i \ (i \neq j), \text{ and} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

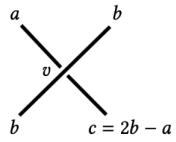


图 3.1. 交叉点 v处的 Fox 着色关系。

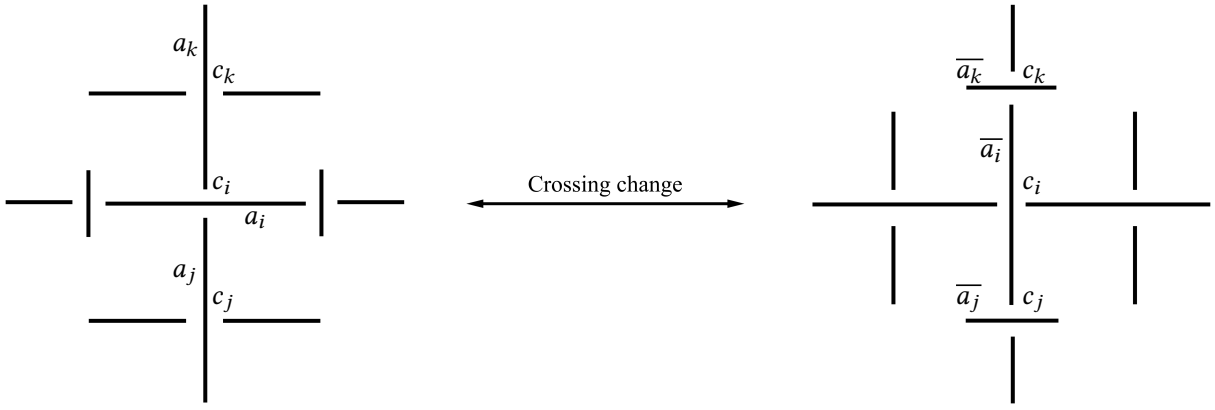


图 3.2. D 中的交叉点 c_i 邻域（左图）和 D_-。

[2]另一种更具描述性的名称可以是未约化基本 *Fox* 着色矩阵。[3]交叉点处的两条下弧可能并不相同。此时关系式 $2b - a - c = 0$ 变为 $2b - 2a = 0$。例如，霍普夫链环就可能出现这种情况。

以下引理仅适用于交替链环，并在 GKH 猜想的证明中发挥重要作用。

引理 3.3。设 D 是一个约化交替链环图，其交叉矩阵为 $C'(D)$，并设 D 是其镜像。于是，矩阵 C'^{T} 是 D 的一个交叉矩阵。

证明。将图 D 的交叉点记为 c_1、……、c_n，并将交叉点 c_i 处的上弧记为 a_i。注意，在矩阵 C'（D）中，对角线上的所有元素均为 2。我们通过交叉改变操作得到 D，并保持交叉点的顺序和名称不变。现在，将图 D 中交叉点 c_i 处的上弧记为 a_i。在对应于交叉点 c_i 的行中，假设对应于弧 a_j 和 a_k 的列中的元素为 -1。于是，在矩阵 C'（D）中，对应于 a_i 的列在对应于交叉点 c_j 和 c_k 的行中的元素必须为 -1；见图 3.2。

□

回想一下，如果 $\delta(D) \neq 0$，那么 $Col^{red}(D)$ 是一个有限群，其不变因子分解为$Col^{red}(D) = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_s}$，其中 $n_{i+1}|n_i$对所有 i都成立。注意，s是该群的最小生成元个数，而 n_1 是该群的湮灭子。令 $C(D)$ 表示 D的约化交叉矩阵，它由 $C'(D)$ 删除最后一行和最后一列得到。我们将对应于 $C'(D)$ 最后一列的弧称为**基弧**。该矩阵描述群 $Col^{red}(D)$。矩阵$C^{-1}(D)$是一个含有有理数项的矩阵。然而，$n_1 C^{-1}(D)$是一个整数矩阵，我们将其记为$L_{n_1}(D)$。注意，$L_{n_1}(D)$的列模 n_1 表示图示 D在将基弧着为颜色 0 后的 Fox n_1-着色。

以下结果对于约化非交替链环同样成立。

定理 3.4. 设 D 是一个行列式非零的链环约化图。那么，$L_{n_1}(D)$的列模 n_1 生成 D的 *Fox* n_1-着色空间。

证明。设 $C(D)$ 是 D的约化交叉矩阵，且 $Col^{red}(D) = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_s}$，其中 $n_{i+1}|n_i$对所有 i 均成立。经过行列变换后，$C(D)$可化为其史密斯标准形，记为$C_{SNF}(D)$，如下所示。

$$C_{SNF}(D) = \begin{pmatrix} n_1 & & & & & & \\ & n_2 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & n_s & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

其逆矩阵 $C_{SNF}^{-1}(D)$ 的元素属于 $\mathbb{Q}$，形式如下。

$$C_{SNF}^{-1}(D) = \begin{pmatrix} 1/n_1 & & & & & & \\ & 1/n_2 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1/n_s & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

我们得到如下整数矩阵 $L_{n_1}^{SNF}(D)$。

$$L_{n_1}^{SNF}(D) = n_1 C_{SNF}^{-1}(D) = \begin{pmatrix} n_1/n_1 & & & & & & \\ & n_1/n_2 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & n_1/n_s & & & \\ & & & & n_1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & n_1 \end{pmatrix}$$

现在， i^{th}列 (0，0，……， n_1/n_i，……，0)^{T}在模 n_1 意义下（其中 $i \le s$）生成 $\mathbf{Z}_{n_i}$的子群。由于 $Col_{n_1}^{red}(D) = Hom(\mathbf{Z}_{n_1} \oplus \mathbf{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{n_s}, \mathbf{Z}_{n_1})$，因此， $L_{n_1}^{SNF}$的列生成群 $Col_{n_1}^{red}(D)$，证毕。

□

对于交替图，我们可以证明以下更强的结果，它证明了猜想(b)部分，并且等价地证明了(a) 部分。2.3。

定理 3.5。 设 D是一个素链环的约化交替图。对于任意两条弧 a_i和a_j，存在 $L_{n_1}(D)$ 的一列能够区分它们。

证明。 设着色矩阵 $n_1C^{-1}(D) = L_{n_1}(D)$的弧（按行编号）依次为 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$，如下所示。

$$L_{n_1}(D) = n_1 C^{-1}(D) = \begin{array}{c} a_1: \\ a_2: \\ \vdots \\ a_{n-1}: \\ a_n: \end{array} \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-1} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

回想一下，约化交叉矩阵 $C(D)$ 是从 $C'(D)$ 中删除最后一行和最后一列得到的。现在，$L_{n_1}(D)$的每一列都为图中剩余的首批 $n-1$ 弧着色。对于 D 的一个完整 Fox n_1- 着色，我们将最后一条（基）弧 a_n 着为颜色 0。如果对于 $i < n$，任意$c_{i,1} = 0$ 模 n_1，那么模 n_1 的第 C_1 列无法区分弧 a_n 和 a_i。如果对应于 a_i 和 a_j 的各行中所有元素模 n_1 并不完全相同，那么可以通过它们取值不同的那一列自动将它们区分开。

步骤 1：如果 $L_{n_1}(D)$ 中不存在一列 C_j，使得 $c_{i,j} \neq 0$ 模 n_1，那么第 i^{th} 行中的每个元素都模 n_1 同余于 0。因此，在转置矩阵 $L_{n_1}^T(D)$ 中，第 C_i^T 列是模 n_1 意义下的零列。这将导致存在一个 D 的伪着色（见定义 6.1 和 [MS]），这与假设矛盾。因此，通过 $L_{n_1}(D)$ 中的某一列模 n_1，可以将基弧 a_n 与任何其他弧区分开。

步骤 2： 此外，如果在 $L_{n_1}(D)$ 的每一列中， a_i和 a_j这两条弧的颜色都相同，那么我们选择弧 a_j 作为基弧，这意味着 a_i的颜色均为零。因此，我们回到步骤 1。

□

下一个定理 证明了猜想 (c)，即猜想 2.3的一个更一般版本3.5 .

定理 3.6。 如果 $Col^{red}(D) = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_s}$，且 $n_{i+1}|n_i$，那么存在 s 个 *Fox* n_1-着色（不一定对应于着色矩阵的列），可以区分所有弧。也就是说，对于 D 的任意一对弧，其中一种 n_1-着色可以将它们区分开。

证明。 将群 $Col^{red}(D)$的生成元记为 $a_1, a_2, \ldots, a_s$。每个生成元 a_i都是着色矩阵 $L_{n_1}(D)$ 模 n_1 (见定理 3.4) 的若干列的线性组合。因此，它们对应于图示 D的一种着色。因此，对于任意一对弧，$L_{n_1}(D)$模 n_1 下都存在一列能够将它们区分开。

□

推论3.7。 若 $Col^{red}(D)$ 是循环群 $\mathbb{Z}_{n_1}$，

(a) 那么存在一种非平凡的 *Fox* n_1-着色，能够区分所有弧。*(b)* 此外，若 n_1 是素数，则原始的 *Kauman-Harary*猜想成立。也就是说，每一种非平凡的 *Fox* n_1-着色都能区分所有弧。

证明。 （a）由定理 3.6直接得出，因为 $s = 1$。（b）成立，因为$\mathbb{Z}_{n_1}$ 的每个非零元素都是其生成元。

□

4. 非素交替链环

定理 3.5 和 3.6对于交替链环的连通和，不能按原样成立[4] （见引理 （a）的第 4.1部分）。在定理 4.2中，我们给出了一个适用于非素交替链环的 GKH 猜想版本。

引理 4.1。 [Prz1]

设 $D = D_1 \# D_2$ 为两个链图的连通和。那么，

（*a*）连接两个分支的弧在 Col（D）中表示同一个元素；（*b*） Col^{red}（$D_1 \# D_2$）$\cong Col^{red}$（D_1） $\oplus Col^{red}$（D_2）。

定理 4.2。设 $D = D_1 \# D_2 \# \cdots \# D_n$，其中 D_i是素链环 L_i 的约化交替图， $i = 1$取值为2、……、 n。那么，

(a) 对于任意一对弧，只要它们不是连接 D_i 与 D_{i+1} 的弧，就存在一种 *Fox* n_1-着色能够将它们区分开；*(b)* 存在 $t (t \leq s)$ 种 *Fox* n_1-着色，使得任意一对非连接 D_i 与 D_{i+1} 的弧都能被其中一种着色区分开。

证明。此结果由定理 3.4 和3.5以及引理 4.1得出。

□

注 4.3。定理 *4.2* 针对图的连通和表述。然而，根据 *William W. Menasco* 的结果（见 [Men, Hos]），如果一个交替图表示交替链环的连通和，那么它本身就是图的连通和。

例 4.4. 设 D 是方结的一个交替图，即 $D = 3_1 \# 3_1$, 其约化交叉矩阵为 $C(\overline{D})$*(*见图 *4.1)*。*en* $Col^{red}(3_1 \# 3_1) = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$。注意， $L_3(D)$模 3 *(*图 *4.2*的第 *3* 列和第 *5* 列可以区分所有弧对，除了连接 3_1 与 3_1. 的弧对。此外，第三行（对应于所选排列中的第三个交叉，因此也对应于第三条弧）的所有元素均为零。也就是说，第三条弧无法与基弧区分。

[4]交替链环的连通和也是交替链环。例如，参见 [PBIMW]。

$$C(D) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

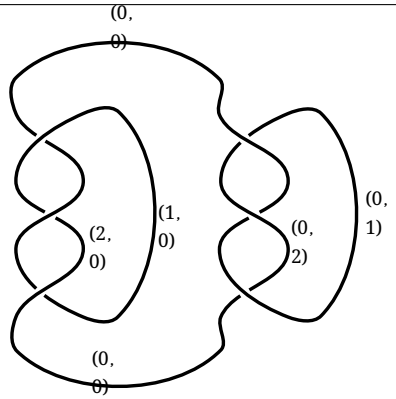


图 4.1。方结的约化交叉矩阵（左）。方结 $3_1 \# 3_1$ 及其两种能够区分每一对弧的Fox三彩着色（右）。

$$L_3(D) = 3C^{-1}(D) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3(D) \bmod 3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

图 4.2。方结的矩阵 $L_3(D)$ 和 $L_3(D)$ 模 3 结果。

5. Fox着色示例

本节研究交替链图及其 Fox 着色的例子。关于交叉点数不超过 10 的纽结的群 $Col^{red}(D) = H_1(M_{(2)D}, \mathbb{Z})$ 的结构，参见 [BZ]中的附录C。

例 5.1。 *Kauman* 和 *Harary* 表明，纽结 7_7 是其关于具有非素行列式的纽结的猜想的一个反例 [HK]。我们有， $det(7_7) = 21$ 以及 $Col^{red}(7_7) = \mathbb{Z}_{21}$。[5] 有关能够区分所有弧的 *Fox 5.2* 着色，请参见图 21。

$$L(7_7) = \begin{pmatrix} 24 & 20 & 12 & 10 & 16 & 11 \\ 12 & 24 & 6 & 12 & 15 & 9 \\ 15 & 16 & 18 & 8 & 17 & 13 \\ 6 & 5 & 3 & 13 & 4 & 8 \\ 18 & 22 & 9 & 11 & 26 & 10 \\ 12 & 10 & 6 & 5 & 8 & 16 \end{pmatrix} \quad L(7_7) \bmod 21 = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 12 & 10 & 16 & 11 \\ 12 & 3 & 6 & 12 & 15 & 9 \\ 15 & 16 & 18 & 8 & 17 & 13 \\ 6 & 5 & 3 & 13 & 4 & 8 \\ 18 & 1 & 9 & 11 & 5 & 10 \\ 12 & 10 & 6 & 5 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

图5.1。矩阵 $L(7_7)$和 $L(7_7)$模21。 7_7的一些非平凡 Fox 21-染色无法区分所有弧；例如， L 模21后的第1列或第3列。不过，第2、4、5和6列可以区分所有弧。

例5.2。 考虑通过闭合以下辫得到的链环族 $(\sigma_1\sigma_2^{-1})^n$。这些链环有时称为土耳其头链环，也可以通过绘制轮图W_n的泰特图得到。其行列式的闭式公式 $D(W_n)$ 见 [Prz2]。 $n = 5$ 和 $n = 6$ 的示例绘于图 *5.3* 中，其约化 *Fox* 着色群如下：

[5]人们注意到 [KL]，对于任何有理（2-桥）纽结，Kauman-Harary猜想都成立，且对纽结的行列式没有任何限制。然而，正如他们所指出的，猜想的表述需要从“每一个非平凡 Fox D-着色”改为“存在一种 Fox D-着色”。参见推论 3.7。

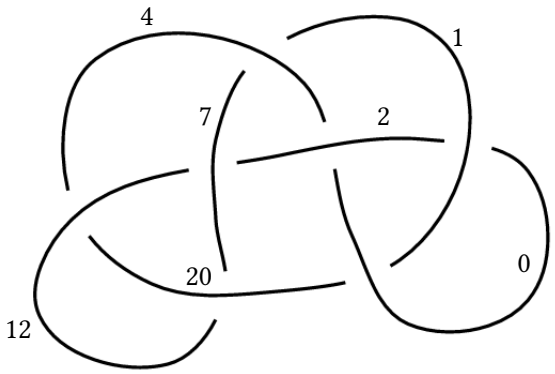


图 5.2. 具有 Fox 21 着色的纽结 7_7，该着色区分了所有弧。

(a) 对于 $n = 5$, $D(W_5)$ 是 10_{123} *Rolfsen* 表 [*Rol*] 中的链环。 $Col^{red}(D(W_5)) = Z_{11} \oplus Z_{11}$。 *(b)* 对于 $n = 6$, $D(W_6)$ 是 12^3_{474} *istlethwaite* 表 [*Prz2, i*] 中的链环。 $Col^{red}(D(W_6)) = Z_{40} \oplus Z_8$。

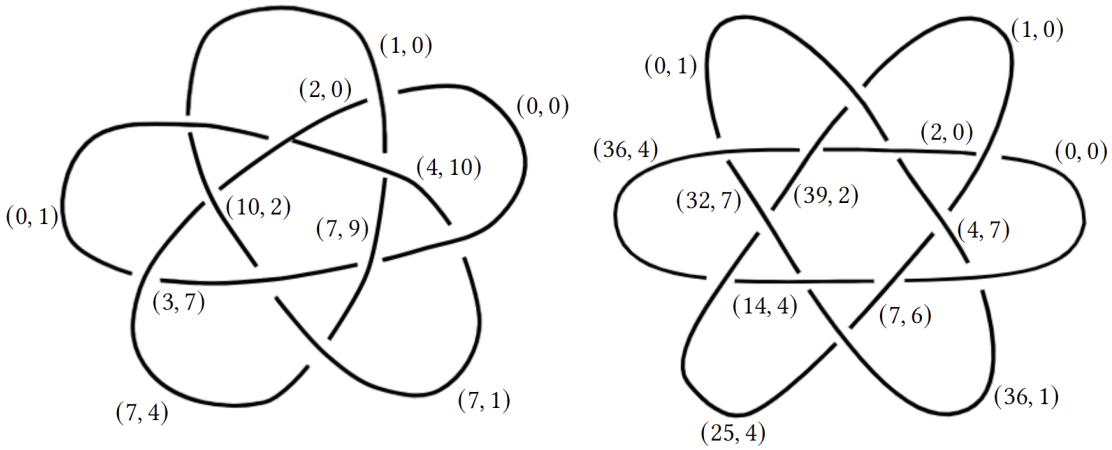


图 5.3. 纽结 $D(W_5)$ 有两种 Fox 着色，可区分所有弧（左图）；链环 $D(W_6)$ 有两种 Fox 着色，可区分所有弧（右图）。

例 5.3. 群 Col^{red} 椒盐链环的群见命题 7，载于 [APS]，其推广到 *Montesinos* 链环的结果见命题 8，载于 [APS]。这里我们给出两个示例，并展示它们模 n_1下的着色矩阵。

(a) 设 $P(3, 3, 3, 3, 3)$ 是一个有 *15* 个交叉点的椒盐结。其群 Col^{red} 等于 $Z_{15} \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_3$。其着色矩阵 $L(P(3, 3, 3, 3, 3))$ 模*15* 的形式见图 *5.4*。*(b)* 设 $P(3, 3, 3, 6)$ 是一个有 *15* 个交叉点的椒盐结。其群 Col^{red} 等于 $Z_{21} \oplus Z_3 \oplus Z_3$。其着色矩阵 $L(P(3, 3, 3, 6))$ 模*21* 的形式见图 *5.5*。

6. 杂项

6.1. **伪着色**。 我们证明定理3.5 时所用的一项重要工具是伪着色的概念。在 [MS] 以及本文中，已证明约化素交替链环的链

$$L(P(3,3,3,3,3))\ mod\ 15 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 12 & 12 & 7 & 8 & 3 & 3 & 14 & 14 & 14 & 10 \\ 10 & 5 & 10 & 10 & 10 & 10 & 5 & 10 & 0 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 1 & 11 & 1 & 12 & 12 & 7 & 8 & 13 & 3 & 4 & 14 & 14 & 10 \\ 10 & 12 & 12 & 7 & 14 & 14 & 9 & 6 & 11 & 11 & 13 & 3 & 3 & 10 \\ 10 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 & 7 & 8 & 13 & 13 & 4 & 4 & 14 & 10 \\ 10 & 12 & 12 & 12 & 14 & 9 & 9 & 6 & 11 & 11 & 13 & 13 & 3 & 0 \\ 10 & 8 & 8 & 8 & 6 & 6 & 11 & 4 & 9 & 9 & 7 & 7 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 7 & 9 & 9 & 4 & 11 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 & 10 \\ 0 & 3 & 13 & 13 & 11 & 11 & 6 & 9 & 9 & 14 & 12 & 12 & 12 & 10 \\ 10 & 14 & 4 & 4 & 13 & 13 & 8 & 7 & 12 & 7 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 10 & 3 & 3 & 13 & 11 & 11 & 6 & 9 & 14 & 14 & 7 & 12 & 12 & 10 \\ 10 & 14 & 14 & 4 & 3 & 13 & 8 & 7 & 12 & 12 & 1 & 11 & 1 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 0 & 10 & 5 & 10 & 10 & 10 & 10 & 5 & 10 \\ 10 & 14 & 14 & 14 & 3 & 3 & 8 & 7 & 12 & 12 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

图 5.4. $L(P(3,3,3,3,3))$ 模 15。列 3、4 和 10 给出的 e-着色可以区分所有弧。

$$L(P(3,\ 3,\ 3,\ 6))\ mod\ 21 = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 & 10 & 11 & 18 & 18 & 5 & 7 & 3 & 20 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 6 & 11 & 12 & 9 & 16 & 16 & 20 & 14 & 19 & 3 & 18 & 18 & 14 \\ 14 & 7 & 0 & 14 & 7 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 7 & 14 & 14 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 16 & 5 & 12 & 12 & 8 & 7 & 9 & 11 & 10 & 10 & 14 \\ 15 & 13 & 11 & 5 & 16 & 9 & 9 & 13 & 14 & 12 & 10 & 11 & 11 & 7 \\ 13 & 15 & 17 & 9 & 12 & 12 & 19 & 15 & 14 & 16 & 18 & 17 & 3 & 0 \\ 11 & 17 & 2 & 13 & 8 & 15 & 8 & 17 & 14 & 20 & 5 & 2 & 16 & 14 \\ 13 & 15 & 17 & 9 & 12 & 19 & 19 & 8 & 14 & 16 & 18 & 3 & 3 & 14 \\ 5 & 16 & 6 & 11 & 10 & 17 & 17 & 2 & 0 & 11 & 1 & 20 & 20 & 14 \\ 18 & 17 & 16 & 13 & 8 & 15 & 15 & 17 & 7 & 6 & 5 & 16 & 16 & 14 \\ 10 & 18 & 5 & 15 & 6 & 13 & 13 & 11 & 14 & 1 & 9 & 12 & 12 & 14 \\ 12 & 16 & 20 & 11 & 10 & 17 & 3 & 2 & 14 & 18 & 1 & 13 & 20 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 7 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 7 & 14 \\ 12 & 16 & 20 & 11 & 10 & 3 & 3 & 16 & 14 & 18 & 1 & 20 & 20 & 7 \end{pmatrix}$$

图 5.5. $L(P(3,\ 3,\ 3,\ 6))$ 模21。由第1列和第6列给出的着色可区分所有弧。

图中不存在伪着色。然而，伪着色的存在可用于判断一个图距离成为交替链图还有多远。本节将简要探讨这一概念。在 [MS], 命题3.2取决于这样一个事实：对于约化交替图，交叉矩阵的各行之和为零。非交替图则不满足这一点，以下示例将对此加以说明。

定义 6.1. 设 D 是一个链图，且 $\epsilon \in \{-1,\ +1\}$。按照 *Maman* 和 *Solis* [MS], , 我们定义一个 **ϵ-**伪着色为 D 的弧的着色，满足除两个交叉点之外的所有交叉点处的 *Fox* 着色约定 D。$2b - a - c = 0$ 将另外两个交叉点记为 c_{+1} 和 c_{ϵ}，其着色约定分别为 $2b - a - c = +1$ 和 $2b - a - c = \epsilon$。要得到[MS], 中定义的伪着色，令 $\epsilon = -1$。

对于交替链图 D，我们的约定是先按顺序排列交叉点，然后弧的集合继承交叉点集合的顺序。参见定义 3.1。这样选择的原因是$C'(D)$与 $C'(D)^T$相同。这种做法不适用于非交替链图。

一般来说，我们可以任意排列交叉点和弧。图 6.1 给出了纽结 8_{19}的交叉点和弧的一种排列示例。我们首先选取一个基点和一个定向（如图6.1左侧的箭头所示）。从这个基点出发，沿着纽结移动，并依次排列交叉点。接下来，可以任意排列弧，但基弧始终排在最后。图 6.1 中，第一个坐标表示交叉点的编号，第二个坐标表示弧的编号。

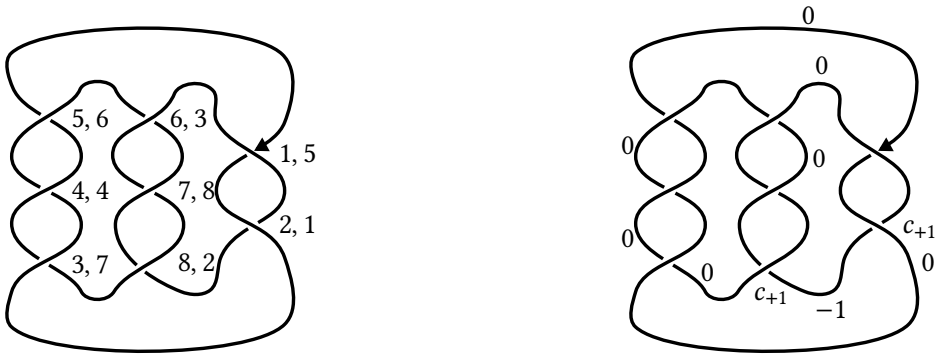


图 6.1。 环面结 $T(3,\ 4)$ (8_{19} 见 Rolfsen 表 [Rol]) 描绘为椒盐结 $P(3,\ 3,\ -2)$ 展示交叉点和弧的顺序（左侧）。右侧为第二列所示的伪着色；参见注 6.5。

在以下示例中，我们分析非分裂非素交替图。

示例 6.2。 设 $D = D_1 \# D_2$ 为一个非分裂非素交替链图。 D 始终具有一种 -1- 伪着色，使用颜色 1 位于 D_1 上，颜色 0 位于 D_2上。我们在图 *6.2* 中以方结 $3_1 \# 3_1$ 为例说明这一思路。*6.2*。

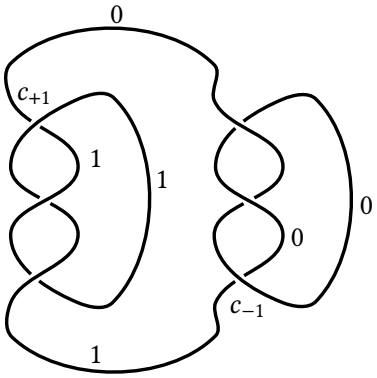


图 6.2. 方结的 -1-伪着色，其中 $+1$-交叉标记为 c_{+1}， -1-交叉标记为 c_{-1}。

另一方面，非交替链图通常具有 -1-伪着色和 $+1$-伪着色。参见例 6.3 和 6.4。如果图为 D 的纽结的行列式等于 1，则有$L(D) = C^{-1}(D)$，并且 $C^{-1}(D)$的每一列都对图中的前 $n-1$条弧着色。于是，对于 ϵ的完整 D-伪着色，我们将最后一条（基）弧 a_n 着为颜色 0。

例 6.3。考虑辫子词$\sigma_2^3\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_3^{-1}$，其闭合后是康威结。该纽结的行列式为1，其交叉矩阵 $C'(D)$ 如图*6.4*所示。图 +1所示矩阵第 4 列给出的伪着色，以及 -1第 1 列给出的伪着色，分别如图*6.5*左侧和右侧的图*6.3* 所示。

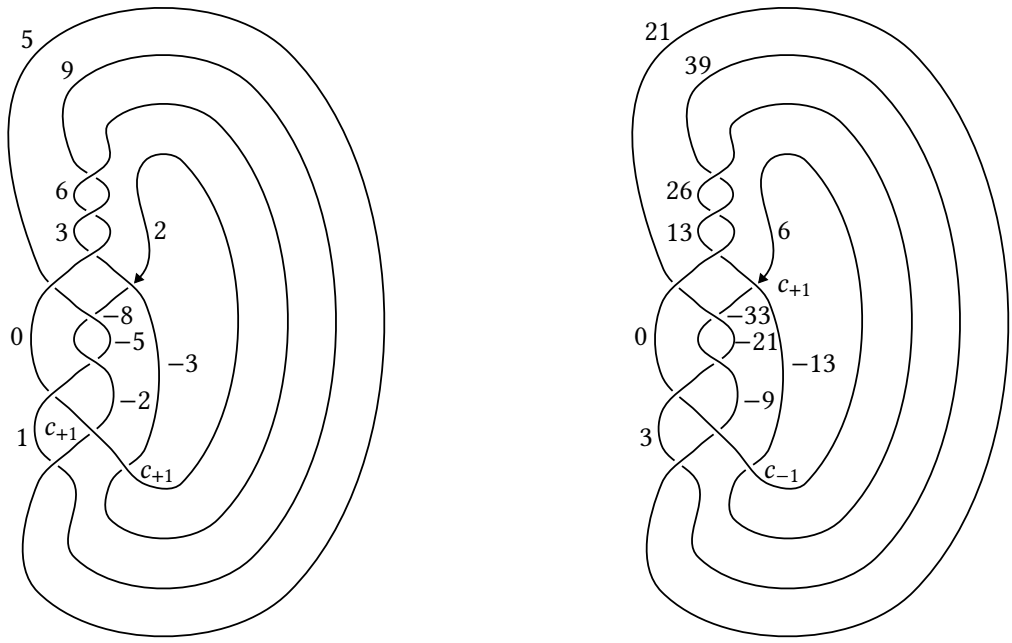


图 6.3. 带有 +1-伪着色的康威结（左图）和带有 −1-伪着色的康威结（右图）。左图中的最后一个交叉 c_{+1} 在右图中变为 c_{-1}。

$$C'(D) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

图 6.4. 康威结的交叉矩阵。注意，交叉矩阵的各行满足线性方程
$R_1 - R_2 - R_3 - R_4 - R_5 - R_6 - R_7 + R_8 + R_9 + R_{10} + R_{11} = 0.$

例 6.4。考虑环面结 $T(3,4)$，其图示为 D，交叉点和弧按图6.1所示排序。其交叉矩阵如图6.7所示。图 $C^{-1}(D)$ 所示的三列6.8）为整数列，并由此得到 ϵ伪着色。第 *5* 列给出一种 −1伪着色（如图6.6右侧所示），第 *1* 列和第 *2* 列给出 *-1* 伪着色。与第 +1列相对应的伪着色1 如图6.6左侧所示。

非交替链图总是有 ϵ-伪着色，正如我们在下面的注记中所述。

注 6.5. 设 D 是一个非交替链图。

(1) $C^{-1}(D)$ 的每一列整数都对应某种 ϵ-伪着色。*(2)* D 有一个 ϵ-伪着色。这是因为每个非交替图都有一条长度至少为二的隧道。现在，我们可以通过将隧道的一条弧着色为 -1，并

$$L(D) = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & -6 & -2 & \mathbf{2} & -4 & -10 & -3 & 4 & 8 & 12 \\ \mathbf{-33} & 32 & 12 & \mathbf{-8} & 22 & 52 & 17 & -22 & -44 & -66 \\ \mathbf{-9} & 9 & 4 & \mathbf{-2} & 6 & 14 & 5 & -6 & -12 & -18 \\ \mathbf{21} & -21 & -8 & \mathbf{5} & -14 & -34 & -11 & 14 & 28 & 42 \\ \mathbf{-21} & 21 & 8 & \mathbf{-5} & 14 & 33 & 11 & -14 & -28 & -42 \\ \mathbf{3} & -3 & -1 & \mathbf{1} & -2 & -5 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ \mathbf{39} & -39 & -15 & \mathbf{9} & -27 & -63 & -21 & 26 & 52 & 78 \\ \mathbf{13} & -13 & -5 & \mathbf{3} & -9 & -21 & -7 & 9 & 18 & 26 \\ \mathbf{-13} & 13 & 5 & \mathbf{-3} & 9 & 21 & 7 & -9 & -18 & -27 \\ \mathbf{26} & -26 & -10 & \mathbf{6} & -18 & -42 & -14 & 18 & 35 & 52 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

图6.5. Conway 结的着色矩阵。全零行对应基弧的着色。

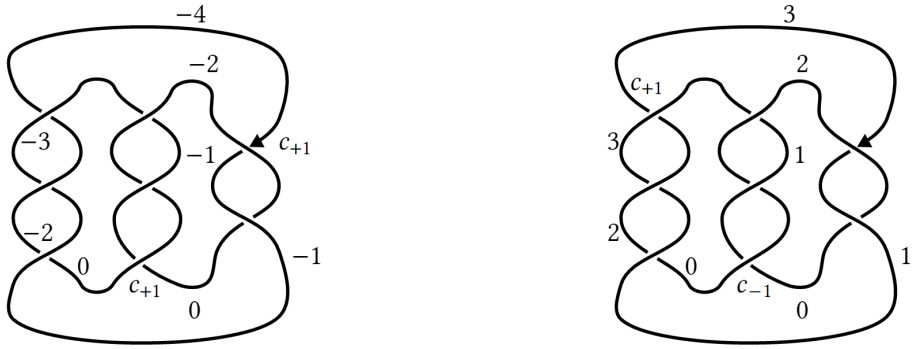


图6.6. 环面结 $T(3,\ 4)$ (8_{19} 在 Rolfsen 表中 [Rol]) 描绘为椒盐结 $P(3,\ 3,\ -2)$。

$$C'(D) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

图6.7. 交叉矩阵 $C'(P(3,\ 3,\ -2))$. 这些行满足线性关系
$R_1 + R_2 - R_3 - R_4 - R_5 - R_6 - R_7 - R_8 = 0$。

将所有其他弧着色为 0 来得到 +1-伪着色。图*6.1.*右侧展示了这种着色的一个示例。

6.2. **未来方向**。 Kauman-Harary猜想由 Mathew Williamson 扩展到了虚结的情形 [Wil]并由 Zhiyun Cheng 证明 [Che]。一个自然的问题是，猜想是否如 [APS]所述，适用于行列式不是素数的虚链环。进一步研究的另一条途径是

$$C^{-1}(D) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ -3 & 0 & -1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -4 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 3 & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} \\ -2 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 2 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

图 6.8. $C^{-1}(D)$ 对应于 $T(3, 4)$，具有三列整数列。

利用集合论 Yang-Baxter 算子或一般的 Yang-Baxter 算子，为非交替图寻找一种自然的推广。

从双重分支覆盖中的不可压缩曲面的角度研究广义 Kauman-Harary 猜想，是一个有趣的方向 $M_L^{(2)}$，沿 S^3 进行分支 L。这一思路在 [APS] 中有所阐述，旨在证明 GKH 猜想。如今 GKH 猜想已获证明，我们可以反其道而行，分析 $M_L^{(2)}$ 中的不可压缩曲面。

致谢

第一作者感谢 Max R¨ossler 博士、Walter Haefner 基金会和 ETH Z¨urich 基金会的支持。第三作者感谢美国国家科学基金会通过 DMS-2212736 号资助提供的支持。第四作者获得了美国数学学会和西蒙斯基金会通过 AMS-Simons 旅行资助提供的支持。第五作者获得了西蒙斯合作资助 637794 的部分支持。

参考文献

[APS] M. M. Asaeda, J. H. Przytycki, A. S. Sikora，Montesinos 纽结满足Kauman-Harary猜想。《纽结理论与分歧》13（2004），第4期，467–477。arXiv:math/0305415 [math.GT]。 [BZ] G. Burde, H. Zieschang，《纽结》。第二版。数学研究丛书，5。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2003。xii+559 页。ISBN：3-11-017005-1。 [Che] Z. Cheng，交替虚结的Kauman-Harary猜想。《纽结理论与分歧》

24 2015 8, () , 第 1550046, 13 1310 4271 [ ]

期。arXiv：。math.GT。 [DS] D. B. Damiano, E. M. Senno，代数结与链环的着色。《纽结理论与分歧》17（2008），第5期，553–578。 [DMMS] N. E. Dowdall, T. W. Maman, K. Meek, P. R. Solis，关于Harary-Kauman猜想与Turk's head 纽结。《神户数学杂志》27（2010），第1-2期，1–20。arXiv:0811.0044 [math.GT]。 [HK] F. Harary, L. H. Kauman，纽结与图。I. 弧图与着色。《应用数学进展》22（1999），第3期，312-337。 [Hos] J. Hoste，纽结与链环的枚举与分类。《纽结理论手册》，209–232，Elsevier B. V.，阿姆斯特丹，2005。[KL] L. H. Kauman, S. Lambropoulou，有理缠结的分类。《应用数学进展》

33 2004 2, () , 第 199 237 0311499 [ ]

期，页码。arXiv:math/ math.GT。[Lan] S. Lang，《代数》。修订第三版。研究生数学教材，211。施普林格出版社，纽约，2002。xvi+914 页。ISBN：0-387-95385-X。 [Men] W. Menasco，交替结与链环补空间中的闭不可压缩曲面。《拓扑学》23 1, 37 1984 44 ()，第期。[MS] T. W. Maman, P. Solis，Kauman-Harary猜想的一个证明。《代数与几何拓扑》9（2009），第4期，2027–2039。arXiv:0906.1612 [math.GT]。 [PDDGS] L. Person, M. Dunne, J. DeNinno, B. Guntel, L. Smith. 有理交替结与链环的着色，预印本（2002）。

[Prz1] J. H. Przytycki，三着色及其他纽结初等不变量。《纽结理论》（华沙，1995），275–295，巴拿赫中心出版物，42，波兰科学院数学研究所，华沙，1998。arXiv:math/0608172 [math.GT]。[Prz2] J. H. Przytycki，从戈里茨矩阵到拟交替链环。《纽结数学》，257–316，数学与计算机科学文集，1，施普林格，海德堡，2011。arXiv:0909.1118 [math.GT]。[PBIMW] J. H. Przytycki, R. P. Bakshi, D. Ibarra, G. Montoya-Vega, D. Weeks，《纽结理论讲座：当代主题探索》，施普林格大学教材系列，推荐出版，2022年12月。[Rol] D. Rolfsen，《纽结与链环》。数学讲座丛书，第7号。Publish or Perish, Inc.，伯克利，加利福尼亚州，1976。ix+439 页。（第三版，美国数学学会切尔西出版部，2003）。[i] M. B. istlethwaite，纽结表及相关主题，《拓扑学专题》，伦敦数学学会讲义丛书，93，1985，176。[Wil] M. Williamson，虚结的Kauman-Harary猜想（2007）。南佛罗里达大学坦帕分校研究生论文与学位论文。hps://digitalcommons.usf.edu/etd/3916。

ETH 理论研究所，瑞士苏黎世电子邮箱地址：
rheapalak.bakshi@eth-its.ethz.ch | rheapalakbakshi@gmail.com

数学系，乔治·华盛顿大学，美国华盛顿特区电子邮箱地址：hguo30@gwu.edu

eens 学院和纽约市立大学研究生中心，美国纽约州电子邮箱地址：
gabrielmontoyavega@gmail.com | gmontoya-vega@gc.cuny.edu

数学系，丹佛大学，美国科罗拉多州电子邮箱地址：
sujoymukherjee.math@gmail.com | sujoy.mukherjee@du.edu

美国华盛顿特区乔治·华盛顿大学数学系和波兰格但斯克大学数学系电子邮箱：przytyck@gwu.edu