具有预算约束的部分信息报童问题的稳健背包排序

Guus Boonstra IG&H Consultants 零售咨询部,
guus.boonstra@igh.com

Wouter J.E.C. van Eekelen 蒂尔堡大学计量经济学与运筹学系,
w.j.e.c.vaneekelen@tilburguniversity.edu

Johan S.H. van Leeuwaarden 蒂尔堡大学计量经济学与运筹学系,
j.s.h.vanleeuwaarden@tilburguniversity.edu

arXiv:2301.02662v1 [math.OC] 5 Jan 2023

本文研究具有预算约束、且需求信息仅限于其范围、均值和平均绝对偏差的多品种报童问题。我们考虑一个极小极大模型，通过最小化最坏情形需求分布下的预期超储与缺货成本来确定订货量。结果表明，该优化问题可通过一种类似于求解连续背包问题的贪心算法的方法求解，即按照边际价值依次采购商品。与直接求解模型相比，该方法的计算复杂度较低，并可得出一种简单策略：（i）根据各商品对总成本的边际影响进行排序；（ii）按照此排序确定订货量，直至预算用尽。

Key words：分布鲁棒优化、多商品报童模型、背包问题、极小极大分析、库存管理

History：本文首次投稿于2022年3月8日。

1. 引言

报童模型是库存管理的基石之一，由 Arrow等人（1951）提出，用于在需求未知且需要权衡剩余库存与销售损失的情况下，确定能够使期望成本最小化的订货量。报童模型在易腐食品、时尚和高科技行业等领域有广泛应用，尤其适用于生产总时间和交货期超过产品市场寿命的情形；参见 Nahmias（1982）以及 Fisher 和 Raman（1996）。

制造商和零售商在确定不同产品的最优订货量时，需要决定如何使用可用预算或资源。预算约束使问题变为多维问题——多订购一种商品，就会减少用于其他商品的预算——从而形成一个具有挑战性的优化问题。Hadley 和 Whitin（1963年）通过拉格朗日优化解决了这一问题。Abdel-Malek等人（2004）以及 Lau 和 Lau（1996年）提出了其他求解方法，Erlebacher（2000年）为特定需求分布建立了闭式解，而 Nahmias 和 Schmidt

（1984）提出了启发式解。上述研究均针对完全信息情形，即所有物品的需求分布都已完全确定。本文对带预算约束的多品种报童问题进行无分布假设分析。该分析不依赖于需求分布的完整设定，而只要求掌握每种商品的均值、平均绝对偏差（MAD）和范围。基于这些部分需求信息，我们采用分布鲁棒优化（DRO）方法，获得一种鲁棒订货策略。

本文中的报童模型旨在将期望成本最小化为订货量的函数。成本函数取决于订货量，也取决于需求，而需求是一个服从某种分布的随机变量。给定需求分布后，单商品报童模型可以求得使期望成本最小的最优订货量。在传统方法中，需求分布是完全确定的，因此可以计算期望成本，并确定最优订货量。该问题的稳健版本 假设只有部分信息，只知道需求分布属于某个模糊集，该模糊集包含所有符合这些部分信息的分布。我们采用一种极小极大策略，可以将其视为报童与自然之间的博弈：报童首先选择订货量，随后自然选择一个使期望成本最大化的需求分布。于是，目标就变成求解这一极小极大问题。

本文求解这一极小极大问题的方法，属于一类丰富得多的分布鲁棒优化方法。这类方法首先在满足某些部分信息的分布集合上计算最坏情形模型表现，然后针对这些最坏情形进行优化。此类分布鲁棒优化技术已应用于众多领域，包括调度（Kong 等人，2013年；Mak 等人，2014）、投资组合优化（Popescu，2007；Delage 和 Ye，2010）、定价（Elmachtoub 等人，2021年；Chen 等人，2022年；Kleer 和 van Leeuwaarden，2022年）、复杂网络（van Leeuwaarden 和 Stegehuis，2021年）以及库存管理（Scarf，1958年；Gallego，1992；Perakis 和 Roels，2008；Ben-Tal 等人，2013年）。一种经典的分布鲁棒方法由 Scarf（1958年）提出，他研究了具有均值—方差需求信息的单商品报童问题。Scarf 得出了最坏情形分布的显式表达式，并求解极小极大问题，得到了最优订货量。一个极小极大问题能否求解，取决于待优化的函数以及模糊集的选择。刻画分布集合的方法有很多种

。在分布鲁棒优化中，可以使用基于距离的度量来定义模糊性，例如全变差或 Kullback-Leibler 距离。另一类常见的模糊集基于摘要统计量。本文研究的模糊集包含所有均值和平均绝对偏差已知的分布。极小极大问题中的最大化部分可视为一个具有三个约束和无限多个变量（模糊集中的所有分布）的半无限线性优化问题。事实上，这类极小极大问题与广义矩界问题有关；一般理论表明，存在一个极端分布能够求解最大化部分，其支撑点数量至多等于矩约束的数量（Rogosinski，1958年）。有关更多分布鲁棒优化应用与技术的综述，请参阅 Rahimian 和 Mehrotra（2019）。

对于本文中的多商品报童模型，我们求解一个多维极小极大问题，其中的随机向量描述所有商品的需求。与单商品报童模型等易于求解的一维问题相比，将分布鲁棒优化技术应用于含多个随机变量的问题，可能会在计算复杂度方面带来相当大的挑战。例如，给定需求的均值和协方差信息，分布鲁棒多商品报童问题比其单商品对应问题难解得多（Hanasusanto 等，2015年）。然而，对于采用均值-MAD 模糊性的多商品报童模型，极小极大问题可以高效求解，而且实际上存在一种优雅的算法解。关键的洞见在于，最坏情形需求分布——即极小极大问题中最大化部分的解——对于任意订货量都相同。因此，极小极大问题可归约为一个已知分布优化问题。事实上，对于每种商品，该已知分布都是唯一的三点分布。进而，通过将采用这一已知（离散）分布的最小化问题归约为背包问题，即可求解该问题。

本文的主要贡献如下：

(i) 极小极大问题的求解。我们求解具有均值-平均绝对偏差歧义和预算约束的极小极大问题。我们首先证明，当商品需求服从符合部分需求信息的特定三点分布时，会出现最坏情形。我们通过最小化相应的最坏情形成本，得到一个鲁棒

订货策略，其解可归结为一个背包问题。与完整需求信息下报童模型的现有方法不同，即使在涉及许多商品的情形下，背包问题也能导出有效的闭式订货策略。因此，本文进一步发展了利用 MAD 信息构建易于求解的极小极大问题的分布鲁棒优化理论。

（ii）预算一致性。鲁棒订货策略仅取决于每种商品的最小、均值和最大需求。因此，最坏情形分布与所有其他模型参数无关，这使得鲁棒订货策略具有“预算一致性”。当预算增加时，原预算对应的订货量保持不变，只有新增预算会进一步分配给各商品。这种预算一致性很有用，因为优化模型只需求解一次。也就是说，对于初始预算值，决策者可以仅使用标准电子表格软件，将物品按照作为背包问题解的顺序生成一个有序清单，而且该解对所有预算水平均有效。相比之下，多数其他用于多品种报童问题的精确方法和鲁棒方法都不具备这一特性，这意味着决策者必须针对每个预算水平重新计算最优策略。

(iii) 订货策略的性能。通过一系列数值示例，我们展示了背包订货策略的性能。我们通过评估所谓的额外信息期望价值（EVAI），将其与完整信息情形以及其他需要部分需求信息的鲁棒方法进行比较。总体而言，该鲁棒策略的性能与完整信息可得性下的最优性能仅相差几个百分点。我们还通过比较仅已知需求均值和范围时的性能，量化了MAD信息的价值，并表明MAD确实为实现良好性能提供了关键信息。此外，我们构造了一种订货策略，使其达到相应极小极小问题的最优值；结合极小极大问题的最优值，可得到紧确的性能保证。

接下来，我们将讨论一些与报童模型相关的文献。Gallego和Moon（1993）研究了需求均值和方差已知时带预算约束的多商品报童模型。Gallego和Moon（1993）将Scarf（1958）中的思想加以拓展，提出了一个可用拉格朗日乘子

法求解的优化问题，这与已知分布的完全信息情形类似。相比之下，我们基于均值-MAD-范围信息进行的极小极大分析，得出一种背包订货策略，该策略生成一个排序列表，并规定依照该列表依次对物品排序，订货量则取最小需求、均值或最大需求。其他基于部分信息研究多商品报童模型的相关工作包括：Vairaktarakis（2000）假设只知道需求的支撑集；Ardestani-Jaafari和Delage（2016）假设已知部分矩，并将稳健优化问题改写为一个易于求解的线性规划。Natarajan等人（2018）假设已知均值、方差和半方差。在单品情形下，该报童模型可用半无限线性规划求解，但在多商品情形下则大多难以求解。因此，Natarajan等人（2018）考虑了一种松弛，将问题转化为半定规划（SDP），以求得一个下界（但该下界并不紧）。Hanasusanto等人（2015）研究了已知均值和协方差的情形。他们证明，该分布鲁棒问题是NP难的，但可以用半定规划形式表示，其中包含数量随商品数量呈指数增长的不等式。Xu等人（2018）以及Natarajan和Teo（2017）针对均值-协方差信息提出了更易求解的界。本文假设仅有边际信息可用，因为协方差信息和其他依赖结构难以估计，而且固定协方差信息往往会导致难以求解、且解（策略）不直观的优化问题。本文得到的背包订货策略，针对所有均值、平均绝对偏差和范围给定的需求分布中的最坏情形，而不以特定依赖结构为条件。这种方法使背包订货策略具有稳健性，也适用于数据稀缺情形，因为均值、平均绝对偏差和范围相对容易估计。

第2节介绍在传统的需求分布信息完全假设下，带预算约束的单品模型和多品项模型。第3节展示我们在信息不完全的分布鲁棒情形下得到的主要结果。第4节通过详细的数值研究展示稳健策略。第5节总结全文，并提出若干未来研究方向。补充材料见电子补充材料（EC），其中包括若干证明、更多数值实验以及模型扩展。

2. 经典报童模型分析

第2.1节介绍单品情形下的报童模型及若干经典结果，第2.2节介绍带预算约束的多品项情形。

2.1. 经典单商品情形

考虑一种商品，其采购价格为 c，销售价格为 p。决策者订购数量为 q。假设商品需求是随机变量 D，其分布函数为 $F_D(\cdot)$。未售出的商品将在周期结束时以每件 s 的残值出售。加价率 $m>0$ 表示每件售出商品的利润，且满足 $p=c(1+m)$；折扣因子 $d>0$ 则刻画了通过 $s=(1-d)c$ 产生的损失。

期望成本由两项构成：销售损失造成的机会成本，以及库存过剩时产生的超储成本。因此，成本函数为

$$G(q,D)=\begin{cases}(p-c)(D-q) & \text{if } q\leqslant D,\\ (c-s)(q-D) & \text{if } q>D.\end{cases} \tag{1}$$

当 $q\leqslant D$ 时会出现销售损失，而 $q>D$ 时则会造成库存过剩。目标是订购数量为 q 的商品，使期望成本最小。令 $\mathbb{E}$ 表示期望，并定义 $\mu=\mathbb{E}[D]$ 和 $x^+=\max(x,0)$。将期望成本写为

$$C(q):=\mathbb{E}[G(q,D)]=(c-s)q+(p-s)\mathbb{E}(D-q)^+-(c-s)\mu=c\left(d(q-\mu)+(m+d)\mathbb{E}(D-q)^+\right). \tag{2}$$

为简化符号（且不失一般性），令 $c=1$。那么，最优订货量

$$q^*=\operatorname*{argmin}_{q\geqslant 0}C(q)\equiv\operatorname*{argmin}_{q\geqslant 0}dq+(m+d)\mathbb{E}(D-q)^+, \tag{3}$$

由下式给出

$$q^*=\inf\left\{q:F(q)\geqslant\frac{m}{m+d}\right\}. \tag{4}$$

关于式（4）的证明可见于大多数标准库存管理教材，例如 Hadley 和 Whitin（1963年）；Silver 等人（1998年）；Nahmias（2009年）。

2.2. 多商品情形

考虑 n 种不同的商品，并针对给定周期为商品 i 订购 q_i 件，其中 $i=1$、.....、n。对于商品 i，单位采购价格和销售价格分别为 c_i 和 p_i。期末可能的剩余商品将按单位残值 s_i 进行回收。我们将模型定义为

用加价率 $m_i > 0$ 和折扣因子 $d_i > 0$表示。加价率表示每售出一件商品所获得的利润，折扣因子则表示损失，即 $p_i = c_i(1+m_i)$ 和 $s_i = (1-d_i)c_i$。商品 i 在一个周期内的随机需求由非负随机变量 D_i表示，其分布为 $F_i(\cdot)$。

与单品情形一样，我们最小化期望成本。将多品成本函数定义为

$$G(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{D}) := \sum_{i=1}^{n} c_i \left(d_i(q_i - D_i) + (m_i + d_i)(D_i - q_i)^+ \right). \tag{5}$$

我们还引入预算约束 $\sum_{i=1}^{n} c_i q_i \leqslant B$，其中 B 为可用预算。具有决策向量 $\boldsymbol{q} = (q_1、\ldots\ldots、q_n)$ 的多商品报童模型可表示为

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{q}} \quad & C(\boldsymbol{q}) := \mathbb{E}[G(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{D})] = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(d_i(q_i - \mu_i) + (m_i + d_i)\mathbb{E}(D_i - q_i)^+ \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i q_i \leqslant B, \\ & q_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6}$$

其解称为最优订货策略，记为 $\boldsymbol{q}^*$。在单品情形中，采购成本不影响目标函数；而在多商品情形中，最优订货量会受到 c_i 的影响。众所周知，模型 (3) 是一个凸优化问题。在 (6) 中，我们对 n 凸函数求和，这仍保持凸性。此外，约束构成一个凸集，因此 (6) 是一个凸优化问题（Boyd and Vandenberghe，2004）。

3. 拟议的鲁棒方法

第3.1节介绍单商品情形下的鲁棒订货策略。这一结果是第3.2节中多商品情形稳健分析的基础模块，该节将最优策略描述为一个线性规划（LP）的解。第3.3节中，我们说明该线性规划可以视为一个背包问题。所有这些结果都基于成本函数的一个紧上界。第3.4节中，我们推导出成本函数的一个匹配紧下界。

3.1. 单商品的无分布假设订货策略

令 $\mathbb{P}$ 表示一个概率分布，并用 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ 表示 $\mathbb{E}$，以强调期望是相对于 D 的分布 $\mathbb{P}$ 计算的。随机需求 D 的 MAD

定义为 $\delta := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}|D-\mu|$，其中 μ 是 D 的期望值。与方差类似，MAD 是衡量离散程度或变异性的指标。我们在 EC.2 中介绍了 MAD 的若干性质。对于均值为 μ、MAD 为 δ、支撑集（有界）为 $[a,b]$ 的随机变量 D，其中 $0 \leqslant a \leqslant b < \infty$，均值-平均绝对偏差模糊集定义为

$$\mathcal{P}_{(\mu,\delta)} := \{\mathbb{P} \,|\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D] = \mu,\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}|D-\mu| = \delta,\, \mathrm{supp}(D) \subseteq [a,b]\}\,.$$

因此，我们假设随机需求 D 的"真实"分布 $\mathbb{P}$ 属于该模糊集，即 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_{(\mu,\delta)}$。

为求得稳健订货量，我们求解

$$\min_{q} \max_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}} dq + (m+d)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D-q)^+,$$

对此，我们首先考虑 $\max_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D-q)^+$。为了刻画这个紧确上界，我们采用 Ben-Tal and Hochman (1972) 给出的随机变量凸函数的一般上界。为使本文内容完整，我们在 EC.1 中证明以下结果。

LEMMA 1. 求解 $\max_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D-q)^+$ 的极端分布是一个三点分布，取值为 a、μ 和 b，且不依赖于 q。

由引理 1 的证明可知，D 的最坏情形概率分布，即求解 $\max_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D-q)^+$ 的极端分布，是一个定义如下的三点分布

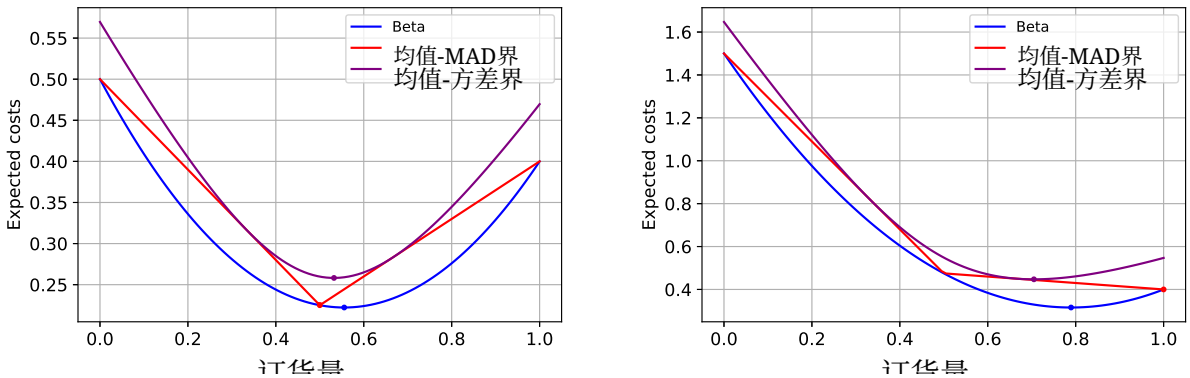
$$\mathbb{P}(D=x) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{2(\mu-a)}, & \text{for } x=a, \\ 1-\dfrac{\delta}{2(\mu-a)}-\dfrac{\delta}{2(b-\mu)}, & \text{for } x=\mu, \\ \dfrac{\delta}{2(b-\mu)}, & \text{for } x=b. \end{cases} \tag{7}$$

应用该最坏情形分布，稳健订货量可通过求解 $q^U = \mathrm{argmin}_q\, C^U(q)$ 得到，其中

$$\begin{aligned} C^U(q) := d(q-\mu) + \frac{\delta(m+d)}{2(\mu-a)}(a-q)^+ + (m+d)\left(1-\frac{\delta}{2(\mu-a)}-\frac{\delta}{2(b-\mu)}\right)(\mu-q)^+ \\ + \frac{\delta(m+d)}{2(b-\mu)}(b-q)^+. \end{aligned} \tag{8}$$

为说明均值-MAD界和稳健订货量 q^U，考虑这样一个例子：D 服从形状参数均设为

1 的贝塔分布。对于一般贝塔分布， $a=0$ 和 $b=1$。在图1a中，我们有 $m=1$ 和$d=0.8$。由此得到 $q^U=\mu$。在图1b中，加价率增至 $m=3$。在这种情况下，均值-MAD订货量增至 $q^U=b$。计算该上界时，



(a) $m=1$ (b) $m=3$

图1 均值-MAD界和均值-方差界及其对应的订货策略。上方曲线对应由 $\mathcal{P}_{(1/2,1/12)}$得出的均值-方差上界。中间曲线表示均值-MAD上界。"真实"成本函数假设 D 服从形状参数均为1的贝塔分布（下方曲线）。

注意到，均值-MAD界在点 a， μ 和 b处与"真实"成本函数相切。事实上，这一性质普遍成立。显然，对于 $q=a$ 或 b，有 $C^U(q)=C(q)$。当 $q=\mu$时，成本函数等于

$$C(\mu)=d(\mu-\mu)+(m+d)\mathbb{E}(D-\mu)^+=\frac{\delta(m+d)}{2}=C^U(\mu),$$

因为 $\mathbb{E}(D-\mu)^+=\mathbb{E}|D-\mu|/2$。

通过分析式（8），可以得到适用于 q^U的显式排序规则。式（8）的目标函数由分段线性函数构成。利用这一结构，我们可以构造显式订货策略。对于标量 α_1，……， α_m，ν_1，……， $\nu_m\in\mathbb{R}$， $f(x)=\max_{i=1,\ldots\ldots,m}\{\alpha_i x+\nu_i\}$ 表示一个凸分段线性函数。式（8）中的函数 $C^U(q)$可以表示为

$$C^U(q)=d(q-\mu)+(m+d)\mathbb{E}(D-q)=m(\mu-q)=:f_0(q),$$

当 $q\in[0,a)$ 时，以及

$$\begin{aligned}C^U(q)&=d(q-\mu)+(m+d)\left(1-\frac{\delta}{2(\mu-a)}-\frac{\delta}{2(b-\mu)}\right)(\mu-q)+\frac{\delta(m+d)}{2(b-\mu)}(b-q)\\&=q\left(\frac{\delta(m+d)}{2(\mu-a)}-m\right)+\nu_1=:f_1(q),\end{aligned}$$

当 $q \in [a, \mu)$ 时，其中 ν_1 是某个常数值。对于 $q \in [a, \mu)$，均值-MAD目标函数由线性函数 $f_1(q)$ 定义。对于区间 $q \in [\mu, b]$，我们得到

$$C^U(q) = d(q-\mu) + \frac{\delta(m+d)}{2(b-\mu)}(b-q) = q\left(d - \frac{\delta(m+d)}{2(b-\mu)}\right) + \nu_2 =: f_2(q)$$

对于某个常数 ν_2。因此，成本函数是三个线性函数 $f_0(q)$、 $f_1(q)$ 和 $f_2(q)$ 的逐点最大值：

$$C^U(q) = \max\left\{f_0(q),\, f_1(q),\, f_2(q)\right\}.$$

由于 $C^U(q) = \max_{j=0,\,1,\,2}\{\alpha_j q + \nu_j\}$ 是凸函数，因此有 $\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2$。由于我们假设 $m > 0$，可知 $\alpha_0 < 0$。因此，根据 $C^U(q)$ 的导数 α_1、 α_2，我们可以考察哪一段线性函数的斜率转为正值，从而得出明确的订货量。这使我们能够陈述定理 1。

THEOREM 1**(均值-MAD订货量)**。 稳健订货量 $q^U \in \operatorname{argmin}_q C^U(q)$ 为

(a) *If* $m < \dfrac{\delta d}{2(\mu-a)-\delta}$, *then* $q^U = a$.

(b) *If* $\dfrac{\delta d}{2(\mu-a)-\delta} < m < \dfrac{d(2(b-\mu)-\delta)}{\delta}$, *then* $q^U = \mu$.

(c) *If* $\dfrac{d(2(b-\mu)-\delta)}{\delta} < m$, *then* $q^U = b$.

(d) *If* $m = \dfrac{\delta d}{2(\mu-a)-\delta}$ *and* $m = \dfrac{d(2(b-\mu)-\delta)}{\delta}$, *then* $q^U \in [a, \mu]$ *and* $q^U \in [\mu, b]$, *respectively.*

根据定理 1，对于均值-MAD-范围信息，稳健订货量 q^U 由三个可预测值（最小需求、均值、最大需求）构成，不受加价率 m 和折扣因子 d 的影响；而决定订货量的条件则取决于它们（以及需求均值、平均绝对偏差和范围）。

3.2. 多品项与预算约束

多品项模型的无分布假设分析需要一个多元模糊集。与单品项情形一样，部分信息包括每个随机变量 $D_i, i = 1, \ldots, n$的均值 μ_i、平均绝对偏差 δ_i 以及支撑集 $\text{supp}(D_i) = [a_i, b_i]$。均值-平均绝对偏差模糊集定义为

$$\mathcal{P}_{(\mu,\delta)} := \left\{\mathbb{P} \,|\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D_i) = \mu_i,\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}|D_i - \mu_i| = \delta_i,\, \text{supp}(D_i) \subseteq [a_i, b_i],\, \forall i\right\}. \tag{9}$$

下文假设随机变量向量 $\boldsymbol{D}=(D_1,\ldots,D_n)$的分布属于该模糊集，即 $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}$。由于式 (6) 中的目标函数可分离，因此可以对求和中的每一项 $\mathbb{E}(D_i-q_i)^+$ 分别应用单品界。对于多品问题，以下结果可直接由引理 1 得出。

LEMMA 2. 求解$\max_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[G(\boldsymbol{q},\boldsymbol{D})]$ 的极端分布对每个 D_i均由一个三点分布构成，其取值为 $\xi_1^{(i)}=a_i$、$\xi_2^{(i)}=\mu_i$、$\xi_3^{(i)}=b_i$，相应概率为

$$p_1^{(i)}=\frac{\delta_i}{2(\mu_i-a_i)},\quad p_2^{(i)}=1-\frac{\delta_i}{2(\mu_i-a_i)}-\frac{\delta_i}{2(b_i-\mu_i)},\quad p_3^{(i)}=\frac{\delta_i}{2(b_i-\mu_i)}. \tag{10}$$

对于基于均值-MAD 模糊性的多商品报童模型，我们使用引理 2 求解以下问题中的最大化部分

$$\min_{\boldsymbol{q}:\sum_i c_iq_i\leqslant B,q_i\geqslant 0}\ \max_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}}\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\sum_{i=1}^n c_id_i(q_i-\mu_i)+c_i(m_i+d_i)\,(D_i-q_i)^+\Big], \tag{11}$$

并得到

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{q}}\quad & \sum_{i=1}^n c_i\left(d_i(q_i-\mu_i)+(m_i+d_i)\left(p_1^{(i)}\,(a_i-q_i)^+ + p_2^{(i)}\,(\mu_i-q_i)^+ + p_3^{(i)}\,(b_i-q_i)^+\right)\right)\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^n c_iq_i\leqslant B,\\ & q_i\geqslant 0,\quad i=1,\ldots,n.\end{aligned} \tag{12}$$

式 (12) 的目标函数具有分段线性结构。此外，由于这一结果且约束为线性，式 (12) 可转化为线性规划（LP）。具体而言，如下所述，鲁棒订货策略 $\boldsymbol{q}^U$ 可通过求解以下问题得到

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{q}}\quad & \sum_{i=1}^n \max_{j=0,1,2}\{\alpha_{i,j}q_i+\nu_{i,j}\}\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^n c_iq_i\leqslant B,\\ & q_i\geqslant 0,\quad i=1,\ldots,n,\end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_{i,0}&=-c_im_i,\qquad \nu_{i,0}=c_im_i\mu_i,\\ \alpha_{i,1}&=c_i\left(\frac{\delta_i(m_i+d_i)}{2(\mu_i-a_i)}-m_i\right),\quad \nu_{i,1}=c_i(m_i+d_i)\left(\mu_i-\frac{\delta_ia_i}{2(\mu_i-a_i)}\right)-c_id_i\mu_i,\\ \alpha_{i,2}&=c_i\left(d_i-\frac{\delta_i(m_i+d_i)}{2(b_i-\mu_i)}\right),\quad \nu_{i,2}=\frac{c_i\delta_i(m_i+d_i)b_i}{2(b_i-\mu_i)}-c_id_i\mu_i,\quad \text{for } i=1,\ldots,n.\end{aligned}$$

令 $f_{i,\ j}(x)=\alpha_{i,\ j}x+\nu_{i,\ j}$ 对于 $i=1$，……，n 以及 $j=0$，1，2。根据单品项情形可知，对于每个商品 i，目标函数可写为 $\max_{j=0,\ 1,\ 2}\{f_{i,j}(q_i)\}$，其中 $\alpha_{i,\ 0}\leqslant\alpha_{i,\ 1}\leqslant\alpha_{i,\ 2}$。因此，(12) 和 (13) 的目标函数相等，这使得两个模型等价。由于根据线性规划理论，凸分段线性目标函数可以写成线性约束，因此问题 (13) 可表示为线性规划（Boyd and Vandenberghe，2004）。

3.3. 背包算法

事实证明，问题 (13) 与连续背包问题密切相关，因此可以采用高效的基于排序的算法来求解 (13)。接下来，我们介绍一种用于确定鲁棒订货策略的高效算法。

对每个商品 i，定义线性函数 $f_{i,\ j}$，并令 $\alpha_{i,\ j}$ 表示其关于 q_i 的导数，其中商品为 $i=1,\ \ldots,n$，线性分段为 $j=0$，1，2。也就是说，

$$\frac{\mathrm{d}f_{i,j}(q_i)}{\mathrm{d}q_i}=\alpha_{i,j}.$$

对于每个商品 i，$f_{i,\ 0}$、$f_{i,\ 1}$ 和 $f_{i,\ 2}$ 分别表示将 q_i 增加到 a_i，μ_i 和 b_i 时，对 (13) 的值产生的边际影响。参数 $\alpha_{i,\ j}$ 表示这些线性函数的斜率，且只有当 $\alpha_{i,\ j}<0$ 时才增加订货量，否则不会降低期望成本。我们依次将预算分配给能使期望成本相对降幅最大的商品；也就是说，选择相对于其成本 c_k 而言负导数最小的商品 k，其导数为 $\alpha_{k,\ i}$。将所有商品组成的集合定义为 $N=\{1,\ldots,n\}$。由于只考虑能够降低期望成本的订货量，因此定义如下有序集合：

$$\mathcal{G}:=\{(i,j)\mid\alpha_{i,j}<0,i\in N,j\in\{0,1,2\}\},\tag{14}$$

其中，订货依据 $\alpha_{i,j}/c_i$ 的值来确定。对于 $m=|\mathcal{G}|$，该订货顺序表示为序列 $(i_1,j_1)\ldots,(i_m,j_m)$，并满足$\alpha_{i_1,j_1}/c_{i_1}\leqslant\cdots\leqslant\alpha_{i_m,j_m}/c_{i_m}$。这里，$\mathcal{G}$包含元组 (i,j)，其中 i表示报童模型中的一件商品，而 j 表示分段函数中的一个线性段。由于这些函数是凸的，对于每件商品 i，各线性段在集合 $\mathcal{G}$ 中按递增顺序排列。现在我们可以给出无分布假设的多物品报童模型的背包算法。

ALGORITHM 1 **（背包算法）**。对于预算水平 $B \geqslant 0$，订货策略$\boldsymbol{q}^U$ 通过以下步骤求得：

(i) 初始化时令 $\boldsymbol{q} = (0, \ldots\ldots, 0)$，并构造 $\mathcal{G}$。继续执行 (ii)。(ii) 选择第一个元素 $(i, j) \in \mathcal{G}$。若集合 $\mathcal{G}$ 为空，则最优解为 $\boldsymbol{q}^U = \boldsymbol{q}$。否则，继续执行 (iii)。(iii) 若 $j = 0$，令 $q_i = a_i$。若 $j = 1$，令 $q_i = \mu_i$。若 $j = 2$，令 $q_i = b_i$。继续执行 (iv)。(iv) 判断是否违反预算约束 $\sum_{i=1}^{n} c_i q_i \leqslant B$。若违反，则令 q_i，使得 $c_i q_i = B - \sum_{k \in N | k \neq i} c_k q_k$，最优解为 $\boldsymbol{q}^U = \boldsymbol{q}$。否则，从 $\mathcal{G}$ 中移除元素 (i, j)，并返回步骤 (ii)。

该算法 可得出式（13）的最优解，正如下述定理所述 .

THEOREM 2 **（背包订货策略）**。 求解多商品报童模型（13）的鲁棒订货策略 $\boldsymbol{q}^U$ 由算法1确定。

证明。 为证明该算法能够得出最优解，我们构造一个可求解式（13）的连续背包问题。下文中，(i_k, j_k)对应于 $\mathcal{G}$中物品有序序列的第 k项。定义以下辅助模型：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \sum_{k=1}^{m} p_k x_k \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^{m} c_k x_k \leqslant B, \\ & 0 \leqslant x_k \leqslant u_k \quad \forall k = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$u_k = \begin{cases} a_{i_k}, & \text{for } j_k = 0 \\ \mu_{i_k} - a_{i_k}, & \text{for } j_k = 1 \\ b_{i_k} - \mu_{i_k}, & \text{for } j_k = 2 \end{cases}$$

以及 $p_k = \alpha_{i_k,\, j_k}$ 以及 $c_k = c_{i_k}$。根据序列的顺序可知，$p_1/c_1 \leqslant \ldots \leqslant p_m/c_m$。假设 $(x_1^*, \ldots\ldots, x_m^*)$ 是优化问题 (15) 的一个最优解。对于 $i \in N$，令 $q_i^U = \sum_{k=1,\, \ldots,\, m | i = i_k} x_k^*$。由于 $\alpha_{i,\,0} \leqslant \alpha_{i,\,1} \leqslant \alpha_{i,\,2}$，每件商品 i 对应的片段 j_k 按 $\mathcal{G}$ 递增排列。因此，在一个最优解中，只有当其前驱 $u_{i_k,\, j_l}$ 也被取到时，才会取到 $u_{i_k,\, j_k}$。根据构造，$\boldsymbol{q}^U$ 是 (13) 的可行解。此外，问题 (13) 和 (15) 的目标函数值仅相差一个常数项，因此两个问题具有相同的最优解。对于连续背包问题，贪心分配可得最优解（参见 EC.3）。因此，$\boldsymbol{q}^U = (q_1^U, \ldots\ldots, q_n^U)$ 是 (13) 的最优解。□

定理2表明，物品的选择存在一种排序方式。取初始预算 $B=0$。如果将预算 B 增加一个较小的值，我们会首先将加价率 m_i 最高的商品 i 的订货量增加到 a_i 。这在直觉上是合理的，因为加价率最高的产品利润最大，而且由于 $q_i < a_i$，我们没有库存过剩的风险。我们依次选择边际收益最大的商品$\alpha_{i,\ j}/c_i$，并将订货量逐步增加至 a_i、 μ_i 或 b_i。该过程持续进行，直到预算全部用完，或达到无容量限制最优解。在这一过程中最先订购的物品，对降低多品种报童问题的成本影响最大。

定理2中的背包算法，其主要计算复杂度来自对集合 $\mathcal{G}$进行排序，因此贪心方法的计算复杂度为 $O(n\log\ n)$。此外，按照 Balas and Zemel（1980）针对连续背包问题提出的方法，首先确定将违反预算约束的临界元素（i_s，j_s），即可在 $O(n)$时间内找到解。随后，将每个$\alpha_{i,\ j}/c_i$ 与临界元素的比率进行比较，以确定物品的最优预算分配。也可以通过线性规划（13）求得最优解，我们使用单纯形法求解。值得注意的是，单纯形法的一次迭代需要 $O(n^2)$次算术运算（Ill´es and Terlaky，2002），这超出了背包算法的时间要求。

3.4. 一个匹配下界

迄今为止的稳健分析基于以下方法：已知需求分布的均值、平均绝对偏差和范围时，求出成本函数的紧上界。有了额外信息后，我们也可以构造与之匹配的下界。我们将偏度信息 $\beta_i=\mathbb{P}(D_i \geqslant \mu_i)$ 纳入均值 - 平均绝对偏差模糊集，以得到紧下界。对于随机变量 $\boldsymbol{D}=(D_1, \ldots, D_n)$，将模糊集定义为

$$\mathcal{P}_{(\mu,\delta,\beta)} := \{\mathbb{P} \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}_{(\mu,\delta)}, \mathbb{P}(D_i \geqslant \mu_i) = \beta_i,\, i=1,\ldots,n\}$$

与 $\mathcal{P}_{(\mu,\delta,\beta)} \subseteq \mathcal{P}_{(\mu,\delta)}$。以下结果的证明与引理 2 的证明相同，但此处使用了 Ben-Tal and Hochman (1972) 讨论的关于随机变量凸函数的紧下界。为使本文内容完整，EC.1 中给出了单变量情形的证明。这已经足够，因为单变量结果可以像引理 2 中那样，分别应用于 $G(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{D})$ 中求和的每一项。

LEMMA 3. 求解 最小化$_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta,\beta)}}$ $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[G(\boldsymbol{q},\boldsymbol{D})]$ 的极端分布，对每个D_i而言，均由一个两点分布构成，其取值分别为 $\mu_i+\frac{\delta_i}{2\beta_i}$, $\mu_i-\frac{\delta_i}{2(1-\beta_i)}$，对应的概率分别为 β_i, $1-\beta_i$。

利用这一结果，我们得到

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{q}} \quad & C^L(\boldsymbol{q}) := \sum_{i=1}^{n} c_i \left(d_i(q_i-\mu_i) + (m_i+d_i)\left(\beta_i(\mu_i+\frac{\delta_i}{2\beta_i}-q_i)^+ + (1-\beta_i)(\mu_i-\frac{\delta_i}{2(1-\beta_i)}-q_i)^+\right)\right)\\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i q_i \leqslant B,\\ & q_i \geqslant 0, \quad \text{for } i=1,\ldots,n,\end{aligned} \tag{16}$$

作为多品种报童问题的下界模型。由于问题 (16) 的目标函数也由分段线性函数构成，因此，与问题 (12) 的相关结果类似，问题 (16) 也存在相应的线性规划表示和背包算法。

现在，我们可以利用近期的分布鲁棒优化结果（参见 EC.4 和 Postek 等人，2018年）求解 (13) 和 (16)，从而得到多商品报童模型的紧确性能区间。对于所有可行的订货策略 $\boldsymbol{q}$ 和 $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta,\beta)}$，有

$$C(\boldsymbol{q}) \in \left[C^L(\boldsymbol{q}), C^U(\boldsymbol{q})\right].$$

此外，对于报童问题及其分布鲁棒对应问题的最优解，

$$C(\boldsymbol{q}^*) \in \left[C^L(\boldsymbol{q}^L), C^U(\boldsymbol{q}^U)\right].$$

通过分别计算模型 (12) 和 (16) 的最优解，可以得到基于均值-MAD 模糊性的多商品报童模型最紧确的上界和下界。

4. 稳健订货的数值示例

下面我们将通过示例说明并直观展示稳健订货策略。为展示“预算一致性”这一性质，第4.1节针对预算增加的情形应用背包算法。第4.2节将部分需求信息下背包策略的表现，与完全信息情形下最优解的表现进行比较。我们的代码以在线补充材料的形式提供。

4.1.“预算一致性”性质的数值示例

我们通过报童模型中的商品，说明背包算法以及如何将预算分配给不同的订货量。考虑 $n=5$ 个支撑集为 $a=10,\quad b=50$ 、均值为 $\mu=30$且同分布的商品。从图2可以推知，物品1的利润最高。较低的预算水平会分配给该商品，从而得到$q_1=\mu_。$ 商品3是最后一个获得预算分配的商品，因此它的利润最低。表1展示了有序集合 $\mathcal{G}$。从该表可以看出，物品1的 $\alpha_{i,\ 0}/c_i$ 取值确实最小，因此会最先增加。

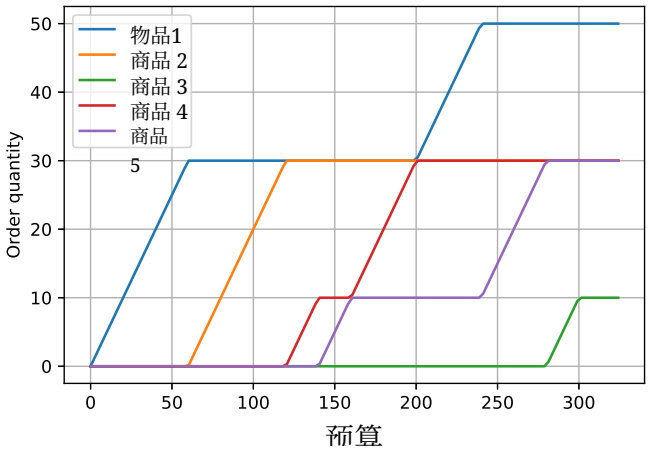


图2 根据背包算法，预算增加时订货量的变化

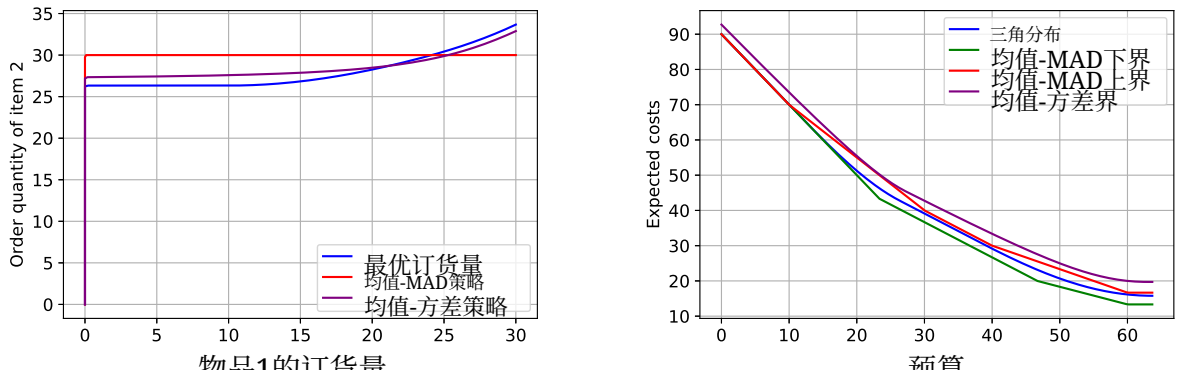
表1 包含$\alpha_{i,\ j}/c_i$ 以及有序集合 $\mathcal{G}$相应信息的表

$\mathcal{G}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\alpha_{i,j}/c_i$	-0.92	-0.75	-0.72	-0.49	-0.3	-0.15	-0.1	-0.08	-0.03	-0.01	0.14	0.42	0.45	0.7	0.7
分段函数	0	1	0	1	0	0	1	2	1	0	1	2	2	2	2
Item	1	1	2	2	4	5	4	1	5	3	3	5	2	4	3

图2清楚地说明，预算增加时，原有预算对应的订货量保持不变，只有新增预算会进一步分配给各商品。为进一步说明“预算一致性”这一性质，考虑多品种报童问题，其中 $n=2$、 $m_2=2$，其余成本参数均为 1，且需求独立同分布，服从支撑集为 $[10,50]$ 的对称三角分布。图3绘出了不同预算水平下的期望成本和订货量。

图3a展示了两个订货量之间的分配。预算较低时，首先增加商品一的订货量，因为它是利润最高的商品。图3b展示了上界（12）和下界（16），二者共同构成期望成本的紧性能区间。

为便于比较，我们还展示了 Gallego and Moon（1993）所研究的部分需求信息情形的结果，并假设已知需求的均值和方差；详情请参见 EC.5。Gallego and Moon（1993）的结果（非平凡地）取决于所有模型参数，包括预算 B。由于缺乏预算一致性，决策者必须针对每个预算水平分别求解一个优化问题，见（EC.13），这也解释了图3a中的平滑曲线。相比之下，我们的背包算法生成一个不依赖于 B的排序列表，并规定依次按照该列表对物品排序，订货量取最小需求、均值或最大需求。



(a) 订货策略　　(b) 报童成本

图3 报童模型的均值-方差界、均值-MAD界及订货策略。均值-方差曲线通过求解 (EC.13) **得出。均值-MAD策略对应于** (12) **的最优解。均值 -MAD 上界和下界分别对应于极值三点分布和两点分布。“ 真实 ” 成本函数假设** D **服从定义在** $[10, 50]$ **上的对称三角分布。**

我们强调，这些结果并非旨在对比均值-平均绝对偏差策略与均值-方差策略的数值表现，因为所展示的差异仅仅体现了处理模糊性的不同方式。事实上，这两种策略很难比较，因为各自的模糊集可能包含截然不同的分布。例如，有限方差排除了二阶矩无限的分布，而有限平均绝对偏差则不会。就

我们的目的而言，平均绝对偏差和方差都是恰当的离散程度描述指标，而且两者都可以用基本的统计估计量轻松地根据数据进行校准。在本文的分布鲁棒优化背景下，关键区别在于，平均绝对偏差能够导出一种简单且符合预算约束的订货策略。

4.2. 额外信息期望价值

我们引入额外信息期望价值（EVAI）作为性能指标，其定义如下：

$$\mathrm{EVAI}(\boldsymbol{q}_B^U) = \frac{C(\boldsymbol{q}_B^U) - C(\boldsymbol{q}_B^*)}{C(\boldsymbol{q}_B^*)},$$

其中，$\boldsymbol{q}_B^U$ 是鲁棒订货策略，而$\boldsymbol{q}_B^*$ 是在已知联合需求分布时的最优订货策略。令 B 从 0 取值至 $\sum_{i=1}^n q_i^* =: B_{\mathrm{opt}}$，并考察表 2 中列出的九种不同需求分布。

表 2 多商品性能分析中使用的九种分布

Case		Case		Case	
1	均匀分布$[10,50]$	4	贝塔分布(1,3)，位于 $[0,50]$	7	三角分布(10,50,18)
2	均匀分布$[10,100]$	5	贝塔分布(2,2)，位于 $[0,50]$	8	三角分布(10,50,30)
3	均匀分布$[10,200]$	6	贝塔分布(3,1)，取值范围为 $[0,50]$	9	三角分布(10,50,42)

我们考虑 $n = 25$ 件物品。对于每件商品 i，令 $c_i = d_i = 1$，并假设需求服从相同的分布。例如，在案例2中，每件商品 i 的需求 D_i 服从参数为 $a_i = 10$ 和 $b_i = 100$ 的均匀分布。表3概述了加价率所对应的低、平均和高利润率。

对于低利润率情形，图4展示了九种情形下的结果，包括采用均值-MAD-范围信息的鲁棒订货策略，以及利用额外信息 $\beta_i = \mathbb{P}(D_i \geqslant \mu_i)$ 的策略。对于前者，在九种情形中，最差性能相较于最优订货量 q_B^* 的最大偏差约为 23%。总体而言，在完整信息可得时，鲁棒策略的性能与最优性能仅相差几个百分点。对于均匀分布情形（情形1–3），范围越大，性能越低。对于贝塔分布需求（情形4–6），右偏分布的表现不如左偏分布。三角分布（情形7–9）也呈现出这一现象。在大多数情形下，利用额外信息 $\beta_i = \mathbb{P}(D_i \geqslant \mu_i)$ 的策略表现略好。

表3 报童模型中全部25种商品的加价幅度

加价率	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}
低利润率	0.1	0.14	0.18	0.21	0.25	0.29	0.33	0.36	0.4	0.44	0.48	0.51	0.55
平均利润率	1	1.13	1.25	1.38	1.5	1.63	1.75	1.88	2	2.13	2.25	2.38	2.5
高利润率	4	4.21	4.42	4.63	4.83	5.04	5.25	5.46	5.67	5.88	6.08	6.29	6.5
加价率	m_{14}	m_{15}	m_{16}	m_{17}	m_{18}	m_{19}	m_{20}	m_{21}	m_{22}	m_{23}	m_{24}	m_{25}	
低利润率	0.59	0.63	0.66	0.7	0.74	0.78	0.81	0.85	0.89	0.93	0.96	1	
平均利润率	2.63	2.75	2.88	3	3.13	3.25	3.38	3.5	3.63	3.75	3.88	4	
高利润率	6.71	6.92	7.12	7.33	7.54	7.75	7.96	8.17	8.37	8.58	8.79	9	

图5展示了高利润率情形下的类似结果。对于较低的预算水平，鲁棒策略的 EVAI 大多低于 10%；但当预算接近 B_{opt}（即接近无约束模型）时，EVAI 开始迅速上升。当预算限制较少时，额外的分布信息能带来显著价值。特别是，由于该策略利用了偏度信息 β_i，在较高预算水平下，其期望表现优于鲁棒订货策略。我们在 EC.6 中展示了平均利润率情形下的更多性能图，以及采用均值-方差信息的其他数值实验。

接下来，我们通过比较仅知道需求均值和范围时的表现，量化MAD信息的价值。对于低利润率设置，图6展示了仅掌握均值和范围信息时订货策略的EVAI。与均值-MAD策略一样，该策略基于一个离散分布；在此例中，该分布是在 $\{a, b\}$ 上、概率为 $\frac{b-\mu}{b-a}$ 和 $\frac{\mu-a}{b-a}$ 的极端分布，并达到 Edmundson-Madansky界（见 Ben-Tal and Hochman, 1972）。也就是说，我们不再采用最坏情形三点分布，而是对这一两点分布下的式（6）取期望，并利用由此得到的线性规划求出稳健的均值-范围订货策略。图中的结果清楚表明，以MAD衡量的离散程度信息能够显著改善表现。

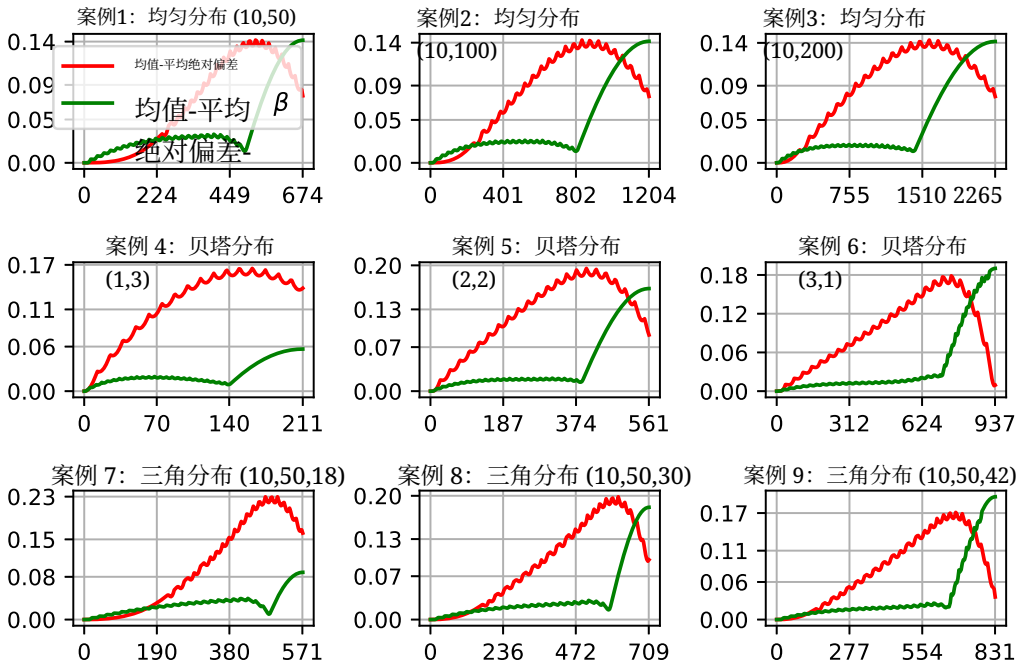


图4 低利润率设置的结果。横轴对应 B，纵轴对应 EVAI。

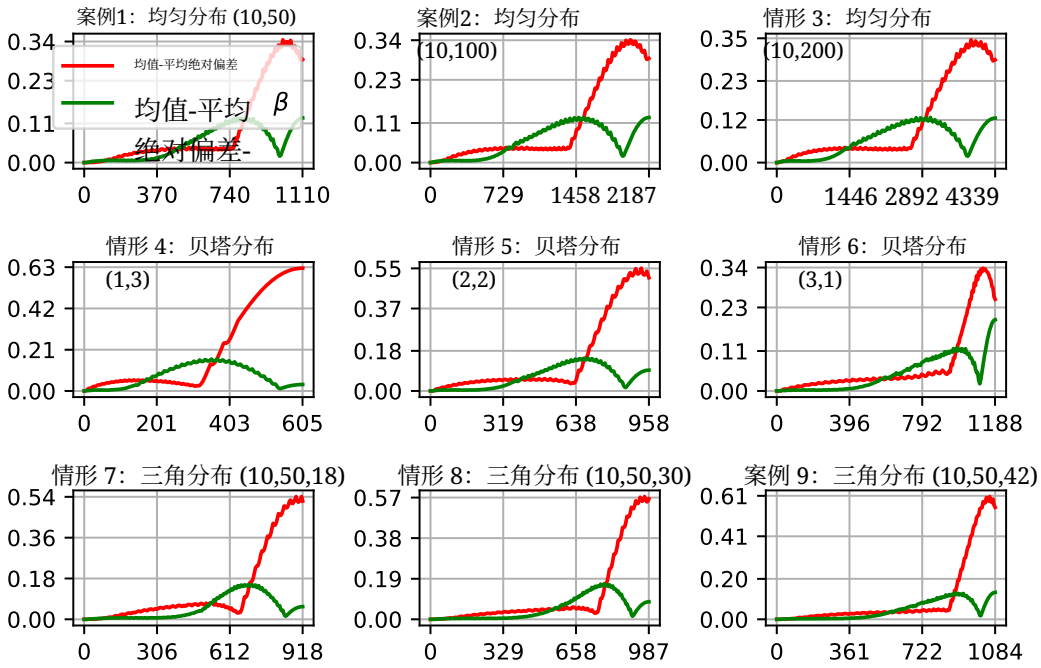


图5 高利润率设置的结果。横轴对应 B，纵轴对应 EVAI。

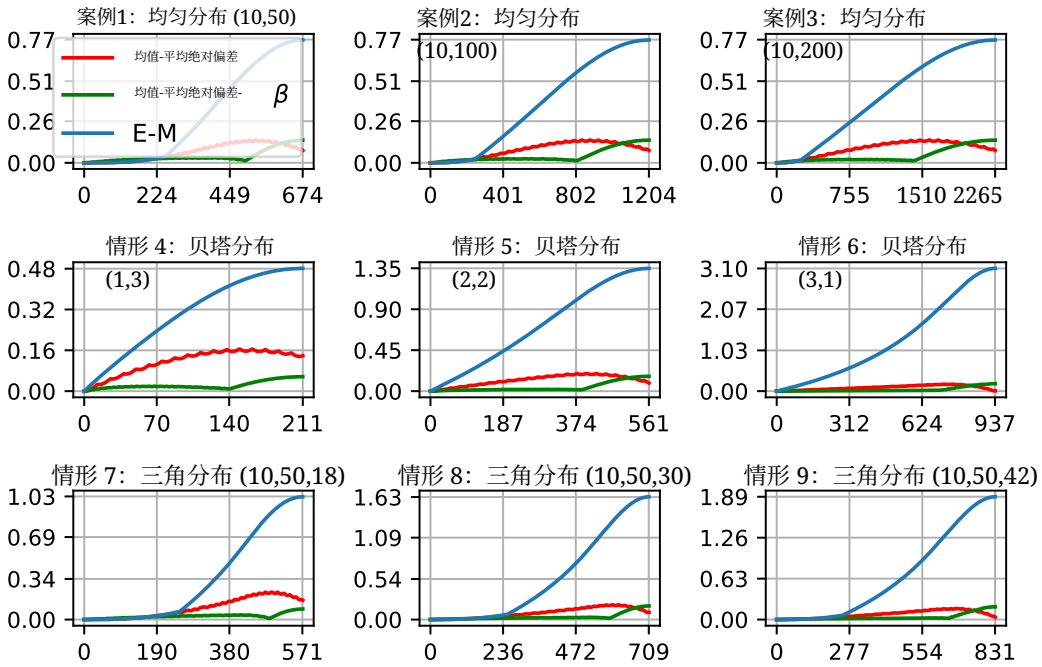


图 6 低利润率设置下的结果。横轴对应 B，纵轴对应 EVAI。E-M 性能图指的是仅包含均值信息的模型。

5. 结论

本文针对具有预算约束、需求信息不完整（均值、平均绝对偏差和范围）的报童问题，提出了新的订货策略。这些订货策略基于极小极大方法得出：我们在符合部分信息要求的需求分布范围内，寻找使最坏情形成本函数最小的订货量。

多商品情形下的极小极大分析会导出一个背包问题，而该背包问题的解实际上就是订货策略。该策略规定根据各商品对总成本的边际影响对物品进行排序，这让人联想到用于求解连续背包问题的贪心算法。订货策略只需为每种商品订购最低、平均或最高需求量。因此，决策者可以根据边际影响对物品进行排序，然后按照此列表依次订购，直到预算用尽。排序列表易于生成，而且“订购顺序”不受预算影响，因此该策略透明且易于实施。现有方法无论是在完整需求分布信息下，还是在部分信息（例如均值-方差）下，都不具备这种“预算一致性”。

极小极大方法具有稳健性，其订货策略能够抵御所有符合部分信息的分布。该方法无需估计需求分布，而在实践中，估计需求分布可能是一个艰巨的过程，也容易出错。然而，极小极大方法也存在过于保守的风险。通过大量数值实验，我们比较了部分需求设定下的稳健策略与完整需求设定下的策略，并观察到所提出的策略表现良好。

我们的分析核心在于利用 MAD 信息构建稳健的极小极大分析。以平均绝对偏差作为离散度量，我们得到了一个易于处理的优化模型，其解是一种满足预算一致性性质的鲁棒订货策略。利用 MAD 构建可求解的极小极大问题，也可应用于其他库存模型。我们在 EC.7 中针对三种扩展情形展示了这一思路：具有多个约束的报童问题、存在不可靠供应的报童问题，以及风险厌恶型报童问题。在这三种情形中，极小极大分析都导出了一个易于处理的数学规划，即背包问题或线性规划。

参考文献

Abdel-Malek, L., Montanari, R., and Morales, L. C. (2004). 带预算约束的多产品报童问题的精确、近似和通用迭代模型。《国际生产经济学杂志》, 91(2):189–198. Ardestani-Jaafari, A. and Delage, E. (2016). 带分段线性函数和的稳健优化及其在库存问题中的应用。《运筹学》, 64(2):474–494. Arrow, K. J., Harris, T., and Marschak, J. (1951). 最优库存策略。《计量经济学》*: Journal of the Econometric Society*, 19(3):250–272. Balas, E. and Zemel, E. (1980). 大规模0-1背包问题的一种算法。《运筹学》, 28(5):1130–1154. Ben-Tal, A., Den Hertog, D., De Waegenaere, A., Melenberg, B., and Rennen, G. (2013). 受不确定概率影响的优化问题的稳健解。《管理科学》, 59(2):341–357. Ben-Tal, A. and Hochman, E. (1972). 关于随机变量凸函数期望的更多界限。《应用概率杂志》, 9(4):803–812. Ben-Tal, A. and Hochman, E. (1985). 利用均值和平均绝对偏差近似预期收益并在不确定性下做出最优决策。*Zeitschrift f¨ur Operations Research*, 29(7):285– 300. Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004). 《凸优化》. 剑桥大学出版社 , 剑桥 , 英国。

Chen, H., Hu, M., and Perakis, G. (2022). 无分布定价。《制造与服务运营管理》. 电子版先行出版，1月20日, https://doi.org/10.1287/msom.2021.1055. Chen, W., Sim, M., Sun, J., and Teo, C.-P. (2010). 从条件风险价值到不确定性集：对联合机会约束优化的启示。《运筹学》, 58(2):470–485. Dada, M., Petruzzi, N. C., and Schwarz, L. B. (2007). 供应商不可靠时的报童采购问题。《制造与服务运营管理》, 9(1):9–32. Delage, E. and Ye, Y. (2010). 矩不确定性下的分布鲁棒优化及其在数据驱动问题中的应用。《运筹学》, 58(3):595–612. Elmachtoub, A. N., Gupta, V., and Hamilton, M. L. (2021). 个性化定价的价值。《管理科学》, 67(10):6055–6070. Erlebacher, S. J. (2000). 具有单一容量约束的多商品报童问题的最优解与启发式解。*Production and Operations Management*, 9(3):303–318. Fisher, M. and Raman, A. (1996). 通过准确响应早期销售降低需求不确定性的成本。《运筹学》, 44(1):87–99. Gallego, G. (1992). (Q, R)库存模型的一种极小极大无分布程序。*OperationsResearch Letters*, 11(1):55–60. Gallego, G. and Moon, I. (1993). 无分布报童问题：综述与拓展。*Journal ofthe Operational Research Society*, 44(8):825–834. Hadley, G. and Whitin, T. M. (1963). 《库存系统分析》. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. Hanasusanto, G. A., Kuhn, D., Wallace, S. W., and Zymler, S. (2015). 具有多峰需求分布的分布鲁棒多商品报童问题。*Mathematical Programming*, 152(1):1–32. Ill´es, T. and Terlaky, T. (2002). 单纯形法与内点法：优缺点比较。*European Journal ofOperational Research*, 140(2):170–190. K¨aki, A., Liesi¨o, J., Salo, A., and Talluri, S. (2015). 供应不确定性下的报童决策。*Inter-national Journal of Production Research*, 53(5):1544–1560. Kellerer, H., Pferschy, U., and Pisinger, D. (2004). 《背包问题》. Springer-Verlag, 柏林. Kleer, P. and van Leeuwaarden, J. (2022). 分布鲁棒卖方的最优停止理论。Kong, Q., Lee, C.-Y., Teo, C.-P., and Zheng, Z. (2013). 利用余正锥为随机服务交付系统安排到达时间。《运筹学》, 61(3):711–726. Lau, H.-S. and Lau, A. H.-L. (1996). 报摊问题：有容量限制的多产品单周期库存问题。*European Journal of Operational Research*, 94(1):29–42. Mak, H.-Y., Rong, Y., and Zhang, J. (2014). 利用有限分布信息进行预约排程。《管理科学》, 61(2):316–334.

Merzifonluoglu, Y. 和 Feng, Y.（2014）。含多个不可靠供应商的报童问题。《国际生产研究杂志》，52(1):221–242。Nahmias, S.（1982）。易腐库存理论：综述。《运筹学》，30(4):680–708。Nahmias, S.（2009）。《生产与运营分析》。麦格劳-希尔教育，纽约，第6版。Nahmias, S. 和 Schmidt, C. P.（1984）。具有单一约束的多商品报童问题的一种高效启发式方法。《海军研究后勤季刊》，31(3):463–474。Natarajan, K.、Sim, M. 和 Uichanco, J.（2018）。报童模型中的非对称性与模糊性。《管理科学》，64(7):3146–3167。Natarajan, K. 和 Teo, C.-P.（2017）。关于二阶矩界的约化半定规划及其应用。《数学规划》，161(1):487–518。Nemirovski, A. 和 Shapiro, A.（2007）。机会约束规划的凸近似。《*SIAM*优化杂志》，17(4):969–996。Perakis, G. 和 Roels, G.（2008）。部分信息下报童模型中的遗憾。《运筹学》，56(1):188–203。Perakis, G.、Singhvi, D. 和 Spantidakis, Y.（2020）。借助报童模型，为一家大型时尚电商零售商在商品深度和容量约束下进行库存分配。预印本见 SSRN 3632459。Popescu, I.（2007）。随机优化的稳健均值—协方差解。《运筹学》，55(1):98–112。Postek, K.、Ben-Tal, A.、den Hertog, D. 和 Melenberg, B.（2018）。利用均值与离散度信息处理具有模糊随机约束的稳健优化。《运筹学》，66(3):814–833。Rahimian, H. 和 Mehrotra, S.（2019）。分布鲁棒优化：综述。*arXiv*预印本 *arXiv:1908.05659*Rockafellar, R. T. 和 Uryasev, S.（2000）。条件风险价值的优化。《风险杂志》，2:21–42。Rogosinski, W. W.（1958）。非负质量的矩。《伦敦皇家学会会刊。*A*辑。数学与物理科学》，245(1240):1–27。Roos, E. 和 den Hertog, D.（2020）。降低稳健优化中的保守性。《*INFORMS*计算杂志》，32(4):1109–1127。Scarf, H. E.（1958）。库存问题的极小极大解。载于 Arrow, K. J.、Karlin, S. 和 Scarf, H. E. 编，《库存与生产数学理论研究》。斯坦福大学出版社，帕洛阿尔托，加利福尼亚州。Shapiro, A.、Dentcheva, D. 和 Ruszczy´nski, A.（2009）。《随机规划讲义：建模与理论》。工业与应用数学学会，费城。Shapiro, A. 和 Kleywegt, A.（2002）。随机问题的极小极大分析。《优化方法与软件》，17(3):523–542。

Silver, E. A.、Pyke, D. F. 和 Peterson, R.（1998）。库存管理与生产计划和排程。John Wiley & Sons, 纽约，第3版。Vairaktarakis, G. L.（2000）。具有预算约束的鲁棒多商品报童模型。《国际生产经济学杂志》，66(3):213–226。van Eekelen, W.、den Hertog, D. 和 van Leeuwaarden, J. S. H.（2022）。MAD离散度量使极值队列分析变得简单。电子版先行出版，1月12日，https://doi.org/10.1287/ijoc.2021.1130。van Leeuwaarden, J. S. 和 Stegehuis, C.（2021）。利用无分布随机图分析进行鲁棒子图计数。《物理评论*E*》，104(4):044313。Xu, H.、Liu, Y. 和 Sun, H.（2018）。具有矩阵矩约束的分布鲁棒优化：拉格朗日对偶与切平面法。《数学规划》，169(2):489–529。Zhu, S. 和 Fukushima, M.（2009）。最坏情形条件风险价值及其在鲁棒投资组合管理中的应用。《运筹学》，57(5):1155–1168。Zymler, S.、Kuhn, D. 和 Rustem, B.（2013）。具有二阶矩信息的分布鲁棒联合机会约束。《数学规划》，137(1):167–198。

《具有预算约束的部分信息报童问题的鲁棒背包排序》的电子伴侣

EC.1. 证明

引理 *1* 的证明。 在其最初的研究中，Ben-Tal and Hochman（1972）通过将支撑集划分为两个区间 $[a,\mu]$ 和 $[\mu,b]$，然后对两个子区间分别应用 Edmundson-Madansky 界，证明了一般凸函数的这一结果。下面的证明采用半无限规划对偶性，取自 van Eekelen 等人（2022年）的研究。考虑一般凸函数 $f(x)$（这包括 $(x-q)^+$ 作为特殊情形）。对于$X\sim\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}$，我们求解

$$\begin{aligned}\max_{\mathbb{P}(x)\geqslant 0}\quad & \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mathbb{P}(x)\\ \text{s.t.}\quad & \int_a^b \mathrm{d}\mathbb{P}(x)=1,\ \int_a^b x\,\mathrm{d}\mathbb{P}(x)=\mu,\ \int_a^b |x-\mu|\mathrm{d}\mathbb{P}(x)=\delta,\end{aligned}\tag{EC.1}$$

考虑 (EC.1) 的对偶问题，

$$\begin{aligned}\min_{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2}\quad & \lambda_0+\lambda_1\mu+\lambda_2\delta\\ \text{s.t.}\quad & M(x):=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2|x-\mu|\geqslant f(x),\ \forall x\in[a,b].\end{aligned}\tag{EC.2}$$

函数 $M(x)$ 在 $x=\mu$ 处有一个“尖点”。由于对偶问题 (EC.2) 有三个变量，最优的 $M(x)$ 在三个点处与 $f(x)$ 相切： $x=a$、 μ 和 b。对于这一选择的 $M(x)$，

$$\lambda_0=f(a)-\lambda_1 a-\lambda_2(\mu-a),\ \lambda_1=\frac{1}{2}\left(\frac{f(b)-f(\mu)}{b-\mu}+\frac{f(\mu)-f(a)}{\mu-a}\right),$$
$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left(\frac{f(b)-f(\mu)}{b-\mu}-\frac{f(\mu)-f(a)}{\mu-a}\right).$$

由于上界函数是分段线性且凸的，我们可以通过令 $M(x)$ 在边界点 a， b以及尖点 $x=\mu$ 处与每个凸函数 $f(x)$ 相切，从而对其进行上界估计。根据互补松弛性质，这些点构成极端分布的支撑集，而最优概率可通过求解由 (EC.1) 中各方程导出的线性方程组得到。这是一个包含三个未知概率和三个方程的线性方程组，其解为

$$p_a=\frac{\delta}{2(\mu-a)},\quad p_\mu=1-\frac{\delta}{2(\mu-a)}-\frac{\delta}{2(b-\mu)},\quad p_b=\frac{\delta}{2(b-\mu)}.$$

最后，对于这些原问题和对偶问题的解，我们验证问题 (EC.1) 和 (EC.2) 的目标函数值相等，由此确认强对偶性成立。□

引理 *3* 的证明。 我们针对一般的凸 $f(x)$ 证明这一结果。对于分布为 $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,d,\beta)}$ 的随机变量X，紧下界可由下式得出

$$\begin{aligned}\max_{\mathbb{P}(x)\geqslant 0}\quad & \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mathbb{P}(x)\\ \text{s.t.}\quad & \int_a^b \mathrm{d}\mathbb{P}(x)=1,\ \int_a^b x\,\mathrm{d}\mathbb{P}(x)=\mu,\ \int_a^b |x-\mu|\mathrm{d}\mathbb{P}(x)=\delta,\ \int_a^b \mathbb{1}_{\{x\geqslant\mu\}}\mathrm{d}\mathbb{P}(x)=\beta.\end{aligned} \tag{EC.3}$$

考虑（EC.3）的对偶问题,

$$\begin{aligned}\min_{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2}\quad & \lambda_0+\lambda_1\mu+\lambda_2\delta+\lambda_3\beta\\ \text{s.t.}\quad & M(x):=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2|x-\mu|+\lambda_3\mathbb{1}_{\{x\geqslant\mu\}}\leqslant f(x),\ \forall x\in[a,b].\end{aligned} \tag{EC.4}$$

这里， $M(x)$ 在 $x=\mu$ 处既有一个“尖点”，又有一个跳跃间断。设函数 $M(x)$ 在 μ 两侧的两个点处与 $f(x)$ 的上图集相切。利用这一信息，对偶问题中的约束可简化为两个等式约束。根据 Karush-Kuhn-Tucker 条件，我们可推导出最优切点:

$$x_1=\mu+\frac{\delta}{2\beta},\quad x_2=\mu-\frac{\delta}{2(1-\beta)},$$

它们分别对应于 υ_1 和 υ_2。代入该解并求解 λ_0， λ_1， λ_2 和 λ_3可得

$$\lambda_0=f(\upsilon_2)+\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\delta}{2(1-\beta)}-\lambda_1\mu,\quad \lambda_3=f(\upsilon_1)-f(\upsilon_2)+\frac{\lambda_2\delta}{(1-\beta)}-\frac{(\lambda_2+\lambda_1)\delta}{2\beta(1-\beta)},$$

因此，最优值为 $\beta f(\upsilon_1)+(1-\beta)f(\upsilon_2)$。为确保该解满足对偶可行性，我们为两个自由决策变量赋予适当的值。具体而言，令$\lambda_1+\lambda_2$和 $\lambda_1-\lambda_2$ 分别等于 $f(x)$ 在 $x=\upsilon_1$ 和 υ_2 处的斜率。通过求解由（EC.3）得到的线性方程组，可得（EC.3）的最优概率。

□

EC.2. 平均绝对偏差的已知性质

我们回顾平均绝对偏差的一些众所周知的性质；例如，参见 Ben-Tal and Hochman（1985）。设 σ^2 为随机变量 X 的方差，其分布已知属于集合 $\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}$。那么

$$\frac{\delta^2}{4\beta(1-\beta)}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{\delta(b-a)}{2}.$$

特别是，由于

$$\delta^2 \leqslant 4\beta(1-\beta)\sigma^2 \leqslant \sigma^2,$$

由此可得 $\delta \leqslant \sigma$。证明请参见 Ben-Tal and Hochman（1985）。对于本文使用的分布，δ 的显式公式如下：

- $[a,b]$上的均匀分布：
$$\delta = \frac{1}{4}(b-a)$$
- 参数为 k，λ 支撑集为 $[a,b]$的贝塔分布：
$$\delta = \frac{2k^k\lambda^\lambda\Gamma(k+\lambda)}{(k+\lambda)^{k+\lambda+1}\Gamma(k)\Gamma(\lambda)}(b-a)$$
- $[a,b]$ 上的三角分布，众数为 c：
$$\delta = \begin{cases} \frac{2(b+c-2a)^3}{81(a-b)(a-c)}, & \text{for } a+b<2c, \\ \frac{2(a+c-2b)^3}{81(a-b)(b-c)}, & \text{for } a+b>2c \end{cases}$$
- 正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$：
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$
- 参数为 λ 和 k 的伽马分布（其中 $\mu = k/\lambda$）：
$$\delta = \frac{2k^k}{\Gamma(k)\exp(k)}\frac{1}{\lambda}.$$

已知平均绝对偏差满足以下界限

$$0 \leqslant \delta \leqslant \frac{2(b-\mu)(\mu-a)}{b-a}. \tag{EC.5}$$

设 $\beta = \mathbb{P}(X \geqslant \mu)$。例如，对于 X 的连续对称分布，我们知道 $\beta = 0.5$。已知该量满足以下界限：

$$\frac{\delta}{2(b-\mu)} \leqslant \beta \leqslant 1 - \frac{\delta}{2(\mu-a)}. \tag{EC.6}$$

EC.3. 背包问题

背包问题（Kellerer 等人，2004）是一个整数规划问题，可表述为

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \sum_{i=1} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leqslant B, \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad 1 = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{EC.7}$$

对于决策变量 x、预算 B、价格 $p>0$ 和成本 c。假设 $B<\sum_{i=1}^{n} c_i$。连续版本可通过考虑线性松弛得到，即将整数性约束替换为 $0 \leqslant x_i \leqslant 1, i=1,\ldots,n.$。所谓的贪心选择算法可为连续背包问题求得最优解。

我们首先对物品重新编号 x_i，使得 $p_1/c_1 \geqslant \ldots \geqslant p_n/c_n$。因此，第一个物品相对于其成本带来的价值增幅最大。现在，我们依次遍历 x_1、……、x_n，并在每次迭代中将 x_i 设为其最大容量。当违反预算约束时，设

$$x_i = B - \sum_{i=1}^{i-1} c_i x_i.$$

该贪心选择算法得出 (EC.7) 的最优解。下面我们将给出其证明，该证明改编自 Kellerer 等人（2004）的证明。

不失一般性，假设 $p_1/c_1 > \cdots > p_n/c_n$。如果对于某个 i，有 $p_i/c_i = p_{i+1}/c_{i+1}$，那么我们对这些物品无差异，且稍后给出的证明可以轻松调整以涵盖这种情况。贪心选择算法得出的解满足：对于某个索引 j，有 $1 = x_1 = \cdots = x_{j-1} > x_j \geqslant x_{j+1} = \cdots = x_n = 0$。假设存在另一个可行最优解 $y \neq x$。由于 $p_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} c_i > B$，必有 $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = B$，否则我们就可以增加资金投入，从而提高最优值。因为 $p_1/c_1 \geqslant \ldots \geqslant p_n/c_n$，存在最小索引 k，使得$y_k < 1$；令 l 为满足 $k<l$ 且 $y_l > 0$的最小索引。这个解必定存在，否则就会有 $y = x$。现在，我们将增加 y_k 的值，并减少y_l的值。通过选择 $\epsilon = \min\{c_k(1-y_k), c_l y_l\} > 0$，并将 y_k 增加 ϵ/c_k、将 y_l减少 ϵ/c_l，我们可以保持可行性并保留 $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = B$。解的目标值变化为$p_k\epsilon/c_k - p_l\epsilon/c_l = \epsilon(p_k/c_k - p_l/c_l) > 0$。这与 y是最优解的假设矛盾。因此， x 是最优解，证明完毕。

EC.4. 分布鲁棒优化结果

Ben-Tal and Hochman（1972）证明了以下结果（适用于比我们所研究情形更大的一类函数 $f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$）：

PROPOSITION EC.1. 如果 $f(\boldsymbol{y}, \cdot)$ 是凸的，

$$\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})] = g_U(\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\{1,2,3\}^n} \prod_{i=1}^{n} p_{\kappa_i}^{(i)} f(\boldsymbol{y}, \xi_{\kappa_1}^{(1)}, \ldots, \xi_{\kappa_n}^{(n)}), \tag{EC.8}$$

其中 $p_{\kappa_i}^{(i)}, \xi_{\kappa_i}^{(i)}$ 的定义同引理 2。如果 $f(\boldsymbol{y}, \cdot)$ 是凹的，

$$\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta,\beta)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})] = g_L(\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\{1,2\}^n} \prod_{i=1}^{n} \hat{p}_{\kappa_i}^{(i)} f(\boldsymbol{y}, \upsilon_{\kappa_1}^{(1)}, \ldots, \upsilon_{\kappa_n}^{(n)}), \tag{EC.9}$$

其中 $\upsilon_1^{(i)} = \mu_i + \frac{\delta_i}{2\beta_i}$ $\upsilon_2^{(i)} = \mu_i - {}_2$ $\frac{\delta_i}{(1-\beta_i)}$ 以及 $\hat{}p_1^{(i)} = \beta_i$, $\hat{}p_2^{(i)} = 1-\beta_i$.

因此，(EC.8) 中的 $g_U(\cdot)$ 继承了 $f(\cdot, \boldsymbol{X})$ 在 $\boldsymbol{y}$ 中的凸性，其函数形式仅取决于 $f(\cdot, \boldsymbol{X})$ 的形式（ $g_L(\cdot)$ 也类似）。上界和下界给出了一个闭区间，用于

$$\mathrm{Val}_{\mathbb{P}}(\boldsymbol{y}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})] \quad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_{(\mu,\delta,\beta)}. \tag{EC.10}$$

Corollary EC.1. 如果对于所有 $\boldsymbol{y}$， $f(\boldsymbol{y}, \cdot)$ 都是凸函数，那么 $Val_{\mathbb{P}}(\boldsymbol{y}) \in [g_L(\boldsymbol{y})\ g_U(\boldsymbol{y})]\ \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_{(\mu,\delta,\beta)}$. 如果对于所有 $\boldsymbol{y}$， $f(\boldsymbol{y}, \cdot)$ 都是凹函数，那么 $Val_{\mathbb{P}}(\boldsymbol{y}) \in [g_U(\boldsymbol{y})\ g_L(\boldsymbol{y})]\ \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_{(\mu,\delta,\beta)}$.

由命题 EC.1 可知，极端分布与 $\boldsymbol{y}$ 无关。因此，我们可以代入 3^n 项。这会得到关于 $\boldsymbol{y}$ 的凸函数，因此在 $\boldsymbol{y}$ 上的最小化问题是可处理的。

EC.5. 均值-方差信息下的稳健分析 EC.5.1. Scarf 关于单商品的结果

Scarf（1958年）假设决策者只知道需求的均值和方差，由此对单商品报童模型进行了无分布假设分析。定义由所有具有相同均值和方差的分布构成的模糊集如下：

$$\mathcal{P}_{(\mu,\sigma)} := \{\mathbb{P} \,|\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D) = \mu,\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D^2) = \sigma^2 + \mu^2\}.$$

Scarf（1958年）通过在模糊集中寻找最坏情形分布，确定了成本函数 $C(q)$ 的上界。为了找到能够应对 $\mathcal{P}_{(\mu,\sigma)}$ 模糊性的订货量，需要求解以下 极小极大优化问题：

$$\min_{q} \max_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\sigma)}} dq + (m+d)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D-q)^+.$$

由于

$$\max_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\sigma)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D-q)^+ \leqslant \frac{\sqrt{\sigma^2 + (\mu-q)^2} + (\mu-q)}{2},$$

这个极小极大优化问题变为 $\min_q \max_{\mathbb{P}} C^S(q)$，其中

$$C^S(q) := d(q-\mu) + (m+d)\frac{\sqrt{\sigma^2+(\mu-q)^2}+(\mu-q)}{2}. \tag{EC.11}$$

及解

$$q^S := \operatorname*{argmin}_q C^S(q) = \mu + \frac{\sigma}{2}\left(\sqrt{\frac{m}{d}} - \sqrt{\frac{d}{m}}\right). \tag{EC.12}$$

数量 q^S 称为 Scarf订货量：当 $m > d$ 时，规定订货量高于期望需求；当 $d < m$ 时，订货量低于期望需求。

EC.5.2. Gallego and Moon

当模型基于均值-方差信息时，Gallego 和 Moon（1993）将问题表述为

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{q}} C^S(\boldsymbol{q}) := & \sum_{i=1}^{n} c_i \left(d_i(q_i-\mu_i) + (m_i+d_i)\frac{\sqrt{\sigma_i^2+(q_i-\mu_i)^2}-(q_i-\mu_i)}{2} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i q_i \leqslant B, \\ & q \geqslant 0. \end{aligned} \tag{EC.13}$$

问题 (EC.13) 的最优解称为 $\boldsymbol{q}^S$。对每种商品分别应用 Scarf界，得到 (EC.13)。与分布已知的完整信息情形类似，该优化问题可以用拉格朗日乘子法求解。

EC.6. 补充数值实验

本节展示更多数值结果。EC.6.1 节展示平均利润率情形下的性能图。我们在 EC.6.2 节比较均值-平均绝对偏差和均值-方差订货策略。

EC.6.1. 更多均值-平均绝对偏差结果

图 EC.2 展示了平均盈利情景的结果。粗略一看便会发现，这些图呈现出的印象与低盈利情景不同。我们得出结论：当预算水平从零到最大预算的三分之二时，均值-MAD EVAI 始终低于某个界限。所有情况下，EVAI 的这一界限都约为 10%。预算超过最大预算的三分之二后，性能便开始下降。然而，随着预算接近最大预算，均值-MAD-β EVAI 会下降。

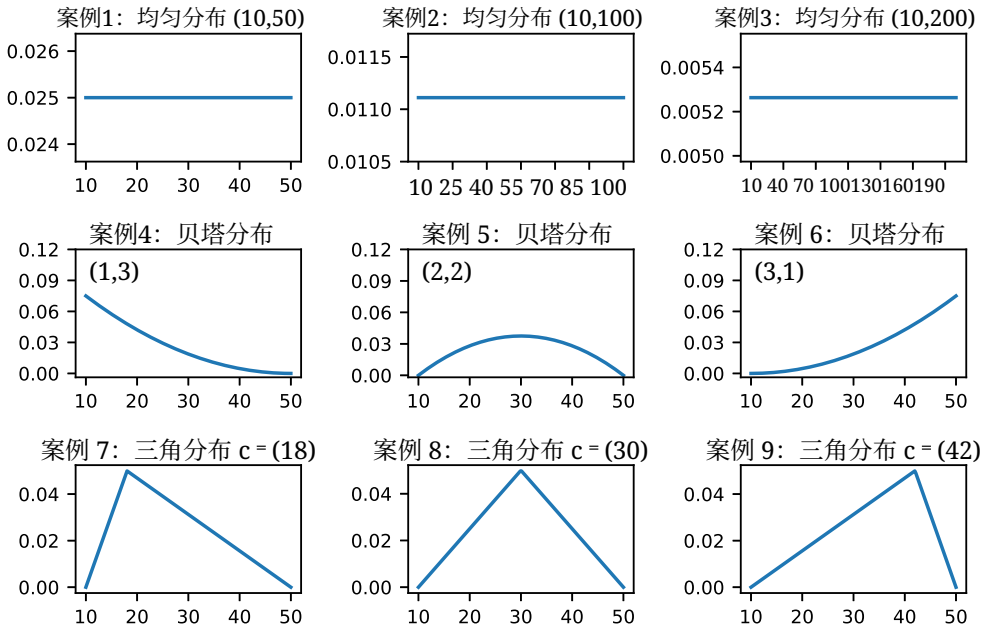


图 EC.1 多商品绩效分析所用的九个概率密度函数

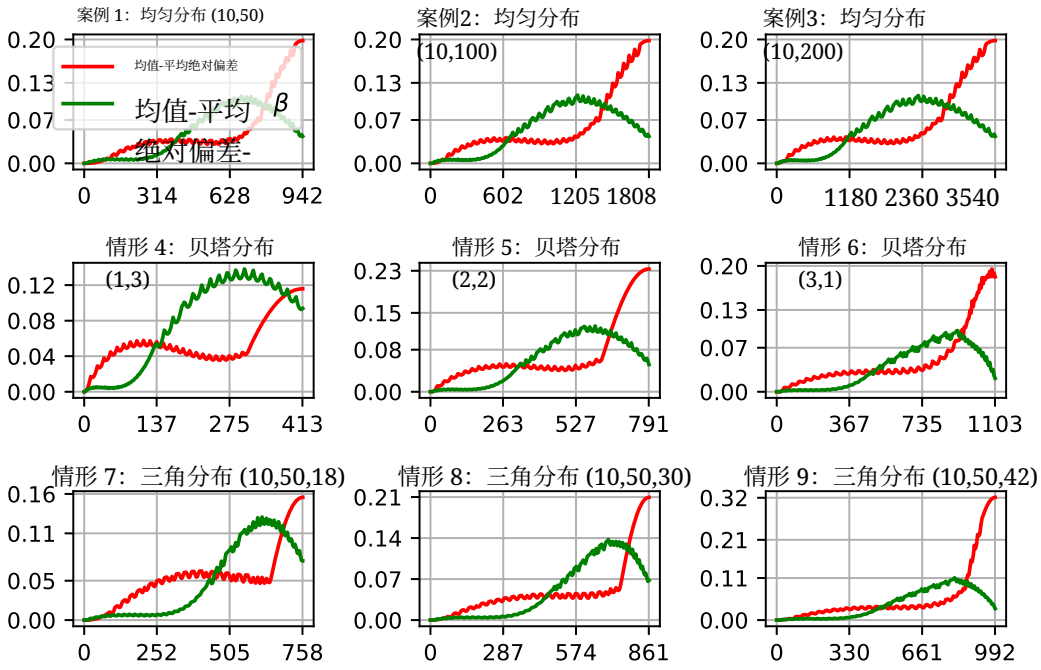


图 EC.2　　结　　果适用于平均利润率情形。横轴对应 B，纵轴对应 EVAI　　.

EC.6.2. 均值-方差比较

我们从低利润率情景的性能分析开始。横轴表示预算水平 B，纵轴表示 EVAI。在每张图中，蓝线对应

对于均值-MAD模型的 EVAI，以及橙色线所示的均值-方差EVAI。图 EC.3 展示了我们所考虑的九种情形各自的性能图。

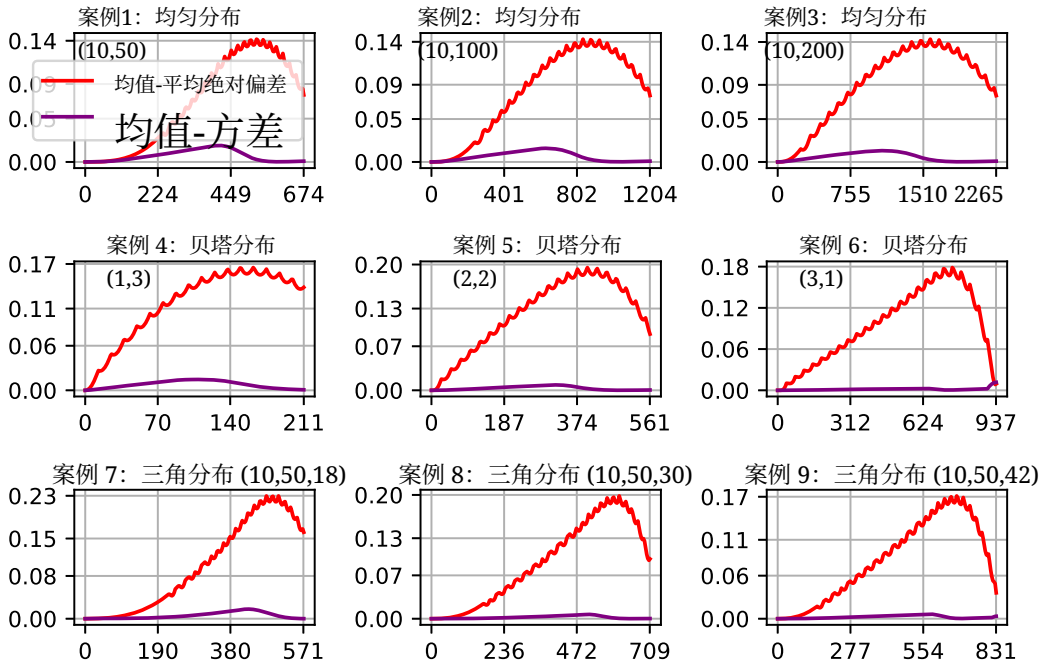


图 EC.3 低利润率情景下的结果。横轴对应预算水平，纵轴对应 EVAI。

在图 EC.3 中，我们针对低利润率情景和总计九种真实需求分布，比较了均值-MAD策略与均值-方差排序策略的 EVAI。虽然两种策略通常都能得到较低的 EVAI，但均值-方差策略的 EVAI 通常更低。我们强调，这并不意味着均值-方差策略更好。事实上，无法进行公平的数值比较，因为相应的模糊集可能包含差异极大的分布。有限方差会排除二阶矩无限的分布，而 MAD 不会。一般而言，MAD 下的最坏情景或极端分布比方差下的“更极端”。这也可能解释了 EVAI 略高的原因。

EC.7 扩展

我们现在对多商品报童模型的三种扩展进行无分布假设分析。EC.7.1 节讨论多个约束，EC.7.2 节考虑供应不确定性，EC.7.3 节则讨论以条件风险价值（CVaR）为目标函数的风险厌恶型报童问题。

EC.7.1. 多个约束

Lau 和 Lau（1996年）研究了具有多个约束的报童问题，并提出了一种数值求解过程，通过求解一组非线性方程的根来计算拉格朗日乘子。Perakis 等人（2020年）也研究了零售环境中的多个容量约束，并区分了仓库容量约束与库存可用性约束。利用拉格朗日对偶，该问题可分解为两个子问题，并通过二分搜索迭代求解。

我们现在说明，本文所提出的无分布假设分析也适用于具有多个约束的情形，其形式为

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{q}} \sum_{i=1}^{n} c_i \left(d_i(q_i-\mu_i) + (m_i+d_i) \left(p_1^{(i)} \left(a_i-q_i\right)^+ + p_2^{(i)} \left(\mu_i-q_i\right)^+ + p_3^{(i)} \left(b_i-q_i\right)^+ \right) \right) \\
&\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} q_i \leqslant B_j \quad j=1,\ldots,m \\
&\qquad q_i \geqslant 0 \quad i=1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{EC.14}$$

通过引入虚拟变量 $\tau_k^{(i)}$，我们将问题 (EC.14) 重新表述为

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{\tau}} \sum_{i=1}^{n} c_i \left(d_i(q_i-\mu_i) + (m_i+d_i) \left(p_1^{(i)}\tau_1^{(i)} + p_2^{(i)}\tau_2^{(i)} + p_3^{(i)}\tau_3^{(i)} \right) \right) \\
&\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} q_i \leqslant B_j, && j=1,\ldots,m, \\
&\qquad \tau_k^{(i)} \geqslant \xi_k^{(i)} - q_i, && k=1,2,3;\ i=1,\ldots,n, \\
&\qquad \tau_k^{(i)} \geqslant 0, && k=1,2,3;\ i=1,\ldots,n, \\
&\qquad q_i \geqslant 0, && i=1,\ldots,n,
\end{aligned} \tag{EC.15}$$

该问题仍是一个易处理的线性规划，可通过内点法求解大规模问题。此外，通过求解 (EC.15) 的对偶问题，可以计算 m预算约束的影子价格，从而量化将额外一个单位的预算分配给 $B_j,\quad j=1,\ \ldots m$ 所带来的边际预期净收益。

EC.7.2. 供给与需求不确定性

当 q 单位订单的交付不一定完整时（供应不确定性），报童可能会采取不同的决策。K¨aki等人（2015年）研究了供应和需求均存在不确定性的情形，其中供应与需求相互独立或遵循某种特定的

基于 Copula 的依赖结构。在均值—方差设定和独立性假设下，Gallego和Moon（1993年）求解了具有随机产出的分布无关报童问题，但假设产出是一个取决于订货量 q的二项随机变量。也就是说，当订购 q 单位时，每个单独的单位都以某个固定概率收到，否则将完全不会交付。

与 Gallego and Moon（1993）不同，我们确实为随机供给引入了一个模糊集。考虑乘性产出率为 Z_i 的情形，其中随机供给$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$由 $Z_i \cdot q_i$ 给出。假设 Z_i 的均值为 $\tilde{\mu}_i$、平均绝对偏差为 δ_i，支撑集为 $[\tilde{a}_i, b_i]$，其中 $0 \leqslant \tilde{a}_i \leqslant b_i \leqslant 1$。那么， Z_i 的分布属于 $\mathcal{P}_{(\tilde{\mu}_i, \tilde{\delta}_i)}$。 Z_i 的极端三点分布的概率为

$$\tilde{p}_1^{(i)} = \frac{\tilde{\delta}_i}{2\left(\tilde{\mu}_i - \tilde{a}_i\right)}, \quad \tilde{p}_2^{(i)} = 1 - \frac{\tilde{\delta}_i}{2\left(\tilde{\mu}_i - \tilde{a}_i\right)} - \frac{\tilde{\delta}_i}{2(\tilde{b}_i - \tilde{\mu}_i)}, \quad \tilde{p}_3^{(i)} = \frac{\tilde{\delta}_i}{2(\tilde{b}_i - \tilde{\mu}_i)},$$

并分别支撑在 $\zeta_1^{(i)} = \tilde{a}_i$， $\zeta_2^{(i)} = \tilde{\mu}_i$， $\zeta_3^{(i)} = \tilde{b}_i$，上。具有供给模糊性的多品种报童问题等价于

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{q}} \ & \sum_{i=1}^{n} \max_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_i} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[c_i \left(d_i (Z_i \cdot q_i - D_i) + (m_i + d_i) \left(D_i - Z_i \cdot q_i \right)^+ \right) \right] \\ \text{s.t.} \ & \sum_{i=1}^{n} c_i q_i \leqslant B_j, \quad j = 1, \ldots, m, \\ & q_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{EC.16}$$

其中 $\mathcal{P}_i := \mathcal{P}_{(\mu_i, \delta_i)} \times \mathcal{P}_{(\tilde{\mu}_i, \tilde{\delta}_i)}$。由于报童问题关于两两独立随机变量 D_i 和 Z_i联合凸，因此，使 (EC.16) 的目标函数达到最大值的分布是极端三点分布。将这些最坏情形分布应用于 (EC.16)，得到

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{q}} \ & \sum_{i=1}^{n} c_i \Big(d_i (\tilde{\mu}_i q_i - \mu_i) + (m_i + d_i) \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \{1,2,3\}^2} p_{\kappa_1}^{(i)} \tilde{p}_{\kappa_2}^{(i)} \tau_{\boldsymbol{\kappa}}^{(i)} \Big) \\ \text{s.t.} \ & \sum_{i=1}^{n} c_i q_i \leqslant B, \\ & \tau_{\boldsymbol{\kappa}}^{(i)} \geqslant \xi_{\kappa_1}^{(i)} - \zeta_{\kappa_2}^{(i)} q_i, && \boldsymbol{\kappa} \in \{1,2,3\}^2;\ i = 1, \ldots, n, \\ & \tau_{\boldsymbol{\kappa}}^{(i)} \geqslant 0, && \boldsymbol{\kappa} \in \{1,2,3\}^2;\ i = 1, \ldots, n, \\ & q_i \geqslant 0, && i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{EC.17}$$

为说明存在不确定供应的分布无关报童问题，考虑一维情形，其中随机需求 D 服从 $[20,80]$ 上的均匀分布，乘性产出率 Z 服从 $[0.65,0.95]$上的均匀分布。图 EC.4 展示了对包含 D 和 Z分布的模糊集进行优化后得到的紧下界和上界。由于极端分布是离散的，(EC.17) 的目标函数可表示为分段线性函数。

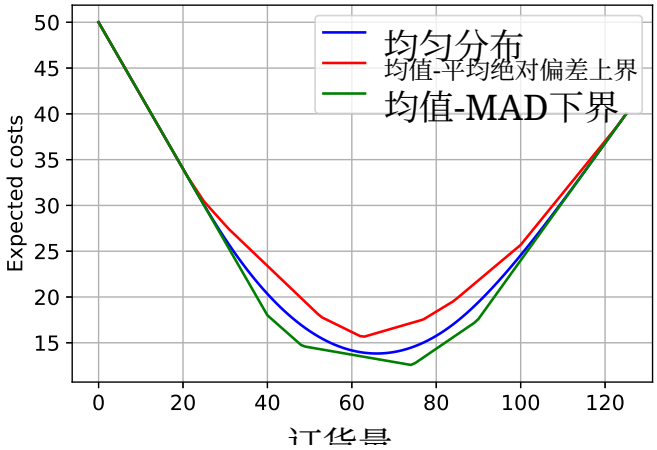


图 EC.4 不确定供应产出率下多品种报童问题的紧界，其中 $m=1$ 和 $d=0.8$。上方的分段线性函数通过计算 $\mathbb{E}[D-Z\cdot q]$ 得出，其中 D 遵循位于 $\mathcal{P}_{(50,15,20,80)}$ 中的极端分布，而 Z 遵循 $\mathcal{P}_{(0.8,0.075,0.65,0.95)}$中的最坏情形三点分布。下界由最佳情形两点分布得出。中间曲线表示“真实”成本，其中 D 服从 $[20,80]$，上的均匀分布，Z 在 $[0.65,0.95]$上服从均匀分布。

由于问题 (EC.16) 可以表示为分段线性函数，因此可通过与定理2类似的背包算法求得最优解。此外，按照定理 1 的做法，明确推导鲁棒单品模型的最优订货量，也能获得更多见解。加性产出率的情况也类似，其最坏情形同样会得到三点分布。未来研究的其他方向包括：求解涉及多个不可靠且非同质供应商的问题 (EC.16)（Dada 等人，2007），以及考虑固定订货成本和供应商产能限制的报童问题（Merzifonluoglu 和 Feng，2014）。

EC.7.3. 风险厌恶

接下来，我们考虑 Chen 等人（2010）所研究的风险厌恶型决策者，其决策基于条件风险价值。决策者不再优化期望成本，而是最小化超过报童成本分布的 γ 分位数的成本的平均值。对于成本函数 $G(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{D})$，可以通过求解一个凸最小化问题来计算条件风险价值（Rockafellar 和 Uryasev，2000）：

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}} \left\{ \theta + \frac{1}{1-\gamma} \mathbb{E}(G(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{D}) - \theta)^+ \right\}.$$

计算条件风险价值需要充分了解需求分布。然而在实践中，如果可用数据不足，决策者可能难以确定某个特定分布。因此，我们考虑 Zhu 和 Fukushima (2009年)；Delage 和 Ye (2010) 中的部分信息设定，并寻求求解

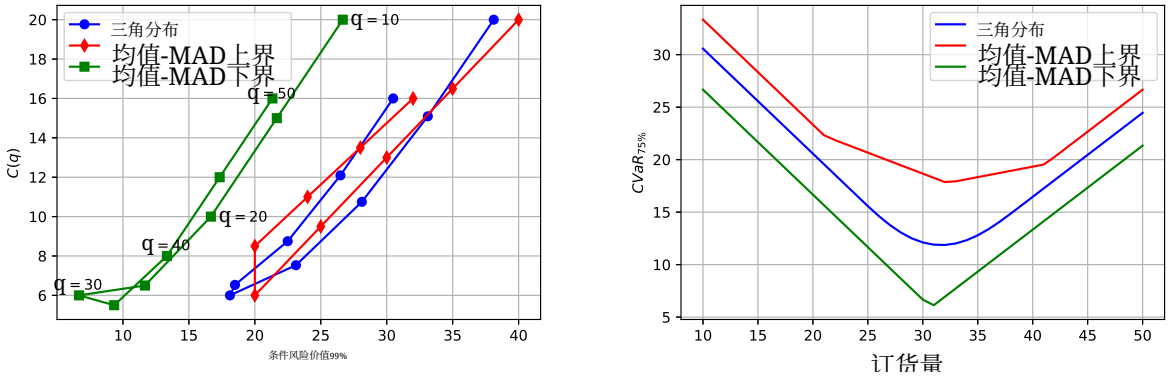
$$\min_{\boldsymbol{q}: \sum_i c_i q_i \leqslant B, q_i \geqslant 0} \max_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_{(\mu,\delta)}} \min_{\theta \in \mathbb{R}} \left\{ \theta + \frac{1}{1-\gamma} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(G(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{D}) - \theta)^+ \right\}. \tag{EC.18}$$

我们首先考虑单品模型。由于（EC.18）的目标函数是有限的，$\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}$ 是弱紧的，因为 supp(D)是紧的；此外，（EC.18）的目标函数关于 $\mathbb{P}$ 是线性的，关于 θ是凸的，因此根据极小极大定理（Shapiro 和 Kleywegt，2002），我们可以交换最大化和最小化算子。由于（$G(q, D) - \theta)^+$ 是需求不确定性的凸函数，三点分布（10）同样使 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(G(q, D) - \theta)^+$ 达到最大值。当 $\beta = \mathbb{P}(D \geqslant \mu)$已知时，引理 3 中的两点分布达到相应的下界。对于多变量问题，注意到（$G(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{D}) - \theta)^+$ 再次是需求不确定性的凸函数，其中$\boldsymbol{D} \sim \mathbb{P} \in \mathcal{P}_{(\mu,\delta)}$。根据命题 EC.1 以及上述推理，风险厌恶型报童

具有如下线性规划表示：

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\eta},\theta}\ & \theta+\frac{1}{1-\gamma}\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\{1,2,3\}^n}\prod_{i=1}^{n}p_{\kappa_i}^{(i)}\eta_{\boldsymbol{\kappa}} \\
\text{s.t.}\ & \sum_{i=1}^{n}c_i q_i\leqslant B, \\
& \eta_{\boldsymbol{\kappa}}\geqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}c_i\left(d_i(q_i-\xi_{\kappa_i}^{(i)})+(m_i+d_i)\,\tau_{\boldsymbol{\kappa}}^{(i)}\right)\Big)-\theta, && \boldsymbol{\kappa}\in\{1,2,3\}^n, \\
& \eta_{\boldsymbol{\kappa}}\geqslant 0, && \boldsymbol{\kappa}\in\{1,2,3\}^n, \\
& \tau_{\boldsymbol{\kappa}}^{(i)}\geqslant\xi_{\kappa_i}^{(i)}-q_i, && \boldsymbol{\kappa}\in\{1,2,3\}^n;\ i=1,\ldots,n, \\
& \tau_{\boldsymbol{\kappa}}^{(i)}\geqslant 0, && \boldsymbol{\kappa}\in\{1,2,3\}^n;\ i=1,\ldots,n, \\
& q_i\geqslant 0, && i=1,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{EC.19}
$$

我们在图 EC.5 中展示了需求支撑集为 $[10,50]$、$\mu=30$、$\delta=20/3$ 和 $\beta=1/2$ 的单品模型的界。针对 $\gamma=0.75$，0。95 和不同订货量求解（EC.19），得到上界。我们求解了一个类似的问题，但将期望取在引理 3 中所述的极端二点分布上，从而得到紧下界。作为参考，我们还绘制了当 D 服从支撑集为 $[10,50]$ 的对称三角分布时，CVaR 和期望成本的精确值。



(a) 期望成本和 CVaR 的均值-MAD界。

(b) 条件风险值恶型报童的紧均值-MAD界示意图，其中 CVaR 作为目标判据， $m=1$、$d=0.8$ **和** $\gamma=0.75$，0。99。**中间曲线对应于当** D **服从支撑集为** $[10,50]$ **的对称三角分布时的 CVaR。上界和下界分别通过在包含该分布的模糊集上进行优化得到。**

求解 (EC.19) 可能颇具挑战，因为目标函数 $(G(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{D})\ -\theta)^+$ 不再可分，因此会导致变量和约束数量呈指数级增长。为

缓解这一计算难题，可以采用基于抽样的方法，例如样本均值近似（Shapiro 等，2009 年）。

我们还提及可通过条件风险价值（CVaR）进行保守近似的模糊机会约束（Nemirovski 和 Shapiro，2007）。在风险厌恶型报童问题设定中，决策者引入模糊机会约束，要求对于模糊集中的所有分布，成本超过某一阈值 t 的概率均小于 $1-\gamma$。对于多商品情形，这意味着确保

$$\mathbb{P}(G(\boldsymbol{q},\boldsymbol{D})>t)\leqslant 1-\gamma, \quad \forall \mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)},$$

这可由以下条件推出

$$\max_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{(\mu,\delta)}} \mathrm{CVaR}_{\gamma}[G(\boldsymbol{q},\boldsymbol{D})]\leqslant t.$$

此外，报童可能要求所有客户订单均由现有库存完全满足的概率至少达到某个最低值，即1型服务水平（Silver 等人，1998年）。当多个此类概率约束相互关联时，决策者应对联合机会约束进行保守近似。为此，同样可以使用条件风险价值（CVaR）；参见 Chen 等（2010年）；Zymler 等人（2013年）；Roos 和 den Hertog（2020年）。将模糊机会约束纳入本文建立的模型，是一个值得进一步研究的课题。