arXiv:2301.02663v1 [math.GR] 6 Jan 2023

通过余度刻画交错群

Mallory Dolorfino、Luke Martin、Zachary Slonim、孙雨轩和 Yong Yang

Abstract. 设 G 是一个有限群，Irr(G) 表示 G的所有不可约复特征的集合。定义 $\chi \in$ Irr(G) 的余度为 cod(χ) := $|G|/\ker(\chi)|\chi(1)|$，并记 cod(G) := {cod(χ) | $\chi \in$ Irr(G)} 为 G 的余度集。设 A_n 是一个度为 $n \geq 5$ 的交错群。本文证明，A_n 可由 cod(A_n) 在同构意义下唯一确定。

1. 引言

设 G 是一个有限群，Irr(G) 表示 G的所有不可约复特征的集合。对于任意 $\chi \in$Irr(G)，定义 χ 的余度为 cod(χ) := $|G|/\ker(\chi)|\chi(1)|$。进而定义 G 的余度集为 cod(G) := {cod(χ) $|\chi \in$Irr(G)}。余度的概念最初在 [8], 中被提出，当时余度定义为 cod(χ) := $\frac{|G|}{\chi(1)}$；后来 [22] 将其修订为当前的定义，使得当 $N \leq \ker(\chi)$ 时，cod(χ) 对 G 和 G/N 相同。余度的若干性质已得到研究，例如余度与元素阶的关系、p-群的余度，以及余度较少的群。

群的余度集与群的特征度集密切相关，特征度集定义为 cd(G) := {χ(1) $|\chi \in$不可约特征标集合(G)}。特征度集与群结构之间的关系是一个活跃的研究领域——群结构的许多性质在很大程度上由其特征度集决定。1990 年，Bertram Huppert 提出了以下关于单群 H 与具有相同特征度集的有限群 G 之间关系的猜想。

Huppert 猜想：设 H 是一个有限非阿贝尔单群，G 是一个有限群，且 cd(H) = cd(G)。那么 $G \cong H \times A$，其中 A 是一个阿贝尔群。

Huppert 猜想已在许多情形下得到验证，例如交错群、散在群以及低秩李型单群，但高秩李型单群的情形尚未得到验证。最近，有人提出了一个与余度相关的类似猜想。

余度版 Huppert 猜想：设 H 是一个有限非阿贝尔单群，且 G 是一个有限群，使得 cod(H) = cod(G)。那么 $G \cong H$。

这一猜想作为问题 20.79 [18] 收录于 Kourovka《群论未解问题笔记》。该猜想已由 [1, 3, 13] 对 PSL(2, q)、PSL(3, 4)、Alt$_7$, J$_1$、$^2B_2(2^{2f+1})$（其中 $f \geq 1$）、M$_{11}$, M$_{12}$, M$_{22}$, M$_{23}$ 以及 PSL(3, 3) 验证。[19] 和 $^2G_2(q)$ 分别在 [14] 中验证了该猜想对 PSL(3, q) 和 PSU(3, q) 的成立。最近，作者在 [11] 中验证了该猜想对所有散在单群均成立。

本文给出了一个一般性证明，验证了该猜想对所有次数大于或等于 5 的交错群均成立。所用方法还可能推广到李型单群，从而为通过余度集刻画所有单群带来令人期待的结果。

定理 1.1. 设 A_n 是次数为 $n \geq 5$ 的交错群，G 是一个有限群。如果 cod(G) = cod(A_n)，那么 $G \cong A_n$。

全文中，我们沿用 Isaacs 的著作 [16] 和《有限群ATLAS》[9] 中使用的记号。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 20C15，20D06。

2. Preliminary Results

我们首先介绍一些后文将用到的引理。

引理 2.1. [21, 引理 4.2] 设 S 是一个有限非阿贝尔单群。那么存在 $1_S \neq \chi \in$ 不可约特征标集合(S)可扩张到 自同构群(S)。

引理 2.2. [17, 定理 4.3.34] 设 N是 G的一个极小正规子群，使得 $N = S_1 \times \cdots \times S_t$，其中 $S_i \cong S$对每个 $i = 1, \ldots, t$都是非阿贝尔单群。若 $\chi \in$不可约特征标集合(S)可扩张到自同构群(S)，则$\chi \times \cdots \times \chi \in$不可约特征标集合($N$)可扩张到 G。

引理 2.3. [13, 注 2.6] 设 G 是一个有限群， S 是一个有限非阿贝尔单群，且 cod(G) =cod(S)。则 G 是一个完美群。

引理 2.4. [15] 设 G 是一个有限群， S 是一个有限非阿贝尔单群，且 cod(S) $\subseteq$ cod(G)。则 $|S|$整除 $|G|$。

引理 2.5. 设 G 是一个有限群，满足 $N \trianglelefteq G.$，则 cod(G/N) $\subseteq$ cod(G)。

证明。由 [16, 引理 2.22],，我们可以定义 Irr(G/N) $= \{\hat{\chi}(gN) = \chi(g) \mid \chi \in$Irr($G$) 和 $N \subseteq$ker(χ)$\}$。任取 $\hat{\chi} \in$Irr(G/N)。根据定义，我们知道 $\hat{\chi}(1) = \chi(1)$，因此 cod($\hat{\chi}$) 和 cod(χ) 的分母相等。此外，ker($\hat{\chi}$) $\cong$ker(χ)$/N$，所以 $|$ker(χ)$| = |N| \cdot |$ker($\hat{\chi}$)$|$。因此 $|G/N$: ker($\hat{\chi}$)$| = \frac{|G|/|N|}{\chi(1)} \Big/ \frac{|G|}{|\ker(\chi)|}$，所以 cod($\hat{\chi}$) =cod($\chi$)，进而 cod($G/N$) $\subseteq$cod(G). □

引理 2.6. 设 G 是一个有限群，其正规子群为 N 和 M，且满足 $N \leq M$。那么，cod(G/M) $\subseteq$cod(G/N)。

证明。 由第三同构定理可知，$G/M \cong$（G/N）/（M/N）是 G/N的商群；由引理 2.5可知，cod(G/M) $\subseteq$cod(G/N)。□

引理 2.7. 设 S 是一个有限非阿贝尔单群， G 是一个非平凡有限群，且 cod(G) $\subseteq$cod(S)。那么， $|S| < |G| \cdot |$不可约特征标集合(G)$|$。

证明。我们知道，对于每个不可约特征 $\chi \in$不可约特征标集合(S) $\chi(1)^2 < |S|$。由于 S 是单群，若 χ 非平凡，则 ker(χ) $= 1$，因此 cod(χ) $= \frac{|S|}{\chi(1)} > \sqrt{|S|}$。于是，由于 cod($G$) $\subseteq$cod(S)，对于每个非平凡不可约特征 $\psi \in$不可约特征标集合(G)，cod(ψ)$> \sqrt{|S|}$。因此，$\frac{|G|}{\psi(1)} > \sqrt{|S|}$，这意味着 $\frac{|G|}{\psi(1)} < \sqrt{|S|}$。所以， $\psi(1) < \frac{|G|}{\sqrt{|S|}}$。于是$\sum_{\psi \in}$不可约特征标集合($G$) $\psi(1)^2 <$ |不可约特征标集合(G)$|\frac{|G|^2}{|S|}$，并且根据特征标定理，我们有 $|G| <$|不可约特征标集合(G)$|\frac{|G|^2}{|S|}$。因此 $|S| < |G| \cdot |$不可约特征标集合(G)$|$。 □

3. Main Results

我们先给出几个引理，用以限制那些余度集包含于某个交错群余度集中的单群。

引理 3.1. 设 H 是一个度为 $m \neq n$的交错群，其中 m、 $n \geq 5$。则 cod(H) $\not\subseteq$ cod(A_n) .

证明。 假设 cod(A_m) $\subseteq$ cod(A_n)。由引理 2.4， $|\mathrm{A}_m|$ 整除 $|\mathrm{A}_n|$，因此 $m < n$。令 a_x 表示 A_x 的最小非平凡余度。我们证明 $a_{n-1} < a_n$ ，从而立即得到 cod(A_m) $\not\subseteq$ cod(A_n)。

我们知道，对称群 S_n 的不可约表示与 n 的分拆一一对应。设 λ 是 n 的一个分拆， V_λ 是 S_n 的相应不可约表示。注意， n 的一个分拆可以用杨图表示。令 $h_\lambda(i,j)$ 表示与 λ 对应的杨图中第 $(i,j)^{th}$ 个方格的钩长，即满足 $a = i$ 且 $b \geq j$，或满足 $b = j$ 且 $a \geq i$ 的 λ 个单元格 (a,b) 的数量。由钩长公式，$^n!$ dim(V_λ) $= \prod h_\lambda(i,j) := H_\lambda$。设 U_λ 是 V_λ 限制到 A_n 后的一个不可约成分，即 $\mathrm{Res}^{\mathrm{S}_n}\mathrm{A}_n V_\lambda$。如果 λ 不是自共轭的（$\lambda \neq \lambda'$），那么 $\mathrm{Res}^{\mathrm{S}_n}\mathrm{A}_n V_\lambda$ 仍然不可约，因此 $U_\lambda = \mathrm{Res}^{\mathrm{S}_n}\mathrm{A}_n V_\lambda$。在这种情况下，$^n!$ dim(U_λ) $= H_\lambda$。如果 λ 是自共轭的，那么 V_λ 限制到 A_n 后分解为两个维数相同的不可约表示，因此 dim(U_λ) $= \frac{1}{2}$ dim(V_λ)。在这种情况下，$^n!$ dim(U_λ) $= 2H_\lambda$。

现在， $a_n = \min\{ \frac{n}{1/2 \dim(U_\lambda)} \mid U_\lambda \in$ 不可约特征标集合$(A_n)\} = \frac{1}{2}\min(\{H_\lambda \mid \lambda \neq \lambda'\} \cup \{2H_\lambda \mid \lambda = \lambda'\})$。我们要证明$a_{n-1} < a_n$。首先，假设对于某个 $\lambda = \lambda'$，有 $a_n = \frac{1}{2}2H_\lambda$。那么我们可以从 λ 中去掉一个方格，得到一个非自共轭的 $n-1$ 的分拆 μ。由于 $H_\mu < H_\lambda < 2H_\lambda$ 和 $a_{n-1} \leq \frac{1}{2}H_\mu$，我们知道 $a_{n-1} < a_n$。

现在假设 $a_n = \frac{1}{2}H_\lambda$ 对某个 $\lambda \neq \lambda'$成立。那么如果 $n \geq 3$，我们可以从 λ 中去掉一个正方形，得到一个 $n-1$的非自共轭分拆 μ。由于 $H_\mu < H_\lambda$ 且 $a_{n-1} \leq \frac{1}{2}H_\mu$， $a_{n-1} < a_n$. 因此，如果 $m < n$，那么$a_m < a_n$，这与 cod$(A_m) \subseteq$ cod(A_n). □的假设矛盾。

引理3.2. 设 H 为一个散在单群或蒂茨群。那么如果 $n \geq 5$， cod$(H) \not\subseteq$ cod(A_n)。

证明。为导出矛盾，设 H 为一个散在单群或蒂茨群，且 cod$(H) \subseteq$cod(A_n)。由引理2.7和引理2.4，我们可以对 H的阶施加一个严格限制。具体而言， $|H| = |A_n|/k$，其中 $1 \leq k < |\mathrm{Irr}(H)|$ 为整数。现在，对于每个散在群（或蒂茨群） H，我们可以通过计算（使用 Julia [6]）检验哪些交错群 A_n 同时满足 $|H|$ 整除 $|A_n|$ 以及 $|A_{|H|}^{n}| < |\mathrm{Irr}(H)|$。我们发现只有一个可能的例外： $A_n = A_{10}$ 且 $H = J_2$ ，其中 $|A_{|J_2|}^{10}| = 3 < 21 = |\mathrm{Irr}(J_2)|$。在这种情况下，我们使用 ATLAS [9]检验得 cod$(J_2) \not\subseteq$ cod(A_{10})。□

引理3.3。设 H 是一个李型经典单群。那么对于所有 $n \geq 5$， cod$(H) \not\subseteq$ cod(A_n)。

证明。李型经典单群有6个系列，分别是射影特殊线性群$(m+1, q)$、正交群$(2m+1, q)$、射影辛群$(2m, q)$、$O^+(2m, q)$、射影特殊酉群$(m+1, q)$和$O^-(2m, q)$。我们分别在每种情形下证明该引理。设 $k(G)$表示 G的共轭类数，我们重列 2] 表以供参考。

TABLE 1. 经典群的共轭类数

G	$k(G) \leq$	注释
SL(n, q)	$2.5q^{n-1}$	
SU(n, q)	$8.26q^{n-1}$	
辛群$(2n, q)$	$10.8q^n$	q 奇
辛群$(2n, q)$	$15.2q^n$	q 偶
SO$(2n+1, q)$	$7.1q^n$	q 奇数
正交群$(2n+1, q)$	$7.3q^n$	q 奇数
SO$^\pm(2n, q)$	$7.5q^n$	q 奇数
正交群$^\pm(2n, q)$	$6.8q^n$	q 奇
$O^\pm(2n, q)$	$9.5q^n$	q 奇
SO$^\pm(2n, q)$	$14q^n$	q 偶
$O^\pm(2n, q)$	$15q^n$	q 偶

(1) 设 $H = \mathrm{PSL}(m+1, q)$，其中 $q = p^k$ 且 $m \geq 1$。由 [7] 中的阶公式可知， $q^{m(m+1)/2}$整除 $|\mathrm{PSL}(m+1, q)|$。根据勒让德公式，我们知道对任意素数 p， $|n!|_p \leq p^{\frac{n}{p-1}}$。若 $q = p^k$，则有 $|n!|_q \leq q^{k\frac{n}{(p-1)}}$，因此 $|A_n|_q \leq q^{k\frac{n}{(p-1)}}$。由引理 2.4， $|\mathrm{PSL}(m+1, q)|$整除 $|A_n|$，所以 $q^{m(m+1)/2}$ 整除 $|A_n|$.。因此 $^{m(m+1)}{}_2 \leq k\frac{n}{(p-1)}$，从而得到 $n \geq \frac{m(m+1)k(p-1)}{2}$。因此，$|A_n| \geq |A_{\frac{m(m+1)k(p-1)}{2}}|$。

现在，我们注意到 $k(\mathrm{PSL}(m+1, q)) \leq k(\mathrm{SL}(m+1, q))$，因为 PSL$(m+1, q)$ 是 SL$(m+1, q)$ 的商群。由表 1 可知， $|\mathrm{Irr}(\mathrm{PSL}(m+1, q))| = k(\mathrm{PSL}(m+1, q)) \leq k(\mathrm{SL}(m+1, q)) \leq 2.5q^m$。应用引理 2.7 得到 $|A_n| < |\mathrm{PSL}(m+1, q)| \cdot |\mathrm{Irr}(\mathrm{PSL}(m+1, q))|$. 因此，$|A_{\underline{m(m+1)k(p-1)}}| < |\mathrm{PSL}(m+1, q)| \cdot 2.5q^m$。现在，我们证明：若将左右两边视为关于 m 的函数，并以 p 和 k 为常数，那么渐近而言， $|A_{\underline{m(m+1)k(p-1)}}|$ 的增长速度比 $|\mathrm{PSL}(m+1, q)| \cdot 2.5q^m$. 快 2 倍。我们知道，左侧函数渐近地表现为 $(m^2)!$；根据 PSL$(m+1, q)$ 的阶公式，我们知道右侧函数渐近地表现为 $q^{f(m)}$，其中 $f(m)$ 是一个二次多项式。因此，当 x 足够大时，对任意常数 c，都有 $x! >> c^x$，故左侧函数的增长速度快于右侧函数。类似地，将两边视为关于 p 和 k. 的函数，也可以证明这一结果。

接下来，在满足该不等式的前提下，我们寻找 m 的最大可能值，其中 p 和 k取可能的最小值，即 2 和 1，分别为 $m \leq 6$；采用类似的方法处理 p 和 k，可得 $p \leq 17$ 和 $k \leq 63$。现在，我们已将搜索范围缩小到有限多个群，可以像处理散在群那样逐一检验。由此，我们发现了一小组例外，列于表2：

TABLE 2. 满足 $|$射影特殊线性群$(m+1,q)| $整除 $|\mathrm{A}_n|$ 和$|\mathrm{A}_n| < |$射影特殊线性群$(m+1,q)| \cdot 2.5q^m$的例外情形

m	q	n
1	4	5
1	4	6
1	8	7
1	9	6
1	9	7
1	5	5
1	5	6
1	7	7
2	4	8
2	4	9
3	2	8
3	2	9

现在，所有这些例外情形都可以在 ATLAS 中找到，而且很容易验证，这些群都不满足 cod(射影特殊线性群$(m+1,q)) \subseteq$ cod(A_n)，除非射影特殊线性群$(m+1,q) \cong \mathrm{A}_n$。因此，如果射影特殊线性群$(m+1,q) \ncong \mathrm{A}_n$，那么 cod(射影特殊线性群$(m+1,q) \not\subseteq$ cod(A_n)。

(2) 设 $H =$正交群$(2m+1,q)$，其中 $q = p^k$为奇数且 $m \geq 2$。注意，当 $q = 2^k$为偶数时，正交群$(2m+1,q) \cong$射影辛群$(2m,q)$，我们将在下一种情形中讨论。从 [7], q^{m^2} 整除 $|$正交群$(2m+1,q)|$。因此，仿照上文使用表 1，$|\mathrm{A}_{m^2k(p-1)}| < |$正交群$(2m+1,q)| \cdot 7.3q^m$。同上，我们通过计算验证，如果 $m > 2, p > 3$ 或 $k > 1$，就会得到矛盾，因此 $m = 2, p = 3$，而 $k = 1$ 是唯一的可能性。检查整除关系后，我们得到表 3 所列的例外情形。

TABLE 3. 满足 $|\Omega(2m+1,q)|$ 整除 $|\mathrm{A}_n|$ 且 $|\mathrm{A}_n| < |$正交群$(2m+1,q)| \cdot 7.3q^m$

m	q	n
2	3	9

再次查阅 ATLAS 后发现，cod($\Omega(5,3)) \not\subseteq$ cod(A_9)。

(3) 设 $H =$PSp$(2m,q)$，其中 $q = p^k$ 且 $m \geq 3$。由 [7], q^{m^2} 整除 $|$PSp$(2m,q)|$。由于 PSp$(2m,q)$ 是 Sp$(2m,q)$ 的一个商群，我们有 k(PSp$(2m,q)) \leq k$(Sp$(2m,q))$。由表 1，$|\mathrm{A}_{m^2k(p-1)}| <$|PSp$(2m,q)| \cdot 15.2q^m$。我们通过计算检验得出，如果 $m > 4$、$p > 2$ 或 $k > 2$，就会产生矛盾，因此 $m = 3$ 或 4、$p = 2$以及 $k = 1$ 或 2 是仅有的可能性。检查整除性后，没有发现例外。

(4) 设 $H =$O$^+(2m,q)$，其中 $q = p^k$ 且 $m \geq 4$。由 [7]，$q^{m(m-1)}$ 整除 $|O^+(2m,q)|$。利用表 1，可得 $|\mathrm{A}_{m(m-1)k(p-1)}| < |O^+(2m,q)| \cdot 15q^m$。如上所述，通过计算可验证，若 $m > 4$、$p > 2$ 或 $k > 1$，则会导出矛盾；因此 $m = 4$、$p = 2$，而 $k = 1$ 是唯一可能性。检查整除关系后，没有发现可能的例外。

(5) 设 $H =$PSU$(m+1,q)$，其中 $q = p^k$ 且 $m \geq 2$。由 [7]，$q^{m(m+1)/2}$ 整除 $|$PSU$(m+1,q)|$。由于 PSU$(m+1,q)$ 是 SU$(m+1,q)$ 的商群，因此我们有 k(PSU$(m+1,q)) \leq k$(SU$(m+1,q))$。由表 1，$|\mathrm{A}_{\underline{m(m+1)k(p-1)}}| <$|PSU$(m+1,q)| \cdot 8.26q^m$。再次通过计算检查，我们得到一个 2

矛盾，当 $m > 6$， $p > 7$，或 $k > 42$ 因此 $m \leq 6$， $p \leq 7$，以及 是唯一的可能性。检查整除性后，我们得到表 4：

TABLE 4. 满足 $|\mathrm{PSU}(m+1,q)|$ 整除 $|\mathrm{A}_n|$ 和$|\mathrm{A}_n| < |\mathrm{PSU}(m+1,q)| \cdot 8.26q^m$的例外情况

m	q	n
2	3	9
3	2	9

我们查阅 ATLAS，发现 $\mathrm{cod}(\mathrm{PSU}(3,3)) \not\subseteq \mathrm{cod}(\mathrm{A}_9)$，并注意到 $\mathrm{PSU}(4,2) \cong \Omega(5,3)$，后者已被我们排除。

(6) 设 $H = \mathrm{O}^-(2m,q)$，其中 $q = p^k$ 且 $m \geq 4$。由 [7]， $q^{m(m-1)}$ 整除 $|\mathrm{O}^-(2m,q)|$。因此，仿照上文利用表 1， $|\mathrm{A}_{m(m-1)k(p-1)}| < |\mathrm{O}^-(2m,q)| \cdot 15q^m$。同样，我们通过计算验证，若 $m > 5$、$p > 3$或 $k > 3$，便会得到矛盾；因此 $m \leq 5$、$p \leq 3$和 $k \leq 3$ 是仅有的可能情况。检查整除性后，我们没有发现任何可能的例外情况。

□

引理3。 4. 设 H 是一个例外李型单群。则若 $n \geq 5$， $\mathrm{cod}(H) \not\subseteq \mathrm{cod}(\mathrm{A}_n)$.

证明。除蒂茨群外，例外李型单群共有10个系列，分别为$E_6(q)$ $E_7(q)$ $E_8(q)$ $F_4(q)$ $G_2(q)$ ${}^2E_6(q)$ ${}^3D_4(q)$ ${}^2B_2(q)$ ${}^2F_4(q)$和 ${}^2G_2(q)$。我们逐一证明引理。首先，重列[12, 表 1] 以供参考。

TABLE 5. 例外群的共轭类数

G	$k(G) \leq$	注释
${}^2B_2(q)$	$q+3$	$q = 2^{2m+1}$
${}^2G_2(q)$	$q+8$	$q = 3^{2m+1}$
$G_2(q)$	q^2+2q+9	
${}^2F_4(q)$	$q^2+4q+17$	$q = 2^{2m+1}$
${}^3D_4(q)$	$q^4+q^3+q^2+q+6$	
$F_4(q)$	$q^4+2q^3+7q^2+15q+31$	
$E_6(q)$	$q^6+q^5+2q^4+2q^3+15q^2+21q+60$	
${}^2E_6(q)$	$q^6+q^5+2q^4+4q^3+18q^2+26q+62$	
$E_7(q)$	$q^7+q^6+2q^5+7q^4+17q^3+35q^2+71q+103$	
$E_8(q)$	$q^8+q^7+2q^6+3q^5+10q^4+16q^3+40q^2+67q+112$	

(1) 令 $H \cong E_6(q)$，其中 $q = p^k$。由 [7] 中的阶公式可知， q^{36} 整除 $|E_6(q)|$。由 [5], 可知，对任意素数 p， $|n!|_p \leq p^{\frac{n}{p-1}}$。若 $q = p^k$，则有 $|n!|_q \leq q^{k\frac{n}{p-1}}$()，因此$|\mathrm{A}_n|_q \leq q^{k\frac{n}{p-1}}$()，其中 $|\mathrm{A}_n|_p$ 是 A_n 的 p-部分。由引理 2.4， $|E_6(q)|$ 整除 $|\mathrm{A}_n|$，故 q^{36} 整除$|\mathrm{A}_n|$.。因此， $36 \leq k(p-1)$ 且 $n \geq 36k(p-1)$。所以， $|\mathrm{A}_n| \geq |\mathrm{A}_{36k(p-1)}|$。

现在，我们从表5注意到， $|\mathrm{Irr}(E_6(q))| = k(E_6(q)) \leq q^6+q^5+2q^4+2q^3+15q^2+21q+60$。应用引理 2.7 可得 $|\mathrm{A}_n| < |E_6(q)| \cdot |\mathrm{Irr}(E_6(q))|$.。因此， $|\mathrm{A}_{36k(p-1)}| < |E_6(q)| \cdot (q^6+q^5+2q^4+2q^3+15q^2+21q+60)$。与经典李型群的情形类似，我们可以通过计算找到 p 和 k 的上界，因为左侧随 p 和 k 增长的速度快于右侧。在这种情况下，我们发现没有 p 和 k 的取值满足该不等式，因为代入 $p = 2$ 和 $k = 1$ 得到 $|\mathrm{A}_{36}| > |E_6(2)| \cdot (2^6+2^5+2\cdot 2^4+2\cdot 2^3+15\cdot 2^2+21\cdot 2+60)$。因此，不存在可能的 q 和 n 使得 $\mathrm{cod}(E_6(q)) \subseteq \mathrm{cod}(\mathrm{A}_n)$。

(2) 设 $H \cong E_7(q)$，其中 $q = p^k$。由 [7]， q^{63} 整除 $|E_7(q)|$。由表5， $|\mathrm{A}_{63k(p-1)}| < |E_7(q)| \cdot (q^7+q^7+2q^5+7q^4+17q^3+35q^2+71q+103)$。我们通过计算检验，发现当 $p = 2$， $k = 1$ 时会产生矛盾，因此不存在可能的例外。

(3) 设 $H \cong E_8(q)$，其中 $q = p^k$。由 [7]， q^{120} 整除 $|E_8(q)|$。因此，如上所述利用表5，可得$|\mathrm{A}_{120k(p-1)}| < |E_8(q)| \cdot (q^8+q^7+2q^6+3q^5+10q^4+16q^3+40q^2+67q+112)$。现在，我们通过计算检验，发现当 $p = 2$、$k = 1$ 时会产生矛盾，因此不存在可能的例外。(4) 设 $H \cong F_4(q)$，其中 $q = p^k$。由 [7]， q^{24} 整除 $|F_4(q)|$。由表5， $|\mathrm{A}_{24k(p-1)}| < |F_4(q)| \cdot (q^4+2q^3+7q^2+15q+31)$。同样，我们通过计算检验，发现当 $p = 2$、$k = 1$ 时会产生矛盾，因此不存在可能的例外。(5) 设 $H \cong G_2(q)$，其中 $q = p^k$。由 [7]， q^6 整除 $|G_2(q)|$。因此，如上所述利用表5， $|\mathrm{A}_{6k(p-1)}| \lhd |G_2(q)| \cdot (q^2+2q+9)$。现在我们发现， $p = 2$、$k = 1$ 满足该不等式，但 p 和 k 的其他取值均不满足。不过，我们注意到 $G_2(2)$ 不是单群，因此改为考虑其导出子群 $G_2(2)'$（它仍满足上述不等式）。我们检查满足 $|G_2(2)'|$整除 $|\mathrm{A}_n|$ 且 $|\mathrm{A}_n| < |G_2(2)'| \cdot (2^2+2\cdot 2+9)$ 的例外情形，但并无此类情形。(6) 设 $H \cong {}^2E_6(q)$，其中 $q = p^k$。由 [7]， q^{36} 整除 $|{}^2E_6(q)|$。利用表5， $|\mathrm{A}_{36k(p-1)}| \lhd |{}^2E_6(q)| \cdot (q^6+q^5+2q^4+4q^3+18q^2+26q+62)$。同样，我们通过计算检验，发现当 $p = 2$、$k = 1$ 时会产生矛盾，因此不存在可能的例外。(7) 设 $H \cong {}^3D_4(q)$，其中 $q = p^k$。由 [7]， q^{12} 整除 $|{}^3D_4(q)|$。因此，类似上文利用表5， $|\mathrm{A}_{12k(p-1)}| < |{}^3D_4(q)| \cdot (q^4+q^3+q^2+q+6)$。现在我们发现， $p = 2$、$k = 1$ 满足该不等式，但 p 和 k 的其他取值均不满足。至于散在群，我们检查满足 $|{}^3D_4(2)|$ 整除 $|\mathrm{A}_n|$ 且 $|\mathrm{A}_n| < |{}^3D_4(2)| \cdot (2^4+2^3+2^2+2+2)$ 的可能例外，但并无此类情形。(8) 设 $H \cong {}^2B_2(q)$，其中 $q = 2^{2m+1}$ 且 $m \geq 1$。由 [7]， q^2 整除 $|{}^2B_2(q)|$。由表5可得 $|\mathrm{A}_{2(2m+1)}| < |{}^2B_2(q)| \cdot (q+3)$。在此情形下，我们通过计算检验，发现若 $m > 4$ 就会产生矛盾，因此 m 必须小于 5。不过，检查整除条件后，没有发现例外。(9) 设 $H \cong {}^2F_4(q)$，其中 $q = 2^{2m+1}$ 且 $m \geq 1$。由 [7]， q^{12} 整除 $|{}^2F_4(q)|$。因此，如上所述利用表5， $|\mathrm{A}_{12(2m+1)}| < |{}^2F_4(q)| \cdot (q^2+4q+17)$。现在，我们通过计算检验，发现当 $m = 1$ 时会产生矛盾，因此没有例外。(10) 设 $H \cong {}^2G_2(q)$，其中 $q = 3^{2m+1}$ 且 $m \geq 1$。由[7]， q^3 整除 $|{}^2G_2(q)|$。由表5，$|\mathrm{A}_{3(2m+1)\cdot 2}| < |{}^2G_2(q)| \cdot (q+8)$。同样，我们通过计算检验，发现当$m = 1$时会产生矛盾，因此没有例外。

□

定理 3.5. 设 G 是一个有限群，满足 $\mathrm{cod}(G) = \mathrm{cod}(\mathrm{A}_n)$，其中 $n \geq 5$。设 N 是 G的一个极大子群。那么，$G/N \cong \mathrm{A}_n$。

证明。 由引理 2.3， G 是完美群。因此 G/N 是一个非阿贝尔单群。由引理 2.6，有 $\mathrm{cod}(G/N) \subseteq \mathrm{cod}(G) = \mathrm{cod}(\mathrm{A}_n)$。由引理 3.1 、 3.2 、 3.3 和 3.4， G/N 不可能是次数为 $m \neq n$ 的交错群、散在单群或蒂茨群、李型经典单群，或例外李型单群。因此，$G/N \cong \mathrm{A}_n$。 □

现在我们给出定理 1.1的证明。

证明。 设 G 是一个极小反例，且 N 是 G的一个极大正规子群。由引理 2.3， G是完美群；由定理 3.5， $G/N \cong \mathrm{A}_n$。特别地， $N \neq 1$ 作为 $G \ncong \mathrm{A}_n$。

步骤 1： N 是 G的极小正规子群。

设 L 是 G的非平凡正规子群，且满足 $L < N$。由引理 2.6，得 $\mathrm{cod}(G/N) \subseteq \mathrm{cod}(G/L) \subseteq \mathrm{cod}(G)$。然而， $\mathrm{cod}(G/N) = \mathrm{cod}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{cod}(G)$，因此每个包含关系都必须取等号。于是， $\mathrm{cod}(G/L) = \mathrm{cod}(\mathrm{A}_n)$，这意味着 $G/L \cong \mathrm{A}_n$ ，因为 G 是极小反例。这与我们同时有$G/N \cong \mathrm{A}_n$但 $L < N$矛盾。

步骤 2： N 是 G唯一的非平凡真正规子群。

否则，假设 M 是 G的另一个非平凡真正规子群。若 N 包含于 M，则$M = N$或 $M = G$，因为 G/N 是单群，矛盾。于是 $N \cap M = 1$ 且 $G = N \times M$。由于 M也是 G的极大正规子群，故有 $N \cong M \cong \mathrm{A}_n$。取 $\psi_1 \in \in$不可约特征标集合(N)和 $\psi_2 \in \in$不可约特征标集合(M)，使得 $\mathrm{cod}(\psi_1) = \mathrm{cod}(\psi_2) = \max(\mathrm{cod}(\mathrm{A}_n))$。令 $\chi = \psi_1 \cdot \psi_2 \in \in$不可约特征标集合$(G)$。于是 $\mathrm{cod}(\chi) = (\max(\mathrm{cod}(\mathrm{A}_n)))^2 \notin \mathrm{cod}(G)$，矛盾。

步骤 3：对于每个非平凡的 $\chi \in$不可约特征标集合$(G|N) :=$不可约特征标集合$(G) -$不可约特征标集合(G/N) χ都是忠实的。

我们构造不可约特征标集合(G/N)，方法与引理 2.5相同。根据不可约特征标集合($G|N$) 的定义可知，若$\chi \in$ 不可约特征标集合($G|N$) $N \not\leq$ 核(χ)。因此，由于 N 是 G的唯一非平凡真正规子群，核(χ) $= G$或核(χ) $= 1$。因此，对于所有非平凡的不可约特征标集合(χ) $= 1$ $\chi \in$ 不可约特征标集合($G|N$)。

步骤 4： N 是一个初等阿贝尔群。

假设 N 不是阿贝尔群。由于 N 是一个极小正规子群，由[10, 定理 4.3A (iii)],$N = S^n$ ，其中 S 是一个非阿贝尔单群，且 $n \in \mathbb{Z}^+$。根据引理 2.1 和引理 2.2，存在一个非平凡特征标 $\chi \in$ 不可约特征标集合(N)，它可以扩张为某个 $\psi \in$ 不可约特征标集合(G)。现在，由步骤 3 可知 ker(ψ) $= 1$ ，因此 cod(ψ) $= |G|/\psi(1) = |G/N| \cdot |N|/\chi(1)$。然而，根据假设，我们有 cod($G$) $=$cod(A$_n$) $=$cod(G/N)。因此，cod(ψ) $\in$cod(G) $=$cod(G/N)，所以对某个 $\phi \in$不可约特征标集合(G/N)，有 cod(ψ) $= |G/N|/\phi(1)$。于是，$|G/N|$可被 cod(ψ) 整除，这与 cod(ψ) $= |G/N| \cdot |N|/\chi(1)$ 矛盾，因为 $\chi(1) \neq |N|$.。因此， N必为阿贝尔群。

现在证明 N 是初等阿贝尔群。设素数 p 整除 $|N|$. 。那么 N 有一个 p-Sylow 子群K，且由于 N 是阿贝尔群， K 是 N 中唯一的 p-Sylow 子群，因此 K 是 N的特征子群。于是，K 是 G的正规子群，因此 $K = N$ ，因为 N 是极小的。故 $|N| = p^n$. 。现在取 N的子群$N^p = \{n^p \mid n \in N\}$，根据柯西定理，该子群是适当子群。由于 N^p是 N的特征子群，它必定是 G的正规子群，因此由 N. 的唯一性可知， N^p 是平凡的。因此， N 的每个元素的阶都是 p，且 N 是初等阿贝尔群。

步骤 5：C$_G$(N) $= N$.

首先注意，由于 N是正规子群，C$_G$(N) $\trianglelefteq G$.。此外，由于根据步骤 4， N是阿贝尔群， $N \leq$C$_G$(N)。由 N的极大性可知，必有 C$_G$(N) $= N$ ，或 C$_G$(N) $= G$. 。若 C$_G$(N) $= N$，则结论成立。

若否，则 C$_G$(N) $= G$，因此 N 必在 G. 的中心中。于是，由步骤 2 可知， N 是 G 的唯一极小正规子群，因此 $|N|$ 必为素数。否则， N总存在一个非平凡真子群 K ，且由于 K 包含于 Z(G) 中，故它是正规子群，这与 N. 的极小性矛盾。此外，由于 G 是完美群，我们有 Z(G) $= N$，且 N 同构于G/N [16, 的施尔乘子的一个子群。推论 11.20]。

现在我们注意到，众所周知，对于 $n > 7$，A$_n$ 的施尔乘子是 $\mathbb{Z}_2$，因此$G \cong 2.$A$_n$。由 [20]可知，2.A$_n$ 总有一个次数为 $2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}$阶的特征标。设 χ 是 2.A$_n$ 的一个具有 $\chi(1) = 2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}$. 的不可约特征。回顾步骤 2，$G \cong 2.A_n$只有一个非平凡真正规子群。特别地， G的唯一非平凡真正规子群是 $N \cong \mathbb{Z}_2$ 。因此， |ker(χ)| $= 1$ 或 2。于是 cod(χ) $=$ |2.A$_n$:ker(χ |) ( )。若 χ的核 | $= 1$，则 cod(χ) $=$ $\frac{n!}{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}}$; 若 χ的核 | $= 2$，则 cod(χ) $=$ $\frac{n!/2}{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}} = \frac{\chi(1)}{n!} \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$ 。无论哪种情况，对于任意素数 $p \neq 2$， $|\text{cod}(\chi)|_p = |n!|_p = |A_n|_p$。由于 cod($G$) $=$cod(A$_n$)，我们知道 cod(χ) $\in$ cod(A$_n$)。因此，A$_n$ 有一个次数为 2 的幂的特征标。

然而，由 [20], 可知，对于 $n > 7$，A$_n$ 只有在 $n = 2^d + 1$ 对某个正整数 d成立时，才有等于 2 的幂的特征标次数。在这种情况下， $2^d = n - 1 \in$cd(A$_n$)，因此我们需要 $\frac{\lfloor n \rfloor}{n-1} =$ $|2.\text{AA}\frac{n|}{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}}$或 $|2.\text{A}\frac{n|}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$。因此， $\frac{1}{n-1} = \frac{2}{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}} = \frac{1}{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor - 1}}$或 $\frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}}$，所以 $n - 1 = 2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor - 1}$或 $2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$。然而，这两个方程的整数解只有在 $n = 9$ 且 $9 - 1 = 8 = 2^3 = 2^{\lfloor 9/2 \rfloor - 1}$时才存在。在这种情况下，我们查阅 ATLAS [9] ，发现 A_9 和 $2.A_9$ 的余度集大小不同。这与假设矛盾，因此 C$_G$(N) $= N$。

步骤 6：令 λ 为 Irr(N) 中的非平凡特征标，并令 $\vartheta \in$ 为 Irr($I_G(\lambda)|\lambda$)，即 $\lambda^{I_G}(\lambda)$ 的不可约构成成分集合，其中 $I_G(\lambda)$ 是 $\lambda \in G$. 的惯性群。于是 $|I_G(\lambda)| \in$ cod(G)。此外，~~$\vartheta(1)$~~ 整除 $|I_G(\lambda)/N|$，且 $|N|$ 整除 $|G/N|$.。最后， $I_G(\lambda) < G$，即 λ 不是 G-不变的。

令 λ 为 Irr(N) 中的非平凡特征标，并令 $\vartheta \in$ 为 Irr($I_G(\lambda)|\lambda$)。令 χ 为 ϑ^G. 的一个不可约成分。根据 [16, 推论 5.4], ，我们知道 $\chi \in$ 属于 Irr(G)；根据 [16, 定义 5.1], ，有 $\chi(1) = \frac{|G|}{|I_G(\lambda)|} \cdot \vartheta(1)$。此外，~~根据步~~骤 2，我们知道 ker($\chi$) $= 1$ ，因此 cod(χ) $= \frac{|G|}{\chi(1)}$( )$=$ $|I_G(\lambda|)$( )，所以 $|I_G(\lambda|)$~~( ) $\subset$cod(G)。现在~~，由于 N 是阿贝尔群， $\lambda(1) = 1$，因此有 $\vartheta(1) = \vartheta(1)/\lambda(1)$，它整除 $|I_G(\lambda|)$，所以 $|N|$ ~~整除~~ $|I_G(\lambda|)$( )。此外~~，我~~们知道 cod(G) $=$cod(G/N)，且 cod(G/N) 中的所有元素都整除 $|G/N|$，所以 $|N|$ 整除 $|G/N|$。

接下来，我们要证明 $I_G(\lambda)$ 是 G 的真子群。为导出矛盾，假设 $I_G(\lambda) = G$。那么 ker(λ) $\trianglelefteq G$。根据步骤 2，我们知道 ker(λ) $= 1$；根据步骤 4，我们知道 N 是一个素数阶循环群

。因此，由正规化子-中心化子定理可得 $G/N = \mathrm{N}_G(N)/\mathrm{C}_G(N) \leq \mathrm{Aut}(N)$，所以 G/N 是阿贝尔群，矛盾。

步骤 7：最终矛盾。

根据步骤 4，N 是一个阶为 p^m 的初等阿贝尔群，其中 p 为素数，$m \geq 1$为整数。由正规化子-中心化子定理，$\mathrm{A}_n \cong G/N = \mathrm{N}_G(N)/\mathrm{C}_G(N) \leq \mathrm{Aut}(N)$，且 $m > 1$。注意，一般而言，$\mathrm{Aut}(N) = \mathrm{GL}(m,p)$。根据步骤 6，$|N|$整除 $|G/N|$，因此我们知道 $|N| = p^m$整除 $|\mathrm{A}_n|$且$G/N \cong \mathrm{A}_n \lesssim \mathrm{GL}(m,p)$。我们通过反证法证明这不可能发生。

首先，我们断言，若 p^m 整除 $|\mathrm{A}_n|$ 且 $\mathrm{A}_n \lesssim (\mathrm{GL}(m,p)$，则 p 必定等于 2。为证明这一点，我们注意到，对于 $p > 2$，根据[5], ，若 p^m 整除 $|\mathrm{A}_n|$，则 $m < \frac{n}{2}$。然而，[24] 的定理 1.1 表明，若 $n > 6$，则 A_n 在特征为 p 的域上的模表示的最小忠实次数至少为 $n-2$。由于将 A_n 嵌入为 $\mathrm{GL}(m,p)$ 的子群，等价于给出一个在特征为 p的域上的 m 次忠实表示，因此我们有 $m \geq n-2$。这是一个矛盾，因为 $\frac{n}{2} > n-2$意味着 $n < 4$。因此，$p = 2$。

现在，令 $p = 2$。如上所述，由 [5], 我们得到 $|n!|_2 \leq 2^{n-1}$。因此，若 2^m 整除 $|\mathrm{A}_n|$，则 $m \leq |\mathrm{A}_n|_2 \leq 2^{n-2}$。现在，[23] 的定理 1.1 表明，若 $n > 8$，则 A_n 在特征为 2 的域上的模表示的最小忠实次数至少为 $n-2$。因此，必有 $m \geq n-2$，所以$m = |\mathrm{A}_n|_2 = 2^{n-2}$ 是唯一的可能。

令 $\lambda \in$不可约特征标集合(N) $\vartheta \in$不可约特征标集合$(I_G(\lambda)|\lambda)$，且 $T := I_G(\lambda)$。那么 $1 < |G\colon T| < |N| = 2^{n-2}$对于 $|G\colon T|$是 λ的所有共轭元的个数。根据步骤 5，我们知道 $\frac{|T|}{\vartheta\,1}(\,) \in$共轭类大小集合$(G)$，此外 $|N|$整除$\frac{|T|}{\vartheta\,1}(\,)$。由于 $|N|_2 = |\mathrm{A}_n|_2$且共轭类大小集合(G) $=$共轭类大小集合(A_n)，我们知道 $\left|\frac{|T|}{\vartheta\,1}(\,)\right|_2 = |N|_2.$。因此 $\left|\frac{|T/N|}{\vartheta\,1}(\,)\right|_2 = 1$，所以 $|T/N|$和 $\vartheta(1)$ 的 2-部分相等。因此，对于每个 $\vartheta \in$不可约特征标集合$(T \mid \lambda)$，有 $|\vartheta(1)|_2 = |T/N|_2.$。然而，$|T/N| = \sum_{\vartheta \in \text{不可约特征标集合}(T|\lambda)} \vartheta(1)^2.$。因此，若对每个 $\vartheta \in$不可约特征标集合$(T \mid \lambda)$ 都有 $|\vartheta(1)|_2 = 2^k \geq 2$，则会得到 $|T/N|_2 = 2^{2k}$，这与 $|\vartheta(1)|_2 = |T/N|_2$. 矛盾。因此，$|T/N|_2 = 1.$。于是，由于 $|G/N|_2 \geq |N|_2 = 2^{n-2}$，我们有 $|G\colon T|_2 = |G/N\colon T/N|_2 \geq 2^{n-2}$，故 $|G\colon T| \geq 2^{n-2} = |N|$，矛盾。

我们还需考虑最后一种例外情形：$n = 8$、$p = 2$和 $m = 4$，其中 5 或 6。在这种情况下，$\mathrm{A}_8 \cong \mathrm{GL}(4,2)$，且$2^6$整除 $|\mathrm{A}_8|$。现在，$\mathrm{cod}(\mathrm{A}_8) = \{1, 2^6\cdot 3^2\cdot 5, 2^5\cdot 3^2\cdot 5, 2^4\cdot 3^2\cdot 7, 2^6\cdot 3\cdot 5, 2^4\cdot 3^2\cdot 5, 2^6\cdot 3^2, 2^6\cdot 7, 2^3\cdot 3^2\cdot 5, 3^2\cdot 5\cdot 7, 2^5\cdot 3^2\}$来自 [13]。我们将依次考察 m 的每种可能性。

首先，令 $m = 4$。于是有$G/N \cong \mathrm{A}_8 \cong \mathrm{GL}(4,2)$ $N = (\mathbb{Z}_2)^4$，因此 G 是 GL(4, 2) 被 N.扩张得到的扩张。先假设这个扩张是分裂的，且 G 是一个半直积。这个半直积由同态 $\phi : \mathrm{GL}(4,2) \to$ 自同构群$((\mathbb{Z}_2)^4) \cong$ GL(4, 2)定义。然而，由于 GL(4, 2) 是单群，$\ker(\phi) = 1$ 或者是 GL(4, 2)。在第一种情况下，我们得到平凡直积，因此 G至少有两个 GL(4, 2) 的拷贝作为正规子群，这与步骤 2 矛盾。在第二种情况下，ϕ 是 GL(4, 2) 的某个自同构。这里，我们可以用 GAP 验证，任何这样的 ϕ 都会产生半直积 $\mathrm{GL}(4,2) \rtimes_\phi (\mathbb{Z}_2)^4$，其余度集与 A_8. 不同。现在假设该扩张是非分裂的。那么，[4] 表明存在唯一的非分裂扩张 $2^4.\mathrm{GL}(4,2)$。然而，我们用 GAP 发现，它的余度集与 A_8.不同。

其次，令 $m = 5$。如上所述，$|G\colon T| < |N| = 2^5$且 $\frac{|T|}{\vartheta\,1}() \in \mathrm{cod}(G)$，使得 2^5整除 $\frac{|T|}{\vartheta\,1}()$。此外，$|\frac{|T/N|}{\vartheta\,1}()\,|_2 \leq 2$，因此 $|T/N|_2 \leq 4$且 $|G/N\colon T/N|_2 \geq 16$。于是，我们有 16 整除 $|G/N\colon T/N|$且$|G/N\colon T/N| < 32.$。但是，我们用 GAP 检查了 $G/N \cong \mathrm{A}_8$ 的所有子群的指数，发现它们无一满足这两个性质。

最后，令 $m = 6$。现在，$|N|_2 = |\mathrm{A}_8|_2.$。对于这种情形，上文针对一般 A_n 的相同论证仍然成立，并由此得到矛盾。因此我们发现，每个 $|N| = p^m$ 都会导致矛盾，所以 $N = 1$ 且$G \cong \mathrm{A}_n$。□

4. Acknowledgements

这项研究由 Dolorfino、Martin、Slonim 和 Sun 于 2022年夏季 在 Yang 的指导下开展，获得了美国国家科学基金会本科生研究体验项目资助（DMS-1757233、DMS-2150205）以及美国国家安全局资助（H98230- 21-1-0333、H98230-22-1-0022）。作者衷心感谢美国国家科学基金会和美国国家安全局的经费支持，并感谢得克萨斯州立大学提供良好的工作环境和支持。Yang 还获得了西蒙斯基金会的部分资助（#499532、#918096，资助对象为 YY）。作者还要感谢 Richard Stanley 教授提供的帮助。

References

[1] N. Ahanjideh, 《不可约特征标余度中的不可整除性》。 *Bull. Aust. Math. Soc.*, 105（2022）, 68-74。[2] K. Aziziheris、F. Shafiei、F. Shirjian, 《不可约特征标次数较少的单群》。 *J. Algebra Appl.*, 20（2021）, 2150139。[3] A. Bahri、Z. Akhlaghi、B. Khosravi, 《Huppert 猜想在特征标余度上的一个类比》。 *Bull. Aust. Math. Soc.*, 104 2021 286 ( ), 第 2 期, 278- 。[4] A. B. M. Basheer 和 J. Moori, 《Dempwolff群的 Fischer矩阵》 2^5.GL(5, 2). *Int. J. Group Theory*, 1（2012）, 43-63。[5] C. Bessenrodt、H. P. Tong-Viet、J. Zhang, 《交错群的 Huppert 猜想》。 *J. Algebra*, 470（2017）, 353-378。[6] J. Bezanson、S. Karpinski、V. B. Shah、A. Edelman, 《Julia：一种用于技术计算的快速动态语言》。 *ArXiv Preprint* 1209 5145 ,

ArXiv：。.[7] R. W. Carter, *Simple Groups of Lie Type.* Wiley, 1989。[8] D. Chillag 和 M. Herzog, 《关于特征标次数商》。 *Arch. Math.*, 55（1990）, 25-29。[9] J. H. Conway 等, *Atlas of Finite Groups.* 牛津克拉伦登出版社, 1985。[10] J. D. Dixon 和 B. Mortimer, *Permutation Groups.* Spring, 1996。[11] M. Dolorfino、L. Martin、Z. Slonim、Y. Sun、Y. Yang, 《通过余度刻画散在单群》。已提交。[12] J. Fulman 和 R. Guralnick, 《有限Chevalley群中共轭类的数量和大小的界及其在错排中的应用》。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364（2012）, 3023-3070。[13] M. Gintz、M. Kortje、M. laurence、Y. Liu、Z. Wang、Y. Yang, 《对若干余度较少的非阿贝尔单群的刻画》。 *Comm. Algebra*, 50（2022）, 3932-3939。[14] H. Guan、X. Zhang、Y. Yang, 《利用余度集识别 Ree群》 ${}^2G_2(q)$。 *Bull. Aust. Math. Soc.*, https://www.doi.org/10.1017/S0004972722001022 。[15] N. N. Hung, 《有限单群的群伪代数》。进行中。[16] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups.* 纽约学术出版社, 1976。[17] G. James 和 A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group.* Addison-Wesley 出版公司, 1981。[18] E. I. Khukrho 和 V. D. Mazurov, *Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook. No. 20.* 俄罗斯科学院, 2022。[19] Y. Liu 和 Y. Yang, 《Huppert 猜想在 PSL(3, q) 和 PSU(3, q) 上的类比》。 *Results Math.*, 78（2023）, 第 7 期。[20] G. Malle 和 A.E. Zalesskii, 《拟单群的素数幂次数表示》。 *Arch. Math.*, 77（2001）, 461-468。[21] A. Moret´o, 《有限群的复群代数：Brauer问题 1》。 *Adv. Math.*, 208（2007）, 236-248。[22] G. Qian、Y. Wang、H. Wei, 《有限群中不可约特征标的余度》。 *J. Algebra*, 312（2007）, 946-955。[23] A. Wagner, 《特征为 2 的域上 S_n 和 A_n 的最小次数忠实线性表示》。 *Math. Z.*, 151（1976）, 127-138。[24] A. Wagner, 《奇特征域上 S_n 和 A_n 的最小次数忠实线性表示》。 *Math. Z.*, 154 1977 104 113 ( ), - 。

Mallory Dolorfino, Kalamazoo College, Kalamazoo, Michigan, USA, mallory.dolorfino19@kzoo.edu
Luke Martin, Gonzaga University, Spokane, Washington, USA, lwmartin2019@gmail.comZachary Slonim,
University of California, Berkeley, Berkeley, California, USA, zachslonim@berkeley.eduYuxuan Sun,
Haverford College, Haverford, Pennsylvania, USA, ysun1@haverford.eduYong Yang,
Texas State University, San Marcos, Texas, USA, yang@txstate.edu