arXiv:2301.02688v1 [math.CO] 6 Jan 2023

正常定位多面体

伊万·阿尔任采夫

摘要。具有相同尾锥的格多面体 Q_1 和 Q_2 称为正常定位的，如果闵可夫斯基和 Q_1+Q_2 中的每个格点都分别是来自 Q_1 和 Q_2 的格点之和。我们证明，若 Q_1 的法扇细化 Q_2 的法扇，则存在一个正整数 k，使得对于任意正整数 s，多面体 skQ_1 和 skQ_2 都是正常定位的。该结果基于用分次代数解释这一问题，以及关于齐次分量上乘法映射满射性的先前结果。此外，我们还给出平面上的两个格三角形 P 和 Q 的一个例子：对于任意正整数 k，三角形 kP 和 kQ 都不是正常定位的。

1. 引言

考虑格 $\mathbb{Z}^d$ 以及由 $\mathbb{Z}^d$生成的有理向量空间 $\mathbb{Q}^d$。所谓格多胞体，是指一个凸多胞体 P，它位于 $\mathbb{Q}^d$ 中，且顶点属于 $\mathbb{Z}^d$。此外，假设 P 中的格点生成格 $\mathbb{Z}^d$；通过用适当的子格替换 $\mathbb{Z}^d$ 即可实现这一点。

很容易构造出两个格多胞体 P和 Q，使得它们的闵可夫斯基和 $P+Q$ 包含一个格点，而该点不能表示为分别来自 P 和 Q的格点之和；例如参见 [8]。此外，从维数 3 开始，即使$P=Q$，这种情况也可能发生。

定义 1. 若对每个正整数 s 以及每个格点 $z\in sP$，都存在格点 $z_1,\dots,z_s\in P$使得 $z=z_1+\ldots+z_s$，则称格多胞体 P为正规。

正规多胞体在现代数学的许多领域中都发挥着重要作用；关于这一主题的最新综述，参见 [5]。特别地，这类多胞体定义了整闭分次幺半群代数以及射影环面簇的射影正规嵌入。

我们先回顾一下，如果在每个顶点处，本原边向量构成 $\mathbb{Z}^d$的一个基，那么格多胞体 P 是光滑的。光滑多面体对应于光滑环面簇的射影嵌入。小田问题 [5, 第 1] 节提出：每个光滑多面体是否都是正规的？这个问题在所有维数 $\geqslant 3$下都仍未解决。

以下定理的证明可见于 [3, 命题1.3。3] 或 [4]

定理1。对于 $\mathbb{Q}^d$ 中的每个格多胞体 P，多胞体 $(d-1)P$ 是正规的。

特别地，在维数2中，任意格多边形都是正规的。

本文的目标 是将正规性这一性质推广到一对多胞体。

定义 2. </style}格多面体 P和 Q 在 $\mathbb{Q}^d$ 中称为正规定位</style}，如果对于每个格点 $z\in P+Q$，都存在格点 $z'\in P$和 $z''\in Q$，使得 $z=z'+z''$。

2010 数学主题分类。主要分类 11P21、52B20；次要分类 14M25、52B11。关键词和短语。多胞体、多面体、格、闵可夫斯基和、分次代数、托里克簇。

小田猜想（参见 [8] 或 [6, 第 1]节）如下所述。设 P 和 Q 为格多面体。假设 P 是光滑的，且 Q 的法扇细化了 P的法扇。那么，多胞体 P 和 Q 是正规定位的。这是对小田关于光滑多面体正规性的问题的推广。

定理1中证明了：若 P和 Q 是格多边形，且 Q 的法扇细化 P的法扇，那么 P 和 Q 是正规定位的。本文证明了小田猜想的一个版本（定理3），将定理1推广到更高维情形。该结论不仅适用于多胞体，也适用于具有相同尾锥的多面体。

本文结构如下。第2节中，我们给出平面上两个格三角形 P 和 Q 的一个具体例子：对于任意正整数 k ，三角形 kP 和kQ 都不是正规定位的。这个例子旨在说明，与正规性不同，正规定位这一性质并非总能仅通过对给定的两个多胞体进行缩放来实现。

第3节中，我们回顾多面体、它们的闵可夫斯基和以及法扇的基本定义和事实。此外，我们还考察一些多面体，它们是较大格中的正八分体投影到较小格时所得到的纤维。第4节致力于从分次代数以及齐次分量上的乘法映射角度，解释上述定义的对象。我们回顾 [1] 的结果，这些结果使我们能够将两个多面体在两个点上方的纤维中的正规定位性质（允许相差一个标量）与这些点相对于所谓 GIT 扇的位置联系起来。最后，第5节说明如何通过纤维构造实现一对多面体，并证明我们的主要结果（定理3）。

2. 维数2中的一个例子

让我们说明，与定理1相反，对于两个格三角形而言，缺少正规定位这一性质并非仅仅是尺度问题。

命题1. 存在两个格三角形 P 和 Q ，位于 $\mathbb{Q}^2$ 中，使得对于每个正整数 k ，三角形 kP 和 kQ 都不是正规定位的。

证明. 取 $P = \mathsf{Conv}(a_1, a_2, a_3)$ 和 $Q = \mathsf{Conv}(b_1, b_2, b_3)$，其中

$$a_1 = (165, 0),\ a_2 = (175, 0),\ a_3 = (0, 385) \quad \text{and} \quad b_1 = (0, 0),\ b_2 = (35, 0),\ b_3 = (0, 77).$$

等价地，三角形 P 由以下不等式给出

$$7x + 3y \geqslant 1155, \quad 11x + 5y \leqslant 1925, \quad y \geqslant 0$$

而 Q由下式给出

$$11x + 5y \leqslant 385, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

闵可夫斯基和 $P + Q$ 是 $\mathsf{Conv}(c_1, c_2, c_3, c_4)$，其中

$$c_1 = (165, 0), \quad c_2 = (210, 0), \quad c_3 = (0, 385), \quad c_4 = (0, 462).$$

确定 $P + Q$ 的那些不等式为

$$7x + 3y \geqslant 1155, \quad 11x + 5y \leqslant 2310, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

容易验证，对于每个正整数 k，点 $s = (1, 385k - 2)$ 都包含在 $kP + kQ$ 中。假设 $s = p + q$，其中 $p \in kP \cap \mathbb{Z}^2$ 和 $q \in kQ \cap \mathbb{Z}^2$。那么只有两种情况。

情形 *1*。令 $p=(1,a)$ 和 $q=(0,385k-2-a)$，其中某个非负整数为 a。由于p 包含在 P中，我们有

$$7+3a \geqslant 1155k \quad \text{and} \quad 11+5a \leqslant 1925k.$$

这些不等式可以改写为

$$a \geqslant 385k-2-\frac{1}{3} \quad \text{and} \quad a \leqslant 385k-2-\frac{1}{5}.$$

由于 a 是整数，我们得出矛盾。

情形 *2*。设 $p=(0,a)$ 和 $q=(1,385k-2-a)$，其中 a 是某个非负整数。由于 p 包含于 P，我们有

$$3a \geqslant 1155k \quad \text{and} \quad 5a \leqslant 1925k,$$

so

$$a \geqslant 385k \quad \text{and} \quad a \leqslant 385k.$$

我们得出 $a=385k$。由于 q 位于 Q 中，我们有

$$385k-2-a=-2>0.$$

这两个矛盾完成了证明。 □

3. 多面体概论

在 $\mathbb{Q}^d$ 中，多面体是指有限个闭仿射半空间的交。格多面体是 $\mathbb{Q}^d$ 中顶点位于 $\mathbb{Z}^d$ 的多面体。注意，多胞体可以定义为 $\mathbb{Q}^d$ 中的有界多面体。对于多面体 Q，我们将其相对内部定义为从 Q 中去掉所有真面后得到的集合。我们用 Q° 表示 Q 的相对内部。此外，$\mathbb{Q}^d$ 中的锥是有限个闭线性半空间的交。如果一个锥不包含任何直线，就称它是尖锐的。如果锥的维数至少为 2，那么它是尖锐的，当且仅当它由其一维面生成。

$\mathbb{Q}^d$ 中所有多面体的集合具有自然的交换半群结构：定义两个多面体 Q_1 和 Q_2 的闵可夫斯基和为多面体

$$Q_1+Q_2 := \{w_1+w_2;\ w_1 \in Q_1, w_2 \in Q_2\}.$$

同理，可以定义 $\mathbb{Q}^d$ 中两个任意子集的闵可夫斯基和。

任意多面体都允许作闵可夫斯基和分解 $Q=P+\sigma$，其中 P是一个多胞体，σ 是 $\mathbb{Q}^d$中的一个锥。在此分解中，尾锥 σ 是唯一的；它由下式给出

$$\sigma = \{w \in \mathbb{Q}^d;\ w'+tw \in Q \text{ for all } w' \in Q, t \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}\}.$$

尾锥为 σ 的多面体称为 σ-多面体。例如，多胞体恰好是满足 $\sigma=\{0\}$的 σ-多面体。

很容易验证，对于固定的锥 σ，所有 σ-多面体关于闵可夫斯基和构成一个交换半群。

回顾一下，对于任意的 σ-多面体 Q，都可以在 $\mathbb{Q}^d$ 中与之关联一个正规扇 $\mathcal{N}(Q)$：任意一点 $v \in Q$ 都定义了锥 $\tau(v)$，它由 $\mathbb{Q}^d$ 上的所有线性函数组成，这些函数在 Q 上的最大值于点 v处取得。锥 $\mathcal{N}(Q)=\{\tau(v) \mid v \in Q\}$ 的集合是有限的，并且它是一个扇，因为 $\mathcal{N}(Q)$中任意锥的面都包含于 $\mathcal{N}(Q)$中，而 $\mathcal{N}(Q)$中任意两个锥的交都是它们各自的面。此外，$\mathcal{N}(Q)$中的所有锥都是尖锐的，当且仅当 Q 在 $\mathbb{Q}^d$中是满维的。

扇 $\mathcal{N}$ 的支撑是 $\mathcal{N}$中所有锥的并集。正规扇$\mathcal{N}(Q)$的支撑等于对偶锥

$$\sigma^\vee := \{l \in (\mathbb{Q}^d)^* \mid l|_\sigma \geqslant 0\}.$$

如果扇 $\mathcal{N}_1$ 细化扇 $\mathcal{N}_2$，也就是说， $\mathcal{N}_1$ 中的每个锥都包含在 $\mathcal{N}_2$中的某个锥内。设 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 是两个具有相同支集的扇。 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 的最粗公共细分是具有相同支集的扇 $\mathcal{N}$，其锥为 $\tau_1 \cap \tau_2$，其中 $\tau_1 \in \mathcal{N}_1$和 $\tau_2 \in \mathcal{N}_2$。

众所周知，两个 σ-多面体 Q_1 和 Q_2的法扇 $\mathcal{N}(Q_1)$ 与 $\mathcal{N}(Q_2)$ 的最粗公共细分 $\mathcal{N}$，恰好是法扇 $\mathcal{N}(Q_1 + Q_2)$。

现在考虑格的满同态 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ 以及由此诱导的向量空间线性映射 $\pi\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^m$。我们用 $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ 表示 $\mathbb{Q}^n$ 中坐标为非负数的向量所构成的锥，并令 $C := \pi(\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}) \subseteq \mathbb{Q}^m$。考虑锥 $\sigma := \pi^{-1}(0) \cap \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$。对于任意点 $u \in C$，都可关联多面体 $P(u) := \pi^{-1}(u) \cap \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$。

引理 1. 对于任意 $u \in C$，多面体 $P(u)$ 是一个 σ-多面体。

证明。对于向量 $w \in \mathbb{Q}^n$，条件 $w' + tw \in P(u)$ 对所有 $w' \in P(u)$ 以及所有 $t \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$都成立，意味着 $w \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ 且 $u = \pi(w' + tw) = \pi(w') + \pi(tw) = u + t\pi(w)$。这等价于$w \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ 且 $\pi(w) = 0$，或 $w \in \sigma$。□

显然，对每个 $u \in C$，都存在一个正整数 r，使得 $P(ru)$ 是一个格多面体。此外，容易验证，对于所有u_1、$u_2 \in C$，$P(u_1) + P(u_2)$ 包含于 $P(u_1 + u_2)$ 中。

我们关注满足 u_1、$u_2 \in C$ 的一对 (u_1, u_2) 的以下三个性质：

(P1) $P(u_1) + P(u_2) = P(u_1 + u_2)$;

(P2) $(P(u_1) \cap \mathbb{Z}^n) + (P(u_2) \cap \mathbb{Z}^n) = P(u_1 + u_2) \cap \mathbb{Z}^n$;

(P3) 存在 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得对于任意 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ 我们都有

$$(P(sku_1) \cap \mathbb{Z}^n) + (P(sku_2) \cap \mathbb{Z}^n) = P(sk(u_1 + u_2)) \cap \mathbb{Z}^n.$$

4. 分次代数

本节将为上文讨论的对象引入一种代数解释。投影 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ 在多项式代数$A := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$上诱导出一个有效的 $\mathbb{Z}^m$-分次。具体而言，我们令 $\deg(x_i) = \pi(e_i)$，其中 e_1，…，e_n 是格 $\mathbb{Z}^n$ 的标准基。为后续讨论起见，我们假设基域 $\mathbb{K}$ 是特征零的代数闭域。

注 1。线性化问题 [7] 断言，经过自同构后，任意有效的$\mathbb{Z}^m$-分次在 $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 上都可以由这种方式得到。

下面我们在稍微一般一些的情形下，沿用 [1] 中的表述。设A 是一个具有单位元、结合、交换、整且有限生成的代数，定义在 $\mathbb{K}$上。假设 A 按格 $\mathbb{Z}^m$分次，即我们有

$$A = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^m} A_u \quad \text{with} \quad A_{u_1} \cdot A_{u_2} \subseteq A_{u_1 + u_2}.$$

我们将 A 的权锥定义为由所有满足$A_u \neq 0$的 $u \in \mathbb{Z}^m$ 生成的锥 $C(A) \subseteq \mathbb{Q}^m$ 。我们研究如下问题：给定 $u_1, u_2 \in C(A) \cap \mathbb{Z}^m$，是否存在一个整数 $k > 0$，使得对任意 $s > 0$，乘法映射

$$A_{sku_1} \otimes_{\mathbb{K}} A_{sku_2} \ \to \ A_{sk(u_1+u_2)}, \qquad f \otimes g \ \mapsto \ fg$$

是满射吗? 如果一对 $u_1, u_2 \in C(A) \cap \mathbb{Z}^m$ 生成 具有这一性质，我们就称其为如此。如果 A 是一个由投影 π给出的、带有 $\mathbb{Z}^m$-分次的多项式代数，那么这恰好是格点 u_1, u_2在 C中组成的一对所满足的性质 (P3)。

让我们回顾一下 [2] 与分次代数相关联的 GIT 扇这一概念。 A 上的 $\mathbb{Z}^m$-分次定义了环面 $T := \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[\mathbb{Z}^m])$ 在 $X := \mathrm{Spec}(A)$ 上的作用，使得对于任意 $u \in \mathbb{Z}^m$，元素 $f \in A_u$ 恰好是特征χ^u: $T \to \mathbb{K}^*$的半不变量，也就是说，每个 $f \in A_u$ 都满足

$$f(t \cdot x) \ := \ \chi^u(t) f(x).$$

（闭）点 $x \in X$ 的轨道锥 是锥 $\omega(x) \subseteq \mathbb{Q}^m$，由所有允许存在一个 $f \in A_u$ 使得 $f(x) \neq 0$ 的 $u \in C(A)$生成。轨道锥的集合是有限的，因此可以为任意元素 $u \in C(A)$关联其*GIT* 锥：

$$\lambda(u) \ := \ \bigcap_{\substack{x \in X, \\ u \in \omega(x)}} \omega(x).$$

这些 GIT 锥覆盖权锥 $C(A)$，并且根据 [2, 定理3，11], 所有 GIT 锥的集合 $\Lambda(A)$ 构成一个扇：若 $\lambda \in \Lambda(A)$，则 λ 的每个面也属于$\Lambda(A)$；对于 $\tau, \lambda \in \Lambda(A)$，交集 $\tau \cap \lambda$ 是 λ 和 τ的一个面。注意，这里允许扇包含含有直线的锥。

定理 2. [1,定理1。1]

(1) 如果 $u_1, u_2 \in C(A) \cap \mathbb{Z}^m$ 是一对生成对，那么权 u_1, u_2 属于同一个 *GIT* 锥 $\lambda \in \Lambda(A)$。(2) 如果 $u_1, u_2 \in C(A) \cap \mathbb{Z}^m$ 属于同一个 *GIT* 锥 $\lambda \in \Lambda(A)$，且 u_1 属于相对内部 λ°，那么 (u_1, u_2) 是一对生成对。

如果两个权 $u_1, u_2 \in C(A) \cap \mathbb{Z}^m$ 位于同一个 GIT 锥 $\lambda \in \Lambda(A)$ 的边界上，那么无法根据 GIT 扇给出一般性结论：可能 u_1, u_2是生成的，也可能 u_1, u_2 不是生成的。第一种情况有显而易见的例子，至于后一种情况，我们给出如下例子。

例1。 [1, 例1。2] 考虑多项式环 $A := \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$。那么可以通过如下赋值定义一个 $\mathbb{Z}^2$分次: A

$$\deg(x_1) \ := \ (4,1), \quad \deg(x_2) \ := \ (2,1), \quad \deg(x_3) \ := \ (1,2), \quad \deg(x_4) \ := \ (1,3).$$

对 $u_1 := (2, 1)$ 和 $u_2 := (1, 2)$ 属于同一个 GIT 锥，但它不是生成的：直接检查可知，单项式 $x_1 x_2^{s-2} x_3^{s-1} x_4 \in A_{s(u_1+u_2)}$ 永远无法通过将 A_{su_1} 和 A_{su_2}中的元素相乘得到。

注记 2。 在 [1, 定理15], 中，给出了一个判据，用于判断同一 GIT 锥中的一对权（u_1， u_2）是否为生成权；该判据以某个态射的像的正规性为依据，该态射定义在某些商空间之间。

[1, 定理1.1] 的证明基于若干命题。其中一个命题的修改版本将在下文使用。为表述这一修改版本，我们还需要了解一些分次代数理论中的概念。

分次代数 $A = \oplus_{u\in\mathbb{Z}^m} A_u$ 的子代数 B 若 B 是 B 与 A的齐次分量交集的直和，则称其为齐次子代数。 A中的每个齐次子代数都继承一个 $\mathbb{Z}^m$-分次。

对任意权 $u \in \mathbb{Z}^m$，都可关联一个齐次子代数 $A(u) := \oplus_{r\geqslant 0} A_{ru}$。注意，子代数 $A(u)$ 是 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$-分次的。

此外，对任意权 u_1 和 u_2，都可在 $A(u_1 + u_2)$ 中关联一个齐次子代数 $A(u_1, u_2)$，其定义如下:

$$A(u_1, u_2) := \bigoplus_{r\geqslant 0} A_{ru_1} \cdot A_{ru_2}.$$

若 B 是一个 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$-分次代数 A 的齐次子代数，且理想 $B_+ := \oplus_{r>0} B_r$ 的根基与 $A_+ := \oplus_{r>0} A_r$ 相同，则称其为大。

设 A 为带有由投影$\pi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ 给出的 $\mathbb{Z}^m$-分次的多项式代数 $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$。对每个 $v \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$，记单项式 $x_1^{v_1} \ldots x_n^{v_n}$ 为 x^v。

命题 2. 一对权(u_1, u_2) 满足条件 ***(P1)***，当且仅当满足以下各条件之一:

(1) 权 u_1，u_2 位于同一个 ***GIT*** 锥中；(2) 子代数 A $(u_1,\ u_2)$ 在 $A(u_1 + u_2)$中是大的。

证明。条件 (1) 和 (2) 的等价性已在 [1, 命题 2.1]中证明。

我们来证明 (P1) 蕴含 (2)。假设 $P(u_1 + u_2) = P(u_1) + P(u_2)$，并取一个单项式 $x^v \in A(u_1 + u_2)$。我们需要证明 x^v包含在理想$A(u_1, u_2)_+$的根基中，也就是说，存在一个正整数 q使得 $x^{qv} \in A(u_1, u_2)_+$。根据假设，有 $v = v' + v''$ 满足 $v' \in P(u_1)$ 且 $v'' \in P(u_2)$。于是存在 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得$qv = qv' + qv''$ 满足 $qv' \in P(u_1) \cap \mathbb{Z}^n$ 且 $qv'' \in P(u_2) \cap \mathbb{Z}^n$。断言得证。

现在我们来讨论蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (P1)。注意到 $v \in P(u_1 + u_2)$ 当且仅当存在 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $sv \in P(s(u_1 + u_2)) \cap \mathbb{Z}^n$；或者等价地，单项式 x^{sv} 属于$A(u_1 + u_2)_+$。根据假设，这意味着 x^{sv}包含于 $A(u_1, u_2)_+$ 的根基中，或者存在 $t \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $x^{tsv} \in A(u_1, u_2)_+$。后一条件意味着存在 $v' \in P(tsu_1) \cap \mathbb{Z}^n$ 和 $v'' \in P(tsu_2) \cap \mathbb{Z}^n$，使得 $tsv = v' + v''$。此条件蕴含$v \in P(u_1) + P(u_2)$。□

5. 正规位置上的正面结果

我们沿用上一节引入的记号。特别地，格之间的每个满射同态 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ 都会在代数$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$上导出一个 $\mathbb{Z}^m$-分次，我们称之为与此分次相对应的权锥、轨道锥和 GIT 锥。在这种情况下，权锥与 $C = \pi(\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0})$ 重合，而轨道锥恰好是由集合 $\{w_1, \ldots, w_n\}$ 的所有子集生成的锥，其中 $w_i := \pi(e_i)$。

设 σ 是 $\mathbb{Q}^d$ 中的一个尖锥。通过在 $\mathbb{Q}^d$ 中选取适当的基，我们可以假设 σ 包含于 $\mathbb{Q}^d_{\geqslant 0}$ 中。此外，对于任意 σ-多面体 Q_1 和 Q_2，我们可以对其进行平行平移，并假设 Q_1 和 Q_2 包含于开卦限 $\mathbb{Q}^d_{>0}$ 中。

命题 3. 设 Q_1 和 Q_2 是 $\mathbb{Q}^d$ 中两个满维的 σ-多面体。那么存在正整数 n和 m，使得 $d = n - m$ 成立，并存在满同态 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$，使得对于某些点 u_1，$u_2 \in C \cap \mathbb{Z}^m$，有 $Q_1 = P(u_1)$和 $Q_2 = P(u_2)$，且这些点位于同一个公共几何不变量理论锥中。

证明。设 $\mathcal{N}(Q_1)$ 和 $\mathcal{N}(Q_2)$ 分别是多面体 Q_1 和 Q_2的法扇。将扇 $\mathcal{N}(Q_1)$ 和 $\mathcal{N}(Q_2)$ 的最粗公共细分记为 $\mathcal{N}$。

设 m 为扇 $\mathcal{N}$ 的射线数，且 $l_1, \ldots, l_m$ 是定义在 $\mathbb{Q}^d$ 上、生成 $\mathcal{N}$ 的射线的线性函数。记 a_i （分别记 b_i）为 l_i 在 Q_1（分别在 Q_2）上的最大值。则多面体 Q_1（分别为 Q_2）由不等式 $l_i \leqslant a_i$ （分别由 $l_i \leqslant b_i$）给出，其中 $i = 1, \ldots, m$。扇 $\mathcal{N}$ 是多面体 $Q_1 + Q_2$ 的法扇，因此多面体 $Q_1 + Q_2$ 由不等式 $l_i \leqslant a_i + b_i$, $i = 1, \ldots, m$ 给出。

我们可以假设线性函数 $l_1, \ldots, l_m$ 的系数均为整数。令 $n = d+m$，并考虑由下式给出的投影 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$

$$(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_m) \to (y_1 + l_1, \ldots, y_m + l_m).$$

令 $u_1 = (a_1, \ldots, a_m)$。则多面体 $P(u_1)$ 由以下条件给出

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_d \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0, \ldots, y_m \geqslant 0,\ y_1 + l_1 = a_1, \ldots, y_m + l_m = a_m.$$

该系统等价于

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_d \geqslant 0,\ l_1 \leqslant a_1, \ldots, l_m \leqslant a_m.$$

这证明了 $P(u_1) = Q_1$。同样的论证表明

$$P(u_2) = Q_2 \quad \text{and} \quad P(u_1 + u_2) = Q_1 + Q_2.$$

最后，由命题 2，条件 $P(u_1) + P(u_2) = P(u_1 + u_2)$ 意味着 u_1 和 u_2 位于同一个公共几何不变量理论锥中。□

我们用 $\mathcal{N}_1$ （分别用 $\mathcal{N}_2$）表示位于空间 $\mathbb{Q}^d$ 中的多面体 $P(u_1)$（分别为 $P(u_2)$）的法扇。

命题 4。扇 $\mathcal{N}_1$ 细化扇 $\mathcal{N}_2$，当且仅当 u_1 是包含 u_2 的某个 *GIT* 锥的内点。

证明。对于任意点 $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Q}^n$，我们在 $\{1, \ldots, n\}$ a 中定义一个子集 s

$$Z(c) = \{i \mid c_i = 0\}.$$

u_1 是包含 u_2 的 GIT 锥的内点这一条件，意味着每个包含 u_1的轨道锥也包含 u_2。注意，点$P(u_1)$（分别为 $P(u_2)$）的坐标可以视为向量w_1、.....、w_n的线性组合的系数，该线性组合等于 u_1（分别为 u_2）。考虑到这一点，我们可以将上述条件改写为：对于每个点 $v_1 \in P(u_1)$，都存在一个点 $v_2 \in P(u_2)$，使得$Z(v_1) \subseteq Z(v_2)$。

由于我们假设这些多面体包含在开卦限 $\mathbb{Q}^d_{>0}$中，坐标x_1、.....、x_d在 $P(u_1)$和 $P(u_2)$上均为正。同时，对于 y_1、.....、y_m，若点 v_1 （分别为 v_2）处的坐标y_i 为零，当且仅当线性函数 l_i 在 $P(u_1)$上的最大值a_i于 v_1（分别为 $P(u_2)$上的最大值 b_i于 v_2）处取得。条件 $Z(v_1) \subseteq Z(v_2)$意味着，包含在正规扇 $\mathcal{N}_1$ 的锥 $\tau(v_1)$中的每个函数 l_i，也包含在正规扇 $\mathcal{N}_2$的锥 $\tau(v_2)$中（见第3节）。由于扇 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$的射线由向量 l_i 中的某些向量生成，且每个锥都由其包含的射线集合唯一确定，因此最后这个条件意味着 $\mathcal{N}_1$ 中的每个锥都包含在$\mathcal{N}_2$ 的某个锥中；等价地说，扇 $\mathcal{N}_1$ 细化扇 $\mathcal{N}_2$。□

接下来　该定理将 [6,定理1.1] 从维数2推广到了更高维数。

定理3. 设 Q_1 和 Q_2 是 $\mathbb{Q}^d$ 中两个满维 σ-多面体。假设法扇 $\mathcal{N}(Q_1)$ 细化法扇 $\mathcal{N}(Q_2)$。那么存在一个正整数 k，使得对于每个正整数 s，多面体 skQ_1 和 skQ_2 都是正规定位的。

证明。根据命题 3，我们将 Q_1（分别将 Q_2）实现为 $P(u_1)$（分别实现为 $P(u_2)$）。根据定理 2，只需证明点 u_1 位于点 u_1 和 u_2 的某个公共几何不变量理论锥的相对内部。这由命题 4 可得。□

注 3。命题 1 的证明中给出的两个三角形的构造取自例1：沿用该例的记号，我们取关于投影 $\pi\colon \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^2$ 的三角形 $P = P(u_1)$ 和 $Q = P(u_2)$。

参考文献

[1] Ivan Arzhantsev 和 J¨urgen Hausen。《多重分次代数的乘法映射》。《数学研究快报》14（2007），第 1 期，129–136 页。[2] Florian Berchtold 和 J¨urgen Hausen。《充足锥之外的 GIT等价》。《密歇根数学杂志》54（2006），第 3 期，483–516 页。[3] Winfried Bruns、Joseph Gubeladze 和 Ngˆo Viˆet Trung。《正规多胞体、三角剖分与 Koszul代数》。《纯粹与应用数学杂志》485（1997），123–160 页。[4] G¨unter Ewald 和 Uwe Wessels。《完备射影托里克簇中可逆层的充足性》。《数学成果》19（1991），275–278 页。[5] Joseph Gubeladze。《正规多胞体：介于离散、连续与随机之间》。《纯粹代数杂志》227（2023年），107187。[6] Christian Haase、Benjamin Nill、Andreas Paffenholz 和 Francisco Santos。《闵可夫斯基和中的格点》。《电子组合学杂志》15（2008），N11。[7] Mariusz Koras 和 Peter Russell。《线性化问题》。载于：《代数群作用与商》，第 91–107 页。Hindawi，开罗，2004。[8] Tadao Oda。《凸格多胞体的闵可夫斯基和问题》。提交于 Oberwolfach会议“组合凸性与代数几何”的摘要，1997年10月26日至11月1日；另见 arXiv:0812.1418，共 7 页。

计算机科学学院，HSE大学，俄罗斯莫斯科波克罗夫斯基大道11号，邮编109028电子邮箱地址：arjantsev@hse.ru