arXiv:2301.02697v1 [econ.TH] 6 Jan 2023

排序选择选票上的偏好

Brian Duricy*

2022年12月19日

摘要

本文对选民在排序选择选举中投出的选票的格结构及该结构所引发的偏好进行了形式化。这些偏好与以往对选民偏好的假设相悖，表明排序选择选举对选民和候选人都需要采用不同的考量。虽然该模型假设选民真诚地投票，但本文提出的排序选择选举模型也为今后研究策略性投票留下了探讨空间。

JEL 分类代码：D71、D72

关键词：排序选择投票、偏好、格论

1 引言

社会选择模型和研究结果通常要求严格偏好关系，即每个备选项相对于其他备选项都有唯一的排序。这也包括社会选择理论中专门研究投票的部分，尽管现实中的排序选择投票[1] 要么规定采用非严格偏好关系，要么表明选民实际上投票时仿佛采用了这种关系。关于前者，2021年纽约市市长初选允许选民最多为五名候选人排序（纽约市选举委员会（2021年）），而民主党初选共有13名候选人可供选择（不包括自荐候选人）。关于后者，Kilgour等人（2020年）列出了17场排序选择选举，其中选票上已排序候选人的平均比例最高略高于80%。Nielson（2017年）等人的实验结果同样表明，受访者通常不会尝试给所有候选人排序，甚至不会给大多数候选人排序。排序选择选举有力地反驳了所有社会选择模型都必须规定严格偏好关系这一主张。

*bduricy@alumni.cmu.edu[1]在多个候选人之间进行的选举中，如果选民必须且只能投票给一位候选人，那么这一条件显然会得到满足。

排序选择选举中确实出现的偏好，是Kreps（1979）所研究的偏好范例。

本文关注这些选举中所使用选票的结构，这类选票称为排序选择制选票。排序选择制选票是选民对候选人集合给出顶部截断序（或者，也可以称为顶部序，例如 Fitzsimmons 和 Lackner（2020）所用的术语）后形成的结果。第 2 节将完整定义这些术语；直观来说，并非所有备选项都必须被唯一排序。以往关于顶部截断偏好的研究，例如 Ayadi 等人（2022）和 Terzopoulou 和 Endriss（2021），主要关注与这些偏好相关的计分规则，而本文则考察为一个集合赋予顶部截断序后所产生的、更基础的序理论性质[2] 。Tomlinson 等人（2022）证明，不同的选票长度可能会导致同一场即时决选制选举产生不同的获胜者，因此，确定应采用哪种计分规则也是一项重要的相关研究方向。

另一项关于顶部截断偏好的研究方向聚焦于计算问题（例如 Menon 和 Larson（2017））。顶部截断偏好也要求我们讨论一些不需要格的结果，因为 Chambers 和 Echenique（2009）等类似研究基于格，而非半格。本文的第一个结果是证明顶部截断集构成一个并半格，这一结果也为本文其余发现奠定了基础。第 3 节的结果沿着一条独特而流畅的路径，从格论推导至效用函数，并在此过程中介绍偏好与投票理论文献中已有结果的新颖应用。

格论与偏好关系的结合十分常见，本文聚焦于反单调偏好关系，为这一领域的研究作出了贡献。排序选择投票促使我们探究这一领域的研究成果是否适用于——以及如何适用于——适合反单调偏好的情境。本文首次指出顶部截断偏好与排序选择投票之间的联系，并将此前在一定程度上彼此独立的多条研究脉络联系起来。了解排序选择选票及其所体现偏好的一些数学性质，将有助于推进有关排序选择投票相较于其他投票方法的价值的规范性研究。

2 模型与补充术语

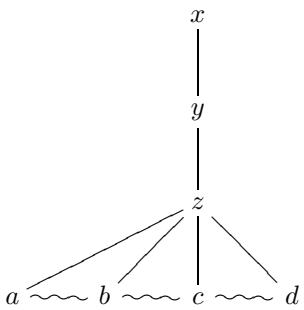
2.1 模型

排序选择选举 $(V, C, \succsim)$ 由一个（可能是无限的）选民集合 V、一个至少包含三名候选人的有限集合 C，以及针对 (V, C) 的完全顶部截断序剖面 $\succsim$ 组成，该剖面为每位

[2]一个完整的序理论，尤其是格论的详细阐述，可见 Caspard 等人（2012）和 Gr¨atzer（2011），分别地。

选民 $v \in V$ 指定 C[3] 上的一个完全顶部截断序。我们将 $(C, \succsim_v)$ 定义为选民 v[4] 的排序选择选票。一般而言，$(C, \succsim_v)$ 是一张选票，其排序概况类型 $\succsim$ 未作具体说明。每位选民可以按自己的意愿对任意数量的候选人进行排序（即声明这些候选人彼此可区分），但至少必须对一名候选人进行排序。下方的示例 1 展示了一张排序选择选票及其格表示。

示例 1 令 $C = \{a, b, c, d, x, y, z\}$，并设选民 $v \in V$ 对 C 的偏好为 $x \succ y \succ z \succ a \sim b \sim c \sim d$。也可以将其表示为 v：候选人 x 排名第一，y 排名第二，z 排名第三，而候选人 a、b、c 和 d 未排序，并列第四。下图展示了这张选票的格结构；直线表示候选人之间存在严格偏好，波浪线表示候选人之间无差异。



显然，这些偏好体现了 Kreps 论文所研究的同一种“灵活性偏好”（Kreps（1979），第 566 页）。若一组候选人是另一组候选人的子集，那么，如果后一组中有某个已排序的候选人不属于前一组，则对后一组的偏好严格优于对前一组的偏好；如果后一组中不属于前一组的候选人仅为（额外的）未排序候选人，则对后一组的偏好弱优于对前一组的偏好。

本文采用的效用函数假设选民不会策略性地投票——也就是说，当且仅当某候选人胜选能为选民带来比另一候选人胜选更高的效用时，该候选人才会排在另一位候选人之前；同样，如果多个候选人未排序，那么其中任何一位候选人胜选给选民带来的效用都相同。可将其形式化如下：$u:\ C \to \mathbb{R}$，使得对所有 x、$y \in C$，

[3]这是对 Osborne (2022) 构造的规范说明，其中 *collective choice problem*（N、X、$\succsim$）定义为包含N 一组个体和 X 一组选项的结构，后两个集合分别以类似于集合 V 和 C 的方式发挥作用。$\succsim$ 在 Osborne (2022) 中是一个偏好概况，其中每个 $\succsim$ 都是一个偏好关系，被定义为完备且传递的二元关系。[4]在论文的结果部分中，将省略规范记号，但相关结果适用于每位选民的个体选票。

$$u(x) > u(y) \Leftrightarrow x \succ y$$

$$u(x) = u(y) \Leftrightarrow x \sim y$$

为了与本文的结果建立完整联系，还需要用到其他术语，这些术语将在下一小节中定义。

2.2 其他术语

本小节中的概念可分为两部分：一部分侧重于所需的序理论和格论概念，另一部分侧重于本文所使用的效用函数相关概念。

偏序是一种自反、传递且非对称的二元关系。具有偏序的集合称为偏序集。若对所有 x、$y \in C$、$x \geq y \Rightarrow x \succsim y$，二元关系 $\succsim$ 都是单调的；若对所有 x、$y \in C$、$x \geq y \Rightarrow x \precsim y$，则是反单调的。若选民 v 更偏好候选人 x 而非候选人 y，我们记作$x \succ_v y$。若候选人 x 和 y 对选民 v而言无法区分，则记作 $x \sim_v y$。在本文的结果部分，有时将候选人称为已排序或未排序会更方便；前者指与任何其他候选人都无法区分的候选人[5],，后者则指至少与另一位候选人无法区分的候选人。除了一个候选人以外，其他候选人都已排序的选民，也会显而易见地使最后一位候选人同样成为已排序候选人。

弱序是一种偏序，其中不可区分关系具有传递性。顶部截断序是一种弱序，其中只有极小元素彼此不可区分；具有顶部截断序的集合称为顶部截断集。任意一对元素都可比较的偏序称为完全偏序。没有任何一对元素彼此不可区分的偏序集称为全序集。

并半格是一种偏序集，其中集合中任意两个元素的最小上界都存在[6]。若存在唯一元素 $y \in C$，使得 x 覆盖y[7]，则元素 $x \in C$ 是并不可约的。反之，若存在唯一元素 $y \in C$，使得 x 被 y 覆盖，则元素 $x \in C$ 是交不可约的。若一个元素覆盖集合的最小元素，则它是原子；若它被集合的最大元素覆盖，则它是余原子。

注2 这里列出顶部截断集的一些基本格论性质，但不予证明。如果顶部截断集具有并不可约元，则该元也是原子。具有并不可约元的顶部截断

[5]当然，除了它本身，这是由二元关系的自反性决定的。[6]也就是说，对于所有 x、$y \in C$，都存在 z，使得 $z = \sup\{x, y\} = x \vee y$。[7]也就是说，$x \succ y$，并且不存在元素 $z \in C$ 使得 $x \succ z \succ y$。

集是全序集。每个顶部截断集都包含$n-1$个交不可约元，并且有 $1 \leq m \leq n-1$ 个余原子。 □

如果对所有 $x, y \in C, x \sim$ 都有 $x \vee y \Rightarrow x \vee z \sim x \vee y \vee z$，则二元关系 $\succsim$ 是模的（或强拟次模的）。$\succsim$ 的一个表示是函数 u：$C \to \mathbb{R}$，满足对所有 $x, y \in C\ x \succsim y \Rightarrow u$，$x \geq u\, y$，且 $x \succ y \Rightarrow u\, x > u\, y$。对于并半格，如果对所有满足存在最大下界的 $x, y \in C$，都有[8], $u\, x \wedge y + u\, x \vee y \leq u\, x + u\, y$，则表示 u：$C \to \mathbb{R}$ 是次模的。由于某些排序选择投票方法会在单场选举中选出多名候选人——此处的“当选”既可以指成为选举的最终胜者之一，也可以指成为晋级一对一决选的候选人之一——因此，与偏好关系表示有关的结果对于这一情境尤为重要。

Kalandrakis（2010年）关注一个类似的概念：可理性化性。 u：如果对于每一对满足 $x \succsim y$ 的 x、$y \in C$， $C \to \mathbb{R}\ x > uyu$，则称 $C \to \mathbb{R}$ 为严格可理性化的；如果对于每一对满足 $x \succsim y$的 x、$y \in C$， $u\ x \geq uy$，则称其为可理性化的。显然，如果一张选票上有多个未排序的候选人，就会导致 u 不是严格可理性化的。 u：如果 $C \to \mathbb{R}$ 对于所有 x、$y \in C$ 对均可理性化，且对于每一对满足并非 $x \succsim y$ 且 $y \succsim x$ 的 x、$y \in C$ 均严格可理性化，则称 $C \to \mathbb{R}$ 为几乎严格可理性化的。正如从前面给出的定义中显而易见的那样，这使得某些结果可以应用于排序选择投票的情境。最后， u：如果对于所有满足 $x \neq y$的 x、y 以及所有 $\lambda \in (0, 1)$， $u\lambda x + 1 - \lambda y > \lambda ux + 1 - \lambda uy$，则称其为严格凹的；如果对于所有满足 $x \neq y$的 x、y 以及所有 $\lambda \in (0, 1)$， $u_i \lambda x + 1 - \lambda y > \min\{u_i x\ u_i y\}$，则称其为严格拟凹的。

虽然策略性投票是有关排序选择投票的研究中常见的特征，但提供一个能够反映这一点的效用函数超出了本文的范围。使用策略性投票的效用函数对本文结果进行情境化，是未来研究的一个方向。策略性投票还可能使那些依赖偏好关系具有单调性的分析变得复杂，例如 Chambers and Echenique（2008）以及 Chambers 等（2020）的分析。对于真诚地投票的选民而言，排序选择选票的结构反映了一种反单调偏好关系——能够为选民提供最大效用的候选人（例如， x）排名为第 1，依次下降，直到能够为选民提供最小效用的候选人（或候选人们）（例如，在不失一般性的情况下， y）排名为 k；因此 $y > \ldots > x \Rightarrow u(y) < \ldots < u(x)$。Chateauneuf 等（2017）给出了一个下文将对偶化的结果，该结果与 Chambers and Echenique（2008）中的一个结果相似，但针对的是反单调偏好关系。

[8]也就是说，对于所有 x、$y \in C$，都存在 z，使得 $z = \inf\{x, y\} = x \wedge y$。

3 结果

在定义了上述排序选择选票之后，我们首先通过将其与一种众所周知的数学结构正式联系起来，开始给出相关结果。

定理3 如果一张选票是排序选择选票，那么它就是一个并半格。

证明：设 $(C, \succsim)$ 是一张排序选择选票。由于它是一个顶部截断集，因此必然是一个偏序集。因此，只需证明每一对候选人都存在并。设 $x, y \in C$。如果 x 和 y 可以区分，那么不失一般性，设 $x \succ y$；$x = x \vee y$ 随即成立。如果 x 和 y 无法区分，即 $x \sim y$，则选举中至少还存在另一位候选人，设为z，因为至少必须有一位候选人被排序。如果 z 是唯一的其他候选人，那么 $z \succ x \sim y$，这又意味着 $z \succ x$ 和 $z \succ y$。因此，同理可得 $z = x \vee y$。如果有多位候选人被排序，为使前述关系成立，选取其中排序最后的候选人 z；于是再次得到 $z = x \vee y$。因此，每一对候选人都存在并。由此，$(C, \succsim)$ 是一个并半格。 □

关于半格上的偏好已有大量实质性研究，而这一结果首次凸显了其与排序选择投票之间的联系。这一点，加上排序选择选票固有的其他几个特征，揭示了与这些选票相关的效用函数的一些重要性质。这些性质支持将排序选择投票用作提高选举整体效用的一种方式。下一个结果是满足关于效用函数的第一个结果所需的第二个特征。

命题4 若 $\succsim$ 是顶部截断序，则它是模的。

证明：设 $\succsim$ 是 C 上的顶部截断序，并设 x、$y \in C$ 满足 $x \sim (x \vee y)$。那么，由于 $x \vee y$必须是一个已排序的候选人，且 $x \sim (x \vee y)$，因此 x 必为 $x \vee y$，因为已排序的候选人只能与自身不可区分。于是，由于 $x = (x \vee y)$，$x \vee z \sim (x \vee y) \vee z$，满足模性的定义。因此，顶部截断序是模的。 □

已证明排序选择制选票构成（有限）并半格，其中顶部截断序是模的（或强拟次模的）。此外，该模型中的顶部截断序是完全的，因此属于完全预序的一种。最后，由于本文中的偏好是反单调的，因此它们（弱）递减。因此，排序选择制选票具备满足以下命题所需的所有条件。

命题5（Chateauneuf 等（2017）推论2的对偶命题。）对于有限并半格（$C, \succsim$）上的完全预序 $\succsim$，以下条件等价：

1. $\succsim$是弱递减且强拟次模的。

2. $\gtrsim$具有弱递减的次模表示。 □

由此，我们可以得出以下推论。

推论6 排序选择选票具有次模表示。 □

接下来，我们将说明，关于排序选择选票的偏好满足 Kalandrakis（2010）提出的一项结果，从而进一步刻画与这些选票相关的效用函数。首先定义以下概念：令 $P \subseteq C \times C$ 为候选人对的集合，其中 $(x, y) \in P$ 表示 x （弱）优于 y。偏好允许弱关系是必要的，因为无法区分的候选人 x, y 在 P 中分别属于不同的候选人对，即 $(x, y) \in P$ 和 $(y, x) \in P$。令 $Y(P)$ 表示至少（弱）优于另一位候选人的候选人集合，令 $N(P)$ 表示至少有一位候选人（弱）不劣于他们的候选人集合。最后，令 $\mathcal{E}(C)$ 表示极点集合，即无法写成 C 中候选人的严格凸组合的候选人； $\mathcal{E}(C(P))$ 表示这些候选人至少属于 P 中的一对。要应用 Kalandrakis（2010）结果的其余部分，需要以下定理。关于排序选择选票的极点集合，一个必要事实是：集合中排序最高和排序最低的候选人是极点；如果一个集合中有多个未排序（即排序最低）的候选人，那么这些候选人都属于极点集合，除非该集合只包含未排序候选人，因为在这种情况下，该集合没有极点。

定理7 对所有非空的 $P' \subseteq P$，以下情况之一成立

1. 存在 $x \in \mathcal{E}(C(P'))$，使得 $x \notin Y(P')$；2. 存在非空的 $P'' \subseteq P'$，使得 $N(P'') = Y(P'') \subseteq \mathcal{E}(C(P'))$，且 $Y(P'') \cap Y(P' \setminus P'') = \varnothing$。

证明：证明分为三部分，分别对应 P' 中候选人的三种可能组合——全部已排序、至少有一位已排序且至少有一位未排序，以及没有已排序的候选人。首先，设 $P' \subseteq P$，使得 P' 中的所有候选人都已排序。于是， $\mathcal{E}(C(P')) = \{x, y\}$，其中 x 是排序最高的候选人， y 是排序最低的候选人； $Y(P') = P' \setminus \{y\}$；并且 $N(P') = P' \setminus \{x\}$。显然，由于 $y \in \mathcal{E}(C(P'))$，但 $y \notin Y(P')$，这些条件成立。接下来，设 $P' \subseteq P$ 至少包含一位已排序的候选人 x，以及至少一位未排序的候选人 y。不失一般性， $\mathcal{E}(C(P')) = \{x, y\}$； $Y(P') = P' \setminus \{y\}$；并且 $N(P') = P' \setminus \{x\}$。同样，由于 $y \in \mathcal{E}(C(P'))$，但 $y \notin Y(P')$，这些条件成立。最后，设 $P' \subseteq P$，使得 P' 只包含未排序的候选人。于是， $\mathcal{E}(C(P')) = \varnothing$。类似地， $Y(P') = N(P') = P'$。因此，对于 P' 的任意子集，例如 $P'' \subseteq P'$，也有 $Y(P'') = N(P'')$。然而，由于所有非空的 P'' 都是

使得 $N(P'') = Y(P'')$ 且 $N(P'') = Y(P'') \not\subseteq \mathcal{E}(C(P')) = \varnothing$，这满足第二个条件的逆否命题。 □

Kalandrakis（2010年）的以下结果证明，排序选择制选票会使选民具有凹效用函数。由于有关候选人策略性投票的研究（例如 Tajika（2021年））假设选民具有凸效用函数，因此在排序选择选举中，候选人和选民都有动机采取不同于传统先到者当选制选举的行动。

定理8（Kalandrakis（2010年）的定理2。）设 C 为候选人集合， $P \subseteq C \times C$ 为某位选民的投票记录。则以下条件等价：

1. 对所有非空的 $P' \subseteq P$，要么存在 $x \in \mathcal{E}(C(P'))$ 使得 $x \notin Y(P')$，要么存在一个非空的 $P'' \subseteq P'$，使得 $N(P'') = Y(P'') \subseteq \mathcal{E}(C(P'))$ 且 $Y(P'') \cap Y(P' \setminus P'') = \varnothing$。

2. 存在一个严格凹效用函数，几乎严格地理性化了 P。3. 存在一个严格准凹效用函数，几乎严格地理性化了 P。4. 存在一个严格凹效用函数，理性化了 P。5. 存在一个严格准凹效用函数，理性化了 P。 □

4 结论

本文首次对排序选择投票的偏好进行了形式化，并探讨具有这些偏好的选票呈现何种结构。顶部截断偏好会导出特定类型的表示和效用函数；如今这些特征已得到确认，我们便可以对排序选择投票的价值作出更实质性的评估。

此外，本文的研究结果还为多个未来研究方向奠定了基础。Ayadi 等人（2022）指出，有必要对顶部截断偏好开展规范性研究；这一点尤为重要，因为研究表明，这类偏好具有凹性（以及准凹性），而人们并不总是假定这类偏好能够反映选民的实际偏好。若效用函数考虑策略性投票，这些偏好类型是否会受到影响，是一个值得探究的问题。Coughlin（1983）研究了策略性投票中的效用函数，但关注的是候选人的效用函数，而非选民的效用函数。排序选择投票既让选民有机会表达其完整的偏好集合，也让他们有机会进行策略性投票。本文探讨了与前者相关的理论性质；下一步是考察它与后者是否存在交集，以及交集在何处。

参考资料

Ayadi, M., Amor, N. B., & Lang, J.（2022）。从截断选票近似投票规则。《自主代理与多代理系统》，36，24。纽约市选举委员会。（2021）。排序选择投票。检索于2022年5月25日，网址：https://vote.nyc/page/ranked-choice-voting Caspard, N., Monjardet, B., & Leclerc, B.（2012）。有限有序集：概念、结果与用途。剑桥大学出版社。Chambers, C. P., & Echenique, F.（2008）。次模性的序数概念。《数学经济学杂志》，44，1243–1245。Chambers, C. P., & Echenique, F.（2009）。超模性与偏好。《经济理论杂志》，144，1004–1014。Chambers, C. P., Miller, A. D., & Yenmez, M. B.（2020）。闭包与偏好。《数学经济学杂志》，88，161–166。Chateauneuf, A., Vergopoulos, V., & Zhang, J.（2017）。无限超模性与偏好。《经济理论》，63，99–109。Coughlin, P. J.（1983）。概率投票模型中策略性决策的社会效用函数。《数学社会科学》，4，275–293。Fitzsimmons, Z., & Lackner, M.（2020）。单峰选民群体中的不完全偏好。《人工智能研究杂志》，67，797–833。Gr¨atzer, G.（2011）。格论：基础。Birkh¨auser。Kalandrakis, T.（2010）。可理性化投票。《理论经济学》，5，93–125。Kilgour, D. M., Gr´egoire, J.-C., & Foley, A. M.（2020）。排序选择制选举中选票截断的普遍程度及其后果。《公共选择》，184，197–218。Kreps, D. M.（1979）。《灵活性偏好》的表示定理。《计量经济学》，47，565–577。Menon, V., & Larson, K.（2017）。顶部截断选票选举中策略行为的计算方面。《自主代理与多代理系统》，31，1506–1547。Nielson, L.（2017）。排序选择投票与美国的民主态度：一项调查实验的结果。《政治与政策》，45，535–570。Osborne, M. J.（2022）。政治经济学模型 [https://www.economics.utoronto.ca/osborne/mpe/mpe

2022年5月31日）]。Tajika, T.（2021年）。策略性投票下的极化与低效信息聚合。《社会选择与福利》，56，67–100。Terzopoulou, Z. 和 Endriss, U.（2021年）。波达类：对截断偏好下波达规则的公理化研究。《数学经济学杂志》，92，31–40。

Tomlinson, K., Ugander, J., & Kleinberg, J. (2022). 即时决选投票中的选票长度。https://arxiv.org/abs/2207.08958