arXiv:2301.02698v1 [stat.AP] 6 Jan 2023

利用上记录值的外熵进行指数性检验

Santosh Kumar Chaudhary* 和 Nitin Gupta**，印度理工学院卡拉格普尔分校数学系，印度西孟加拉邦卡拉格浦尔 721302。

摘要

我们利用第 n 阶上 k记录值的外熵，给出了指数分布的一个刻画结果。基于该刻画结果，我们提出了用于检验指数性的检验统计量。通过蒙特卡洛模拟计算了临界值和检验功效。我们将该检验应用于七个实际数据集，以验证其在实践中的适用性。

关键词：指数分布、外熵、记录值、指数性检验。

数学主题分类：62B10, 62E10, 62G10, 62G30。

1 引言

设 $X_1, X_2, ..., X_N$ 是来自某总体的容量为 N 的随机样本，该总体的概率密度函数（pdf） f 和累积分布函数（cdf） F 未知。我们将 X 视为非负随机变量。若一个概率分布的参数为 λ，且

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0,\ \lambda > 0. \tag{1.1}$$

这里，我们关注检验一个分布是否为指数分布。也就是说， H_0 ： X 服从参数为 λ 的指数分布；对立假设为 H_1 ： X 不服从参数为 λ 的指数分布。

Lad等人（2015）将 X 的外熵定义为

$$J(X) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(x)dx. \tag{1.2}$$

* 通讯作者电子邮箱：skchaudhary1994@kgpian.iitkgp.ac.in ** 电子邮箱：nitin.gupta@maths.iitkgp.ac.in

Jahanshahi 等人（2020）将 X 的累积残余熵（CRE）定义为

$$\xi J(X) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \bar{F}_X^2(x)dx. \tag{1.3}$$

X 的累积过去熵（CPE）定义为

$$\bar{\xi} J(X) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty F_X^2(x)dx. \tag{1.4}$$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_N, \ldots$ 是一列来自绝对连续累积分布函数 F 和概率密度函数 f 的独立同分布（iid）随机变量。设 $X_{r:N}$ 为 r次次序统计量，对于 $0 \le r \le N$，它是序列 $X_1, X_2, \ldots, X_N$. 中第 r小的值。上记录时刻序列 U(k) 定义为$U(1) = 1$, $U(k+1) = min\{j\colon\ j > U(k);\ \ X_j > U_k^X\},\ k = 1, 2, 3, \ldots,$ 第 k 个上记录值 U_k 定义为 $U_k = X_{U(k)}$. 。第 k个上记录值 U_k 的概率密度函数为:

$$f_{U_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)}(-\log \bar{F}(x))^{k-1} f(x), \tag{1.5}$$

¯其中 $F(x) = 1 - F(x)$ 是 X 的生存函数，而 $\Gamma(k) = (k-1)!$ 是完全伽马函数。下记录值也可作类似定义（见 Arnold 等人 (1998)）[1]。第 k 个下记录值L_k 的概率密度函数为

$$f_{L_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)}(-\log F(x))^{k-1} f(x). \tag{1.6}$$

第 n 个上 k 阶记录值 $U_{n,\ k}$ 和第 n 个下 k 阶记录值 $L_{n,\ k}$ 的概率密度函数分别为（参见 Arnold 等人（1998 [1], 2008 [2]））

$$f_{U_{n,k}}(x) = \frac{k^n}{\Gamma(n)}(-\log \bar{F}(x))^{n-1}(\bar{F}(x))^{k-1} f_X(x), \tag{1.7}$$

$$\text{and} \quad f_{L_{n,k}}(x) = \frac{k^n}{\Gamma(n)}(-\log F_X(x))^{n-1}(F_X(x))^{k-1} f_X(x). \tag{1.8}$$

$U_{n,\ k}$ 和 $L_{n,\ k}$的累积分布函数分别为

$$F_{U_{n,k}}(x) = 1 - \bar{F}_X^k(x)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-k\log \bar{F}_X(x))^i}{i!}, \tag{1.9}$$

$$\text{and} \quad F_{L_{n,k}}(x) = F_X^k(x)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-k\log F_X(x))^i}{i!}. \tag{1.10}$$

Xiong 等（2020）[12] 基于利用上 k记录值外熵刻画指数分布的方法，提出了检验统计量。Jose 和 Sathar（2022）[5] 基于利用第 n阶下 k记录值外熵刻画指数分布的方法，提出了检验统计量。本文给出了指数分布的其他一些刻画，并基于这些刻画引入检验统计量。本文第 2 节讨论了指数分布的一些例子和定理。第 3 节给出了用于指数性检验的检验统计量。

2 指数分布的刻画

在讨论本节的主要结果之前，我们先来看一些例子。

例 1 当 X 是参数为 $\lambda > 0$、累积分布函数为 $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ 的指数随机变量时， X 的外熵为,

$$J(X) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \lambda^2 e^{-2\lambda x}dx = -\frac{\lambda}{4}.$$

例 2（Xiong 等（2020）*[12]*）当 X 是参数为 $\lambda > 0$、累积分布函数为 $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ 的指数随机变量时， U_k^X 的外熵为

$$J(U_k^X) = \frac{-\lambda\Gamma(2k-1)}{2^{2k}\Gamma^2(k)} = \frac{\Gamma(2k-1)}{2^{2k-2}\Gamma^2(k)}J(X)$$

Xiong 等（2020）[12] 的定理 2.1 指出，非负随机变量 X 服从率参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布，当且仅当

$$J(U_k^X) = \frac{\Gamma(2k-1)}{2^{2k-2}\Gamma^2(k)}J(X),\ k = 1, 2, \ldots.$$

此外，Xiong 等（2020）[12] 基于上述特征提出了一种指数分布的拟合优度检验，并分析了所提出检验统计量的性能。

例 3（Jose 和 Sathar（2022）*[5]*）当 X 是参数为 $\lambda > 0$、累积分布函数为 $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ 的指数随机变量时， $x > 0$，则

$J(L_{n,\ k})$ 的外熵为

$$\begin{aligned} J(L_{n,k}) =& \frac{-\lambda k\Gamma(2n-1)}{2^{2n}\Gamma^2(n)}\left(\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{2n-1}-1\right) \\ =& \frac{kJ(X)\Gamma(2n-1)}{2^{2n-2}\Gamma^2(n)}\left(\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{2n-1}-1\right). \end{aligned}$$

Jose 和 Sathar（2022）的定理 2.1[5] 证明，非负随机变量 X 服从率参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布，当且仅当

$$J(L_{n,k}) = \frac{kJ(X)\Gamma(2n-1)}{2^{2n-2}\Gamma^2(n)}\left(\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{2n-1}-1\right).$$

此外，Jose 和 Sathar（2022）[5] 提出了一种基于上述特征的指数性检验，并分析了所提出的检验统计量的性能。

以下例子是例 3 的一个特例。

例 4（Jose 和 Sathar（2022）*[5]*）当 X 是参数为 $\lambda > 0$、累积分布函数为 $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$，$x > 0$的指数随机变量时，$J(L_k^X)$ 的外熵为

$$\begin{aligned} J(L_k^X) =& \frac{-\lambda\Gamma(2k-1)(2^{2k-1}-1)}{2^{2k}\Gamma^2(k)} \\ =& \frac{\Gamma(2k-1)(2^{2k-1}-1)}{2^{2k-2}\Gamma^2(k)}J(X) \end{aligned}$$

例 5 当 X 是参数为 $\lambda > 0$、累积分布函数为 $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ 的指数随机变量时，$x > 0$. $U_{n,k}$ 的外熵为

$$\begin{aligned} J(U_{n,k}) =& \frac{-1}{2}\int_0^\infty f^2_{U_{n,k}}(x)dx \\ =& \frac{-1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{k^n}{\Gamma(n)}(-\log\bar{F}(x))^{n-1}(\bar{F}(x))^{k-1}f_X(x)\right)^2 dx \\ =& \frac{-1}{2}\frac{k^{2n}}{\Gamma^2(n)}\int_0^\infty \left((-\log\bar{F}(x))^{2n-2}(\bar{F}(x))^{2k-2}f_X^2(x)\right)dx. \end{aligned}$$

由于 X 服从指数分布，因此令 $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$、 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ 以及 $J(X) = \frac{-\lambda}{4}$，可得

$$\begin{aligned} J(U_{n,k}) =& \frac{-1}{2}\frac{k^{2n}}{\Gamma^2(n)}\int_0^\infty (\lambda x)^{2n-2}(e^{-\lambda x})^{2k-2}\lambda^2 e^{-2\lambda x}dx \\ =& \frac{-\lambda k\Gamma(2n-1)}{2^{2n}\Gamma^2(n)} \\ =& \frac{k\Gamma(2n-1)}{2^{2n-2}\Gamma^2(n)}J(X). \end{aligned}$$

例 6 当 X 是参数为 $\lambda > 0$、累积分布函数为 $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$的指数随机变量时， $x > 0$. n的第 k 个上 $U_{n,\ k}$记录值的累积剩余熵为

$$\begin{aligned} \xi J(U_{n,k}) =& \frac{-1}{2}\int_0^\infty \bar{F}^2_{U_{n,k}}(x)dx \\ =& \frac{-1}{2}\int_0^\infty \left(\bar{F}^k(x)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left(-k\log\bar{F}(x)\right)^i}{i!}\right)^2 dx \end{aligned}$$

由于 X 服从指数分布。因此，令 $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ 和$J(X) = \frac{-\lambda}{4}$，可得

$$\begin{aligned} \xi J(U_{n,k}) =& \frac{-1}{2}\int_0^\infty \left((e^{-\lambda x})^k\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left(-k\log e^{-\lambda x}\right)^i}{i!}\right)^2 dx \\ =& \frac{-1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(k\lambda)^{i+j}}{i!j!}\int_0^\infty e^{-2k\lambda x}x^{i+j}dx \\ =& \frac{-1}{4\lambda k}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(i+j)!}{i!j!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} \\ =& \frac{1}{16kJ(X)}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(i+j)!}{i!j!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}. \end{aligned}$$

我们陈述 Goffman 和 Pedrick (2017) 的以下引理 [6]，它有助于我们建立指数分布的刻画结果。

引理 1（Goffman 和 Pedrick（2017） *[6]*）空间 $L_2(0,+\infty)$ 的一组完备正交归一系由以下拉盖尔函数序列给出

$\phi_n(x) = e^{\frac{-x}{2}} \frac{L_n(x)}{n!} \quad n \geq 0$，其中 $L_n(x)$ 是拉盖尔多项式，定义为 $x^n e^{-x}$ 的 n 阶导数中 e^{-x} 的系数之和，即 $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i} n(n-1)\ldots(i+1)x^i$.。拉盖尔函数在 $L_2(0,+\infty)$ 上完备的含义是：若 $f \in L_2(0,+\infty)$ 且对所有 $n \geq 0$ 都有 $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)dx = 0$，则 f 几乎处处为零。

注 1 引理 1 也用于证明 Qiu（2017）中的定理 3.7 *[9]*,Xiong 等（2020）中的定理 2.1 *[12]* 以及 Jose 和 Sathar（2022）中的定理 2.1 *[5]*。

定理1 随机变量 X 为率参数 $\lambda > 0$ 的指数分布，当且仅当

$$J(U_{n,k}) = \frac{k\Gamma(2n-1)}{2^{2n-2}\Gamma^2(n)} J(X), \ k = 1, 2, \ldots.$$

证明：必要性的证明由例 5 得出。充分性的证明与 Jose 和 Sathar（2022）中定理 2.1 的证明类似[5] ，现给出证明。设 X 是一个非负随机变量，满足

$$J(U_{n,k}) = \frac{k\Gamma(2n-1)}{2^{2n-2}\Gamma^2(n)} J(X).$$

根据式（1.2）中给出的外熵定义以及式（1.7）中给出的 $U_{n,\ k}$ 的概率密度函数，我们有，

$$\int_0^{\infty} \left(\log(\bar{F}(x))\right)^{2n-2} (\bar{F}(x))^{2k-2} f^2(x)dx = -\frac{2J(X)\Gamma(2n-1)}{2^{2n-2}k^{2n-1}}.$$

现在，将 $\log(F(x)) = -u$ 代入后，我们得到

$$\int_0^{\infty} u^{2n-2}(e^{-u})^{2k-1} f(\bar{F}^{-1}(e^{-u}))du = -\frac{4J(X)\Gamma(2n-1)}{(2k)^{2n-1}}. \tag{2.1}$$

利用结果 $\Gamma_{(k^\alpha}^{\ \alpha} = \int_0^{\infty} e^{-ku}u^{\alpha-1}du_{)}$，式（2.1）可化简为

$$\int_0^{\infty} e^{-2ku}u^{2n-2}\{e^u f(\bar{F}^{-1}(e^{-u})) + 4J(X)\}du = 0. \tag{2.2}$$

我们可以将上述方程写为

$$\int_0^{\infty} u^{n-1}e^{-u(2k+\frac{1}{2})}\{e^{2u} f(\bar{F}^{-1}(e^{-u})) + 4e^u J(X)\}e^{-\frac{u}{2}}L_n(u) = 0, \tag{2.3}$$

其中， $L_n(u)$ 是引理 1 中定义的拉盖尔多项式。因此，$u^{n-1}e^{-u(2k+\frac{1}{2})}\{e^{2u}f(\bar{F}^{-1}(e^{-u})) + 4e^{u}J(X)\} \in L_2(0,+\infty)$。利用引理 1 中的完备性性质，我们得到：

$$\begin{aligned} e^{2u}f(\bar{F}^{-1}(e^{-u})) + 4e^{u}J(X) = 0 \\ \text{that is, } e^{u}f(\bar{F}^{-1}(e^{-u})) + 4J(X) = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

若取 $v = e^{-u}$，则表达式 2.4 化简为

$$f(\bar{F}^{-1}(v)) + 4vJ(X) = 0. \tag{2.5}$$

进一步，代入 $t = \bar{F}^{-1}(v)$，并利用 $\bar{F}(0) = 1$，得到

$$\bar{F}(t) = e^{4J(X)t},\ t > 0.$$

因此，随机变量 X 服从速率参数为 $-4J(X)$ 的指数分布。

3 检验统计量

我们利用下述定理 1 引入一个用于检验指数性的检验统计量 $\Delta_{n,\ k}$

$$\Delta_{n,k} = J(U_{n,k}) - \frac{k\Gamma(2n-1)}{2^{2n-2}\Gamma^2(n)}J(X) \tag{3.1}$$

根据定理1， $\Delta_{n,\ k} = 0$ 对所有 $k = 1$，2，3，.....均成立，当且仅当 X 服从指数分布。因此，$\Delta_{n,\ k}$ 适合用于检验 X 的指数性。为便于计算，我们选择 n=2 和 k=2进行进一步讨论。也可以选择其他的 n 和 k 值，但步骤相同。下面给出检验统计量：

$$\Delta_{2,2} = J(U_{2,2}) - J(X) \tag{3.2}$$

$\Delta_{2,\ 2}$ 的一个估计量为

$$\hat{\Delta}_{2,2} = \hat{J}(U_{2,2}) - \hat{J}(X) \tag{3.3}$$

注 2 Xiong等人（2020）提出的检验统计量 E_k *[12]* 是我们提出的检验统计量 $\Delta_{n,k}$. 的一个特例

注 3 Xiong等人（2020）提出的检验统计量 *[12]* 是

$$E_k = J(U_k^X) - \frac{\Gamma(2k-1)}{2^{2k-2}\Gamma^2(k)} J(X).$$

为简化计算，他们选择 k=*2*，我们得到 $E_2 = J(U_2^X) - \frac{1}{2}J(X)$，但 Xiong等人（2020）考虑用于检验的估计量为 *[12]* $\hat{E}_2 = \hat{J}(U_2^X) - J(X)$ ($\hat{}$.)。检验统计量和估计量应分别为 $E_2 = J(U_2^X) - \frac{1}{2}J(X)$ 和 $\hat{E}_2 = J(\hat{U}_2^X - \frac{1}{2}\hat{J}(X))$ 。

X 的外熵可表示为

$$J(X) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{d}{du}F^{-1}(u)\right)^{-1} du$$

$\hat{}$Qui 和 Jia（2018） [7] 将 $J(X)$ 的样本估计量引入为 $\hat{J}(X)$:

$$\hat{J}(X) = \frac{-1}{2N}\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i m/N}{X_{i+m:N} - X_{i-m:N}}$$

其中， $X_{1:N}$、 $X_{2:N}$、 $X_{3:N}$、 . . .、 $X_{N:N}$是基于 X_1、 X_2、 X_3、 . . .、 X_N 的次序统计量，并且

$$c_i = \begin{cases} 1 + \frac{i-1}{m} & \text{if } 1 \le i \le m, \\ 2 & \text{if } m+1 \le i \le N-m, \\ 1 + \frac{N-i}{m} & \text{if } N-m+1 \le i \le N. \end{cases}$$

窗口大小 m 是小于 $\frac{N}{2}$ 的正整数，若 $i - m < 1$，则 $X_{i-m:N} = X_{1:N}$；若 $i + m > N$，则 $X_{i+m:N} = X_{N:N}$.

$U_{n,\ k}$ 的外熵可表示为

$$\begin{aligned} J(U_{n,k}) &= \frac{-1}{2}\int_0^\infty f^2_{U_{n,k}}(x)dx \\ &= \frac{-k^{2n}}{2\Gamma^2(n)}\int_0^\infty \left((\log \bar{F}(x))^{2n-2}(\bar{F}(x))^{2k-2} f_X^2(x)\right) dx \end{aligned}$$

代入 $u = F(x)$ 后，我们得到

$$J(U_{n,k}) = \frac{-k^{2n}}{2\Gamma^2(n)}\int_0^1 \left((\log(1-u))^{2n-2}((1-u))^{2k-2}\left(\frac{d}{du}F^{-1}(u)\right)^{-1}\right) du$$

$$J(U_{2,2}) = -8\int_0^1 \left((\log(1-u))^{2}((1-u))^{2}\left(\frac{d}{du}F^{-1}(u)\right)^{-1}\right) du$$

Vasicek（1976）， [10] 提出了一种求取估计量的概念。依照这一思路，通过用经验分布函数 F_N 替代分布函数 F，并用差分算子替代微分算子，可以得到 $J(U_2,\ _2)$ 的估计量。$F^{-1}(u)$ 关于 u 的导数，即 $\frac{dF^{-1}(u)}{du}$，将估计为

$$\frac{X_{i+m:N}-X_{i-m:N}}{\hat{F}_N(X_{i+m:N})-\hat{F}_N(X_{i-m:N}} = \frac{X_{i+m:N}-X_{i-m:N}}{\frac{i+m}{N}-\frac{i-m}{N}} = \frac{X_{i+m:N}-X_{i-m:N}}{2m/N}.$$

与 Vasicek（1976） [10], Park（1999） [3], Xiong等人（2020） [12],Jose 和 Sathar（2022） [5], 类似，我们将 $J(U_{n,k})$ 和 $J(U_{2,2})$ 的估计量分别记为:

$$\hat{J}(U_{n,k}) = \frac{-k^{2n}}{2N\Gamma^2(n)}\sum_{i=1}^{N}\left((\log(1-\frac{i}{N+1}))^{2n-2}((1-\frac{i}{N+1}))^{2k-2}\left(\frac{2m/N}{X_{i+m:N}-X_{i-m:N}}\right)\right)$$

$$\hat{J}(U_{2,2}) = \frac{-8}{N}\sum_{i=1}^{N}\left((\log(1-\frac{i}{N+1}))^{2}(1-\frac{i}{N+1})^{2}\left(\frac{2m/N}{X_{i+m:N}-X_{i-m:N}}\right)\right)$$

$\Delta_{2,2}$ 的一个合理估计量可表示为

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_{2,2} &= \hat{J}(U_{2,2}) - \hat{J}(X)\\ &= \frac{-8}{N}\sum_{i=1}^{N}\left((\log(1-\frac{i}{N+1}))^{2}(1-\frac{i}{N+1})^{2}\left(\frac{2m/N}{X_{i+m:N}-X_{i-m:N}}\right)\right)\\ &\qquad + \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i m/N}{X_{i+m:N}-X_{i-m:N}}\\ &= -\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left\{32\left(\log(1-\frac{i}{N+1})\right)^{2}\left(1-\frac{i}{N+1}\right)^{2}-c_i\right\}\frac{m/N}{X_{i+m:N}-X_{i-m:N}}\end{aligned}$$

下面的定理表明，$\hat{\Delta}_{2,2}$ 是 $\Delta_{2,2}$ 的相合估计量，证明可沿用 Vasicek（1976）定理1的证明思路。 [10]

定理2 假设 $X_1,\ X_2, ..., X_N$ 是从总体中抽取的容量为 N 的随机样本，其概率密度函数为 f，累积分布函数为 F。此外，设该随机变量的方差有限。那么，$\hat{\Delta}_{2,2}$ 依概率收敛于 $\Delta_{2,2}$，也就是说，$\hat{\Delta}_{2,2}$ 是 $\Delta_{2,2}$的相合估计量，当 $N \longrightarrow \infty$, $m \longrightarrow \infty$ 和 $\frac{m}{N} \longrightarrow 0.$ 时

注意，由于采用了 Vasicek（1976） [10]给出的方法，Park（1999）提出的检验统计量 [3], Xiong 等（2020） [12], Xiong 等（2021） [11], Jose 和 Sathar（2022a [8]）以及 Jose 和 Sathar（2022b [5] ）提出的检验统计量均具有一致性。

定理3 设 $X_1, X_2, ..., X_N$ 为一列独立同分布随机变量，并设 $Y_i = aX_i + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., N$.。记基于 X_i 和 Y_i 的 $\Delta_{2,2}$ 的估计量分别为 $\Delta_{2,2}^{X}$ 和 $\Delta_{2,2}^{Y}$。则

(i) $E(\Delta_{2,2}^{Y}) = \frac{1}{a}E(\Delta_{2,2}^{X})$

(ii) $Var(\Delta_{2,2}^{Y}) = \frac{1}{a^2}Var(\Delta_{2,2}^{X})$

(iii) $MSE(\Delta_{2,2}^{Y}) = \frac{1}{a^3}MSE(\Delta_{2,2}^{X})$

其中， $E(X)$ $Var(X)$ 和 $MSE(X)$ 分别表示随机变量 X 的期望、方差和均方误差。

证明:

$$\Delta_{2,2}^{Y} = -\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left\{32\left(\log(1-\frac{i}{N+1})\right)^2\left(1-\frac{i}{N+1}\right)^2 - c_i\right\}\frac{m/N}{Y_{i+m:N} - Y_{i-m:N}}$$

$$= -\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left\{32\left(\log(1-\frac{i}{N+1})\right)^2\left(1-\frac{i}{N+1}\right)^2 - c_i\right\}\frac{m/N}{aX_{i+m:N} - aX_{i-m:N}}$$

$$= \frac{1}{a}\Delta_{2,2}^{X}$$

因此，基于 $\Delta_{2,2}^{Y} = a\Delta_{2,2}^{X}$ 以及 X 的均值、方差和均方误差的性质，证明完成。

4 临界值

表1、表2和表3分别给出了显著性水平为 $\alpha = 0.10$、 $\alpha = 0.05$ 和 $\alpha = 0.01$ 时，根据从率参数为 1 的指数分布中生成的不同样本量的 10,000 个样本得到的 $\Delta_{2,2}$ 的精确临界值。样本量为 $N = 5$、10、20、30、40、50、100，窗口大小为 m（范围从 1 到 50）时，均可得到相应的临界值。下一节将介绍模拟研究，并据此评估检验统计量的功效。

表1. $|\Delta_{2,2}|$ 统计量在显著性水平 α= 0.10 下的临界值

$m\backslash N$	5	10	20	30	40	50	100
1	0.7174	0.4347	0.3197	0.2808	0.2359	0.2087	0.1503
2	0.5027	0.1613	0.1355	0.1118	0.0977	0.0879	0.0620
3		0.1411	0.0962	0.0842	0.0761	0.0684	0.0491
4		0.1659	0.0762	0.0721	0.0671	0.0607	0.0447
5			0.0660	0.0632	0.0611	0.0563	0.0423
6			0.0641	0.0553	0.0532	0.0532	0.0395
7			0.0691	0.0509	0.0487	0.0493	0.0393
8			0.0777	0.0465	0.0457	0.0458	0.0379
9			0.0925	0.0453	0.0424	0.0426	0.0368
10				0.0461	0.0384	0.0397	0.0357
14				0.0697	0.0380	0.0309	0.0323
15					0.0396	0.0303	0.0315
19					0.0570	0.0341	0.0279
20						0.0364	0.0263
24						0.0510	0.0228
30							0.0188
35							0.0188
40							0.0219
45							0.0283
49							0.0345

表2。$|\hat{\Delta}_{2,\ 2}|$ 统计量在显著性水平为 $\alpha = 0.05$ 时的临界值

$m\backslash N$	5	10	20	30	40	50	100
1	1.3223	0.8269	0.5832	0.4767	0.3779	0.3409	0.2232
2	0.6977	0.2249	0.1897	0.1552	0.1293	0.1132	0.0791
3		0.1772	0.1257	0.1095	0.0974	0.0873	0.0600
4		0.2050	0.0962	0.0915	0.0846	0.0768	0.0561
5			0.0820	0.0781	0.0767	0.0705	0.0526
6			0.0770	0.0690	0.0668	0.0666	0.0487
7			0.0829	0.0617	0.0604	0.0611	0.0478
8			0.0916	0.0557	0.0561	0.0565	0.0463
9			0.1075	0.0546	0.0507	0.0519	0.0449
10				0.0550	0.0470	0.0487	0.0436
14				0.0809	0.0449	0.0371	0.0389
15					0.0461	0.0360	0.0380
19					0.0655	0.0404	0.0332
20						0.0427	0.0319
24						0.0581	0.0272
30							0.0225
35							0.0221
40							0.0258
45							0.0331
49							0.0395

表3。$|\hat{\Delta}_{2,\ 2}|$ 统计量在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下的临界值

$m\backslash N$	5	10	20	30	40	50	100
1	6.0144	4.1581	2.2252	1.8855	1.3925	1.1696	0.6743
2	1.3442	0.4419	0.3768	0.3016	0.2610	0.2190	0.1315
3		0.2843	0.2203	0.1915	0.1666	0.1402	0.0882
4		0.3054	0.1515	0.1426	0.1304	0.1223	0.0839
5			0.1204	0.1229	0.1191	0.1053	0.0771
6			0.1094	0.0994	0.1022	0.0966	0.0693
7			0.1176	0.0888	0.0897	0.0873	0.0705
8			0.1317	0.0792	0.0814	0.0823	0.0650
9			0.1441	0.0727	0.0731	0.0761	0.0638
10				0.0751	0.0665	0.0685	0.0626
14				0.1049	0.0590	0.0498	0.0530
15					0.0617	0.0493	0.0527
19					0.0839	0.0522	0.0458
20						0.0572	0.0437
24						0.0731	0.0375
30							0.0299
35							0.0293
40							0.0339
45							0.0424
49							0.0486

5 检验功效

表4。$\hat{\Delta}_{2,\ 2}$统计量在备择假设 $U(0,1)$ 下的功效，显著性水平为$\alpha = 0.10$

$m\backslash N$	5	10	20	30	40	50	100
1	0.9587	0.1988	0.1819	0.2077	0.2476	0.2597	0.4680
2	1.000	0.8896	0.5679	0.5521	0.5909	0.6401	0.8254
3		0.9932	0.8149	0.7164	0.7293	0.7485	0.8937
4		1.000	0.9269	0.8365	0.8095	0.8080	0.9196
5			0.9805	0.9089	0.8661	0.8603	0.9313
6			0.9972	0.9558	0.9199	0.8977	0.9378
7			0.9998	0.9855	0.9515	0.9290	0.9481
8			1.0000	0.9961	0.9768	0.9523	0.9609
9			1.0000	0.9991	0.9882	0.9709	0.9663
10				0.9997	0.9966	0.9866	0.9705
14				1.0000	1.0000	0.9998	0.9907
15					1.0000	0.9999	0.9921
19					1.0000	1.0000	0.9978
20						1.0000	0.9993
24						1.0000	0.9998
25							1.0000
30							1.0000
35							1.0000
40							1.0000
45							1.0000
49							1.0000

表 5。$\hat{\Delta}_{2,\ 2}$ 统计量在显著性水平α= 0.05 下针对备择假设 $U(0, 1)$ 的功效

$m\backslash N$	5	10	20	30	40	50	100
1	0.5524	0.0629	0.0545	0.0609	0.0742	0.0774	0.1579
2	1.000	0.6353	0.3067	0.2882	0.3485	0.4247	0.6890
3		0.9849	0.6309	0.5439	0.5678	0.5960	0.8189
4		0.9999	0.8607	0.7166	0.6899	0.6964	0.8536
5			0.9648	0.8417	0.7848	0.7785	0.8854
6			0.9947	0.9226	0.8662	0.8390	0.9036
7			0.9991	0.9734	0.9145	0.8872	0.9088
8			1.0000	0.9912	0.9603	0.9226	0.9368
9			1.0000	0.9982	0.9799	0.9533	0.9374
10				0.9996	0.9926	0.9791	0.9484
14				1.0000	1.0000	0.9998	0.9796
15					1.0000	1.0000	0.9854
19					1.0000	1.0000	0.9987
20						1.0000	0.9988
24						1.0000	1.0000
25							1.0000
30							1.0000
35							1.0000
40							1.0000
45							1.0000
49							1.0000

表6。在显著性水平α= 0.01 下， U(0, 1) 为备择假设时，$\Delta_{2,\ 2}$统计量的功效

$m\backslash N$	5	10	20	30	40	50	100
1	0.0719	0.0084	0.0076	0.0115	0.0119	0.0086	0.0108
2	0.9981	0.0612	0.0200	0.0156	0.0237	0.0412	0.2373
3		0.8347	0.1888	0.1431	0.1793	0.1556	0.5524
4		0.9986	0.4906	0.2728	0.2867	0.3594	0.6260
5			0.8247	0.6058	0.4169	0.4377	0.7117
6			0.9833	0.7358	0.6173	0.5500	0.7638
7			0.9979	0.9125	0.7548	0.7145	0.7896
8			1.0000	0.9774	0.8642	0.7800	0.8301
9			1.0000	0.9936	0.9299	0.8670	0.8293
10				0.9998	0.9797	0.9309	0.8693
14				1.0000	1.000	0.9988	0.9358
15					1.0000	0.9992	0.9615
19					1.0000	1.0000	0.9919
20						1.0000	0.9952
24						1.0000	0.9998
25							1.0000
30							1.0000
35							1.0000
40							1.0000
45							1.0000
49							1.0000

表8。当 $N = 20$ 为 50、100 时，$\hat{\Delta}_{2,\ 2}$ 的大小以及威布尔分布的显著性水平 $\alpha = 0.05$ 。

N	m	$w(1,1)$	N	m	$w(1,1)$	N	m	$w(1,1)$
	1	0.0291		1	0.0297		1	0.0296
	2	0.0316		2	0.0276		2	0.0342
	3	0.0358		3	0.0345		6	0.0371
	4	0.0504		5	0.0420		10	0.0364
	5	0.1025		8	0.0405		15	0.0450
20	6	0.2724	50	10	0.0452	100	17	0.0501
	7	0.5928		15	0.1197		25	0.0512
	8	0.8650		20	0.6647		30	0.0731
	9	0.9915		24	0.9707		40	0.4486

表9。不同样本量 N 对应的建议窗口大小 m

N	m
≤ 10	3-5
10-20	6-8
21-40	11-14
41-60	15-18
60-100	20-22
≥ 100	25

6 真实数据应用

本节中，我们将检验方法应用于七个真实数据集，以检测其是否适合采用指数性模型。Jose 和 Star（2022b）通过直方图和 Q–Q图展示了数据集1、2、3和4的拟合良好的模型以及拟合这些数据集的指数分布；Xiong等人（2020）则给出了数据集5和数据集6的 Q–Q图。指数分布适合数据集5，Chen分布适合数据集6，均匀分布适合数据集7（参见 Xiong等人（2020））。所有检验均采用5%的名义显著性水平，每次模拟进行10,000次重复。以下给出这七个数据集。

数据集1：74, 57, 48, 29, 502, 12, 70, 21, 29, 386, 59, 27, 153, 26, 326。

数据集1取自 Proschan（1963），记录了波音720飞机空调设备连续发生故障的时间间隔。指数分布已用于对该数据集建模（参见 Shanker 等人（2015）、Jose 和 Sathar（2022b））。当样本量为 $N = 15$、窗口大小为 $m = 3$ 时，基于数据集1得到的检验统计量值为 2.0728，相应的 p值为 0.9992。我们的检验也表明，指数分布适合作为该数据集的模型。

数据集2：12, 17, 7, 13, 5, 2, 12, 2, 6, 4, 5, 14, 6, 2, 4, 18, 4, 19, 5, 14, 20, 8, 11, 26, 1, 3, 10, 18, 6, 10, 23, 7, 20, 4, 7, 6, 12, 10, 20, 3, 12, 3, 18, 18, 14, 14, 8, 6, 22, 11, 8。

数据集2包含51个观测值，代表美国51个主要城市的平均最高温度（单位为摄氏度）。美国国家气候数据中心（NCDC）提供了这些信息，并发布于网站 https://www.ncdc.noaa.gov；林德利分布已用于拟合该数据集（参见 Jose 和 Sathar（2022b）、Thomas 和 Jose（2020a））。当样本量为 $N = 51$ 且窗口大小为 $m = 25$时，基于数据集2的检验统计量为0.5268

相应的p值为0.0038。我们的检验表明，指数分布并不适合该数据集。

数据集3：10.49, 8.8, 12.42, 4.58, 6.85, 4.58, 5., 4.75, 4.75, 12.25, 9.5, 13.54, 10.42, 4.65, 9.88, 6.21, 8.6, 7.06, 7.96, 7.89, 9.7, 13.9, 12.65, 10., 12.65, 12.07, 9.8, 13.54, 9.82, 13.54, 12.42, 12.73, 12.22, 12.25, 12.32, 8.75, 12., 17.5, 11.88, 13.13, 13.56, 15.44, 13.22, 7.28, 11.7, 11.7, 11.6, 10.9, 11.84, 8., 10.2, 5.77, 13.9, 4.58, 12.07, 15.44, 10.2, 11., 8.5, 10.99, 10.39, 9.9, 13.94, 15.21, 13.56, 9., 20.47, 15.22, 11.5, 13.9, 13.22, 10.48, 15.48, 9.8, 12.21, 13.56, 7.04.

数据集3取自 Thomas 和 Jose（2020a）。Jose 和 Sathar（2022b）也曾使用该数据集进行指数性检验。数据集3由77个观测值组成，这些观测值记录了代表含水层厚度的地电导出参数。双参数威布尔分布对该数据集拟合良好（见 Thomas 和 Jose（2020a）、Jose 和 Sathar（2022b））。当样本量为 $N = 77$ 且窗口大小为 $m = 30$时，基于数据集3的检验统计量值为1.1914，对应的p值为0.0051。我们的检验结果表明，指数分布并不适合该数据集。

数据集4：0.08, 2.09, 3.48, 4.87, 6.94, 8.66, 13.11, 23.63, 0.2, 2.23, 3.52, 4.98, 6.97, 9.02, 13.29, 0.4, 2.26, 3.57, 5.06, 7.09, 9.22, 13.8, 25.74, 0.5, 2.46, 3.64, 5.09, 7.26, 9.47, 14.24, 25.82, 0.51, 2.54, 3.7, 5.17, 7.28, 9.74, 14.76, 6.31, 0.81, 2.62, 3.82, 5.32, 7.32, 10.06, 14.77, 32.15, 2.64, 3.88, 5.32, 7.39, 10.34, 14.83, 34.26, 0.9, 2.69, 4.18, 5.34, 7.59, 10.66, 15.96, 36.66, 1.05, 2.69, 4.23, 5.41, 7.62, 10.75, 16.62, 43.01, 1.19, 2.75, 4.26, 5.41, 7.63, 17.12, 46.12, 1.26, 2.83, 4.33, 5.49, 7.66, 11.25, 17.14, 79.05, 1.35, 2.87, 5.62, 7.87, 11.64, 17.36, 1.4, 3.02, 4.34, 5.71, 7.93, 11.79, 18.1, 1.46, 4.4, 5.85, 8.26, 11.98, 19.13, 1.76, 3.25, 4.5, 6.25, 8.37, 12.02, 2.02, 3.31, 4.51, 6.54, 8.53, 12.03, 20.28, 2.02, 3.36, 6.76, 12.07, 21.73, 2.07, 3.36, 6.93, 8.65, 12.63, 22.69。

数据集4取自 Linhart 和 Zucchini（1986年）。该数据集记录了飞机空调系统的故障时间。指数分布能够很好地拟合该数据集（参见 Linhart 和 Zucchini（1986年）、Shanker 等人（2015）、Jose 和 Sathar（2022b））。当样本量为 $N = 128$ 、窗口大小为 $m = 9$ 时，基于数据集4计算得到的检验统计量为255.8024，相应的p值为 0.382。我们的检验验证了指数分布能够很好地拟合该数据集。

数据集5：5.1, 1.2, 1.3, 0.6, 0.5, 2.4, 0.5, 1.1, 8.0, 0.8, 0.4, 0.6, 0.9, 0.4, 2.0, 0.5, 5.3, 3.2, 2.7, 2.9, 2.5, 2.3, 1.0, 0.2, 0.1, 0.1, 1.8, 0.9, 2.0, 4.0, 6.8, 1.2, 0.4, 0.2。

数据集5取自 Bhaumik 和 Gibbons（2006）。该数据集代表从清理梯度监测井中获得的氯乙烯数据。指数分布对该数据集的拟合效果非常好（参见 Xiong等人（2020）、Bhaumik 和 Gibbons（2006）、Shanker 等人（2015）以及 Marange 和 Qin（2019））。样本量为 $N = 34$，窗口大小为 $m = 3$ 时，基于数据集5的检验统计量值为 1734.4354，相应的 p值为 0.8335。我们的检验未能拒绝原假设，因此指数分布能够很好地拟合该数据集。

数据集6：0.014, 0.034, 0.059, 0.061, 0.069, 0.080, 0.123, 0.142, 0.165, 0.210, 0.381, 0.464, 0.479, 0.556, 0.574, 0.839, 0.917, 0.969, 0.991, 1.064, 1.088, 1.091, 1.174, 1.270, 1.275, 1.355, 1.397, 1.477, 1.578, 1.649, 1.702, 1.893, 1.932, 2.001, 2.161, 2.292, 2.326, 2.337, 2.628, 2.785, 2.811, 2.886, 2.993, 3.122, 3.248, 3.715, 3.790, 3.857, 3.912, 4.100.

数据集6取自 Lawless（2011年），表示寿命试验中电器失效时经历的循环次数（以千次为单位）。该数据集包含50个观测值。对于样本量 $N = 50$ 和窗口大小 $m = 20$，基于数据集6的检验统计量为5.9071，相应的p值为0.0。即使在1% 显著性水平下，我们的检验仍拒绝原假设。这表明指数分布不适合该数据集。与指数分布相比，Chen分布对该数据集的拟合效果更好（参见 Xiong等人（2020）、Yousaf等人（2019））。

数据集 7：0.0518, 0.0518, 0.1009, 0.1009, 0.1917, 0.1917, 0.1917, 0.2336, 0.2336, 0.2336, 0.2733, 0.2733, 0.3467, 0.3805, 0.3805, 0.4126, 0.4431, 0.4719, 0.4719, 0.4993, 0.6162, 0.6550, 0.6550, 0.7059, 0.7211, 0.7356, 0.7623, 0.7863, 0.8178, 0.8810, 0.9337, 0.9404, 0.9732, 0.9858。

数据集 7 取自 Xiong 等（2020），均匀分布对其具有良好的拟合效果。当样本量为 $N = 34$、窗口大小为 $m = 5$ 时，基于数据集7的检验统计量值为 422.5549，相应的p值为 0.0001。我们的检验即使在 1% 的显著性水平下也拒绝原假设。这表明指数分布不适合该数据集。

有关不同数据集基于各自特定窗口大小和样本量的检验统计量值及 p 值，请参见表 11。

表 11。拟合模型的描述

数据集	N	m	$\hat{\Delta}_{2,2}$	p值
数据集1	15	3	2.0728	0.9992
数据集2	51	25	0.5268	0.0038
数据集3	77	30	1.1914	0.0051
数据集4	128	9	255.8024	0.3820
数据集5	34	3	1734.4354	0.8335
数据集6	50	20	5.9071	0.0000
数据集7	34	5	422.5549	0.0001

在 5%显著性水平下进行检验时，若 p 值小于 0.05，则表示数据不具有指数性；若 p 值大于 0.05，则表示指数分布适合作为数据的模型。表 11 表明，新提出的检验能够识别随机样本分布是否具有指数性。p 值显示，在 5%显著性水平下，数据集 2、3、6 和 7 的随机样本分布不具有指数性。类似地，适中的 p 值意味着数据集 1、4 和 5 的分布符合指数分布。因此，我们能够验证，该检验统计量正确识别了随机变量分布的指数性。

7 结论

本研究利用外熵和次序随机变量（上端k记录值）来刻画指数分布。基于这一指数分布刻画结果，构建了用于判定指数性的检验统计量。通过蒙特卡罗方法开展模拟研究，以求得估计量、临界值和检验功效。在大多数情况下，该方法并非表现最差。为了证明所提出的检验可以有信心地应用于实践，我们还纳入了七个真实案例。

资助

Santosh Kumar Chaudhary 谨向印度科学与工业研究委员会（CSIR）、印度政府（档案编号09/0081 (14002)/2022-EMR-I）致谢，感谢其提供经费资助。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. 和 Nagaraja, H. N. (1998).《记录值》。Johan Wiley and Sons，纽约。[2] Arnold C.、Balakrishnan N. 和 Nagaraja H. N. (2008).《次序统计量入门》，SIAM。[3] Park, S. (1999)，《基于次序统计量样本熵的正态性拟合优度检验》，《统计与概率快报》，44，359–363。[4] Jose, J. 和 Sathar, E.I.A. (2022a)，《通过在外熵中同时应用上、下 k记录值检验对称性》，《统计计算与模拟杂志》，92 (4):830-846。[5] Jitto Jose, E. I. Abdul Sathar，《利用基于下 k 记录值的外熵刻画指数分布及其在指数性检验中的应用》，《计算与应用数学杂志》，402，2022b，113816。[6] Goffman, C. 和 Pedrick, G. (2017).《泛函分析入门》（第319卷）。美国数学学会。[7] Guoxin Qiu 和 Kai Jia (2018)《用于均匀性检验的外熵估计量》，《非参数统计杂志》，30:1，182-196。[8] Jose, J. 和 Sathar, E.I.A. (2022a)，《通过在外熵中同时应用上、下 k记录值检验对称性》，《统计计算与模拟杂志》，92:4，830-846。[9] Guoxin Qiu (2017)，《次序统计量和记录值的外熵》，《统计与概率快报》，120，第52-60页。[10] Vasicek O.《基于样本熵的正态性检验》。J R Stat Soc Ser B Methodol. 1976;38:54–59。[11] Xiong, P.、Zhuang, W. 和 Qiu, G. (2021)，《基于记录值外熵的对称性检验》，《非参数统计杂志》，33:1，134-155。[12] Xiong, P.、Weiwei Zhuang 和 Guoxin Qiu (2020)《基于记录值外熵的指数性检验》，Journal of Applied Statistics，49:4，782-802，DOI: 10.1080/02664763.2020.1840535。[13] R. Shanker、F. Hagos、S. Sujatha，《使用指数分布和林德利分布对寿命数据建模》，Biom. Biostat. Int. J. 2 (5) (2015) 1–9。

[14] Proschan F. 对观测到的失效率递减现象的理论解释。Technometrics. 1963;5(3):375–383。[15] P.Y. Thomas, J. Jose，一种以瑞利分布和林德利分布为边际分布的新型二元分布，J. Stat. Theory Pract. 14 (2) (2020a) 1–33, http://dx.doi.org/10.1007/s42519-020-00093-9。[16]P.Y. Thomas, J. Jose，关于 Weibull–Burr 复合二元分布，Japanese J. Stat. Data Sci. 4 (1) (2020b) 73–105, http://dx.doi.org/10.1007/s42081-020-00085-w。[17] Linhart H, Zucchini W. 模型选择，John Wiley，纽约，美国；1986年。[18] D.K. Bhaumik 和 R.D. Gibbons，在 r 个位置的伽马总体中，针对至少 p 个（共 m 个）观测值的单侧近似预测区间，Technometrics 48 (2006), pp. 112–119。[19] C.S. Marange 和 Y. Qin，利用概率积分变换进行指数性检验的基于矩的经验似然比检验，J. Appl. Stat. 46 (2019), pp. 2786–2803。[20] J.F. Lawless，寿命数据的统计模型与方法，第362卷，Wiley，霍博肯，2011年。[21] F. Yousaf, S. Ali, and I. Shah，基于上记录值对 Chen 分布进行统计推断，Ann. Data Sci. 6 (2019), pp. 831–851。

附录

我们采用以下步骤来确定临界值，并计算所提出检验及其他对称性检验在显著性水平 $\alpha = 0.10$, $\alpha = 0.05, \alpha = 0.01$ 下的功效：

(1) 我们定义了一个函数，用于计算 Δ 的绝对值 $_{2,\ 2}$。(2) 从零假设分布中生成一个大小为 N 的样本，并计算该样本数据的检验统计量；(3) 将步骤2重复10,000次，分别确定检验统计量的第950、第975和第995分位数作为临界值；(4) 从备择分布中生成一个大小为 N 的样本，并检查检验统计量的绝对值是否大于临界值；(5) 将步骤4重复10,000次，拒绝率即为检验功效。

Nitin Gupta
数学系，印度理工学院卡拉格浦尔分校，
卡拉格浦尔-721302，印度 电子邮箱：
nitin.gupta@maths.iitkgp.ac.in

Santosh Kumar Chaudhary
数学系 f Math
学，印度理工学院卡拉格普尔分校 卡拉格浦尔-
721302，印度 电子邮箱：
skchaudhary1994@kgpian.iitkgp.ac.in