arXiv:2301.02701v1 [math.AP] 6 Jan 2023

扰动半空间中 BMO 型向量场的亥姆霍兹分解

Yoshikazu Giga*[1] 和 Zhongyang Gu†[1,2]

[1]东京大学数理科学研究科，日本东京目黑区驹场 3-8-1，邮编 153-8914[2]一桥大学经济学研究科，日本东京国立市中 2-1，邮编 186-8601

摘要

我们引入一个向量场空间，其向量场具有有界平均振荡，且其垂直于边界的“法向”分量受到良好控制。当区域是 R^n ($n \geq 3$) 中具有小扰动的扰动半空间时，我们证明了该空间的亥姆霍兹分解。

关键词：亥姆霍兹分解、 BMO 空间、扰动半空间。

1 引言

本文是我们论文 [14] 的续篇。众所周知，亥姆霍兹分解在分析斯托克斯方程和纳维–斯托克斯方程 [25] 中起着关键作用。对于带有 $1 < p < \infty$ 的 L^p 空间，这类分解已得到充分研究。它是一个拓扑直和分解

$$L^p(\Omega)^n = L^p_\sigma(\Omega) \oplus G^p(\Omega)$$

适用于区域 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 中的 L^p 向量场。这里， $L^p_\sigma(\Omega)$ 表示由所有紧支撑且 G^p 所表示的 L^p-闭包空间； G^p 表示所有 L^p 梯度场构成的空间。若 $p = 2$，则任意区域 Ω 都成立这种分解。它是一个正交分解，通常称为外尔分解。对于 $1 < p < \infty$，这种分解仍适用于多种区域，包括全空间 R^n、半空间 R^n_+、扰动半空间、有界光滑区域 [10] 以及外部光滑区域。然而，有些光滑无界区域并不具有 L^p-亥姆霍兹分解；例如可参见 Galdi 的一部优秀著作 [11]。

如果 $p = \infty$，那么即使 $\Omega = \mathrm{R}^n$ ，这样的分解也不成立，因为投影算子是一种黎斯算子，在 L^∞中无界，尽管它在 $L^p(1 < p < \infty)$ 中有界。我们用 BMO 空间替代 L^∞ 。事实证明，考虑一个

*labgiga@ms.u-tokyo.ac.jp
†zgu@ms.u-tokyo.ac.jp

子空间 $vBMO$，使其属于 BMO 且具有亥姆霍兹分解，至少对于半空间 [12] 和有界区域 [14] 是如此。我们的目标是将这一结果推广到扰动半空间。遗憾的是，直接推广似乎很困难，因为无穷远处的行为无法得到很好的控制。因此，我们考虑该空间的 L^2 交集。对于 L^p 空间，Farwig、Kozono 和 Sohr [7] 为 $\mathbb{R}^3$ 中任意一致 C^2 光滑的区域建立了 $L^p \cap L^2$ $(p \geq 2)$ 和 $L^p + L^2$ $(1 < p < 2)$ 的亥姆霍兹分解。（后来，这一结果被推广到任意维数 [8]。）尽管本文研究的是略微扰动的半空间中的 $vBMO \cap L^2$，我们的结果可推广到任意一致 C^3 的区域。这将在另行发表的后续论文中讨论。

我们回顾一下在 [13], [14] 中引入的向量场 BMO 空间。对于 $\mu \in (0, \infty]$，我们回顾其 BMO 半范数。对于 Ω 中的局部可积函数 f，即 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$，我们定义

$$[f]_{BMO^\mu(\Omega)} := \sup \left\{ \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \left| f(y) - f_{B_r(x)} \right| \, dy \;\middle|\; B_r(x) \subset \Omega, \; r < \mu \right\};$$

这里，f_B 表示在 B 上的平均值，$B_r(x)$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的开球，而 $|B|$ 表示 B 的勒贝格测度。对于 $\nu \in (0, \infty]$，我们还使用一个半范数

$$[f]_{b^\nu(\Gamma)} := \sup \left\{ r^{-n} \int_{\Omega \cap B_r(x)} |f(y)| \, dy \;\middle|\; x \in \Gamma, \; 0 < r < \nu \right\},$$

其中 $\Gamma := \partial\Omega$ 表示 Ω 的边界。空间

$$BMO_b^{\mu,\nu}(\Omega) := \left\{ f \in L^1_{loc}(\Omega) \,\middle|\, [f]_{BMO^\mu(\Omega)} + [f]_{b^\nu(\Gamma)} < \infty \right\}$$

该空间基本上是在 [2] 中引入的，并在 [5] 中得到了深入研究。这类空间中的斯托克斯半群已在 [2], [4] 中得到研究，它有助于证明，即使在某些不允许 L^p-亥姆霍兹分解 [3] 的无界区域中，斯托克斯半群仍具有解析性。

我们的空间 $vBMO$ 只要求对法向分量进行控制。令 d_Γ 表示到 Γ 的距离函数。我们定义

$$\begin{aligned} [v]_{vBMO^{\mu,\nu}(\Omega)} &:= [v]_{BMO^\mu(\Omega)} + [\nabla d_\Gamma \cdot v]_{b^\nu(\Gamma)}, \\ vBMO^{\mu,\nu}(\Omega) &:= \left\{ v \in L^1_{loc}(\Omega)^n \,\middle|\, [v]_{vBMO^{\mu,\nu}(\Omega)} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

其中 $\cdot$ 表示标准内积。这是一个半范数。如果 $\Omega = \mathbb{R}^n_+$，除非 $n = 1, \nu = \infty$，否则它不是范数。然而，如果 Γ 按照 [13, Definition 7], 的意义具有完全弯曲部分，那么 $[\cdot]_{vBMO^{\mu,\nu}(\Omega)}$ 就成为范数 [13, Lemma 8]。特别是，当 Ω 是有界区域时，这是一个范数。本文考虑 Ω 为受扰动半空间的情形。

$$\mathbf{R}^n_h := \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, x_n > h(x') \right\},$$

其中 $h \not\equiv 0$ 属于 $C^k_c(\mathbb{R}^{n-1})$，即 h 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的紧支撑 C^k 函数；这里 $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ 对于 $x \in \mathbb{R}^n$。若一个扰动的 C^k $(k \geq 2)$ 半空间 $\mathbb{R}^n_h$ 满足以下条件，则称其为类型 (K)：

$$\sup_{x' \in \mathbf{R}^{n-1}} \left| \nabla'^2 h(x') \right| < K$$

其中 $\nabla' := (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_{n-1})$。注意，扰动的 C^k 半空间包含一个完全弯曲部分，因此 $[v]_{vBMO^{\mu,\nu}(\Omega)}$ 是一个范数。根据定义，始终存在 $R_h > 0$，使得支集 $\operatorname{supp} h \subseteq B_{R_h}(0')$。若扰动的 C^k 半空间 $\mathbb{R}^n_h$ 满足以下条件，则称其具有小扰动：

$$R_h^{\frac{2n-1}{2n}} < \frac{1}{2}, \quad C_s(h)^{\frac{3n}{2}+8} C_1(h) \left(C_{*,1}(h) + C_{*,2}(h) + R_h^{\frac{n}{2}} \right) < \frac{1}{2C^*(n)} \tag{1}$$

其中 $C^*(n)$ 是一个仅取决于空间维数 n 的特定常数 ，

$$\begin{aligned}
&C_s(h) := 1 + \|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}, \quad C_1(h) := 1 + R_h \left\|\nabla'^2 h\right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}, \\
&C_{*,1}(h) := C_1(h)^3 \left(1 + R_h^{\frac{1}{4}}\right) \left(R_h^{\frac{1}{2}} \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + R_h^{\frac{5}{2}} \|\nabla'^2 h\|^3_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \right), \\
&C_{*,2}(h) := \left(R_h + R_h^{\frac{1}{2h}} \right) \left\|\nabla'^2 h\right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + \left(R_h^{n-1} + 1 \right) \|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}.
\end{aligned}$$

为简化无穷远处的行为，我们考虑

$$vBMOL^2(\Omega) := vBMO^{\mu,\nu}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

注意，该空间与 μ, ν 的选取无关。本文旨在建立空间 $vBMOL^2(\mathbb{R}^n_h)$ 上的亥姆霍兹分解，其中 $\mathbb{R}^n_h$ 是具有小扰动 $n \geq 3$ 的扰动半空间C^3。下面给出主要定理。

定理 1. 设 $\mathbb{R}^n_h$ 是类型 (K) 的扰动半空间 C^3，其小扰动为$n \geq 3$，且 $\Gamma = \partial\mathbb{R}^n_h$。那么，对于任意 $v \in vBMOL^2(\mathbb{R}^n_h)$，存在唯一的分解$v = v_0 + \nabla q$，满足

$$\begin{aligned}
v_0 \in vBMOL^2_\sigma(\mathbf{R}^n_h) &:= \left\{ f \in vBMOL^2(\mathbf{R}^n_h) \,\middle|\, \operatorname{div} f = 0 \text{ in } \mathbf{R}^n_h, \ f \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma \right\}, \\
\nabla q \in GvBMOL^2(\mathbf{R}^n_h) &:= \left\{ \nabla p \in vBMOL^2(\mathbf{R}^n_h) \,\middle|\, p \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n_h) \right\}
\end{aligned}$$

并满足估计

$$\|v_0\|_{vBMOL^2(\mathbf{R}^n_h)} + \|\nabla q\|_{vBMOL^2(\mathbf{R}^n_h)} \leq C(K, R_*, R_h) \|v\|_{vBMOL^2(\mathbf{R}^n_h)},$$

其中 $C(K, R_*, R_h)$ 是一个常数，仅取决于控制 h 二阶导数的常数 K、边界 R_* 的可达半径以及表征 h 支集的大小 R_h。特别地，由 $P_{vBMOL^2}(v) = v_0$ 定义的亥姆霍兹投影 P_{vBMOL^2} 是 $vBMOL^2(\mathbb{R}^n_h)$ 上的有界线性映射，其值域为 $vBMOL^2_\sigma(\mathbb{R}^n_h)$，核为 $GvBMOL^2(\mathbb{R}^n_h)$。

粗略地说，可达半径 R_* 表示边界的一个小邻域的大小，在该邻域内，每个点在边界上都有唯一投影。关于其精确定义，请读者参阅第 2.1 小节。

我们证明定理 1 的策略，源自我们在有界 C^3 区域 [14]中建立亥姆霍兹分解时所采用的位势论策略。令 E 表示 $\mathbb{R}^n$ 中 $-\Delta$ 的基本解。由 [21], 可知，只要边界 Γ 是均匀C^2的，空间 $BMO^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ 就允许使用标准截断，也就是说，我们可以将 v 分解为两部分：$v = v_1 + v_2$，其中 $v_2 = \varphi v$；以及 $v_1 = v - v_2$，其中取某个 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，其支集

位于 Γ的一个小邻域内。因此， v_2 的支集位于 Γ的一个小邻域内，而 v_1 的支集则远离 Γ。对于 v_1，将 v_1 在 Ω 外延拓为零后，我们只需令$q_1^1 = E * \operatorname{div} v_1$。于是， ∇q_1^1 在 Γ附近的 L^∞ 界得到良好控制，由此得到 b^ν 半范数的界。为估计 v_2，我们在 Γ 附近使用法坐标系，并将问题化归为半空间上的情形。我们将 v_2 延拓到 $\mathbb{R}^n$，使得法向部分（$\nabla d \cdot \overline{v}_2$）$\nabla d$ 为奇函数，而切向部分 $\overline{v_2} - (\nabla d \cdot \overline{v_2})\nabla d$ 相对于 Γ沿 ∇d 方向为偶函数。在这种法坐标系中，负拉普拉斯算子可变换为

$$L = A - B + \text{lower order terms},\ A = -\Delta_\eta,\ B = \sum_{1\le i,j\le n-1} \partial_{\eta_i} b_{ij} \partial_{\eta_j},$$

其中， η_n 是边界的法向方向，因此 $\{\eta_n > 0\}$ 是半空间。接着，我们使用冻结系数法构造体势 $q_1^{\tan}$和 q_1^{nor}，它们分别对应于切向部分$\overline{v_2}^{\tan}$ 和法向部分 $\overline{v_2}^{\mathrm{nor}}$的贡献。由于法坐标下 $\operatorname{div}\overline{v_2}^{\mathrm{nor}}$ 的主项仅包含 η_n 的微分，若将系数 b_{ij} 关于 η_n作偶延拓，则构造 q_1^{nor}，使得 $\nabla d \cdot \nabla q_1^{\mathrm{nor}}$的主项沿 ∇d方向为奇。另一方面，由于法坐标下 $\operatorname{div}\overline{v_2}^{\tan}$ 的主项仅包含 $\eta' = （\eta_1, ..., \eta_{n-1}）$的微分，因此将 b_{ij}关于 η_n作偶延拓会得到$q_1^{\tan}$，使得 $\nabla d \cdot \nabla q_1^{\tan}$的主项沿 ∇d方向也为奇。忽略低阶项和局部化过程，构造 $q_1^{\tan}$和 q_1^{nor}如下：

$$\begin{aligned} q_1^{\tan} &= -L^{-1} \operatorname{div} \overline{v}_2^{\tan} = -A^{-1}(I - BA^{-1})^{-1} \operatorname{div} \overline{v}_2^{\tan}, \\ q_1^{\mathrm{nor}} &= -L^{-1} \operatorname{div} \overline{v}_2^{\mathrm{nor}} = -A^{-1}(I - BA^{-1})^{-1} \operatorname{div} \overline{v}_2^{\mathrm{nor}}. \end{aligned}$$

通过在边界点附近取一个小邻域，可以使 BA^{-1} 足够小。然后，$(I - BA^{-1})^{-1}$由诺伊曼级数 $\sum_{m=0}^{\infty}(BA^{-1})^m$给出。 $\nabla q_1^{\tan}$和 $\nabla q_1^{\mathrm{nor}}$的 BMO-BMO估计由 [9]得出。由于 $\nabla d \cdot (\nabla q_1^{\tan} + \nabla q_1^{\mathrm{nor}})$ 的主项关于 Γ在 ∇d 方向上是奇函数， BMO 界蕴含 b^ν 界。$\nabla q_1^{\tan}$和 $\nabla q_1^{\mathrm{nor}}$的 L^2 估计与局部化过程中的情形相同；对于 Γ 附近的小邻域，我们考虑的单位分解是局部有限的。因此，令 $q_1 = q_1^1 + q_1^{\tan} + q_1^{\mathrm{nor}}$便可得到所需的、对应于散度 v的体势。构造体势 q_1 所需的一些结果已在 [14, 第 3] 节和 [21], 中建立；对于这些部分，我们省略证明，直接回顾相关结果。

定理 2（适当体势的构造）。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个类型为 (α, β, K) 的一致 C^3区域，且具有 $n \ge 2$。设 R_*为边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 的可达半径。那么，存在一个有界线性算子 $v \longmapsto q_1$，从 $vBMOL^2(\Omega)$ 映射到 $L^\infty(\Omega)$，使得

$$-\Delta q_1 = \operatorname{div} v \quad in \quad \Omega$$

并且存在一个常数 $C = C(\alpha, \beta, K, R_*) > 0$，满足

$$\|\nabla q_1\|_{vBMOL^2(\Omega)} \le C\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}.$$

特别地，算子 $v \longmapsto \nabla q_1$ 是 $vBMOL^2(\Omega)$ 上的有界线性算子。

这里，(α, β, K) 是用于刻画 Γ 正则性的参数。我们想请读者参阅

第 2.1 小节，了解这些参数的精确定义。尽管对于 R^n 中具有 $n \geq 2$ 的任意一致 C^3 区域，都可以构造合适的体势，但在后续理论中，我们需要重新聚焦于 R^n 中具有 $n \geq 3$ 的扰动半空间。对于 $v \in vBMOL^2(\mathrm{R}^n_h)$，我们注意到 $w = v - \nabla q_1$ 在 R^n_h 中是无散的。遗憾的是，这个 w 未必满足边界 $\Gamma = \partial \mathrm{R}^n_h$ 上的迹条件 $w \cdot \mathrm{n} = 0$。我们通过求解诺伊曼问题来构造另一个势 q_2

$$\begin{aligned} \Delta q_2 &= 0 \qquad \text{in} \quad \mathbf{R}^n_h, \\ \frac{\partial q_2}{\partial n} &= w \cdot \mathbf{n} \quad \text{on} \quad \Gamma. \end{aligned}$$

于是我们令 $q = q_1 + q_2$。由于 $\partial q_2 / \partial \mathrm{n} = \nabla q_2 \cdot \mathrm{n}$，$v_0 = v - \nabla q$给出了亥姆霍兹分解。为了完成定理 1 的证明，只需通过 $\|v\|_{vBMOL^2(\mathbf{R}^n_h)}$ 控制 $\|\nabla q_2\|_{vBMOL^2(\mathbf{R}^n_h)}$。

引理 3（法向迹的估计）。设 R^n_h 是一个类型为 (K) 的扰动 $C^{2+\kappa}$ 半空间，其中 $\kappa \in (0, 1)$，$n \geq 3$ 且 $\Gamma = \partial \mathrm{R}^n_h$。则存在一个常数 $C = C(K, R_*, R_h) > 0$，使得

$$\|w \cdot \mathbf{n}\|_{L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|w\|_{vBMOL^2(\mathbf{R}^n_h)}$$

对于所有满足 div $w = 0$ in R^n_h 的 $w \in vBMOL^2(\mathrm{R}^n_h)$。

这里，$\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是一个希尔伯特空间，与 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 同构，事实证明它是齐次分数阶 Sobolev 空间 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 的对偶空间。这里，阶数为 $s \in \mathrm{R}$ 的齐次 Sobolev 空间定义为

$$\dot{H}^s(\mathbf{R}^{n-1}) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n-1}) \,\middle|\, \widehat{f} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^{n-1}) \quad \text{and} \right.$$
$$\left. \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^{n-1})} := \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} |\xi'|^{2s} \left|\widehat{f}(\xi')\right|^2 d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

其中，$\mathcal{S}'(\mathrm{R}^{n-1})$ 表示 Schwartz 温和分布空间，$\widehat{f}$ 表示 f 的傅里叶变换，参见例如 [1, 第 1.3]节。遗憾的是，空间 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 完备当且仅当 $n \geq 3$。因此，当出现 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 范数时，我们假设 $n \geq 3$。建立引理 3 的基本思路如下。$w \cdot \mathrm{n}$ 的 L^∞ 估计可直接由 [13, 定理 22]中建立的迹定理得到。对于 $w \cdot \mathrm{n}$ 的 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 估计，我们将边界分为直线部分和曲线部分。由于我们有 $w \cdot \mathrm{n}$ 的 L^∞ 估计，且曲线部分是紧的，因此 $w \cdot \mathrm{n}$ 的 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 估计中来自曲线部分的贡献可由 $w \cdot \mathrm{n}$ 的 L^∞ 范数估计。对于 $w \cdot \mathrm{n}$ 的 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 估计中来自直线部分的贡献，我们采用半空间情形下 $w \cdot \mathrm{n}$ 的 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 估计。最后，我们还需要诺伊曼问题的估计。

引理 4（诺伊曼问题的估计）。设 R^n_h 为类型 (K $n \geq 3$ R_* $\Gamma = \partial$ ^n_h $g \in$) 的扰动 C^2 半空间，且 $L^\infty \Gamma \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}} \Gamma$ 具有小扰动 . 设 为 R 的可达半径。对于任意 ( ) ( )，存在唯一的（相差一个常数）解 $u \in L^2_{loc}(\mathrm{R}^n_h)$，满足诺伊曼

问题

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad in \quad \mathbf{R}_h^n \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g \quad on \quad \Gamma \end{aligned} \tag{2}$$

使得算子 $g \longmapsto u$ 是线性的。此外，存在常数 $C = C(K, R_*, R_h) > 0$，使得

$$\|\nabla u\|_{vBMOL^2\left(\mathbf{R}_h^n\right)} \leq C\|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

为建 立引理 4，基本策略与 [14], 中的相同：我们首先证明 th at

$$\left\|\nabla E * \left(\delta_\Gamma \otimes g\right)\right\|_{vBMO^{\infty,\nu}\left(\mathbf{R}_h^n\right)}$$

对任意 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，其中

$$E * (\delta_\Gamma \otimes g)(x) := \int_\Gamma E(x-y)g(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad x \in \mathbf{R}_h^n$$

表示 g的单层势。由于边界 $\Gamma = \partial\mathbf{R}_h^n$ 是曲线状且非紧的，我们采用扰动论证。对于 $g \in L^\infty($ $\Gamma)$，我们通过令 $g_1\left(y', h(y')\right) := 1'_{B_{2R_h}}(0')(y')g\left(y', h(y')\right)$，将 g 分解为曲线部分 g_1 和直线部分 g_2，其中 $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$且 $g_2 := g - g_1$；这里，$1'_{B_{2R_h}}(0')$表示 $\mathbf{R}^{n-1}$中的开球 $B_{2R_h}(0')$的示性函数。由于 g_2 在 Γ的曲线部分上为零，我们可以通过令 $g_2^H(y', 0) = g_2\left(y', h(y')\right)$，对任意 $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$定义 $g_2^H \in L^\infty(\mathbf{R}^{n-1}) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$。注意

$$E * \left(\delta_\Gamma \otimes g_2\right)(x) = E * \left(\delta_{\partial\mathbf{R}_+^n} \otimes g_2^H\right)(x)$$

对任意 $x \in \mathbf{R}^n$。令 $g_2^{\mathbf{R}^n}(y', y_n) := g_2^H(y', 0)$，其中 $(y', y_n) \in \mathbf{R}^n$ 任意取值，则通过对 $\nabla E * \left(\delta_\Gamma \otimes g_2\right)$ 应用定理 4.2 中奇异积分算子 [19, 的 $L^\infty - BMO$估计，可推出其BMO估计。由于 $g_1\left(\cdot', h(\cdot')\right)$ 在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中紧支撑，我们可以将 g_1 延拓为某个 $g_{1,\,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$，使得 $g_{1,\,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}}$ 紧支撑，且$\nabla d \cdot \nabla g_{1,\,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} = 0$ 位于 Γ 的一个小邻域内。于是，我们可以将 $\nabla E * \left(\delta_\Gamma \otimes g_1\right)$ 改写为

$$\nabla E * \left(\delta_\Gamma \otimes g_1\right) = \nabla \operatorname{div}\left(E * (g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} 1_{\mathbf{R}_h^n} \nabla d)\right) - \nabla E * \left(1_{\mathbf{R}_h^n} g_1^{\mathrm{e}} f_{\theta,\rho_0/4}\right) \tag{3}$$

其中 $f_{\theta,\,\rho_0/4}$ 是某个紧支撑连续函数（参见引理 25(i) 的证明），且与 g 无关。右侧第一项的 BMO 估计可利用奇异积分算子的 $L^\infty - BMO$ 估计进行控制。右侧第二项可由 L^∞ 范数控制，因为 $\nabla E(x)$ 是局部可积核，且 $f_{\theta,\,\rho_0/4}$ 具有紧支集。因此，我们得到 $g \in L^\infty(\Gamma)$ 的 $\nabla E * \left(\delta_\Gamma \otimes g\right)$的 BMO 估计。

对于具有 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的 $\nabla E * \left(\delta_\Gamma \otimes g\right)$ 的法向分量的 b^ν 估计，

我们也将 g 分解为曲线部分 g_1 和直线部分 g_2。可以证明,

$$\sup_{x\in\Gamma_{\rho_0}^{\mathbf{R}^n}}\int_\Gamma\left|\frac{\partial E}{\partial\mathbf{n}_y}(x-y)\right|d\mathcal{H}^{n-1}(y)<\infty \tag{4}$$

其中 $\Gamma_{\rho_0}^{\mathbf{R}^n}:=\{x\in\Omega\mid d(x)<\rho_0\}$ 表示 Ω 中 Γ 的 ρ_0-邻域。由于 $g_1\big(\cdot',h(\cdot')\big)$ 在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中是紧支撑的,估计式 (4) 使我们能够证明

$$\big|\nabla d(x)\cdot\nabla\big(E*(\delta_\Gamma\otimes g_1)\big)(x)\big|\le C\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}$$

对任意 $x\in\Gamma_{\rho_0}^{\mathbf{R}^n}$,存在某个常数 $C=C(K,R_h,R_*)>0$。另一方面,当 x 靠近 Γ的曲线部分时, $\nabla d(x)$ 不一定是 (0, ...,0, 1),此时

$$\big|\nabla d(x)\cdot\nabla\big(E*(\delta_\Gamma\otimes g_2)\big)(x)\big|$$

将包含来自 $\nabla'\big(E*(\delta_\Gamma\otimes g_2)\big)$ 的贡献,而这些贡献无法通过 g_2 的 L^∞ 界估计(见命题 26)。因此,我们引入 g_2 的 $\dot H^{-\frac12}$ 界。由于 $g_2\big(\cdot',h(\cdot')\big)$ 支集于 $B_{2R_h}(0')^{\mathrm c}$, $\nabla d(x)\cdot\nabla E(x-\cdot')$ 可视为 $\dot H^{\frac12}(\Gamma)$ 的一个元素,其中 x可取为靠近 Γ曲线部分的任意点。因此,由 $\dot H^{-\frac12}-\dot H^{\frac12}$对偶性可推出

$$\big|\nabla d(x)\cdot\nabla\big(E*(\delta_\Gamma\otimes g_2)\big)(x)\big|\le C\|g\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}$$

其中常数 $C=C(K,R_h,R_*)>0$。因此,我们得到了 $\nabla E*\big(\delta_\Gamma\otimes g\big)$ 在 Γ的小邻域内法向分量的 L^∞ 估计。 b^ν估计自然成立。

对于 $g\in L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$,我们证明其迹具有如下形式:

$$\big(Qg\big)(x)=\int_\Gamma\frac{\partial E}{\partial\mathbf{n}_x}(x-y)g(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y),\quad x\in\Gamma_{\rho_0}^{\mathbf{R}^n}$$

形式为

$$\gamma\big(Qg\big)\big(x',h(x')\big)=\frac12 g\big(x',h(x')\big)-\big(Sg\big)\big(x',h(x')\big),$$

其中 $S\colon L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)\to L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$ 是一个满足以下条件的有界线性算子:

$$\|S\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)\to L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}\le C^*(n)C_s(h)^{\frac{3n}{2}+8}C_1(h)\big(C_{*,1}(h)+C_{*,2}(h)+R_h^{\frac n2}\big)$$

其中 $C^*(n)$ 表示一个特定的固定常数,且仅依赖于维数 n 。因此,若 R_h^n是一个经过小扰动的半空间 C^2,其小扰动为 $n\ge3$,则通过诺伊曼级数, $I-2S$的逆算子可定义为从 $L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$ 到 $L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$ 的有界线性映射

$$(I-2S)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}(2S)^i.$$

诺伊曼问题 (2) 的解形式上可表示为

$$u(x)=E*\Big(\delta_\Gamma\otimes\big(2(I-2S)^{-1}g\big)\Big)(x),\quad x\in\mathbf{R}_h^n.$$

最后，我们还需要 R^n_h 中 ∇u 的 L^2 估计。对于半空间的情形，当 $g \in \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 时，单层势 $E*\big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g\big)$ 恰好是诺伊曼问题解 u 的一半。直接考虑 $E(x', x_n)$ 关于 x' 的偏傅里叶变换，即可轻松推出

$$\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} = 2\big\|\nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g\big)\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} = C(n)\|g\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

当 R^n_h 是一个带有 $n \geq 3$ 的扰动 C^2 半空间时，对于 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，我们仍将 g 分解为曲线部分 g_1 和直线部分 g_2。由于 $L^{\frac{2n-2}{n}}(\Gamma)$ 连续嵌入于 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，且曲线部分 g_1 在 Γ 中具有紧支撑，$g \in L^\infty(\Gamma)$ 将意味着 g_1、$g_2 \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$。由于对于任意 $x \in \mathrm{R}^n$，我们有

$$\nabla E * \big(\delta_\Gamma \otimes g_2\big)(x) = \nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H\big)(x)$$

并且对于任意 $x = (x', x_n) \in \mathrm{R}^n_+$，我们有

$$\Big|\nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H\big)(x', -x_n)\Big| = \Big|\nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H\big)(x', x_n)\Big|,$$

$\nabla E * \big(\delta_\Gamma \otimes g_2\big)$ 在 R^n 中的 L^2 估计可由 $\nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H\big)$ 在 R^n_+ 中的 L^2 估计推出，即我们有

$$\big\|\nabla E * \big(\delta_\Gamma \otimes g_2\big)\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 2\big\|\nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H\big)\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \leq C(K, R_h)\|g\|_{L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

对于曲线部分 g_1，我们回顾建立 $vBMO^{\infty,\nu}$ 范数的论证，其中涉及 $\nabla E *\big(\delta_\Gamma \otimes g\big)$。我们将 g_1 延拓到 $g^{\mathrm{e}}_{1,\mathrm{c}} \in L^\infty(\mathrm{R}^n)$，并考虑方程 (3)。由于对任意 $1 < p < \infty$，$\nabla \mathrm{div}\ E$ 都可积，参见例如 [18, 定理 5.2.7 和定理 5.2.10], ，(3) 右端第一项的 L^2 范数可由 g的 L^∞ 范数估计。而 $\nabla E(x)$ 是一个积分核，它被 $|x|^{-(n-1)}$的某个常数倍所控制；根据著名的 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式 [1, 定理 1.7], ，我们也可以用 g的 L^∞ 范数控制 (3) 右端第二项的 L^2 范数。结合直线部分 g_2贡献的 L^2估计，我们最终得到所需的 L^2 估计

$$\|\nabla u\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n_h\right)} \leq C(K, R_h, R_*)\|(I - 2S)^{-1}g\|_{L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C(K, R_h, R_*)\|g\|_{L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

对于 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$。引理 4 的证明至此完毕。

在取法向迹和求解诺伊曼问题时，我们要求维数 n 大于或等于 3 的原因是，当 $n \geq 3$ 时，确实有 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 连续嵌入 $L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathrm{R}^{n-1})$，且 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 是 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 的对偶空间这一事实；这进一步意味着 $L^{\frac{2n-2}{n}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 连续嵌入 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$。基于这些事实，我们可以证明，对于任意扰动的半空间 R^n_h（其边界为 $\Gamma = \partial \mathrm{R}^n_h$），$\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 与 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 同构，且 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 与 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 同构。更重要的是，我们可以用迹算子 S 的 $L^{\frac{2n-2}{n}}$ 范数估计其 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 范数，并对边界数据 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 进行截断，将其分解为曲线部分 g_1 和直线部分 g_2。当 $n = 2$ 时，空间 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R})$ 不再完备

且 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{R})$ 不一定是 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R})$ 的对偶空间。 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R})$ 的完备化无法嵌入 Schwartz 温和分布空间。此外，作为极限情形， $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R})$ 不连续嵌入 $L^{\infty}(\mathrm{R})$。因此，目前我们缺少估计迹算子 S 的 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 范数的工具，也无法再通过截断将边界数据分解为曲线部分和直线部分。这就是本文聚焦于维数 $n \geq 3$ 情形的原因。 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R})$ 的问题与 $\dot{H}^{1}(\mathrm{R}^2)$ 类似。空间 $\dot{H}^{1}(\mathrm{R}^2)$ 不完备。其完备化应为商空间 $\{u \in L^1_{loc}(\mathrm{R}^2) \,|\, \nabla u \in L^2(\mathrm{R}^2)^n\}/\mathrm{R}$，正如 [11] 中所讨论的，因为 $\dot{H}^{1}(\mathrm{R}^2)$ 包含所有光滑紧支撑函数。我们必须像 [16] 中那样研究一个适当的对偶空间。

本文结构安排如下。第 2 节中，我们回顾 [21] 中的结果以局部化问题，并回顾 [14] 中的结果，以构造与散度 v相对应的适当体势。本节证明定理 2。第 3 节中，我们通过考察 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 与 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$之间的同构，以 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 意义下取法向迹。第 4 节中，我们建立 Qg的迹算子 S 的估计。我们证明 S 是从 $L^{\infty} \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 到$L^{\infty} \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}$的有界算子。第 5 节中，我们通过考察具有 $2(I-2S)^{-1}g$ 的单层势来求解诺伊曼问题 (2)，并建立其梯度在 R^n_h中的 $vBMOL^2$ 估计。

2 V在一致 C^3 区域中的体积势构造 n

对于 $v \in vBMOL^2(\Omega)$，我们将构造一个适当的势 q_1，使得 $v \longmapsto \nabla q_1$ 是 $vBMOL^2(\Omega)$ 上的有界线性算子，正如定理 2 所述。当 Ω 是一致 C^3 区域时，其构造基本遵循 [14]，中 Ω 为有界 C^3区域时的理论。

2.1 局部化工具

让我们回顾一下在 [21] 中建立的一些一致估计。设 Ω 是 R^n 中的一个一致 C^k 区域，其中 $k \in \mathbf{N}$ 且 $n \geq 2$。令 $\Gamma = \partial\Omega$ 表示区域 Ω 的边界。存在α、$\beta > 0$，使得对于每个 $z_0 \in \Gamma$，经过平移和旋转后，存在一个函数$h_{z_0} \in C^k\big(B_\alpha(0')\big)$，其中 $B_\alpha(0')$ 表示 R^{n-1} 中以 $0'$ 为中心、半径为 α 的开球，并且该函数满足以下性质：

(i)
$$K := \sup_{0 \leq s \leq k} \left\| (\nabla')^s h_{z_0} \right\|_{L^\infty\left(B_\alpha(0')\right)} < \infty; \quad \nabla' h_{z_0}(0') = 0, \quad h_{z_0}(0') = 0,$$

(ii) $\Omega \cap U_{\alpha,\beta,h_{z_0}}(z_0) = \{(x', x_n) \in \mathrm{R}^n \,|\, h_{z_0}(x') < x_n < h_{z_0}(x') + \beta,\ |x'| < \alpha\}$其中

$$U_{\alpha,\beta,h_{z_0}}(z_0) := \left\{(x', x_n) \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, h_{z_0}(x') - \beta < x_n < h_{z_0}(x') + \beta,\ |x'| < \alpha\right\},$$

(iii) $\Gamma \cap U_{\alpha,\beta,h_{z_0}}(z_0) = \{(x', x_n) \in \mathbf{R}^n \,|\, x_n = h_{z_0}(x'),\ |x'| < \alpha\}.$

我们称 Ω 为 (α, β, K) 型。

令 d 表示从 Γ 起定义的有符号距离函数，其定义为

$$d(x) := \begin{cases} \inf\limits_{y\in\Gamma}|x-y| & \text{for} \quad x \in \Omega, \\ -\inf\limits_{y\in\Gamma}|x-y| & \text{for} \quad x \notin \Omega \end{cases} \tag{5}$$

使得对于区域 Ω， $d(x) = d_\Gamma(x)$ $x \in$ 。对于一致 C^k 的区域 Ω，存在 $R^\Omega > 0$ ，使得对于满足 $|d(x)| < R^\Omega$的 $x \in \Omega$，存在唯一一点 $\pi x \in \Gamma$ ，满足 $|x - \pi x| = |d(x)|$。此类 R^Ω 的上确界称为 Ω 中 Γ 的可达半径，我们将此上确界记为 R^Ω_*。令 Ω^c 为 Ω 在 R^n中的补集。类似地，存在 $R^{\Omega^c} > 0$ ，使得对于满足 $|d(x)| < R^{\Omega^c}$的 $x \in \Omega^c$ ，也可以找到唯一一点 $\pi x \in \Gamma$ ，满足 $|x - \pi x| = |d(x)|$。此类 R^{Ω^c} 的上确界称为 Ω^c中 Γ 的可达半径，我们将此上确界记为 $R^{\Omega^c}_*$ 。于是定义

$$R_* := \min\left(R^\Omega_*, R^{\Omega^c}_*\right),$$

我们称其为 Γ的可达半径。此外，对于任意 $\rho \in (0, R_*)$， d 在 ρ- Γ 邻域内是 C^k 的，即对于任意满足以下条件的 $\rho \in (0, R_*)$， $d \in C^k\left(\Gamma^{\mathbf{R}^n}_\rho\right)$

$$\Gamma^{\mathbf{R}^n}_\rho := \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, |d(x)| < \rho\};$$

参见例如 [20, 第 14 章，附录], [24, 第4 节4]。

存在 $0 < \rho_0 <$最小值 $\left(\alpha, \beta, \frac{R_*}{2}, 2n \underbrace{\quad}_{(K+1)}\right)$，使得对每个 $z_0 \in \Gamma$,

$$U_\rho(z_0) := \left\{x \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, (\pi x)' \in \operatorname{int} B_\rho(0'),\ |d(x)| < \rho\right\}$$

对于任意 $\rho \le \rho_0$，它包含于坐标图 $U_{\alpha,\ \beta,\ h_{z_0}}(z_0)$ 中。对于 $z_0 \in \Gamma$，法向坐标变换 F_{z_0}: V_{ρ_0}: $= B_{\rho_0}(0') \times (-\rho_0, \rho_0) \to U_{\rho_0}(z_0)$ 定义为

$$x = F_{z_0}(\eta) = \begin{cases} \eta' + \eta_n(\nabla'_x d)\big(\eta', h_{z_0}(\eta')\big); \\ h_{z_0}(\eta') + \eta_n(\partial_{x_n} d)\big(\eta', h_{z_0}(\eta')\big), \end{cases} \tag{6}$$

简言之

$$x = \pi x - d(x)\mathbf{n}(\pi x), \quad \mathbf{n}(\pi x) = -\nabla d(\pi x).$$

注意，对于任意 $z_0 \in \Gamma$, F_{z_0} ，它确实是 V_{ρ_0} 与 $U_{\rho_0}(z_0)$ 之间的 C^1-微分同胚。对于任意 $\varepsilon \in (0, 1)$，存在常数 $c^\varepsilon_\Omega := C(\varepsilon, K, \rho_0) > 0$ 和 $c^\varepsilon_\Omega < \rho_0$，使得对于任意$\rho \in (0, c^\varepsilon_\Omega]$ 和 $z_0 \in \Gamma$，以下估计成立:

$$\|\nabla F_{z_0} - I\|_{L^\infty(V_\rho)} < \varepsilon, \quad \|\nabla F^{-1}_{z_0} - I\|_{L^\infty(U_\rho(z_0))} < \varepsilon \tag{7}$$

同时成立，见 [21, 命题 3]。

对于 $\rho \in (0, \rho_0/2)$，存在区域 Γ 中的一个可数族点，记为 $\mathcal{P}_\Gamma := \{x_i \in \Gamma \mid i \in \mathrm{N}\}$，使得

$$\Gamma^{\mathbf{R}^n}_\rho = \bigcup_{x_i \in S} U_\rho(x_i).$$

此外，存在一个自然数 $N_* = C(n)$，使得对于任意 $x_i \in \mathcal{P}_\Gamma$，都存在至多

$\mathcal{P}_\Gamma$ 中的 N_* 个点，记作 $\{x_{i_1},...,x_{i_{N_*}}\}\subset\mathcal{P}_\Gamma$，满足

$$U_\rho(x_i)\cap U_\rho(x_{i_l})\neq\emptyset$$

对每个 $1\le l\le N_*$，例如参见[21, 命题 5]。基于这个开覆盖，可以构造出 $\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$ 的单位分解。存在 $\varphi_i\in C^1\big(U_\rho(x_i)\big)$，对每个 $x_i\in\mathcal{P}_\Gamma$，以及一个常数$C(N_*,n,\rho)>0$，使得

$$\begin{aligned}
&0\le\varphi_i\le 1 \quad \text{for any} \quad i\in\mathbf{N},\\
&\operatorname{supp}\big(\varphi_i\circ F_{x_i}\big)(\cdot',\eta_n)\subset\overline{B_\rho(0')} \quad \text{for any} \quad \eta_n\in(-\rho,\rho) \quad \text{and} \quad i\in\mathbf{N},\\
&\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)\equiv 1 \quad \text{for any} \quad x\in\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}, \quad \sup_{i\in\mathbf{N}}\|\nabla\varphi_i\|_{L^\infty(\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n})}\le C(N_*,n,\rho);
\end{aligned}\tag{8}$$

例如参见 [21,命题 6]。

2.2 截断与延拓

在本小节中，我们假设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个具有一致类型（α,β,K）的 C^2 区域，且满足$n\ge 2$。令 $\rho\in(0,\rho_0/2)$。对于定义在 $\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}\cap\Omega$ 中的函数 f，我们将 $f_{\overline{\text{even}}}$ 定义为 f 关于边界 Γ在 $\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$ 上的偶延拓，即，

$$f_{\text{even}}\big(\pi x+d(x)\mathbf{n}(\pi x)\big):=f\big(\pi x-d(x)\mathbf{n}(\pi x)\big)\quad\text{for}\quad x\in\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}\backslash\overline{\Omega}$$

并将 f_{odd} 定义为 f 关于边界 Γ在 $\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$ 上的奇延拓，即，

$$f_{\text{odd}}\big(\pi x+d(x)\mathbf{n}(\pi x)\big):=-f\big(\pi x-d(x)\mathbf{n}(\pi x)\big)\quad\text{for}\quad x\in\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}\backslash\overline{\Omega}.$$

对于 $x\in\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$，我们进一步定义

$$P(x):=\nabla d(\pi x)\otimes\nabla d(\pi x)=\mathbf{n}(\pi x)\otimes\mathbf{n}(\pi x),\quad Q(x):=I-P(x).$$

不难看出，$P(x)$ 表示沿 ∇d 方向的法向投影，而 $Q(x)$ 表示沿 ∇d 方向的切向投影。对于支集为 $v\in vBMOL^2(\Omega)$ 且 $\operatorname{supp}v\subseteq\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}\cap\Omega$ 的函数，我们将 $\overline{v}$ 定义为形如以下形式的延拓

$$\overline{v}(x):=(Pv_{\text{odd}})(x)+(Qv_{\text{even}})(x)\tag{9}$$

对于 $x\in\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$。由于 $\operatorname{supp}\overline{v}\subset\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$，$\overline{v}$ 可视为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上，其中对于任意 $x\in\mathbf{R}^n\setminus\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$，$\overline{v}(x)=0$。

命题 5 ([21])。设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个类型为 (α,β,K) 且具有一致 C^2 性质的区域，满足 $n\ge 2$。设 $\varepsilon\in(0,1)$。对于任意 $\rho\in(0,c_\Omega^\varepsilon/2]$，存在一个常数 $C=C(\alpha,\beta,K,\rho)>0$，使得以下估计

$$\begin{aligned}
\|v_{\text{even}}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}&\le C\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)},\\
\|\nabla d\cdot v_{\text{odd}}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}+[\nabla d\cdot v_{\text{odd}}]_{b^\nu(\Gamma)}&\le C\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

对所有满足 supp $v \subset \Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$ 且 $\nu > 0$ 的 $v \in vBMOL^2(\Omega)$ 均成立。

事实上，我们可以得到比命题 5 更强的结果。考虑一个截断函数 $\theta \in C_c^\infty(\mathbf{R})$，满足 $0 \le \theta \le 1$, $\theta(t) = 1$ 对任意 $0 < |t| < 1/2$ 成立，且 $\theta(t) = 0$ 对任意 $|t| > 3/4$成立。假设 $\varepsilon \in (0,1)$ 且 $\rho \in (0, c_\Omega^\varepsilon/2]$。令 $\theta_\rho := \theta(d(x)/\rho)$。容易验证，$\theta_\rho \in C_c^2(\mathbf{R}^n)$，且 supp $\theta_\rho \subseteq \overline{\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}}$，并且 $\theta_\rho(x) = 1$ 对 $x \in \Gamma_{\rho/2}^{\mathbf{R}^n}$成立。在本文中，对于任意子集 $D \subset \mathbf{R}^n$，我们用 r_D 表示 D上的限制算子。对于 $v \in vBMOL^2(\Omega)$，令$v_2 := (r_\Omega \theta_\rho)v$，且 $v_1 := v - v_2$。我们以与式 (9) 相同的方式将 v_2 延拓为 $\overline{v_2}$，其中 $\overline{v_2}$ 的法向分量关于 Γ 为奇函数，而切向分量关于 Γ 为偶函数，即令

$$\overline{v_2} := P(v_2)_{\mathrm{odd}} + Q(v_2)_{\mathrm{even}}.$$

根据 [21,定 理 1], 我们看到，$\overline{v} := \overline{v_2} + v_1$ 是从 v 到 $\mathbf{R}^n$ 的线性延拓，它满足 es

$$\|\overline{v}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)} + [\nabla d \cdot \overline{v}]_{b^\infty(\Gamma)} \le C\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}$$

存在某个 $C = C(\alpha, \beta, K, \rho) > 0$。一般而言，乘以光滑函数在 $BMO^\infty(\Omega)$ 中并非有界。然而，由于我们有从 $vBMOL^2(\Omega)$ 到 $BMOL^2(\mathbf{R}^n)$ 的有界线性延拓，这种乘法在 $vBMOL^2($ $\Omega)$ 中是有界的。由于 ρ_0取决于 α、β、K和可达半径 R_*，固定任意一个 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和任意一个 $\rho \in (0, c_\Omega^\varepsilon/2]$，即可推出以下乘法法则。

命题 6（[21]）。设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个类型为 (α, β, K)、具有 $n \ge 2$ 的一致 C^2 区域。设$\varphi \in C^\gamma$ (Ω) 且 $\gamma \in (0, 1)$。对于每个 $v \in vBMOL^2(\Omega)$，函数 $\varphi v \in vBMOL^2(\Omega)$ 满足

$$\|\varphi v\|_{vBMOL^2(\Omega)} \le C\|\varphi\|_{C^\gamma(\Omega)}\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}$$

其中常数为 $C = C(\alpha, \beta, K, R_*) > 0$，这里 R_* 表示 Γ 的可达半径。

2.3 与 v 对应的体势分解

在本小节中，我们假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个一致的 C^3 型区域，参数为 (α, β, K)，且满足 $n \ge 2$。我们回顾一下 [14] 中已建立的一些结果。存在常数 $\rho_* = C(\rho_0, K) > 0$，使得本小节中的所有理论对于每个 $\rho \in (0, \rho_*]$ 都成立。令 $\rho \in (0, \rho_*]$，并令 θ_ρ 为第 2.2 小节中定义的截断函数。由于现在假设 Γ 是一致的 C^3，此时 $\theta_\rho \in C_c^3(\mathbf{R}^n)$，且 supp $\theta_\rho \subset \Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$，对于任意 $x \in \Gamma_{\rho/2}^{\mathbf{R}^n}$ 都有 $\theta_\rho = 1$。此外，对于 $v \in vBMOL^2(\Omega)$，我们设 $v_2 := (r_\Omega \theta_\rho)v$，并令 $v_1 := v - v_2$。由命题 6 可知，$v_1, v_2 \in vBMOL^2(\Omega)$ 满足

$$\|v_1\|_{vBMOL^2(\Omega)} + \|v_2\|_{vBMOL^2(\Omega)} \le C\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}$$

其中某个常数 $C = C(\alpha, \beta, K, \rho) > 0$。

为了构造定理 2 中的映射 $v \mapsto q_1$，我们利用与区域 $\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$ 的覆盖 $\{U_{\rho,i}\}_{i=1}^\infty$ 相对应的单位分解 $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ 对 v_2 进行局部化。这里，对于每个 $i \in \mathbf{N}$，$U_{\rho,\ i}$ 表示$U_\rho(x_i)$，其中 $x_i \in \mathcal{P}_\Gamma$。相应于 v_1 的体势可以直接估计。

命题 7. 存在一个常数 $C(\rho)>0$，使得

$$\|\nabla q_1^1\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)} \le C(\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)},$$
$$\|\nabla q_1^1\|_{L^\infty(\Gamma_{\rho/4}^{\mathbf{R}^n})} \le C(\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}$$

对于 $q_1^1 = E * \text{散度}\ v_1$ 和 $v \in vBMOL^2(\Omega)$。特别地，

$$\left[\nabla q_1^1\right]_{b^\nu(\Gamma)} \le C(\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}$$

对于任意 $\nu < \rho/4$。

证明。由 BMO-BMO 估计 [9] 和命题 6，可得估计

$$\left[\nabla q_1^1\right]_{BMO(\mathbf{R}^n)} \le C[v_1]_{BMO(\mathbf{R}^n)} \le C(\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}.$$

考虑 $x \in \Gamma_{\rho/4}^{\mathrm{R}^n}$。由于 ∇q_1^1 在 $\Gamma_{\rho/2}^{\mathrm{R}^n}$ 中是调和的，且 $B_{\frac{\rho}{4}}(x) \subset \Gamma_{\rho/2}^{\mathrm{R}^n}$，调和函数的平均值性质蕴含

$$\nabla q_1^1(x) = \frac{C_n}{\rho^n}\int_{B_{\frac{\rho}{4}}(x)} \nabla q_1^1(y)\,dy,$$

也就是说，我们可以用 $C(\rho)\|\nabla q_1^1\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ 估计 $|\nabla q_1^1(x)|$。由于与 $\nabla^2 E$ 的卷积对任意 $1<p<\infty$ 在 L^p 中有界，参见例如 [18, 定理 5.2.7 和定理 5.2.10]，，可得

$$\|\nabla q_1^1\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le C\|v_1\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le C\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

因此，估计

$$|\nabla q_1^1(x)| \le C(\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}$$

对任意 $x \in \Gamma_{\rho/4}^{\mathrm{R}^n}$ 均成立。 □

对于 $i \in \mathbf{N}$，我们按照命题 5 中的方法延拓 $(r_\Omega\varphi_i)v_2$，得到 $\overline{(r_\Omega\varphi_i)v_2}$，并令

$$\overline{v_2} := \sum_{i=1}^{\infty} \overline{(r_\Omega\varphi_i)v_2}.$$

事实上，只要 $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ 是 $\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$ 的单位分解，此延拓便与 $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ 的选取无关。接下来令

$$\overline{v_2}^{\tan} := Q\,\overline{v_2} = \sum_{i=1}^{\infty} Q\left((r_\Omega\varphi_i)_{\mathrm{even}}(v_2)_{\mathrm{even}}\right).$$

对于 $i \in \mathbf{N}$，我们有 $\varphi_i \in C^2(U_{\rho,\ i})$，因为在这种情况下 Γ 具有一致的正则性 C^3。为简化记号，我们将 $(r_\Omega\varphi_i)_{\mathrm{even}}(v_2)_{\mathrm{even}}$ 记为 $v_{2,\ i}$。根据命题 5 和 6，我们可以很容易地推得，对于任意 $i \in \mathbf{N}$，$v_{2,\ i} \in BMOL^2(\mathbf{R}^n)$，且支集 $v_{2,\ i} \subset U_{\rho,\ i}$ 满足估计

$$\|v_{2,i}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)} \le C(\rho)\|v_{2,i}\|_{BMOL^2\left(\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}\right)} \le C(\alpha,\beta,K,\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}. \tag{10}$$

我们进一步将 $Q\,v_{2,\ i}$ 记为 $w_i^{\tan}$。现在，我们准备构造与.....相对应的合适势

$$\overline{v_2}^{\tan} := \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{\tan} = \sum_{i=1}^{\infty} Q\,v_{2,i}.$$

命题 8（[14]）。对于每个 $i \in \mathbf{N}$，存在有界线性算子 $v \longmapsto p_{i,\ 1}^{\tan}$ 和 $v \longmapsto p_{i\ 2}^{\tan}$，其将 $vBMOL^2(\Omega)$ 映射到 $L^\infty(\mathbf{R}^n)$，使得

$$-\Delta p_i^{\tan} = \operatorname{div} w_i^{\tan} \quad in \quad U_{2\rho,i} \cap \Omega$$

其中 $p_i^{\tan} := p_{i,\ 1}^{\tan} + p_{i\ 2}^{\tan}$，支集 $p_{i,\ 1}^{\tan} \subset U_{2\rho,\ i}$。此外，存在一个常数 $C = C(K,\rho) > 0$，使得

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla p_{i,1}^{\tan}\right\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)} &\le C \left\|v_{2,i}\right\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}, \\
\left\|\nabla p_{i,2}^{\tan}\right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} &\le C \left\|v_{2,i}\right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}, \\
\sup_{x\in\Gamma,\, r<\rho} r^{-n} \int_{B_r(x)} \left|\nabla d \cdot \nabla p_i^{\tan}\right| \, dy &\le C \left\|v_{2,i}\right\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}
\end{aligned}$$

其中存在某个 $p > n$。

我们已经获得了体势在边界附近关于其切向分量的估计，剩下的工作是处理来自 $\overline{v}_2^{\mathrm{nor}} := \overline{v}_2 - \overline{v}_2^{\tan}$ 的贡献。注意到 $\overline{v}_2^{\mathrm{nor}}$ 可分解为

$$\overline{v}_2^{\mathrm{nor}} = \sum_{i=1}^{\infty} P\left((r_\Omega \varphi_i)_{\mathrm{even}} (v_2)_{\mathrm{odd}}\right).$$

为简化记号，对于每个 $i \in \mathbf{N}$，我们将 $\nabla d \cdot \left((r_\Omega \varphi_i)_{\mathrm{even}} (v_2)_{\mathrm{odd}}\right)$ 记为 $f_{2,\ i}$。在此情形下，对于任意 $i \in \mathbf{N}$，我们有 $f_{2,\ i} \in BMOL^2(\mathbf{R}^n)$，且支集 $f_{2,\ i} \subset U_{\rho,\ i}$ 满足估计

$$\|f_{2,i}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)} \le C(\rho) \|f_{2,i}\|_{BMOL^2\left(\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}\right)} \le C(\alpha,\beta,K,\rho) \|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}.$$

我们进一步将 $f_{2,i} \nabla d$ 记为 w_i^{nor}。采用类似的证明思路，我们可以建立与 $\overline{v}_2^{\mathrm{nor}}$ 对应的适当势函数。

命题 9（[14]）。对于每个 $i \in \mathbf{N}$，都存在有界线性算子 $v \longmapsto p_{i,1}^{\mathrm{nor}}$ 和 $v \longmapsto p_{i\ 2}^{\mathrm{nor}}$，从 $vBMOL^2(\Omega)$ 到 $L^\infty(\mathbf{R}^n)$，使得

$$-\Delta p_i^{\mathrm{nor}} = \operatorname{div} w_i^{\mathrm{nor}} \quad in \quad U_{2\rho,i} \cap \Omega$$

其中 $p_i^{\mathrm{nor}} := p_{i,\ 1}^{\mathrm{nor}} + p_{i\ 2}^{\mathrm{nor}}$，支集 $p_{i,\ 1}^{\mathrm{nor}} \subset U_{2\rho,\ i}$。此外，存在一个常数 $C = C(K,\rho) > 0$使得

$$\begin{aligned}
\|\nabla p_{i,1}^{\mathrm{nor}}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)} &\le C \|f_{2,i}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}, \\
\|\nabla p_{i,2}^{\mathrm{nor}}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} &\le C \|f_{2,i}\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}, \\
\sup_{x\in\Gamma,\, r<\rho} r^{-n} \int_{B_r(x)} |\nabla d \cdot \nabla p_i^{\mathrm{nor}}| \, dy &\le C \|f_{2,i}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}
\end{aligned}$$

其中有一些 $p > n$。

注 10. 具体来说，命题 8 实际上是 [14, 命题 4]，其证明见[14, 第 3 节。4], 命题 9 实际上是 [14, 命题 5]，其证明见 [14, 第 3 节。5]对于命题 8，在 $x_i \in \mathcal{P}_\Gamma$处的局部法坐标系中，$p_{i\,1}^{\tan}$, 构造如下

$$F_{x_i}^{-1}\big(p_{i,1}^{\tan}\big) = -\theta A^{-1}(I - BA^{-1})^{-1}\nabla'_\eta F_{x_i}^{-1}\big(v_{2,i}\big),$$
$$A = -\Delta_\eta, \quad B = \sum_{1\le i,j\le n-1} \partial_{\eta_i}(b_{ij}\theta)\partial_{\eta_j}$$

其中 θ 表示 $V_{4\rho}$ 和 F_{x_i} 中的某个截断函数： $V_{\rho_0} \to U_{\rho_0}(x_i)$ 是 $U_{\rho_0}(x_i)$中的法向坐标变换。由于 $\partial_{\eta_k}A^{-1}\partial_{\eta_\ell}$在 BMO [9]中有界，并且对于任意k，在 $L^p(1 < p < \infty)$中也有界，见例如 [19, 定理 5.2.7 和定理 5.2.10],，因此 $BMO \cap L^2$ 范数 $\nabla p_{i\,1}^{\tan}$, 可由 $BMO \cap L^2$ 范数 $v_{2,\ i}$控制。另一方面，$p_{i\,2}^{\tan}$, 是由牛顿势 E 与$v_{2,\ i}$中的某个函数卷积构造的，因此，当 p 充分接近 1 时， ∇E 局部属于 L^p可积函数，据此可直接利用 H¨older 不等式估计$\nabla p_{i\,2}^{\tan}$, 的L^∞ 范数。类似地，对于命题 9， $p_{i\,1}^{\mathrm{nor}}$, 构造如下

$$F_{x_i}^{-1}\big(p_{i,1}^{\mathrm{nor}}\big) = -\theta A^{-1}(I - BA^{-1})^{-1}\partial_{\eta_n}F_{x_i}^{-1}\big(f_{2,i}\big),$$
$$A = -\Delta_\eta, \quad B = \sum_{1\le i,j\le n-1} \partial_{\eta_i}(b_{ij}\theta)\partial_{\eta_j}$$

并且$p_{i\,2}^{\mathrm{nor}}$, 是由牛顿势 E 与某个 $f_{2,\ i}$函数的卷积构造而成。$\nabla p_{i\,1}^{\mathrm{nor}}$, 的 $BMO \cap L^2$ 估计以及 $\nabla p_{i\,2}^{\mathrm{nor}}$, 的 L^∞ 估计，可以通过与命题 8 完全相同的论证得出。命题 8 和命题 9 的表述为何看起来不同于 [14, 命题 4] 和 [14, 命题 5]，原因在于，当 Ω 是有界区域时，空间 $vBMO(\Omega)$ 连续嵌入于 $L^1(\Omega)^n$。根据$L^1 - BMO$ 插值不等式，$v_{2,\ i}$ 和$f_{2,\ i}$ 的 L^p 范数可由它们的$vBMO$ 范数控制，其中任意 $1 < p < \infty$ 均成立，参见例如 [5, 引理 5], [23, 定理 2.2]。如果 Ω 是一般的均匀 C^3 区域，那么 $vBMO^{\infty,\ \infty}(\Omega)$ 不一定连续嵌入于$L^1(\Omega)^n$。这就是我们以不同于 [14]的形式陈述命题 8 和命题 9 的原因。

2.4 与 v对应的体势

我们接受命题 8 和 9。与 v_2 对应的体势可通过对所有 i，将 $p_i^{\tan}$ 和 p_i^{nor} 截断到 $U_{2\rho,i}$ 后求和构造。我们定义 $\mathcal{Q}_\Gamma := \{U_{\rho,i} \,|\, x_i \in \mathcal{P}_\Gamma\}$。

定理 2 的证明。令 $i \in \mathbb{N}$。我们首先考虑切向部分的贡献。由于 Γ 一致地 C^3，存在一个截断函数 $\theta_i \in C_c^2(U_{2\rho,i})$，使得 $\theta_i = 1$ 属于$U_{\rho,i}$,$0 \le \theta_i \le 1$，并且估计

$$\|\theta_i\|_{C^2(U_{2\rho,i})} \le C(\rho)$$

对于某个与 i 无关的常数 $C(\rho) > 0$，该结论成立。接下来我们设

$$q_{1,i}^{\tan} := \theta_i p_i^{\tan} + E * \left(p_i^{\tan}\Delta\theta_i + 2\nabla\theta_i \cdot \nabla p_i^{\tan}\right).$$

注意，命题 8 保证了

$$-\Delta q_{1,i}^{\tan}=-\Delta(\theta_i p_i^{\tan})+p_i^{\tan}\Delta\theta_i+2\nabla\theta_i\cdot\nabla p_i^{\tan}=\theta_i\,\mathrm{div}\,w_i^{\tan}=\mathrm{div}\,w_i^{\tan}$$

在 Ω 中，支集$w_i^{\tan}\subset U_{\rho,i}$。我们定义

$$q_1^{\tan}:=\sum_{i=1}^{\infty}q_{1,i}^{\tan}.$$

由于对所有 i，支集$p_{i,1}^{\tan}\subset U_{2\rho,i}$，由命题 8 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\|\nabla(\theta_i p_{i,1}^{\tan})\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}&\le\sum_{i=1}^{\infty}C(\rho)\Big(\big\|p_{i,1}^{\tan}\big\|_{L^\infty(U_{2\rho,i})}+\big\|\nabla p_{i,1}^{\tan}\big\|_{L^2(U_{2\rho,i})}\Big)\\&\le C(K,\rho)\sum_{i=1}^{\infty}\|v_{2,i}\|_{L^2(U_{\rho,i})}.\end{aligned}$$

由于我们对 $\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$ 的单位分解是局部有限的（见第 2.1 小节），我们可以推出

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|v_{2,i}\|_{L^2(U_{\rho,i})}\le N_*\big\|(v_2)_{\mathrm{even}}\big\|_{L^2\left(\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}\right)}\le 8N_*\|v_2\|_{L^2(\Omega)}\le 8N_*\|v\|_{L^2(\Omega)},$$

其中 N_* 是表征 $\mathcal{Q}_\Gamma$ 局部有限性的常数，其含义是 $\mathcal{Q}_\Gamma$ 中的任意元素至多与 N_* 个其他 $\mathcal{Q}_\Gamma$元素相交。设 B 是半径为 $r(B)<\rho$的球。如果 B 与 $\Gamma_{2\rho}^{\mathbf{R}^n}$ 不相交，那么

$$\frac{1}{|B|}\int_B\left|\nabla(\theta_i p_{i,1}^{\tan})-\big(\nabla(\theta_i p_{i,1}^{\tan})\big)_B\right|\,dy=0$$

对每个 $i\in\mathbf{N}$。如果 B 与 $\Gamma_{2\rho}^{\mathbf{R}^n}$ 相交，那么 B 至多与 $\{U_{2\rho}(x_i)\ \big|x_i\in\mathcal{P}_\Gamma\}$的 N_* 个邻域相交，见 [21, 引理 11]。因此，在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B|}\int_B\left|\sum_{i=1}^{\infty}\nabla(\theta_i p_{i,1}^{\tan})-\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nabla(\theta_i p_{i,1}^{\tan})\right)_B\right|\,dy\le\sum_{\ell=1}^{N_*}[\nabla(\theta_{i_\ell}p_{i_\ell,1}^{\tan})]_{BMO(\mathbf{R}^n)}\\&\le\sum_{\ell=1}^{N_*}C(\rho)\Big(\big\|p_{i_\ell,1}^{\tan}\big\|_{L^\infty(U_{2\rho,i_\ell})}+\big\|\nabla p_{i_\ell,1}^{\tan}\big\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}\Big)\le C(K,\rho)\sum_{\ell=1}^{N_*}\|v_{2,i_\ell}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}.\end{aligned}$$

因此，由估计式 (10) 可推出

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\nabla(\theta_i p_{i,1}^{\tan})\right\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}\le C(\alpha,\beta,K,\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}.$$

注意，对于任意 $i\in\mathbf{N}$ 以及每个 $x\in\Gamma_{2\rho}^{\mathbf{R}^n}$，$x$，$i$ 的支集$\theta_i p_i^{\tan}{}_{,2}\subset U_{2\rho,}$至多属于 N_*

$\mathcal{Q}_\Gamma$ 的元素。再次根据命题 8，我们可以推得

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}\nabla(\theta_i p_{i,2}^{\tan})\right]_{BMO(\mathbf{R}^n)} \le 2\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\nabla(\theta_i p_{i,2}^{\tan})\right\|_{L^\infty(U_{2\rho,i})} \le C(K,\rho)N_*\sup_{i\in\mathbf{N}}\|v_{2,i}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}.$$

此外，由于

$$\|\nabla(\theta_i p_{i,2}^{\tan})\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le |U_{2\rho,i}|^{\frac{1}{2}}\|\nabla(\theta_i p_{i,2}^{\tan})\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \le C(\rho)\|v_{2,i}\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$$

在某个 $p>n$ 下，由 $BMO-L^2$ 插值不等式可得

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\nabla(\theta_i p_{i,2}^{\tan})\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\le \sum_{i=1}^{\infty}\|\nabla(\theta_i p_{i,2}^{\tan})\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le C(\rho)\sum_{i=1}^{\infty}\|v_{2,i}\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\\ &\le C(\rho)N_*\|(v_2)_{\mathrm{even}}\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \le C(\rho)N_*\|(v_2)_{\mathrm{even}}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)}.\end{aligned}$$

因此，由命题 5 可得

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\nabla(\theta_i p_i^{\tan})\right\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)} \le C(\alpha,\beta,K,\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}. \tag{11}$$

令 $f_i^{\tan}=p_i^{\tan}\Delta\theta_i+2\nabla\theta_i\cdot\nabla p_i^{\tan}$。由于支集 $f_{\tan i}\subset U_{2\rho,i}$，可得

$$\|f_i^{\tan}\|_{L^1(U_{2\rho,i})} \le |U_{2\rho,i}|^{\frac{1}{2}}\|f_i^{\tan}\|_{L^2(U_{2\rho,i})}.$$

通过上述证明估计 (11) 的相同论证，我们可以证明

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}f_i^{\tan}\right]_{BMO(\mathbf{R}^n)}+\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i^{\tan}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \le C(\alpha,\beta,K,\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}.$$

由 $BMO-L^1$ 插值（参见 [5, 引理 5]），我们看到估计 e

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}f_i^{\tan}\right\|_{L^s(\mathbf{R}^n)} &\le C(n)\left\|\sum_{i=1}^{\infty}f_i^{\tan}\right\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}^{\frac{1}{s}}\left[\sum_{i=1}^{\infty}f_i^{\tan}\right]_{BMO(\mathbf{R}^n)}^{1-\frac{1}{s}}\\ &\le C(n)\left\|\sum_{i=1}^{\infty}f_i^{\tan}\right\|_{BMOL^1(\mathbf{R}^n)}\end{aligned} \tag{12}$$

对任意 $1<s<\infty$ 都成立。由于对任意 $1<p'<n/(n-1)$，∇E 属于 $L^{p'}\big(B_{6\rho}(0)\big)$，因此

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\left|\nabla E*\left(\sum_{i=1}^{\infty}f_i^{\tan}\right)(x)\right| \le C(\rho)\left\|\sum_{i=1}^{\infty}f_i^{\tan}\right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$$

对所有 $p>n$ 均成立。因此，我们有

$$\left\|\nabla E*\left(\sum_{i=1}^{\infty}f_i^{\tan}\right)\right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \le C(\alpha,\beta,K,\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}.$$

由于卷积核 $\nabla E(x)$ 被 $|x|^{-(n-1)}$ 的某个常数倍所控制，根据著名的 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式（例如参见 [1, 定理 1.7], ），我们推得

$$\left\|\nabla E * \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^{\tan}\right)\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C(n)\left\|\sum_{i=1}^{\infty} f_i^{\tan}\right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(\mathbf{R}^n)}$$

因此，由估计 (12) 可知，

$$\left\|\nabla E * \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^{\tan}\right)\right\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)} \leq C(\alpha,\beta,K,\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}.$$

结合估计 (11)，最终可得，

$$\|\nabla q_1^{\tan}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)} \leq C(\alpha,\beta,K,\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}.$$

根据命题 8，关于 $q_1^{\tan}$ 的边界控制可估计为

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\Gamma,\, r<\rho} r^{-n}\int_{B_r(x)} |\nabla d\cdot\nabla q_1^{\tan}|\, dy &\leq C(K,\rho)N_* \sup_{i\in\mathbf{N}}\|v_{2,i}\|_{vBMOL^2(\Omega)}\\ &\leq C(\alpha,\beta,K,\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}\end{aligned}$$

因为分割 $\mathcal{Q}_\Gamma$ 是 $\Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n}$ 的一个局部有限开覆盖。

对于法向分量带来的贡献，我们以类似的方式设定，

$$q_{1,i}^{\mathrm{nor}} := \theta_i p_i^{\mathrm{nor}} + E * (p_i^{\mathrm{nor}}\Delta\theta_i + 2\nabla\theta_i\cdot\nabla p_i^{\mathrm{nor}})$$

and

$$q_1^{\mathrm{nor}} := \sum_{i=1}^{\infty} q_{1,i}^{\mathrm{nor}}.$$

利用命题 9，并重复上述处理 $q_1^{\tan}$ 情形的整个论证，我们可以证明

$$\|\nabla q_1^{\mathrm{nor}}\|_{BMOL^2(\mathbf{R}^n)} + [\nabla d\cdot\nabla q_1^{\mathrm{nor}}]_{b^\rho(\Gamma)} \leq C(\alpha,\beta,K,\rho)\|v\|_{vBMOL^2(\Omega)}$$

同理，可以构造与 v 相对应的体势 q_1：

$$q_1 := q_1^1 + q_1^{\tan} + q_1^{\mathrm{nor}}$$

其中， q_1^1 是命题 7 中定义的、对应于 v_1 的体势。根据我们的构造，很容易看出

$$\begin{aligned}-\Delta q_1 &= -\Delta q_1^1 - \Delta q_1^{\tan} - \Delta q_1^{\mathrm{nor}}\\ &= \operatorname{div} v_1 + \sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{div} w_i^{\tan} + \sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{div} w_i^{\mathrm{nor}}\\ &= \operatorname{div}(v_1+v_2) = \operatorname{div} v\end{aligned}$$

在 Ω 中。证明完成。 □

3 有界平均振荡向量场的法向迹

设 $\mathbb{R}^n_h$ 是类型为 (K) 的扰动 $C^{2+\kappa}$ 半空间，满足 $\kappa \in (0,1)$ 和 $n \geq 3$。令 $R_* > 0$ 表示边界 $\Gamma = \partial\mathbb{R}^n_h$的可达半径。我们已经证明，存在一个常数$C = C(\alpha, \beta, K, R_*) > 0$，使得估计

$$\|w \cdot \mathbf{n}\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C\|w\|_{vBMOL^2\left(\mathbf{R}^n_h\right)}$$

对任意 $w \in vBMOL^2\left(\mathbb{R}^n_h\right)$ 均成立，见 [13, 定理 22]。本节中，我们希望进一步估计 v 在 Γ 上的法向迹的 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 范数，其中 $w \in vBMOL^2\left(\mathbb{R}^n_h\right)$。

为简化记号，从现在起，我们定义对任意 $\delta > 0$,

$$B'_\Gamma(\delta) := \left\{x \in \Gamma \,\middle|\, |x'| < \delta\right\}, \quad B'_\Gamma(\delta)^{\mathrm{c}} := \left\{x \in \Gamma \,\middle|\, |x'| \geq \delta\right\}$$

并将 $B'_\Gamma(\delta)$ 的表面积记为 Λ_δ，即,

$$\Lambda_\delta := \int_{B'_\Gamma(\delta)} 1 \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_{|y'|<\delta} \left(1 + \left|\nabla' h(y')\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} dy'.$$

此外，对于 $h \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^{n-1})$，我们定义常数 $C_s(h) := 1 + \|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}$。

3.1 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ 与 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 之间的同构

在定义 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 之前，我们先刻画齐次分数阶 Sobolev 空间$\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$。回顾一下，若 $f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$，则 $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$，且 Gagliardo 半范数

$$[f]^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} := \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{|f(x') - f(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy' < \infty.$$

更准确地说，若 $f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$，则有

$$\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} = C(n)[f]_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}$$

其中的某个常数 $C(n)$ 仅依赖于维数 n；例如参见 [1, 命题 137]。然而，Gagliardo 半范数 $[f]_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}$ 有限并不意味着 $f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$。$\mathbb{R}^{n-1}$ 中的常函数就是典型的反例。由于我们考虑的是 $n \geq 3$ 的情形，因此有一个非常重要的性质： $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ 可以连续嵌入到 $L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ 中，即存在一个常数 $C(n) > 0$，使得估计

$$\|f\|_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \leq C(n)\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \tag{13}$$

对任意 $f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 都成立，例如参见 [1, 定理 138]。因此，我们期望 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 可以与空间

$$\dot{G}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1}) := \left\{ f \in L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1}) \;\middle|\; [f]_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} < \infty \right\}.$$

幸运的是，这一预期确实成立。Gagliardo 半范数 $[\cdot]_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}$ 实际上是 $\dot{G}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 上的一个范数。空间 $\dot{G}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 在范数 $[\cdot]_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}$ 下是完备的，并且以 $C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ 为稠密子空间；见 [6, 定理 3.1]。由于 $C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1}) \subset \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$，我们可知，对于任意 $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$，$\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}$ 和 $[f]_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}$ 是等价的。因此，空间 $\dot{G}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 与 $C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ 在范数 $\|\cdot\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}$ 下的完备化相同，即有

$$\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1}) = \dot{G}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1}).$$

之所以在范数 $\|\cdot\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}$ 下将 $C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ 完备化确实得到 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$，原因如下。对于 $\rho > 0$，我们可以构造一个截断函数 $\theta_{2\rho} \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$，使得 $0 \le \theta_{2\rho} \le 1 \text{in } \mathbf{R}^{n-1}$、$\theta_{2\rho} = 1 \text{ in } B_\rho(0')$ 以及 $\theta_{2\rho} = 0 \text{ in } B_{2\rho}(0')^c$。注意，对于任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-1})$，其中 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-1})$ 表示 Schwartz 空间，当 $\rho \to \infty$ 时，$\theta_{2\rho} f$ 在范数 $\|\cdot\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}$ 下收敛于 f（该断言将在稍后第 3.3 小节出现的命题 17 的证明中得到证明）。因此，回顾空间 $\mathcal{S}_0(\mathbf{R}^{n-1})$ 在 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 中稠密，其中 $\mathcal{S}_0(\mathbf{R}^{n-1})$ 表示 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-1})$ 的子空间，其傅里叶变换在原点附近为零；参见例如 [1,命题 1。35], 我们可以推得

$$\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1}) = \overline{C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}^{\|\cdot\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}}.$$

对于定义在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 上的函数 f，我们可以通过如下方式定义一个相应的函数 f^h，使其定义在 Γ 上：

$$f^h\big(y', h(y')\big) := f(y'), \quad \text{for all} \quad y' \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

将映射 $f \mapsto f^h$ 记为 T_h，即 $f^h = T_h(f)$。由于在曲面上考虑傅里叶变换并不自然，我们沿用上文对 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 的刻画来定义齐次分数阶 Sobolev 空间 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$。若 $f^h \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 满足 $f^h \in L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma)$，则称其为：

$$[f^h]^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} := \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\left|f^h(x) - f^h(y)\right|^2}{|x-y|^n} \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) < \infty.$$

空间 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是一个巴拿赫空间（实际上是希尔伯特空间），配备范数 $[\cdot]_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$。为避免歧义，我们简单地使用范数记号 $\|\cdot\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ 表示 $[\cdot]_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$。

最后，我们想指出，

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})} &\le \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} |f(y')|^{\frac{2n-2}{n-2}} \big(1+\big|\nabla' h(y')\big|^2\big)^{\frac12}\, dy'\right)^{\frac{n-2}{2n-2}} \\ &= \|f^h\|_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma)} \le C_s(h)^{\frac{n-2}{2n-2}} \|f\|_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})},\end{aligned}$$

也就是说，当且仅当 $f^h \in L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma)$ 时，$f \in L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})$。

引理 11. 映射 $T_h\colon \dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1}) \to \dot H^{\frac12}(\Gamma)$ 是一个同构。

证明. 设 $f \in \dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})$。我们自然有

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\big|f^h(x)-f^h(y)\big|^2}{|x-y|^n}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{\big|f^h\big(x',h(x')\big)-f^h\big(y',h(y')\big)\big|^2}{\big|\big(x'-y',h(x')-h(y')\big)\big|^n} \big(1+\big|\nabla' h(x')\big|^2\big)^{\frac12}\big(1+\big|\nabla' h(y')\big|^2\big)^{\frac12}\, dx'\, dy' \\ &\le C_s(h)^2 \int_{\mathbf{R}^{n-1}}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{|f(x')-f(y')|^2}{|x'-y'|^n}\, dx'\, dy'.\end{aligned}$$

因此，f^h 的 $\dot H^{\frac12}(\Gamma)$ 估计为

$$\|f^h\|_{\dot H^{\frac12}(\Gamma)} \le C_s(h)\|f\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}. \tag{14}$$

设 $f^h \in \dot H^{\frac12}(\Gamma)$。关于 f^h，我们定义 $f(y') := f^h\big(y',h(y')\big)$，对任意 $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$ 均成立。由中值定理可知，对任意 $x', y' \in \mathbf{R}^{n-1}$，估计 $|h(x') - h(y')| \le \|\nabla' h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}|x'-y'|$ 成立。因此，对任意 $x, y \in \Gamma$，我们有

$$\frac{1}{|x'-y'|} \le \frac{C_s(h)}{\big|\big(x'-y',h(x')-h(y')\big)\big|} = \frac{C_s(h)}{|x-y|}.$$

因此，我们推得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{\big|f(x')-f(y')\big|^2}{|x'-y'|^n}\, dx'\, dy' \\ &\le C_s(h)^n \int_{\mathbf{R}^{n-1}}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{\big|f^h\big(x',h(x')\big)-f^h\big(y',h(y')\big)\big|^2}{\big|\big(x'-y',h(x')-h(y')\big)\big|^n} \big(1+\big|\nabla' h(x')\big|^2\big)^{\frac12}\big(1+\big|\nabla' h(y')\big|^2\big)^{\frac12}\, dx'\, dy' \\ &= C_s(h)^n \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\big|f^h(x)-f^h(y)\big|^2}{|x-y|^n}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\|f\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})} \le C(n)C_s(h)^{\frac n2}\|f^h\|_{\dot H^{\frac12}(\Gamma)}. \tag{15}$$

□

作为引理 11 的一个应用，我们得到以下嵌入结果。

推论 12. $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 连续嵌入于 $L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma)$ 中。

证明。设 $f^h \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 和 $f = T_h^{-1}(f^h)$。由于 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 连续嵌入于$L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})$，由估计式（15）可知

$$\begin{aligned}\|f^h\|_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma)} &\le C_s(h)^{\frac{n-2}{2n-2}}\|f\|_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \le C(n)C_s(h)^{\frac{n-2}{2n-2}}\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\\ &\le C(n)C_s(h)^{\frac{n^2-2}{2n-2}}\|f^h\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

□

3.2 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 与 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 之间的同构

进一步回顾一下，若一个缓增分布 g 满足 $\widehat{g} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^{n-1})$ 满足下式，则称其属于齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$

$$\|g\|^2_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} := \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |\xi'|^{-1}\left|\widehat{g}(\xi)\right|^2 d\xi' < \infty.$$

由于对所有 $n \ge 3$, $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 都由 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 的对偶空间刻画，即有

$$\|g\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} = \sup_{\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\le 1}\left|\int_{\mathbf{R}^{n-1}} g(y')f(y')\,dy'\right|,$$

例如参见 [1, 命题 1.36]。为了建立 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 与 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的对偶空间之间的同构，我们需要 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 的以下乘法法则。

命题 13. 设 $\rho > 0$ 和 $\zeta \in C^1(\mathbf{R}^{n-1})$ 满足：ζ 在 $B_\rho(0')^c$ 中恒为一个常数。那么对任意 $f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$，都有满足下式的 $\zeta f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$

$$\|\zeta f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \le C(n)\big(\|\zeta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + \rho\|\nabla'\zeta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\big)\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

证明. 设 $f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$。对于 $x', y' \in \mathbf{R}^{n-1}$，由三角不等式可知

$$\left|\zeta(x')f(x') - \zeta(y')f(y')\right|^2 \le 2\|\zeta\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\left|f(x') - f(y')\right|^2 + 2\left|f(x')\right|^2\left|\zeta(x') - \zeta(y')\right|^2.$$

由于 ζ 在 $B_\rho(0')^c$ 中恒为一个常数，因此只需估计

$$\begin{aligned}&\int_{B_\rho(0')}\int_{B_{2\rho}(0')^c}\left|f(x')\right|^2\frac{\left|\zeta(x') - \zeta(y')\right|^2}{|x'-y'|^n}\,dx'\,dy' + \int_{B_{2\rho}(0')^c}\int_{B_\rho(0')}\left|f(x')\right|^2\frac{\left|\zeta(x') - \zeta(y')\right|^2}{|x'-y'|^n}\,dx'\,dy'\\ &+ \int_{B_{2\rho}(0')}\int_{B_{2\rho}(0')}\left|f(x')\right|^2\frac{\left|\zeta(x') - \zeta(y')\right|^2}{|x'-y'|^n}\,dx'\,dy' = I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

对于 $|x'| \ge 2\rho$ 和 $|y'| < \rho$，有 $|x'-y'| \ge |x'| - \rho$。因此，由 H¨older 不等式以及

$\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 嵌入到 $L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 中（见估计（13）），我们可得

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le C(n)\rho^{n-1}\|\zeta\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\left(\int_{B_{2\rho}(0')^{\mathrm{c}}}\left|f(x')\right|^{\frac{2n-2}{n-2}}\,dx'\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\left(\int_{B_{2\rho}(0')^{\mathrm{c}}}\frac{1}{(|x'|-\rho)^{n^2-n}}\,dx'\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\le C(n)\rho^{n-1}\|\zeta\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\|f\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\left(\sum_{i=0}^{n-2}\int_\rho^\infty\frac{\rho^i}{r^{n^2-2n+2+i}}\,dr\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\le C(n)\|\zeta\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\|f\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}.
\end{aligned}
$$

同理，对于 $|y'|\ge 2\rho$ 和 $|x'|<\rho$，我们也有 $|x'-y'|\ge|y'|-\rho$。再次由 H¨older 不等式和估计（13），可得

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le C(n)\rho\|\zeta\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\|f\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\int_{B_{2\rho}(0')^{\mathrm{c}}}\frac{1}{(|y'|-\rho)^n}\,dy'\\
&\le C(n)\rho\|\zeta\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\|f\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\left(\sum_{i=0}^{n-2}\int_\rho^\infty\frac{\rho^{n-2-i}}{r^{n-i}}\,dr\right)\le C(n)\|\zeta\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\|f\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}.
\end{aligned}
$$

由中值定理可知，$|\zeta(x')-\zeta(y')|\le\|\nabla'\zeta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}|x'-y'|$。因此，再次由 H¨older 不等式和估计（13），最终可得

$$
\begin{aligned}
I_3 &\le \|\nabla'\zeta\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\int_{B_{2\rho}(0')}\left|f(x')\right|^2\int_{B_{2\rho}(0')}\frac{1}{|x'-y'|^{n-2}}\,dy'\,dx'\\
&\le C(n)\rho^2\|\nabla'\zeta\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\|f\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\le C(n)\rho^2\|\nabla'\zeta\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\|f\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}.
\end{aligned}
$$

□

根据 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 和 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 之间的对偶关系，我们定义齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 为 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的对偶空间，其中

$$
\|g^h\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}:=\sup_{\|f^h\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\le 1}\left|\int_\Gamma g^h(y)f^h(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right|
$$

对于 $g^h\in\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$。根据 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 与 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 同构这一事实，我们可以证明它们的对偶空间也彼此同构。

引理14。映射 $T_h\colon \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})\to\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是一个同构。

证明。设 $g\in\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 且 $g^h=T_h(g)$。对于任意 $f^h\in\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$，有

$$
\int_\Gamma g^h(y)f^h(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}g(y')f(y')\left(1+\left|\nabla'h(y')\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}dy'.
$$

由于 $\left(1+|\nabla'h(y')|^2\right)^{\frac{1}{2}}\in C^1(\mathbf{R}^{n-1})$ 且 $\left(1+\left|\nabla'h(y')\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=1$ 属于 $B_{R_h}(0')^{\mathrm{c}}$，根据命题 13

我们推得

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma g^h(y)f^h(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right| &\le \|g\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}\|\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{\frac12} f\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}\\ &\le C(n)C_s(h)C_1(h)\|g\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}\|f\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}.\end{aligned}$$

其中

$$C_1(h) := 1 + R_h\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

利用估计式（15），通过用 $\|f^h\|_{\dot H^{\frac12}(\Gamma)}$ 控制 $\|f\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}$，我们得到

$$\|g^h\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)} \le C(n)C_s(h)^{\frac{n}{2}+1}C_1(h)\|g\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}. \tag{16}$$

设 $g^h \in \dot H^{-\frac12}(\Gamma)$ 且 $g = T_h^{-1}(g^h)$。对于任意 $f \in \dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})$，有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} g(y')f(y')\,dy' &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} g(y')\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12} f(y')\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{\frac12}\,dy'\\ &= \int_\Gamma T_h\left(\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12}\right) g^h f^h\,d\mathcal{H}^{n-1}(y).\end{aligned}$$

由于我们将 $\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$ 定义为 $\dot H^{\frac12}(\Gamma)$ 的对偶空间，因此对偶关系表明

$$\left|\int_{\mathbf{R}^{n-1}} g(y')f(y')\,dy'\right| \le \left\|T_h\left(\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12}\right) g^h\right\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}\|f^h\|_{\dot H^{\frac12}(\Gamma)}. \tag{17}$$

注意，对于任意 $f_*^h \in \dot H^{\frac12}(\Gamma)$，有

$$\left|\int_\Gamma T_h\left(\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12}\right) g^h f_*^h\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right| \le \|g^h\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}\left\|T_h\left(\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12}\right) f_*^h\right\|_{\dot H^{\frac12}(\Gamma)}.$$

设 $f_* = T_h^{-1}(f_*^h)$。由估计式（14）可知

$$\left\|T_h\left(\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12}\right) f_*^h\right\|_{\dot H^{\frac12}(\Gamma)} \le C_s(h)\left\|\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12} f_*\right\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

由于 $\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12} \in C^1(\mathbf{R}^{n-1})$ 和 $\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12}$ 在 $B_{R_h}(0')^{\mathrm{c}}$ 中也恒等于 1，再次由命题 13 可得

$$\left\|\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12} f_*\right\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})} \le C(n)C_s(h)C_1(h)\|f_*\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

因此，由估计式（15）可得

$$\begin{aligned}&\left\|T_h\left(\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12}\right) g^h\right\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)} = \sup_{\|f_*^h\|_{\dot H^{\frac12}(\Gamma)}\le 1}\left|\int_\Gamma T_h\left(\big(1+\left|\nabla' h(y')\right|^2\big)^{-\frac12}\right) g^h f_*^h\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right|\\ &\le \sup_{\|f_*^h\|_{\dot H^{\frac12}(\Gamma)}\le 1} C(n)C_s(h)^2C_1(h)\|g^h\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}\|f_*\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})} \le C(n)C_s(h)^{\frac{n}{2}+2}C_1(h)\|g^h\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

最后，再次利用估计式（14），通过 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 范数的 f 控制 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 范数的 f^h，由估计式（17）可得

$$\left|\int_{\mathbf{R}^{n-1}} g(y')f(y')\,dy'\right| \le C(n)C_s(h)^{\frac{n}{2}+3}C_1(h)\|g^h\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})},$$

即，

$$\|g\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \le C(n)C_s(h)^{\frac{n}{2}+3}C_1(h)\|g^h\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{18}$$

□

由于 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 是 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 的对偶空间，且 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 连续嵌入于 $L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\mathbf{R}^{n-1})$，因此 $L^{\frac{2n-2}{n}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 连续嵌入于 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$；也就是说，存在常数 $C(n)>0$，使得估计

$$\|g\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \le C(n)\|g\|_{L^{\frac{2n-2}{n}}(\mathbf{R}^{n-1})} \tag{19}$$

对任意 $g \in \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 都成立。由 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 与 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 之间的同构，可得以下嵌入结果。

推论 15. $L^{\frac{2n-2}{n}}(\Gamma)$ 连续嵌入于 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$。

证明。我们考虑 $g^h \in \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 和 $f^h \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$，其中$\|f^h\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \le 1$。令 $g = T_h^{-1}(g^h)$ 且 $f = T_h^{-1}(f^h)$。由命题 13、估计式（19）和估计式（15），我们可以推得

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Gamma g^h(y)f^h(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right| &= \left|\int_{\mathbf{R}^{n-1}} g(y')f(y')\big(1+|\nabla' h(y')|^2\big)^{\frac{1}{2}}\,dy'\right| \\
&\le \|g\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\left\|\big(1+|\nabla' h(y')|^2\big)^{\frac{1}{2}}f\right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \\
&\le C(n)C_s(h)C_1(h)\|g\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \\
&\le C(n)C_s(h)^{\frac{n}{2}+1}C_1(h)\|g\|_{L^{\frac{2n-2}{n}}(\mathbf{R}^{n-1})}.
\end{aligned}$$

由于$\|g\|_{L^{\frac{2n-2}{n}}(\mathbf{R}^{n-1})} \le \|g^h\|_{L^{\frac{2n-2}{n}}(\Gamma)}$，我们得到

$$\|g^h\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \le C(n)C_s(h)^{\frac{n}{2}+1}C_1(h)\|g^h\|_{L^{\frac{2n-2}{n}}(\Gamma)}. \tag{20}$$

□

3.3 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 法向迹 $w\cdot\mathbf{n}$ 的估计

由于我们考虑的是 $n\ge 3$ 的情形，与 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 的刻画类似，空间 $\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)$ 可刻画为：$u\in\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)$ 当且仅当存在 $u\in L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbf{R}^n)$，使得$\nabla u \in L^2(\mathbf{R}^n)$。空间 $\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)$ 关于范数$\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ 是完备的。此外，它包含$C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 作为稠密子空间；参见例如 [6, 定理 3.1], [11], [16]。

命题 16. 存在一个有界线性提升算子 $\ell_{\mathbf{n}}\colon \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1}) \to \dot{H}^1(\mathbf{R}^n)$。

证明. 对于 $f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$，我们设

$$u_f(x', x_n) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{ix'\cdot\xi'} \left(\mathrm{e}^{-|x_n||\xi'|} \widehat{f}(\xi') \right) d\xi' \tag{21}$$

对于 $(x', x_n) \in \mathbf{R}^n$，也就是说，$u_f$是关于 ξ' 的 $\mathrm{e}^{-|x_n||\xi'|}\widehat{f}(\xi')$ 的逆傅里叶变换。由傅里叶-普朗歇尔公式（例如参见 [1, 定理 1.25], ），我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{u_f}(\xi', \xi_n)\right|^2 d\xi_n = 8\pi^2 \left|\widehat{f}(\xi')\right|^2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2x_n|\xi'|}\, dx_n = 4\pi^2 |\xi'|^{-1} \left|\widehat{f}(\xi')\right|^2$$

对于 $\xi' \neq 0'$。因此，我们可以推出

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\xi'|^2 \left|\widehat{u_f}(\xi', \xi_n)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |\xi'|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{u_f}(\xi', \xi_n)\right|^2 d\xi_n\, d\xi' = 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |\xi'| \left|\widehat{f}(\xi')\right|^2 d\xi'.$$

另一方面，再次由傅里叶-普朗歇尔公式可知

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_n|^2 \left|\widehat{u_f}(\xi', \xi_n)\right|^2 d\xi_n &= 4\pi^2 \left|\widehat{f}(\xi')\right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_{x_n}\left(\mathrm{e}^{-|x_n||\xi'|}\right)\right|^2 dx_n \\ &= 8\pi^2 |\xi'|^2 \left|\widehat{f}(\xi')\right|^2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2x_n|\xi'|}\, dx_n = 4\pi^2 |\xi'| \left|\widehat{f}(\xi')\right|^2,\end{aligned}$$

这进一步意味着

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\xi_n|^2 \left|\widehat{u_f}(\xi', \xi_n)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_n|^2 \left|\widehat{u_f}(\xi', \xi_n)\right|^2 d\xi_n\, d\xi' = 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |\xi'| \left|\widehat{f}(\xi')\right|^2 d\xi'.$$

因此，我们得到

$$\|u_f\|^2_{\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)} = \int_{\mathbf{R}^n} |\xi|^2 \left|\widehat{u_f}(\xi', \xi_n)\right|^2 d\xi = 8\pi^2 \|f\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

令 $\ell_{\mathbf{n}}(f) = u_f$，其中任意 $f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$，命题 16 的证明即告完成。 □

我们从半空间问题开始。若 $w \in L^2(\mathbf{R}^n_+)^n$ 满足 $\operatorname{div} w = 0$ in $\mathbf{R}^n_+$，则法向迹 $w \cdot \mathbf{n}$ 可以在 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 意义下定义。

命题 17. 存在一个常数 $C(n) > 0$，使得估计

$$\|w \cdot \mathbf{n}\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \leq C(n) \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \tag{22}$$

对任意满足 $\operatorname{div} w = 0$ in $\mathbf{R}^n_+$ 的 $w \in L^2(\mathbf{R}^n_+)^n$ 均成立。

证明. 令 $\theta_2 \in C_c^{\infty}(\mathbf{R})$ 满足 $0 \leq \theta_2 \leq 1$ in $\mathbf{R}$, $\theta_2(z) = 1$ for any $|z| < 1$ and $\theta_2(z) = 0$for any $|z| \geq 2$. 我们通过设定来定义 $\theta_{2\rho} \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$

$$\theta_{2\rho}(x) := \theta_2\left(\frac{|x|}{\rho}\right), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

对于 $f \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$，我们考虑

$$f_I(x') := \theta_I(x')f(x'), \quad \theta_I(x') := 1 - \theta_{2\rho}(x', 0)$$

对于 $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$。由于 $\theta_I = 0$ 属于 $B_\rho(0')$，我们将其分解为

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{|f_I(x') - f_I(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy' = \int_{|y'| \geq \frac{\rho}{2}} \int_{|x'| \geq \frac{\rho}{2}} \frac{|f_I(x') - f_I(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy'$$
$$+ \int_{|y'| \geq \rho} \int_{|x'| < \frac{\rho}{2}} \frac{|f_I(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy' + \int_{|y'| < \frac{\rho}{2}} \int_{|x'| \geq \rho} \frac{|f_I(x')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy' = I_1 + I_2 + I_3.$$

由于 $|y'| \geq \rho$ 和 $|x'| < \frac{\rho}{2}$ 蕴含 $|x' - y'| \geq |y'| - \frac{\rho}{2}$，由 H¨lder 不等式可得

$$I_2 \leq C(n)\rho^{n-1} \|f_I\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}\left(B_\rho(0')^c\right)} \left(\int_{|y'| \geq \rho} \frac{1}{(|y'| - \frac{\rho}{2})^{n^2-n}} \, dx' \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq C(n) \|f\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}\left(B_\rho(0')^c\right)}.$$

由对称性， I_3 满足与 I_2相同的估计。对于 I_1，我们按照命题 13 的证明对其进行估计，得到

$$I_1 \leq 2 \int_{|y'| \geq \frac{\rho}{2}} \int_{|x'| \geq \frac{\rho}{2}} \frac{|f(x') - f(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy'$$
$$+ 2 \int_{|y'| \geq \frac{\rho}{2}} \int_{|x'| \geq \frac{\rho}{2}} \left|f(y')\right|^2 \frac{|\theta_I(x') - \theta_I(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy' = I_{1,1} + I_{1,2}.$$

由于 $\theta_I = 1$ 属于 $B_{2\rho}(0')^c$，我们进一步将 $I_{1,\ 2}$ 分解为

$$I_{1,2} = \int_{\frac{\rho}{2} \leq |y'| < 2\rho} \int_{|x'| \geq 3\rho} |f(y')|^2 \frac{|\theta_I(x') - \theta_I(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy'$$
$$+ \int_{|y'| \geq 3\rho} \int_{\frac{\rho}{2} \leq |x'| < 2\rho} \left|f(y')\right|^2 \frac{|\theta_I(x') - \theta_I(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy'$$
$$+ \int_{\frac{\rho}{2} \leq |y'| < 2\rho} \int_{\frac{\rho}{2} \leq |x'| < 2\rho} \left|f(y')\right|^2 \frac{|\theta_I(x') - \theta_I(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy' = J_1 + J_2 + J_3.$$

由命题 13 的证明可知

$$J_1 + J_3 \leq C(n) \|f\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}\left(B_{\rho/2}(0')^c\right)}, \quad J_2 \leq C(n) \|f\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}\left(B_{3\rho}(0')^c\right)}.$$

因此，我们推得

$$\|f_I\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \leq 2 \int_{|y'| \geq \frac{\rho}{2}} \int_{|x'| \geq \frac{\rho}{2}} \frac{|f(x') - f(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy'$$
$$+ C(n) \left(\|f\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}\left(B_{\rho/2}(0')^c\right)} + \|f\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}\left(B_\rho(0')^c\right)} + \|f\|^2_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}\left(B_{3\rho}(0')^c\right)} \right).$$

由于 $L^{\frac{2n-2}{n-2}}$ f的范数受控于 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ f的范数，我们推得$\|f_I\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(区域\,\mathrm{D}^{n-1})}$在 ρ趋于无穷时收敛到零，即 $\theta_{2\rho}(\cdot',0)f$在 $\rho\to\infty$时于 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$范数下收敛到 f。

注意，乘以一个紧支撑光滑函数在 $\dot{H}^1(\mathrm{R}^n)$ 中是有界的。事实上，由 H¨older 不等式以及 $\dot{H}^1(\mathrm{R}^n)$ 连续嵌入到 $L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathrm{R}^n)$，可得估计

$$\begin{aligned}\|\phi u\|_{\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)} &= \|\nabla(\phi u)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le \|u\nabla\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|\phi\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\\ &\le \|\nabla\phi\|_{L^n(\mathbf{R}^n)}\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbf{R}^n)} + \|\phi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\\ &\le \big(\|\nabla\phi\|_{L^n(\mathbf{R}^n)} + \|\phi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\big)\|u\|_{\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)}\end{aligned} \tag{23}$$

对任意 $\phi\in C_c^\infty(\mathrm{R}^n)$ 均成立。令 $f\in\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 和 u_f 按照表达式 (21) 定义。我们考虑 $u_{f,\ 2\rho}:=\theta_{2\rho}u_f$。由于$\|\nabla\theta_{2\rho}\|_{L^n(\mathbf{R}^n)}\le C(n)\|\theta_2'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}$，由估计 (23) 可得

$$\|u_{f,2\rho}\|_{\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)}\le C(n)\|u\|_{\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)}.$$

由于 $\mathrm{supp}u_{f,\ 2\rho}\subseteq\overline{B_{2\rho}(0)}$，实际上 $u_{f,\ 2\rho}\in H^1(\mathrm{R}^n)$ 满足

$$\|u_{f,2\rho}\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}\le C(n)\rho\|u_{f,2\rho}\|_{\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)},$$

例如参见 [1, 命题 1.55]。令 $B_{2\rho}^+:=B_{2\rho}(0)\cap\mathrm{R}^n_+$。由于 $u_{f,\ 2\rho}\in H^1(B_{2\rho}^+)$，由高斯-格林公式（例如参见 [27, 引理 1.2.3], ）可得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\theta_{2\rho}(x',0)f(x')w_n(x',0)\,dx'\right| &\le \int_{B_{2\rho}^+}|\nabla u_{f,2\rho}\cdot w|\,dx \le \|\nabla u_{f,2\rho}\|_{L^2\left(B_{2\rho}^+\right)}\|w\|_{L^2\left(B_{2\rho}^+\right)}\\ &\le \|u_{f,2\rho}\|_{\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)}\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \le C(n)\|u_f\|_{\dot{H}^1(\mathbf{R}^n)}\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\end{aligned}$$

对于任意满足 $\mathrm{div}\,w=0\in\mathrm{R}^n_+$ 的 $\rho>0$ and $w\in L^2(\mathrm{R}^n_+)^n$。由于我们已经在上文证明了，当 $\rho\to\infty$ 时，$\theta_{2\rho}(\cdot',0)f$ 在 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$范数下收敛于 f，根据命题 16，我们可以得出：对于任意满足 $\mathrm{div}\ w=0\in\mathrm{R}^n_+$ 的 $f\in\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$ 和 $w\in L^2(\mathrm{R}^n_+)$,

$$\left|\int_{\mathbf{R}^{n-1}}f(x')w_n(x',0)\,dx'\right|\le C(n)\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)},$$

即,

$$\|w\cdot\mathbf{n}\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\le C(n)\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}.$$

□

注 18。相反地，如果我们所考虑的区域 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 是有界的 C^2，那么对于满足 $\mathrm{div}\ w=0\in\Omega$ 的 $w\in L^2(\Omega)^n$，法向迹 $w\cdot\mathrm{n}$ 可以在 $H^{-\frac{1}{2}}$意义下定义，即存在一个与 w 无关的常数 C，使得

$$\|w\cdot\mathbf{n}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\le C\|w\|_{L^2(\Omega)}$$

对任意满足 Ω 内 $\mathrm{div}\,w=0$ 的 $w\in L^2(\Omega)^n$，例如参见 [26], [28]。

现在我们可以讨论扰动半空间问题了。对于满足 R_h^n 内 div $w=0$ 的 $w\in vBMOL^2(\mathrm{R}_h^n)$, 我们证明法向迹 $w\cdot\mathrm{n}$ 可以按 $L^\infty\cap\dot H^{-\frac12}$ 的意义定义。

引理 3 的证明。设 $w\in vBMOL^2(\mathrm{R}_h^n)$，且在 R_h^n 中 $w=0$ 为散度。设 $\varphi_*\in C_c^\infty(\mathrm{R}^n)$ 满足 $\varphi_*=1$ 于 $B_{1+\tau_1(h)}(0)$，且 $\mathrm{supp}\varphi_*\subseteq B_{2+\tau_1(h)}(0)$，其中 $\tau_1(h):=R_h+4nKR_h^2$。于是我们令 $w_1:=\varphi_* w$，以及 $w_2:=w-w_1$。由命题 6 可知，w_1、$w_2\in vBMOL^2(\mathrm{R}_h^n)$ 满足

$$\|w_1\|_{vBMOL^2(\mathbf{R}_h^n)}+\|w_2\|_{vBMOL^2(\mathbf{R}_h^n)}\le C\|\varphi_*\|_{C^1(\mathbf{R}_h^n)}\|w\|_{vBMOL^2(\mathbf{R}_h^n)}$$

其中某个常数 $C=C(\alpha,\beta,K,R_*)>0$。对于满足 $|x'|=R_h$ 的 $x\in\Gamma$，我们有 $h(x')=0$ 以及 $\nabla' h(x')=0'$。因此，对于任意 $y\in B'_\Gamma(R_h)$，任取满足 $|x'|=R_h$ 的 $x'\in\mathrm{R}^{n-1}$，并应用中值定理，可得

$$\big|h(y')\big|=\big|h(y')-h(x')\big|\le\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\Gamma)}|y'-x'|^2\le 4nKR_h^2.$$

因此，我们推得

$$B_{\rho+\tau_1(h)}(0)\cap\Gamma=B'_\Gamma\big(\rho+\tau_1(h)\big)$$

对任意 $\rho>0$。由于 $w_1=0$ in $\mathrm{R}_h^n\cap B_{2+\tau_1(h)}(0)^{\mathrm{c}}$，由推论 15 以及 $w_1\cdot\mathrm{n}$[13, 定理 22], 的 L^∞ 估计可得

$$\begin{aligned}\|w_1\cdot\mathbf{n}\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}&\le\|w_1\cdot\mathbf{n}\|_{L^{\frac{2n-2}{n}}(\Gamma)}\le\Lambda_{2+\tau_1(h)}^{\frac{n}{2n-2}}\|w_1\cdot\mathbf{n}\|_{L^\infty(\Gamma)}\\&\le C(\alpha,\beta,K,R_*)C_s(h)^{\frac{n}{2n-2}}\big(2+\tau_1(h)\big)^{\frac n2}\|w\|_{vBMOL^2(\mathbf{R}_h^n)}.\end{aligned}$$

另一方面，我们定义

$$w_{2,H}(x):=\begin{cases}w_2(x) & \text{if}\quad x\in\mathbf{R}_+^n\cap\mathbf{R}_h^n,\\ 0 & \text{if}\quad x\in\mathbf{R}_+^n\setminus\mathbf{R}_h^n.\end{cases}$$

由于 $w_2=0$ in $\mathrm{R}_h^n\cap B_{1+\tau_1(h)}(0)$，我们有 $w_{2,H}=0$ in $\mathrm{R}_+^n\cap B_{1+\tau_1(h)}(0)$。由命题 17，我们有

$$\|w_{2,H}\cdot\mathbf{n}_{\partial\mathbf{R}_+^n}\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}\le C(n)\|w_{2,H}\|_{L^2(\mathbf{R}_+^n)}\le C(n)\|w_2\|_{L^2(\mathbf{R}_h^n)}$$

其中 $\mathrm{n}^{\partial\mathbf{R}_+^n}$ 表示半空间 R_+^n边界 $\partial\mathrm{R}_+^n$ 上的外法向量。由于$T_h\big(w_{2,H}\cdot\mathrm{n}_{\partial\mathbf{R}_+^n}\big)=w_2\cdot\mathrm{n}_\Gamma$，其中 n_Γ 表示扰动半空间 R_h^n边界 Γ 上的外法向量，由估计式（16）可得

$$\begin{aligned}\|w_2\cdot\mathbf{n}_\Gamma\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}&\le C(n)C_s(h)^{\frac n2+1}C_1(h)\|w_{2,H}\cdot\mathbf{n}_{\partial\mathbf{R}_+^n}\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}\\&\le C(n)C_s(h)^{\frac n2+1}C_1(h)\|w_2\|_{L^2(\mathbf{R}_h^n)}.\end{aligned}$$

□

4 一些边界积分的估计

令 E 表示 R^n 中 $-\Delta$ 的基本解，即

$$E(x) := \begin{cases} -\log|x|/2\pi & (n=2), \\ |x|^{2-n}/\big(n(n-2)b_1(n)\big) & (n \geq 3), \end{cases}$$

其中， $b_1(n)$ 表示 R^n 中单位球 $B_1(0)$ 的体积。本节中，我们假设 R_h^n 是具有边界 $\Gamma = \partial\mathrm{R}_h^n$ 的 (K) 型扰动半空间 C^2 。本节旨在为下式的迹算子建立若干估计：

$$\big(Qg\big)(x) := \int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_x}(x-y)g(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}, \quad x \in \Gamma_{\rho_0}^\Omega$$

对于 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，其中 $\partial/\partial\mathfrak{n}_x$ 表示关于 x 变量的外法向导数。

回顾一下，对于具有不恒为零的 $h \in C_c^2(\mathrm{R}^{n-1})$ 的扰动半空间 R_h^n， $R_h > 0$ 表示满足 s upp $h \subseteq B_{R_h}(0')$ 的最小正实数。

4.1 E 的 y 方向法向导数估计

具体而言，我们给出 $\frac{\partial E}{\partial}\mathbf{n}_y(x-\cdot)$ 在靠近边界 Γ 的区域 R_h^n 上的边界积分估计。我们得到一个与引理 6], 相符的结果；该引理讨论的是区域有界的情形。对于 $\rho \in (0, \rho_0]$，我们定义 Γ_ρ^Ω: $= \Gamma_\rho^{\mathbf{R}^n} \cap \Omega$。

引理 19. 设 R_h^n 是类型为 (K) 的扰动 C^2 半空间，其边界为 $\Gamma = \partial\mathrm{R}_h^n$, $n \geq 2$，且 $\rho \in (0, \rho_0]$。则有

(i)

$$\int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) = -\frac{1}{2} \quad \textit{for any} \quad x \in \mathbf{R}_h^n,$$

(ii)

$$\sup_{x\in\Gamma_\rho^\Omega} \int_\Gamma \left|\frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\right| d\mathcal{H}^{n-1}(y) < C(n)C_{19}(K,h,\rho)$$

其中

$$C_{19}(K,h,\rho) := \big(R_h^{n-1} + \rho K + \rho + 1\big)\|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})} + \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + \rho + 1.$$

证明。 (i) 这由高斯散度定理得出。对于有界分段光滑的 C^1区域 $D \subset\mathrm{R}^n$，我们有

$$\int_{\partial D} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_D \Delta_y E(x-y)\,dy$$

对任意 $x \in D$。由于 $\Delta_y E(x-y) = -\delta(x-y)$，我们得到

$$\int_{\partial D} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = -1$$

对于 $x \in D$。设 $x \in \mathrm{R}^n_h$。对于 $R > 0$，我们将区域 D_R 定义为

$$D_R := \left\{ (y', y_n) \,\middle|\, h(y') < y_n < \|h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + 2|x_n|,\ |y'| < R \right\}.$$

我们考虑 $R > R_h + |x'|$。在 D_R 中应用高斯散度定理，可得

$$\begin{aligned} -1 = &\int_{y_n = \|h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + 2|x_n|,\, |y'|<R} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) + \int_{y \in \Gamma,\, |y'|<R} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &+ \int_{0 < y_n < \|h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + 2|x_n|,\, |y'|=R} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y). \end{aligned}$$

当 $R \to \infty$ 时，最后一项自然趋于零。对于第一项，由于 $\mathbf{n}_y$ 竖直向上，而 x 位于 $\{$下方 $(y'、\ y_n) \,|\, y_n = \|h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + 2|x_n|\}$，此时核$(\partial E/\partial \mathbf{n}_y)(x-y)$ 恰好是泊松核 $P_{\delta_{h,x_n}}($ $x'-y')$ 的一半，其中$\delta_{h,x_n} := \|h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + 2|x_n| - x_n$。因此，右侧的第一个积分趋于$-\frac{1}{2}$，当 $R \to \infty$ 时。由此得到 (i)。

（ii）我们注意到

$$-\mathbf{n}_y = -\mathbf{n}\big(y', h(y')\big) = \big(-\nabla' h(y'), 1\big)/\omega(y')$$

其中 $\omega(y') = \big(1 + |\nabla' h(y')|^2\big)^{1/2}$，且 ∇' 是关于 y' 变量的梯度。这意味着 t

$$-C(n)\frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y) = \frac{\sigma(y')}{\omega(y')\left(|x'-y'|^2 + \big(x_n - h(y')\big)^2\right)^{n/2}}$$

对于带有 $y \in \Gamma$ 的情形

$$\sigma(y') := -\nabla' h(y') \cdot (x'-y') + \big(x_n - h(y')\big) \ \text{ where } \ x_n > h(x'),\ x', y' \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

我们设

$$K(x', y', x_n) := \frac{\sigma(y')}{\left(|x'-y'|^2 + \big(x_n - h(y')\big)^2\right)^{n/2}}.$$

根据泰勒展开，对于 $|x'-y'| < 1$，我们有

$$h(x') = h(y') + \nabla' h(y') \cdot (x'-y') + r(x', y')$$

with

$$r(x', y') = (x'-y')^{\mathrm{T}} \cdot \int_0^1 (1-\theta)\Big(\nabla'^2 h\Big)\big(\theta x' + (1-\theta)y'\big)\, d\theta \cdot (x'-y').$$

我们得到

$$\sigma(y') = x_n - h(x') + r(x', y')$$

并满足估计

$$\big|r(x', y')\big| \le \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty\left(B_1(x')\right)} |x' - y'|^2. \tag{24}$$

我们将 K 分解为主项与余项之和

$$K(x', y', x_n) = K_0(x', y', x_n) + R(x', y', x_n)$$

with

$$K_0(x', y', x_n) := \frac{x_n - h(x')}{\Big(|x' - y'|^2 + \big(x_n - h(y')\big)^2\Big)^{n/2}},$$
$$R(x', y', x_n) := \frac{r(x', y')}{\Big(|x' - y'|^2 + \big(x_n - h(y')\big)^2\Big)^{n/2}}.$$

项 R 的估计为

$$\big|R(x', y', x_n)\big| \le \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty\left(B_1(x')\right)} |x' - y'|^{2-n}$$

根据估计式（24），对于 $|x' - y'| < 1$，有。因此,

$$\int_{\substack{y\in\Gamma,\\ |x'-y'|<1}} \left|\frac{R(x', y', x_n)}{\omega(y')}\right| d\mathcal{H}^{n-1}(y) \le C(n)\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

由于

$$\big|\sigma(y')\big| \le \big|\nabla' h(y')\big| \cdot |x' - y'| + |x_n| + \big|h(y')\big|$$

对于任意 $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\substack{y\in\Gamma,\\ |y'-x'|\ge 1}} \left|\frac{K(x', y', x_n)}{\omega(y')}\right| d\mathcal{H}^{n-1}(y) \le &\int_{|y'-x'|\ge 1} \big|\nabla' h(y')\big|\, dy' + \int_{|y'-x'|\ge 1} \big|h(y')\big|\, dy' \\ &+ \int_{|y'-x'|\ge 1} \frac{|x_n|}{|y' - x'|^n}\, dy'.\end{aligned} \tag{25}$$

由于 $h \subseteq B_{R_h}(0')$ 的支集，估计式（25）的前两项可以用常数 $C(n)R_h^{n-1}\|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}$ 来估计。另一方面，由于该估计

$$\big|x_n - h(x')\big| \le (nK + 1)\rho\|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})} + \rho$$

对.....成立 任意 $x \in \Gamma_\rho^\Omega$，估计式（25）的第三项可由常数控制 t

$C(n)\big((\rho K+\rho+1)\|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}+\rho\big)$。由 (i) 可知

$$\frac{C(n)}{2}=\int_{\substack{y\in\Gamma,\\ |y'-x'|\geq 1}}\frac{K(x',y',x_n)}{\omega(y')}\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$
$$+\int_{\substack{y\in\Gamma,\\ |y'-x'|<1}}\frac{K_0(x',y',x_n)}{\omega(y')}\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)+\int_{\substack{y\in\Gamma,\\ |y'-x'|<1}}\frac{R(x',y',x_n)}{\omega(y')}\,d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

项 K_0 非常奇异，但对于 $x\in\Gamma_\rho^\Omega$它是正的。因此，我们有 t

$$\int_{\substack{y\in\Gamma,\\ |y'-x'|<1}}\frac{K_0(x',y',x_n)}{\omega(y')}\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\leq C(n)C_{19}(K,h,\rho)$$

其中常数 $C_{19}(K,h,\rho)$具有显式表达式

$$C_{19}(K,h,\rho):=\big(R_h^{n-1}+\rho K+\rho+1\big)\|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}+\|\nabla'^2h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}+\rho+1.$$

因此，我们最终得到估计

$$\int_\Gamma\left|\frac{\partial E}{\partial\mathbf{n}_y}(x-y)\right|\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\leq C(n)C_{19}(K,h,\rho)$$

该估计对任意 $x\in\Gamma_\rho^\Omega$均成立。这就完成了引理 19 的证明。

□

在结束本小节之前，我们想给出边界附近有符号距离函数的梯度之差的一个估计，并明确说明其对边界函数 h 的依赖关系。该估计在随后对各种边界积分进行估计时发挥着重要作用。

命题20. 设 R_h^n 是一个扰动的 C^2 半空间，其边界为 $\Gamma=\partial\mathrm{R}_h^n$ 且满足 $n\geq 2$。那么，对于任意 $x\in\Gamma_{\rho_0}^{\mathbf{R}^n}$ 和 $y\in\Gamma$，均有

$$|\nabla d(x)-\nabla d(y)|\leq C(n)C_s(h)^2\|\nabla'^2h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}|x-y|.$$

证明。令 $y\in\Gamma$、$x\in\Gamma_{\rho_0}^{\mathbf{R}^n}$ 和 πx 为 x 在 Γ 上的唯一投影。注意，

$$\nabla d(x)-\nabla d(y)=\nabla d(\pi x)-\nabla d(y)=\left(\frac{\nabla'h(y')}{\omega(y')}-\frac{\nabla'h(\pi x')}{\omega(\pi x')},\frac{1}{\omega(\pi x')}-\frac{1}{\omega(y')}\right)$$

其中 $\omega(\cdot')=\big(1+\big|\nabla'h(\cdot')\big|^2\big)^{1/2}$，而 $\pi x'$ 表示 πx 的第一个 $n-1$ 分量。通过改写

$$\nabla'h(y')\omega(\pi x')-\nabla'h(\pi x')\omega(y')=\big(\nabla'h(y')-\nabla'h(\pi x')\big)\omega(\pi x')+\nabla'h(\pi x')\big(\omega(\pi x')-\omega(y')\big)$$

并对 $\nabla'h(y')-\nabla'h(\pi x')$ 和 $\omega(\pi x')-\omega(y')$ 应用中值定理，我们可以推得

$$|\nabla d(\pi x)-\nabla d(y)|\leq C(n)\|\nabla'^2h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\big(1+\|\nabla'h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}^2\big)|\pi x'-y'|.$$

由于对于任意满足 $y \neq \pi x$ 的 $y \in \Gamma$，必有 $|x-y| > |x-\pi x|$，根据三角不等式 $|x-\pi x| \geq |y-\pi x| - |x-y|$，我们可以推得不等式 $|y-\pi x| \leq 2|x-y|$ 对任意$y \in \Gamma$均成立。显然 $|\pi x' - y'| \leq |\pi x - y|$，因此得到命题20。□

4.2 一类函数属于 $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ 的判据

设 $n \geq 2$。若 $f \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$，且满足

$$\|f\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} := \|f\|^2_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})} + \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{|f(x') - f(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy' < \infty.$$

我们的判据与 [15, 引理 3.2]相似且相容。

命题 21. 设 $n \geq 2$ 且 $\rho > 0$。假设 $f \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ 满足

$$\operatorname{supp} f \subseteq B_{2\rho}(0')^{\mathrm{c}}, \quad \left|f(x')\right| \cdot |x'|^{n-1} \leq c_1, \quad \left|\nabla' f(x')\right| \cdot |x'|^n \leq c_2$$

其中存在一些常数 c_1 和 c_2，它们与 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 无关。则估计

$$\|f\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \leq C(n) \left(\frac{c_1^2}{\rho^{n-1}} + \frac{c_1^2 + c_2^2}{\rho^n} \right)$$

成立，且其中某个常数 $C(n) > 0$ 仅依赖于 n。

证明。通过直接计算，我们得到

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})} \leq c_1^2 \int_{B_{2\rho}(0')^{\mathrm{c}}} \frac{1}{|y'|^{2n-2}} \, dy' \leq \frac{C(n) c_1^2}{\rho^{n-1}}.$$

对于 $y' \in B_\rho(0')$ 和 $x' \in B_{2\rho}(0')^{\mathrm{c}}$，我们有 $|x' - y'| \geq \rho$。因此，我们可以推得 t

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(0')} \int_{B_\rho(0')^{\mathrm{c}}} \frac{|f(x') - f(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy' &= \int_{B_\rho(0')} \int_{B_{2\rho}(0')^{\mathrm{c}}} \frac{|f(x')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy' \\ &\leq \frac{C(n)}{\rho} \|f\|^2_{L^2\left(B_{2\rho}(0')^{\mathrm{c}}\right)} \leq \frac{C(n) c_1^2}{\rho^n}. \end{aligned}$$

由对称性，我们同样有

$$\int_{B_\rho(0')} \int_{B_\rho(0')^{\mathrm{c}}} \frac{|f(x') - f(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dy' \, dx' \leq \frac{C(n) c_1^2}{\rho^n}.$$

因此，只需估计

$$I = \int_{B_\rho(0')^{\mathrm{c}}} \int_{B_\rho(0')^{\mathrm{c}}} \frac{|f(x') - f(y')|^2}{|x' - y'|^n} \, dx' \, dy'.$$

接下来，我们沿用证明 [15, 引理 3.2]的类似思路。假设 $|x'| \leq |y'|$，并用一条测地曲线在 $B_{|x'|}(0')^{\mathrm{c}}$中连接 x' 和 y'。由于曲线长度小于$(\pi/2)|x' - y'|$,

根据微积分基本定理，我们观察到

$$\begin{aligned}\left|f(x')-f(y')\right| &\le (\pi/2)|x'-y'|\cdot\sup\left\{\left|\nabla' f(z')\right| \,\middle|\, z'\in B_{|x'|}(0')^{\mathrm{c}}\right\}\\ &\le (\pi/2)c_2|x'-y'|\cdot|x'|^{-n}.\end{aligned}$$

由于 I 的被积函数关于 x' 和 y' 对称，我们现在估计 e

$$\frac{I}{2}=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}\frac{|f(x')-f(y')|^2}{|x'-y'|^n}\,dx'\,dy'=I_1+I_2$$

with

$$\begin{aligned}D_1&=\left\{(x',y')\,\middle|\,\rho\le|x'|\le|y'|,\ |x'-y'|\le|x'|\right\},\\ D_2&=\left\{(x',y')\,\middle|\,\rho\le|x'|\le|y'|,\ |x'-y'|\ge|x'|\right\}.\end{aligned}$$

为了估计 I_1，我们注意到

$$\begin{aligned}\frac{|f(x')-f(y')|^2}{|x'-y'|^n}&\le(\pi/2)^2c_2^2|x'|^{-2n}|x'-y'|^{-(n-2)}\\ &\le(\pi/2)^2c_2^2|x'|^{-2n+1+\delta}|x'-y'|^{-(n-2)-1-\delta}\end{aligned}$$

对于任意 $0<\delta<1$，由于 $|x'-y'|\le|x'|$。因此，

$$\begin{aligned}I_1&\le(\pi/2)^2c_2^2\int_{B_\rho(0')^{\mathrm{c}}}\int_{B_\rho(x')}|y'-x'|^{-(n-2)}\,dy'|x'|^{-2n}\,dx'\\ &\quad+(\pi/2)^2c_2^2\int_{B_\rho(0')^{\mathrm{c}}}\int_{B_\rho(x')^{\mathrm{c}}}|y'-x'|^{-(n-2)-1-\delta}\,dy'|x'|^{-2n+1+\delta}\,dx'<\frac{c_2^2C(n)}{\rho^n}\left(1+\frac{1}{\delta(n-\delta)}\right).\end{aligned}$$

为了估计 I_2，我们注意到

$$\frac{|f(x')-f(y')|^2}{|x'-y'|^n}\le2\frac{|f(x')|^2+|f(y')|^2}{|x'-y'|^n}\le4c_1^2|x'-y'|^{-n}|x'|^{-(2n-2)}$$

由于 $|x'|\le|y'|$。由于在此情形下 $|x'-y'|\ge|x'|$，我们有

$$|x'-y'|^{-n}|x'|^{-(2n-2)}\le|x'-y'|^{-(n-2)}|x'|^{-2n}$$

and

$$|x'-y'|^{-n}|x'|^{-(2n-2)}\le|x'-y'|^{-(n-\delta)}|x'|^{-(2n-2)-\delta}$$

对于任意 $0<\delta<1$。因此，

$$\begin{aligned}I_2&\le4c_1^2\int_{B_\rho(0')^{\mathrm{c}}}\int_{B_\rho(x')}|y'-x'|^{-(n-2)}\,dy'|x'|^{-2n}\,dx'\\ &\quad+4c_1^2\int_{B_\rho(0')^{\mathrm{c}}}\int_{B_\rho(x')^{\mathrm{c}}}|y'-x'|^{-(n-\delta)}\,dy'|x'|^{-(2n-2)-\delta}\,dx'<\frac{c_1^2C(n)}{\rho^n}\cdot\frac{n-(n-2)\delta-\delta^2}{(1-\delta)(n+\delta-1)}.\end{aligned}$$

□

4.3 L^∞ Qg的迹算子估计

对于 $\rho \in (0,\infty)$，我们令 $1'_{B_\rho(0')}$ 表示与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的开球$B_\rho(0')$ 相关联的示性函数，即定义

$$1'_{B_\rho(0')}(x') := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x' \in B_\rho(0'), \\ 0 & \text{if} \quad x' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus B_\rho(0'). \end{cases}$$

对于 $g \in L^\infty(\Gamma)$，我们将 g 分解为曲线部分 g_1 和直线部分 g_2之和，其中

$$\begin{aligned} g_1\big(x', h(x')\big) &:= 1'_{B_{2R_h}(0')}(x') g\big(x', h(x')\big), \\ g_2\big(x', h(x')\big) &:= g\big(x', h(x')\big) - g_1\big(x', h(x')\big) \end{aligned}$$

对任意 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$。注意，$g_1, g_2 \in L^\infty(\Gamma)$。关于 g_2，我们进一步定义 $g_2^H \in L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)$，令

$$g_2^H(x', 0) := \begin{cases} 0 & \text{if} \quad |x'| < 2R_h, \\ g_2(x', 0) & \text{if} \quad |x'| \geq 2R_h \end{cases} \tag{26}$$

对于 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$。

定理 22. 设 $\mathbb{R}^n_h$ 为边界为 $\Gamma = \partial\mathbb{R}^n_h$ 且满足 $n \geq 3$的扰动半空间 C^2。此外，假设 $h \in C^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^{n-1})$ 满足小性条件

$$R_h^{\frac{2n-1}{2n}} < \frac{1}{2}.$$

那么，Qg 的边界迹具有如下形式

$$\gamma\big(Qg\big)\big(x', h(x')\big) = \frac{1}{2} g\big(x', h(x')\big) - \big(Sg\big)\big(x', h(x')\big)$$

对于 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，其中 S是从 $L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 到 $L^\infty(\Gamma)$ 的有界线性算子，满足

$$\|S\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to L^\infty(\Gamma)} \leq C_0^*(n) C_s(h)^{n+6} \big(C_{*,1}(h) + C_{*,2}(h)\big)$$

其中某个特定常数 $C_0^*(n)$ 仅依赖于 n 和

$$\begin{aligned} C_s(h) &:= 1 + \|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}, \quad C_1(h) := 1 + R_h \|\nabla' {}^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}, \\ C_{*,1}(h) &:= C_1(h)^3 (1 + R_h^{\frac{1}{4}}) \Big(R_h^{\frac{1}{2}} \|\nabla' {}^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + R_h^{\frac{5}{2}} \|\nabla' {}^2 h\|^3_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \Big), \\ C_{*,2}(h) &:= \big(R_h + R_h^{\frac{1}{2n}}\big) \|\nabla' {}^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + (R_h^{n-1} + 1) \|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}. \end{aligned}$$

证明。对于 $x \in \Gamma_{\rho_0}^{\Omega}$，我们将 g 分解为直线部分 g_2 和曲线部分 g_1，即，

$$\begin{aligned}\big(Qg\big)(x) = &\int_{B'_\Gamma(2R_h)^{\mathrm{c}}} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_x}(x-y) g_2(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &+ \int_{B'_\Gamma(2R_h)} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_x}(x-y) g_1(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = I_1(x) + I_2(x).\end{aligned}$$

此外，我们进一步将 $I_2(x)$ 分解为

$$\begin{aligned}I_2(x) = &\int_{B'_\Gamma(2R_h)} \big\{\big(\nabla d(x) - \nabla d(y)\big)\cdot \nabla E(x-y)\big\} g_1(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &+ \int_{B'_\Gamma(2R_h)} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y) g_1(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = I_{2,1}(x) + I_{2,2}(x).\end{aligned}$$

设 $x \in \Gamma_{\rho_0}^{\Omega}$ 满足 $|x'| \geq 2R_h$。由于 $|x'| \geq 2R_h$ 是 Γ 的直线部分，我们有

$$I_1(x) = -\int_{|y'|\geq 2R_h} P_{x_n}(x'-y') g_2(y')\, dy' = -\int_{\mathbf{R}^{n-1}} P_{x_n}(x'-y') g_2^H(y')\, dy',$$

其中 P_{x_n} 表示泊松核。令 x 在边界上趋于 x_0，在这种情况下，我们有 $I_1(x)$ 趋于 $\frac{1}{2}g_2^H(x_0)$，这实际上就是 $\frac{1}{2}g(x_0)$。接下来，我们估计满足 $|x_0'| \geq 2R_h$ 的 $x_0 \in \Gamma$ 的 $I_{2,\ 1}(x_0)$。根据命题20，$I_{2,\ 1}(x_0)$ 可估计为

$$|I_{2,1}(x_0)| \leq C(n) C_s(h)^3 \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \int_{|y'|<2R_h} \frac{1}{|x_0'-y'|^{n-2}}\, dy'. \tag{27}$$

若 $|x_0'| \geq 3R_h$，则有 $|x_0'-y'| \geq R_h$。在这种情况下，

$$\int_{|y'|<2R_h} \frac{1}{|x_0'-y'|^{n-2}}\, dy' \leq R_h^{-(n-2)} \big|B_{2R_h}(0')\big| \leq C(n) R_h.$$

若 $|x_0'| < 3R_h$，则在这种情况下，我们有如下估计

$$\int_{|y'|<2R_h} \frac{1}{|x_0'-y'|^{n-2}}\, dy' \leq \int_{|x_0'-y'|<5R_h} \frac{1}{|x_0'-y'|^{n-2}}\, dy' \leq C(n) R_h. \tag{28}$$

因此，对于满足 $|x_0'| \geq 2R_h$ 的 $x_0 \in \Gamma$，我们得到

$$|I_{2,1}(x_0)| \leq C(n) C_s(h)^3 R_h \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

接下来，我们估计 $I_{2,2}(x_0)$，其中 $x_0 \in \Gamma$ 满足 $|x_0'| \geq 2R_h$。由于 $h \subseteq B_{R_h}(0')$ 的支集，对于满足 $R_h < |y'| < 2R_h$ 的 $y \in \Gamma$ 以及满足 $|x_0'| \geq 2R_h$ 的 $x_0 \in \Gamma$，实际上我们有

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x_0 - y) = 0.$$

因此，对于满足 $|x_0'| \geq 2R_h$ 的 $x_0 \in \Gamma$，

$$I_{2,2}(x_0) = \int_{B_\Gamma'(R_h)} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x_0 - y) g_1(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

根据估计式（24），我们有

$$|I_{2,2}(x_0)| \leq C_s(h) \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \int_{|y'|<R_h} \frac{1}{|x_0' - y'|^{n-2}}\, dy'.$$

由于 $|x_0'| \geq 2R_h$，有 $|x_0' - y'| \geq R_h$，对于 $|y'| < R_h$成立。因此，在 $|x_0'| \geq 2R_h$的情况下，即，我们得到$|I_{2,\ 2}(x_0)|$ 的估计

$$\begin{aligned} |I_{2,2}(x_0)| &\leq C_s(h) R_h^{-(n-2)} \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \int_{|y'|<R_h} 1\, dy' \\ &\leq C(n) C_s(h) R_h \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}. \end{aligned}$$

因此，对于带有 $|x_0'| \geq 2R_h$的 $x_0 \in \Gamma$，通过令

$$\big(Sg\big)(x_0) = -\int_{B_\Gamma'(2R_h)} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}(x_0 - y) g(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

我们得到

$$\gamma\big(Qg\big)\big)(x_0) = \frac{1}{2} g(x_0) - \big(Sg\big)(x_0)$$

with

$$\|S\|_{\mathrm{op}} \leq C(n) C_s(h)^3 R_h \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

现在假设带有 $|x'| < 2R_h$的 $x \in \Gamma_{\rho_0}^\Omega$。存在一个有界区域 $\Omega_c \subset \mathrm{R}_h^n$，使得 $\partial\Omega_c \cap \Gamma = B_\Gamma'($ $2R_h)$。我们回顾一个关于双层势的标准结果，参见例如 [22, 引理 6.17]。令 $f \in L^\infty(\partial\Omega_c)$，则双层势的边界迹

$$(Pf)(z) = \int_{\partial\Omega_c} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(z - y) f(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad z \in \Omega_c$$

具有如下形式

$$\gamma\big(Pf\big)(w) = \frac{1}{2} f(w) + \int_{\partial\Omega_c} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(w - y) f(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

对于 $w \in \partial\Omega_c$。我们通过令 $g_c \in L^\infty(\partial\Omega_c)$ 来定义

$$g_c(w) = \begin{cases} g_1(w) & \text{for} \quad w \in \partial\Omega_c \cap \Gamma, \\ 0 & \text{for} \quad w \in \partial\Omega_c \setminus \Gamma. \end{cases}$$

因此，对于任意 $z \in \Omega_c$，我们有

$$I_2(z) = I_{2,1}(z) + \big(Pg_c\big)(z).$$

令 x 在 x_0 边界上趋于，我们可推出

$$I_2(x_0) = I_{2,1}(x_0) + \big(\gamma(Pg_c)\big)(x_0) = I_{2,1}(x_0) + \frac{1}{2}g(x_0) + I_{2,2}(x_0).$$

对于满足 $|x_0'| < 2R_h$的 $x_0 \in \Gamma$，再次应用命题20，可知$I_{2,\ 1}(x_0)|$ 也可由估计式（27）和（28）控制，即在这种情况下，我们同样有

$$|I_{2,1}(x_0)| \le C(n)C_s(h)^3 R_h \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

现在，对于满足 $|x_0'| < 2R_h$的 $x_0 \in \Gamma$，我们来估计$I_{2,\ 2}(x_0)$。再次由估计式（24），可得

$$\int_{\{y \in B_\Gamma'(2R_h)\,|\,|x_0'-y'|<1\}} \left|\frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x_0 - y)\right| d\mathcal{H}^{n-1}(y) \le C_s(h) \int_{|y'|<2R_h, |x_0'-y'|<1} \frac{\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}}{|x_0' - y'|^{n-2}}\, dy'.$$

由于在这种情况下，$|x_0'| < 2R_h$, $|y'| < 2R_h$ 将推出 $|x_0' - y'| < 4R_h$，因此我们有

$$\int_{|y'|<2R_h} \frac{1}{|x_0' - y'|^{n-2}}\, dy' \le \int_{|x_0'-y'|<4R_h} \frac{1}{|x_0' - y'|^{n-2}}\, dy' \le C(n)R_h.$$

另一方面，对于满足 $|y' - x_0'| \ge 1$的 $y \in \Gamma$，我们可以直接在 $\partial E/\partial \mathbf{n}_y$ 中通过 $|\nabla' h(y')|\cdot|x_0' - y'| + |h(x_0')| + |h(y')|$估计 $|\sigma(y')|$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\{y \in B_\Gamma'(2R_h)\,|\,|x_0'-y'|\ge 1\}} \left|\frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_y}(x_0 - y)\right| d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\
&\le C_s(h) \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \big|\nabla' h(y')\big| + \big|h(y')\big|\, dy' + C_s(h) \int_{|x_0'-y'|\ge 1} \frac{\|h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}}{|x_0' - y'|^n}\, dy' \\
&\le C(n)C_s(h)(R_h^{n-1} + 1)\|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}.
\end{aligned}$$

综合这些估计可知，$|I_{2,\ 1}(x_0)| + |I_{2,\ 2}(x_0)|$ 的估计为

$$|I_{2,1}(x_0)| + |I_{2,2}(x_0)| \le C(n)C_s(h)^3\big(R_h\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + (R_h^{n-1} + 1)\|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}\big)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

为了估计 $I_1(x_0)$，其中 $x_0 \in \Gamma$ 满足$|x_0'| < 2R_h$，我们进一步分解

$$\begin{aligned}
g_2(y', h(y')) &= 1'_{B_{4r_h}(0')}(y') g_2(y', h(y')) + 1'_{B_{4r_h}(0')^{\mathrm{c}}}(y') g_2(y', h(y')) \\
&= g_{2,1}(y', h(y')) + g_{2,2}(y', h(y'))
\end{aligned}$$

$_1$对任意 $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$，其中 $r_h := R_h^{\frac{2n}{n}}$且

$$\begin{aligned}
I_1(x_0) = &\int_{B_\Gamma'(r_h)^{\mathrm{c}}} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}(x_0 - y) g_{2,2}(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) + \int_{B_\Gamma'(r_h)^{\mathrm{c}}} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}(x_0 - y) g_{2,1}(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\
&+ \int_{B_\Gamma'(r_h)} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}(x_0 - y) g_2(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = I_{1,1}(x_0) + I_{1,2}(x_0) + I_{1,3}(x_0).
\end{aligned}$$

接下来，我们试图利用 $|x_0'| < 2R_h$ 控制 $I_{1,\ 1}(x_0)$，其中 $x_0 \in \Gamma$。令 $\theta_2 \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ 为一个截断函数

，满足 $0 \le \theta_2 \le 1$ 属于 $\mathbf{R}^{n-1}$， $\theta_2 = 1$ 属于 $B_1(0')$，且支集为 $\theta_2 \subseteq \overline{B_2(0')}$。然后我们设

$$\theta_{2r_h,x_0}(y') := \theta_2\left(\frac{y'-x_0'}{r_h}\right), \quad K_{x_0}(y') := \left\{\nabla d(x_0)\cdot\nabla E\Big(x_0-\big(y',h(y')\big)\Big)\right\}\big(1-\theta_{2r_h,x_0}(y')\big)$$

对于 $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$。由于我们假设 $2R_h < r_h$，因此有 $B_{2r_h}(x_0') \subset B_{3r_h}(0')$。因此，$_{,x_0} = 1$ 在 $B_{2r_h}(x_0')^{\mathrm{c}}$ 中成立意味着

$$I_{1,1}(x_0) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K_{x_0}(y')g_{2,2}\big(y',h(y')\big)\big(1+\big|\nabla' h(y')\big|^2\big)^{\frac{1}{2}}\,dy'.$$

注意，对于任意 x_0， $y \in \Gamma$ 满足 $x_0 \neq y$，我们有

$$\nabla d(x_0)\cdot\nabla E(x_0-y) = -C(n)\frac{-\nabla' h(x_0')\cdot(x_0'-y') + \big(h(x_0')-h(y')\big)}{\omega(x_0')\Big(|x_0'-y'|^2+\big(h(x_0')-h(y')\big)^2\Big)^{n/2}}$$

其中 $\omega(x_0') = \big(1+|\nabla' h(x_0')|^2\big)^{1/2}$。通过一些简单的计算，利用中值定理可推出估计

$$\big|K_{x_0}(y')\big| \le C(n)\frac{\|\nabla' h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}}{|x_0'-y'|^{n-1}} \le C(n)\frac{R_h\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}}{|x_0'-y'|^{n-1}}$$

对任意 x_0， $y \in \Gamma$ 均成立，且估计

$$\big|\nabla'_{y'}\big(\nabla d(x_0)\cdot\nabla E(x_0-y)\big)\big| \le C(n)\frac{R_h\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + R_h^3\|\nabla'^2 h\|^3_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}}{|x_0'-y'|^n}$$

对任意满足 $x_0 \neq y$ 的 x_0， $y \in \Gamma$ 均成立。此外，对于满足 $r_h < |y'-x_0'| < 2r_h$ 的 $y \in \Gamma$，我们有

$$\big|\nabla'_{y'}\theta_{2r_h,x_0}(y')\big| \le \frac{\|\nabla'\theta_2\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}}{r_h} \le \frac{2\|\nabla'\theta_2\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}}{|x_0'-y'|}.$$

因此，我们看到估计

$$\big|\nabla'_{y'}K_{x_0}(y')\big| \le C(n)\frac{R_h\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + R_h^3\|\nabla'^2 h\|^3_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}}{|x_0'-y'|^n}$$

对任意 x_0、 $y \in \Gamma$ 均成立。由 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 与 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 之间的对偶关系可知，$I_{1,\ 1}(x_0)$ 满足以下估计

$$|I_{1,1}(x_0)| \le \|\big(1+\big|\nabla' h(\cdot')\big|^2\big)^{\frac{1}{2}}K_{x_0}(\cdot')\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\|g_{2,2}\big(\cdot',h(\cdot')\big)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

由命题 13 和命题 21，我们可得

$$\begin{aligned}\|\big(1+\big|\nabla' h(\cdot')\big|^2\big)^{\frac{1}{2}}K_{x_0}(\cdot')\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} &\le C(n)C_s(h)C_1(h)\|K_{x_0}(\cdot')\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\\ &\le C(n)C_s(h)C_1(h)\left(R_h^{\frac{1}{2}}\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + R_h^{\frac{5}{2}}\|\nabla'^2 h\|^3_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\right).\end{aligned}$$

由于 $L^{\frac{2n-2}{n}}(\mathbf{R}^{n-1})$ 连续嵌入于 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$，由估计式（18）和估计式（20）可知

$$\big\|1'_{B_{4r_h}(0')}(\cdot')g\big(\cdot',h(\cdot')\big)\big\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}\le C(n)C_s(h)^{n+5}C_1(h)^2R_h^{\frac{1}{4}}\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

因此，$I_{1,1}(x_0)$ 的估计为

$$|I_{1,1}(x_0)|\le C(n)C_s(h)^{n+6}C_{*,1}(h)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

其中

$$C_{*,1}(h):=C_1(h)^3(1+R_h^{\frac{1}{4}})\left(R_h^{\frac{1}{2}}\|\nabla'^2h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}+R_h^{\frac{5}{2}}\|\nabla'^2h\|^3_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\right).$$

由于对于 $I_{1,2}(x_0)$ 和 $I_{1,3}(x_0)$，积分区域是有界的，因此 $I_{1,2}(x_0)$ 和 $I_{1,3}(x_0)$ 可以完全按照 $|x'_0|<2R_h$ 情况下 $I_{2,1}(x_0)+I_{2,2}(x_0)$ 的方式进行估计。因而，这里我们直接给出 $I_{1,2}(x_0)$ 和 $I_{1,3}(x_0)$ 的估计，而不再重复之前已经完成的推导。$I_{1,2}(x_0)$ 和 $I_{1,3}(x_0)$ 的估计为

$$|I_{1,2}(x_0)|+|I_{1,3}(x_0)|\le C(n)C_s(h)^3C_{*,2}(h)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

其中

$$C_{*,2}(h):=\big(R_h+R_h^{\frac{1}{2n}}\big)\|\nabla'^2h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}+(R_h^{n-1}+1)\|h\|_{C^1(\mathbf{R}^{n-1})}$$

因此，对于带有 $|x'_0|<2R_h$ 的 $x_0\in\Gamma$，令

$$\big(Sg\big)(x_0)=-\int_\Gamma\frac{\partial E}{\partial\mathbf{n}_{x_0}}(x_0-y)g(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

我们得到

$$\gamma\big(Qg\big)(x_0)=\frac{1}{2}g(x_0)-\big(Sg\big)(x_0)$$

with

$$\|S\|_{\mathrm{op}}\le C(n)C_s(h)^{n+6}\big(C_{*,1}(h)+C_{*,2}(h)\big).$$

定理 22 的证明到此完成。 □

4.4 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 迹算子 S的估计

在本小节中，我们假设 R^n_h是一个扰动的 C^2 半空间，其边界为 $\Gamma=\partial\mathrm{R}^n_h$和 $n\ge3$。我们将从迹算子的 $L^{\frac{2n-2}{n}}$估计推导其 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$估计 S。我们首先给出关于 S的 L^p 估计。

引理 23。设 $g\in L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$。那么，对于任意 $1\le p<\infty$，都有 $Sg\in L^p(\Gamma)$。对于 $1<p<\infty$，Sg 满足估计

$$\|Sg\|_{L^p(\Gamma)}\le C_1^*(n,p)C_s(h)^{n+7}\big(C_{*,1}(h)+C_{*,2}(h)+1\big)R_h^{\frac{n-1}{p}}\|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

其中存在某个特定常数 $C_1^*(n,p)>0$，它仅依赖于 n 和 p。对于 $p=1$，Sg 满足

估计

$$\|Sg\|_{L^1(\Gamma)} \le C_2^*(n) C_s(h)^{n+7} C_{*,3}(h) \|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap \dot H^{-\frac12}(\Gamma)}$$

其中某个特定常数 $C_2^*(n) > 0$ 仅依赖于 n，且

$$C_{*,3}(h) := R_h^{n-1}\big(C_{*,1}(h) + C_{*,2}(h)\big) + R_h^n \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

证明。我们首先考虑 $x \in \Gamma$，其中 $|x'| < 3R_h$。根据定理 22，我们已经有了 L^∞ 在 Γ上的 Sg 估计，因此该估计

$$\left(\int_{B'_\Gamma(3R_h)} |Sg(x)|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\right)^{\frac1p} \le C_0^*(n) C_s(h)^{n+6}\big(C_{*,1}(h) + C_{*,2}(h)\big)\Lambda_{3R_h}^{\frac1p} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap \dot H^{-\frac12}(\Gamma)}$$

自然成立，其中表面积 Λ_{3R_h} 估计为

$$\Lambda_{3R_h} = \int_{B'_\Gamma(3R_h)} 1 \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{|x'|<3R_h} \big(1 + \big|\nabla' h(x')\big|^2\big)^{\frac12} \, dx' \le C(n) C_s(h) R_h^{n-1}.$$

因此，对于任意 $1 \le p < \infty$，都有

$$\left(\int_{B'_\Gamma(3R_h)} |Sg(x)|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\right)^{\frac1p} \le C(n,p) C_s(h)^{n+7}\big(C_{*,1}(h) + C_{*,2}(h)\big) R_h^{\frac{n-1}{p}} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap \dot H^{-\frac12}(\Gamma)}.$$

令 $1 < p < \infty$。接下来考虑 $x \in \Gamma$，其中 $|x'| \ge 3R_h$。对于满足 $|y'| < 2R_h$的 $y \in \Gamma$，由三角不等式可得 $|x' - y'| \ge |x'| - 2R_h$。在这种情况下，我们推得

$$\begin{aligned} |Sg(x)|^p &\le C(n,p) C_s(h)^p \left(\int_{|y'|<2R_h} \frac{1}{|x'-y'|^{n-1}} \, dy'\right)^p \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}^p \\ &\le C(n,p) C_s(h)^p \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}^p \frac{|B_{2R_h}(0')|^p}{(|x'| - 2R_h)^{pn-p}}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\int_{B'_\Gamma(3R_h)^c} |Sg(x)|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \le C(n,p) C_s(h)^{p+1} R_h^{p(n-1)} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}^p \int_{|x'|\ge 3R_h} \frac{1}{(|x'| - 2R_h)^{pn-p}} \, dx',$$

其中右侧的积分可估计为

$$\begin{aligned} \int_{|x'|\ge 3R_h} \frac{1}{(|x'| - 2R_h)^{pn-p}} \, dx' &\le C(n) \int_{R_h}^\infty \frac{(r + 2R_h)^{n-2}}{r^{pn-p}} \, dr \\ &\le C(n) \sum_{i=0}^{n-2} R_h^{n-2-i} \int_{R_h}^\infty \frac{r^i}{r^{pn-p}} \, dr \le C(n,p) R_h^{(1-p)(n-1)}. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\left(\int_{B'_\Gamma(3R_h)^c} |Sg(x)|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\right)^{\frac1p} \le C(n,p) C_s(h)^2 R_h^{\frac{n-1}{p}} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

对于 $x \in \Gamma$，当 $|x'| \geq 3R_h$ 时，我们确实有 $\nabla d(x) = (0, ..., 0, 1)$。因此，$Sg(x)$ 的形式为

$$Sg(x) = C(n) \int_{|y'|<2R_h} \frac{h(y')\big(1 + |\nabla' h(y')|^2\big)^{\frac{1}{2}}}{\big(|x' - y'|^2 + h(y')^2\big)^{\frac{n}{2}}} g\big(y', h(y')\big)\, dy'.$$

由于 $|x' - y'| \geq |x'| - 2R_h$ 对任意 $|y'| < 2R_h$，$|Sg(x)|$ 因此可以估计为

$$|Sg(x)| \leq C(n) C_s(h) \|h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \frac{|B_{2R_h}(0')|}{(|x'| - 2R_h)^n}$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_{B'_\Gamma(3R_h)^c} |Sg(x)|\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) &\leq C(n) C_s(h)^2 R_h^{n-1} \|h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \int_{|x'|\geq 3R_h} \frac{1}{(|x'| - 2R_h)^n}\, dx' \\ &\leq C(n) C_s(h) R_h^n \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.\end{aligned}$$

□

现在我们可以陈述迹算子 S的 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 估计。

推论 24. 对于 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，我们有 $Sg \in \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 满足

$$\|Sg\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_3^*(n) C_s(h)^{\frac{3n}{2}+8} C_1(h)\big(C_{*,1}(h) + C_{*,2}(h) + 1\big) R_h^{\frac{n}{2}} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

其中某个特定常数 $C_3^*(n) > 0$ 仅取决于 n。

证明. 由于 $L^{\frac{2n-2}{n}}(\Gamma)$ 连续嵌入于 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，结合估计式（20）和引理 23（取 $p = \frac{2n-2}{n}$），即可得到推论 24。□

我们定义常数

$$C_*(h) := C_s(h)^{\frac{3n}{2}+8} C_1(h)\big(C_{*,1}(h) + C_{*,2}(h) + R_h^{\frac{n}{2}}\big)$$

以及 $C^*(n) := C_0^*(n) + C_3^*(n)$。我们想强调的是，$C^*(n)$ 是一个仅取决于维数 n 的特定常数，而 $C_*(h)$ 是一个仅取决于边界函数 h 的常数。定理 22 和推论 24 保证迹算子 $S: L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是有界线性的，并且

$$\|S\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C^*(n) C_*(h).$$

此外，只要令 R_h 足够小，我们就可以使 $C_*(h)$ 任意小。

5 小扰动的扰动半空间中具有有界数据的诺伊曼问题

我们考虑在 R^n 中一个扰动的 C^2 半空间内，具有 L^∞ 初始数据、适用于 $n \geq 3$ 的拉普拉斯方程诺伊曼问题。我们将从半空间问题开始。众所周知，

诺伊曼问题的解

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^n_+ \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g \quad \text{on} \quad \partial \mathbf{R}^n_+ \end{aligned} \tag{29}$$

形式上表示为

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} N(x,y) g(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{30}$$

其中 N 表示 Neumann-Green函数

$$N(x,y) = E(x-y) + E(x'-y', x_n + y_n).$$

其外法向导数 $\partial N/\partial \mathbf{n}_x$ 对于 $y_n = 0$ 恰好是参数为 x_n的泊松核。由对称性可知

$$-\frac{\partial}{\partial x_n} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} E(x'-y', x_n) g(y')\, dy' \to \frac{1}{2} g(x')$$

当 $x_n > 0$ 趋于零时。因此，形式上 u 给出了方程 (29) 的一个解。函数

$$E * (\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g) := \int_{\mathbf{R}^{n-1}} E(x'-y', x_n) g(y')\, dy'$$

称为 g的单层势。

对于 $g \in L^\infty(\mathrm{R}^{n-1})$，令 $\widetilde{g}(x', x_n) := g(x', 0)$，其中任意 $x \in \mathrm{R}^n$。自然地， $\widetilde{g} \in L^\infty(\mathrm{R}^n)$。令$1_{\mathbf{R}^n_+}$ 为与半空间 R^n_+相对应的示性函数。在这种情况下，我们有

$$\nabla E * (\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g) = \nabla \partial_{x_n} E * 1_{\mathbf{R}^n_+} \widetilde{g}.$$

因此，根据奇异积分算子的 L^∞-BMO 估计 [19, 定理 4.2.7], ，我们得到如下估计

$$\left[\nabla \big(E * (\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g)\big)\right]_{BMO(\mathbf{R}^n)} \le C(n) \|g\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}. \tag{31}$$

此外，由于 $-\partial_{x_n}(E * (\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g))$ 是 Poisson积分的一半，即 ，

$$-\partial_{x_n} \big(E * (\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g)\big) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} P_{x_n}(x'-y') g(y')\, dy',$$

该估计

$$\left\| \partial_{x_n} \big(E * (\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g)\big) \right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)} \le \frac{1}{2} \|g\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \tag{32}$$

对任意 $g \in L^\infty(\mathrm{R}^{n-1})$ 均成立，见 [14, 引理 7]。我们可以针对区域为扰动 C^2 半空间的情形建立类似的估计。

引理 25. 设 R^n_h 是类型 (K) 的一个扰动 C^2 半空间，其边界为 $\Gamma = \partial \mathrm{R}^n_h$ 和 $n \ge 3$。

那么，

(i)（BMO 估计）对于所有 $g \in L^\infty(\Gamma)$，该估计

$$\big[\nabla E * \big(\delta_\Gamma \otimes g\big)\big]_{BMO(\mathbf{R}^n)} \le C(n) C_{25,i}(h,\rho_0)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \tag{33}$$

成立，其中

$$C_{25,i}(h,\rho_0) := C_s(h)^2(R_h+\rho_0+1)^n\big(\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}+\rho_0^{-1}\big).$$

(ii)（法向分量的 L^∞ 估计）对于所有 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot H^{-\frac12}(\Gamma)$，该估计 *te*

$$\big\|\nabla d\cdot\nabla E * \big(\delta_\Gamma \otimes g\big)\big\|_{L^\infty\left(\Gamma^\Omega_{\rho_0}\right)} \le C(n) C_{25,ii}(K,h,\rho_0)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap \dot H^{-\frac12}(\Gamma)} \tag{34}$$

成立，其中

$$\begin{aligned} C_{25,ii}(K,h,\rho_0) &:= C_s(h)\big(R_h^{n-1}+\rho_0 K+\rho_0+2\big)+\rho_0 \\ &\quad + C_s(h)^2(2+6R_h)\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + C_s(h)^{n+10} C_1(h)^3(1+3R_h)^{\frac n2}. \end{aligned}$$

对于 $g \in L^\infty(\Gamma)$，引理 25 中的记号 $E * (\delta_\Gamma \otimes g)$ 表示

$$E * (\delta_\Gamma \otimes g)(x) := \int_\Gamma E(x-y) g(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

5.1 BMO 估计

我们遵循引理 5(i)证明中的思路，该证明在区域有界的情形下建立了相同的估计。

引理25(i) 的证明。对于 (Γ)，我们按照第4.3小节的设定，将 g 分解为曲线部分 g_1 和直线部分 g_2，并令 $g_2^H \in L^\infty(\mathrm{R}^{n-1})$ 由表达式 (26) 定义。根据定义，我们有

$$E * (\delta_\Gamma \otimes g_2) = E * (\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H),$$

该估计

$$\big[\nabla\big(E * (\delta_{\partial\mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H)\big)\big]_{BMO(\mathbf{R}^n)} \le C(n)\|g_2^H\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \le C(n)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}$$

由估计(31)可得。由于现在考虑的是边界一致C^2的情形，有符号距离函数 d 在 $\Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0}$ 中是 C^2，参见例如第 14.6] 节。我们考虑满足 $0 \le \theta \le 1$ 的 $\theta \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathrm{R})$，其中 $\theta(\sigma) = 1$，当 $|\sigma| \le 1$ 时成立；且 $\theta(\sigma) = 0$，当 $|\sigma| \ge 2$ 时成立。注意，$\theta_d := \theta(4d/\rho_0)$ 在 R^n 中是 C^2。我们将 $g_1 \in L^\infty(\Gamma)$ 延拓到 $g_1^{\mathrm{e}} \in L^\infty\big(\Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0/2}\big)$，定义如下:

$$g_1^{\mathrm{e}}(x) := g_1(\pi x)$$

对于任意 $x \in \Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0/2}$，其中 πx 表示 x 在 Γ 上的唯一投影。对于 $x \in \Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0/2}$，通过考虑

$U_{\rho_0/2}(\pi x)$ 中的法坐标 $x = F_{\pi x}(\eta)$，我们得到

$$(\nabla_x d)_{F_{\pi x}} \cdot (\nabla_x g_1^{\mathrm{e}})_{F_{\pi x}} = \partial_{\eta_n} (g_1^{\mathrm{e}})_{F_{\pi x}} = 0$$

对于任意 $|\eta'| < \rho_0/2$ 和 $\tau_1, \tau_2 \in (-\rho_0/2, \rho_0/2)$，有 $(g_1^{\mathrm{e}})_{F_{\pi x}}(\eta', \tau_1) = (g_1^{\mathrm{e}})_{F_{\pi x}}(\eta', \tau_2)$。这里，记号 $(f)_{F_{\pi x}}$ 表示 f 和 $F_{\pi x}$ 的复合，即 $(f)_{F_{\pi x}} := f \circ F_{\pi x}$。因此，我们看到 $\nabla d \cdot \nabla g_1^{\mathrm{e}} = 0$ 属于 $\Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0/2}$。

考虑 $g_{1,\ \mathrm{c}}^{\mathrm{e}} := \theta_d g_1^{\mathrm{e}}$。一个关键的观察是

$$\delta_\Gamma \otimes g_1 = (\nabla 1_{\mathbf{R}^n_h} \cdot \nabla d) g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} = \operatorname{div}(g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} 1_{\mathbf{R}^n_h} \nabla d) - 1_{\mathbf{R}^n_h} \operatorname{div}(g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} \nabla d),$$
$$\operatorname{div}(g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} \nabla d) = g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} \Delta d + \nabla d \cdot \nabla g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} = g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} \Delta d + \frac{4\theta'(4d/\rho_0)}{\rho_0} g_1^{\mathrm{e}}.$$

因此，

$$\nabla E * (\delta_\Gamma \otimes g_1) = \nabla \operatorname{div}\left(E * (g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} 1_{\mathbf{R}^n_h} \nabla d)\right) - \nabla E * \left(1_{\mathbf{R}^n_h} g_1^{\mathrm{e}} f_{\theta,\rho_0/4}\right) = I_1 + I_2$$

其中 $f_{\theta,\ \rho_0/4} := \theta_d \Delta d + \frac{4\theta'}{(4d/\rho_0)\rho_0}$。根据奇异积分算子[19, 的 L^∞-BMO 估计（定理 4.2），第一项估计为

$$[I_1]_{BMO(\mathbf{R}^n)} \le C(n) \|g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} \nabla d\|_{L^\infty\left(\mathbf{R}^n_h\right)} \le C(n) \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

由于

$$\operatorname{supp}(g_1^{\mathrm{e}} f_{\theta,\rho_0/4}) \subseteq U_{\mathrm{c},\rho_0/2} := \left\{ x \in \Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0/2} \,\middle|\, |(\pi x)'| \le 2R_h \right\},$$

对于 $x \in \mathbf{R}^n$，其中 $d(x, U_{\mathrm{c},\rho_0/2}) = \inf_{y \in U_{\mathrm{c},\rho_0/2}} |x - y| < 1$，我们有

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &\le C(n) \int_{U_{\mathrm{c},\rho_0/2}} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy \|f_{\theta,\rho_0/4}\|_{L^\infty\left(U_{\mathrm{c},\rho_0/2}\right)} \|g_1^{\mathrm{e}}\|_{L^\infty\left(U_{\mathrm{c},\rho_0/2}\right)} \\ &\le C(n) C_{25,i}(h, \rho_0) \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}. \end{aligned}$$

其中

$$C_{25,i}(h, \rho_0) := (R_h + \rho_0 + 1)^n \left(\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|\nabla' h\|^2_{L^\infty(\Gamma)} \|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\Gamma)} + \rho_0^{-1} \right).$$

对于 $x \in \mathbf{R}^n$，其中 $d(x, U_{\mathrm{c},\rho_0/2}) = \inf_{y \in U_{\mathrm{c},\rho_0/2}} |x - y| \ge 1$，上述关于 $|I_2(x)|$ 的同一估计显然成立，因为对于任意 $y \in U_{\mathrm{c},\rho_0/2}$，$|x-y|^{-(n-1)} \le 1$。引理 25 第一部分的证明至此完成。□

5.2 L^∞ 法向分量的估计

在 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的情况下，可以通过几乎与定理 22 中证明迹算子 S 从 $L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 到 $L^\infty(\Gamma)$ 有界性相同的论证，推导出 $\nabla E * (\delta_\Gamma \otimes g)$ 的法向分量在 Γ 的一个小邻域内的 L^∞ 估计。

引理25的证明 (ii)。令 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 和 $x \in \Gamma^\Omega_{\rho_0}$。首先假设 $|x'| \ge 3R_h$。按照第4.3小节中的设定，将 g 分解为曲线部分 g_1 和直线

部分 g_2，我们得到

$$\begin{aligned}\nabla d(x)\cdot\big(\nabla E*(\delta_\Gamma\otimes g)\big)(x)&=\big(\partial_{x_n}E*(\delta_\Gamma\otimes g)\big)(x)\\&=\big(\partial_{x_n}E*(\delta_{\partial\mathbf{R}^n_+}\otimes g_2^H)\big)(x)+\int_{B'_\Gamma(2R_h)}\big(\partial_n E\big)(x-y)g_1(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y),\end{aligned}$$

其中 $g_2^H=T_h^{-1}(g_2)$。由估计 (32)，可得

$$\big|\big(\partial_{x_n}E*(\delta_{\partial\mathbf{R}^n_+}\otimes g_2^H)\big)(x)\big|\le\frac{1}{2}\|g_2^H\|_{L^\infty(\partial\mathbf{R}^n_+)}\le\frac{1}{2}\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

由于 $|x'|\ge 3R_h$，对于任意 $y\in B'_\Gamma(2R_h)$，有 $|x-y|\ge|x'-y'|\ge|x'|-|y'|\ge R_h$。因此 ,

$$\begin{aligned}\left|\int_{B'_\Gamma(2R_h)}\big(\partial_n E\big)(x-y)g_1(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right|&\le C(n)R_h^{-(n-1)}\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}\int_{|y'|<2R_h}\big(1+|\nabla' h(y')|^2\big)^{\frac{1}{2}}\,dy'\\&\le C(n)C_s(h)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.\end{aligned}$$

因此，对于满足 $|x'|\ge 3R_h$ 的 $x\in\Gamma^\Omega_{\rho_0}$，可得

$$\big|\nabla d(x)\cdot\big(\nabla E*(\delta_\Gamma\otimes g)\big)(x)\big|\le C(n)C_s(h)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

接下来，我们考虑 $|x'|<3R_h$ 的情形。在这种情况下，我们考虑对 g 的一种修正分解。令 $g_1^*:=1'_{B_{1+3R_h}(0')}\cdot g$，并令 $g_2^*:=g-g_1^*$，其中 $1'_{B_{1+3R_h}(0')}$ 是与 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的开球 $B_{1+3R_h}(0')$ 相关的示性函数。我们首先处理修正后的曲线部分 g_1^*。注意

$$\begin{aligned}\nabla d(x)\cdot\big(\nabla E*(\delta_\Gamma\otimes g_1^*)\big)(x)&=\int_\Gamma\big(\nabla d(x)-\nabla d(y)\big)\cdot\nabla E(x-y)g_1^*(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\\&\quad+\int_\Gamma\frac{\partial E}{\partial\mathbf{n}_y}(x-y)g_1^*(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)=I_1(x)+I_2(x).\end{aligned}$$

根据命题20，我们有

$$\begin{aligned}|I_1(x)|&\le C(n)\|\nabla'^2h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}C_s(h)^2\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}\int_{|y'|<1+3R_h}\frac{1}{|x'-y'|^{n-2}}\,dy'\\&\le C(n)(1+6R_h)\|\nabla'^2h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}C_s(h)^2\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.\end{aligned}$$

另一方面，根据引理 19，我们有

$$|I_2(x)|\le C(n)C_{19}(K,h,\rho_0)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

接下来，我们处理修正后的直线部分 g_2^*。令 $\theta_*\in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ 为一个截断函数，使得 $0\le\theta_*\le 1$, $\theta_*=1$属于 $B_{\frac{1}{2}+3R_h}(0')$，且 $\theta_*\subseteq B_{1+3R_h}(0')$ 的支集。令 $x\in\Gamma^\Omega_{\rho_0}$ 满足 $|x'|<3R_h$。我们定义

$$\theta_{*,x}(y'):=\theta_*(y'-x'),\quad K_x(y'):=\Big\{\nabla d(x)\cdot\nabla E\Big(x-\big(y',h(y')\big)\Big)\Big\}\big(1-\theta_{*,x}(y')\big).$$

注意

$$\nabla d(x)\cdot\big(\nabla E*(\delta_\Gamma\otimes g_2^*)\big)(x)=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}K_x(y')g_2^*\big(y',h(y')\big)\big(1+\big|\nabla' h(y')\big|^2\big)^{\frac12}\,dy'$$

并且对于任意满足 $x\neq y$ 的 $x\in\Gamma_{\rho_0}^{\Omega}$ 和 $y\in\Gamma$，有

$$\nabla d(x)\cdot\nabla E(x-y)=-C(n)\frac{-\nabla' h(x')\cdot(x'-y')+\big(x_n-h(y')\big)}{\omega(x')\Big(|x'-y'|^2+\big(x_n-h(y')\big)^2\Big)^{n/2}}$$

其中 $\omega(x')=\big(1+\big|\nabla' h(x')\big|^2\big)^{\frac12}$。仿照定理 22 的证明中的类似计算，我们可以推出，$K_x(\cdot')\in C^1(\mathbf{R}^{n-1})$ 满足 $\operatorname{supp} K_x(\cdot')\subset B_{\frac12+3R_h}(x')^{\mathrm{c}}$，

$$\big|K_x(y')\big|\cdot|x'-y'|^{n-1}\le C(n)C_s(h),\quad \big|\nabla'_{y'}K_x(y')\big|\cdot|x'-y'|^n\le C(n)C_s(h)^2.$$

因此，利用 $\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})$ 与 $\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})$ 之间的对偶关系、命题 13、命题 21、估计式（18）和估计式（20），我们可以推出

$$\begin{aligned}\big|\nabla d(x)\cdot\big(\nabla E*(\delta_\Gamma\otimes g_2^*)\big)(x)\big|&\le\|\big(1+\big|\nabla' h(\cdot')\big|^2\big)^{\frac12}K_x(\cdot')\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}\|g_2^*\big(\cdot',h(\cdot')\big)\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}\\&\le C(n)C_s(h)^{n+10}C_1(h)^3(1+3R_h)^{\frac n2}\|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

□

我们想强调的是，如果仅假设 $g\in L^\infty(\Gamma)$，那么在 Γ 的一个小邻域内得到 $\nabla E*(\delta_\Gamma\otimes g)$ 的法向分量的 L^∞ 估计是不够的。设 B 是一个以 0 为中心、半径为 r_B 的球，使得 $B'_\Gamma(2R_h)\subset B/2$。采用几乎与引理 25 (ii) 的证明相同的论证，我们可以看出，如果 $x\in\Gamma_{\rho_0}^{\Omega}$ 满足 $|x'|\ge r_B/2$，那么有如下估计

$$\big|\nabla d(x)\cdot\big(\nabla E*(\delta_\Gamma\otimes g)\big)(x)\big|\le C(K,R_*,R_h)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

此外，若 $x\in\Gamma_{\rho_0}^{\Omega}$ 满足 $|x'|<r_B/2$，我们将 $g=g_c+g_s$ 分解为

$$g_c\big(x',h(x')\big):=1'_{B_{r_B}(0')}(x')g\big(x',h(x')\big),\quad g_s\big(x',h(x')\big):=g\big(x',h(x')\big)-g_c\big(x',h(x')\big)$$

对任意 $x'\in\mathbf{R}^{n-1}$。由于 g_c 是紧支撑的，我们还有

$$\big|\nabla d(x)\cdot\big(\nabla E*(\delta_\Gamma\otimes g_c)\big)(x)\big|\le C(K,R_*,R_h)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

主要障碍来自 g_s 在 $|x'|<r_B/2$情形下的贡献。

命题 26. 对于 $1\le j\le n-1$，不存在常数 $C>0$ 使得

$$\big|(\partial_j E)*\big(\delta_{\mathbf{R}^{n-1}}\otimes g\big)(x',0)\big|\le C\|g\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}$$

对于任意满足支集 $g\subseteq B_{r_B}(0')^{\mathrm{c}}$ 的 $|x'|<r_B/2$ 和 $g\in L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$。

证明。设 $1 \le j \le n-1$。注意到

$$(\partial_j E) * \big(\delta_{\mathbf{R}^{n-1}} \otimes g\big)(x',0) = C(n) \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{x_j - y_j}{|x'-y'|^n} g(y')\, dy' = C(n) R_j(g)$$

其中 $R_j(g)$ 表示 g 的第 j 个黎斯变换。设 $\theta_2 \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ 为一个满足 $0 \le \theta_2 \le 1$, $\theta_2 = 1$ in $B_1(0')$ 且 $\operatorname{supp}\theta_2 \subseteq B_2(0')$ 的截断函数。我们设 $\psi_{r_B/4}(z') := \theta_2\big(\frac{4z'}{r_B}\big)$,$\phi_{r_B}(z') := 1 - \theta_2(z'/r_B)$, $\psi_{r_B/16}(z') := \theta_2\big(\frac{16z'}{r_B}\big)$ and

$$R_j^*(z') := \big(1 - \psi_{r_B/16}(z')\big) \cdot \frac{z_j}{|z'|^n}$$

对于任意 $z' \in \mathbf{R}^{n-1}$ 和 $1 \le j \le n-1$。

我们假设命题 26 不成立。假设存在一个常数 $C' > 0$ ，使得

$$\big|R_j(g)(x')\big| \le C' \|g\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}$$

对于任意 $|x'| < r_B/2$ 和 $g \in L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$，满足 $\operatorname{supp} g \subseteq B_{r_B}(0')^{\mathrm{c}}$。因此，估计

$$\|P(g)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \le C' \|g\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \tag{35}$$

对任意 $g \in L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ 均成立，其中

$$P(g)(x') := \psi_{r_B/4}(x')\Big(R_j^* * \big(\phi_{r_B} g\big)\Big)(x'), \quad x' \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

关于 $f \in L^1(\mathbf{R}^{n-1})$，我们可以将 P 的伴随算子定义为

$$P^*(f)(x') := \phi_{r_B}(x')\Big(R_j^* * \big(\psi_{r_B/4} f\big)\Big)(x'), \quad x' \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

估计 (35) 表明， P^* 是一个有界线性算子，它将 $L^1(\mathbf{R}^{n-1})$ 映射到 $L^1(\mathbf{R}^{n-1})$，即有

$$\|P^*(f)\|_{L^1(\mathbf{R}^{n-1})} \le C' \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^{n-1})} \tag{36}$$

对任意 $f \in L^1(\mathbf{R}^{n-1})$ 均成立。对于 $t > 0$，我们考虑高斯函数

$$f_t(z') := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n-1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|z'|^2}{4t}}; \quad z' \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

由于 $R_j^*(\cdot')\psi_{r_B/4}(x' - \cdot') \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ 且

$$\lim_{t\to 0} f_t(x' - y') = \delta(x' - y')$$

在分布的意义下，我们看到

$$\lim_{t\to 0} P^*(f_t)(x') = \phi_{r_B}(x') R_j^*(x').$$

由于 $\|f_t\|_{L^1(\mathbf{R}^{n-1})}=1$ 对于任意 $t>0$ 都成立，估计 (36) 表明，对于任意 $t>0$，都有

$$\|P^*(f_t)\|_{L^1(\mathbf{R}^{n-1})}\le C'.$$

因此，由博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理，存在一个收敛到零的序列 $\{t_m\}_{m\in\mathbf{N}}$，使得该序列

$$\left\{\|P^*(f_{t_m})\|_{L^1(\mathbf{R}^{n-1})}\right\}_{m\in\mathbf{N}}$$

收敛。由法图引理，我们便可得出

$$\|\phi_{r_B}R_j^*\|_{L^1(\mathbf{R}^{n-1})}\le\lim_{t_m\to0}\|P^*(f_{t_m})\|_{L^1(\mathbf{R}^{n-1})}\le C'.$$

然而，对于 $|x'|\ge 2r_B$，有 $\phi_{r_B}(x')R_j^*(x')=x_j/|x'|^n$，这显然在区域 $\left\{x'\in\mathrm{R}^{n-1}\,\middle|\,|x'|\ge 2r_B\right\}$中不可 L^1积。由此得到矛盾。□

5.3 L^2 单层势梯度的估计

我们先讨论半空间的情形。

命题 27. 设 $n\ge 3$。对于任意 $g\in\dot H^{-\frac12}(\mathrm{R}^{n-1})$，估计

$$\left\|\nabla E*\left(\delta_{\partial\mathbf{R}^n_+}\otimes g\right)\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}=C(n)\|g\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}$$

成立，其中某个常数 $C(n)>0$ 仅取决于维数 n。

证明。我们对 E 关于 x' 作偏傅里叶变换，即令

$$\widehat{E}'(\xi',x_n):=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\mathrm{e}^{-i\xi'\cdot x'}E(x',x_n)\,dx'.$$

由于对于任意固定的 $x_n>0$，$E(x',x_n)$ 在 R^{n-1} 中是径向对称的，因此 $\widehat{E}'(\xi',x_n)$ 可由函数 $r^{\frac{n-3}{2}}E(r,x_n)$ 的 $\frac{n-3}{2}$ 阶汉克尔变换计算，其中

$$E(r,x_n):=\frac{C(n)}{(r^2+x_n^2)^{\frac{n-2}{2}}},$$

也就是说，我们有

$$\widehat{E}'(\xi',x_n)=|\xi'|^{\frac{3-n}{2}}\int_0^\infty r^{\frac{n-1}{2}}E(r,x_n)J_{\frac{n-3}{2}}(r|\xi'|)\,dr=C(n)\frac{\mathrm{e}^{-x_n|\xi'|}}{|\xi'|}$$

其中 $J_{\frac{n-3}{2}}$ 是 $\frac{n-3}{2}$ 阶第一类贝塞尔函数，参见例如 [17, 公式 6.565.2]。然后，由傅里叶-普朗歇尔公式可得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla' E*\left(\delta_{\partial\mathbf{R}^n_+}\otimes g\right)\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}&=\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\left|\nabla' E*\left(\delta_{\partial\mathbf{R}^n_+}\otimes g\right)(x',x_n)\right|^2dx'\,dx_n\\&=C(n)\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\left|\widehat{g}'(\xi')\right|^2\int_0^\infty\mathrm{e}^{-2x_n|\xi'|}\,dx_n\,d\xi'=C(n)\|g\|^2_{\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\big\|\partial_{x_n}E*\big(\delta_{\partial\mathbf{R}^n_+}\otimes g\big)\big\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}&=\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\big|\partial_{x_n}E*\big(\delta_{\partial\mathbf{R}^n_+}\otimes g\big)(x',x_n)\big|^2\,dx'\,dx_n\\&=C(n)\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\big|\widehat{g}'(\xi')\big|^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x_n|\xi'|}\,dx_n\,d\xi'=C(n)\|g\|^2_{\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}.\end{aligned}$$

□

随后，我们将这一结果推广到任意扰动的 C^2 半空间 R^n_h。

引理 28. 设 R^n_h 是一个边界为 $\Gamma=\partial\Omega$ 和 $n\geq 3$ 的微扰 C^2 半空间。对于任意 $g\in L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$，估计

$$\big\|\nabla E*\big(\delta_\Gamma\otimes g\big)\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\leq C(n)C_{28}(h,\rho_0)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}$$

成立，其中

$$\begin{aligned}C_{28}(h,\rho_0):=\rho_0^{\frac12}R_h^{\frac{n-1}{2}}+\rho_0^{\frac{n+2}{2n}}C_s(h)^2R_h^{\frac{n^2+n-2}{2n}}\big(\|\nabla'^2h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}+\rho_0^{-1}\big)\\+C_s(h)^{n+5}C_1(h)^2\big(1+R_h^{\frac n2}\big).\end{aligned}$$

证明. 设 $g\in L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$。按照第4.3小节中的设定，我们将 g 分解为曲线部分 $g_1=1'_{B_{2R_h}(0')}g$ 和直线部分 $g_2=g-g_1$。由于 $g\in L^\infty(\Gamma)$ 且 $L^{\frac{2n-2}{n}}(\Gamma)$ 连续嵌入于 $\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$，由估计式（20）可知 $g_1\in\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$ 满足

$$\begin{aligned}\|g_1\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}&\leq C(n)C_s(h)^{\frac n2+1}C_1(h)\|g_1\|_{L^{\frac{2n-2}{n}}(\Gamma)}\\&\leq C(n)C_s(h)^{\frac n2+2}C_1(h)R_h^{\frac n2}\|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.\end{aligned}$$

因此，$g_1,g_2\in L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$ 均成立。关于 g_2，令 g_2^H 由表达式(26)定义。由于 $T_h(g_2^H)=g_2$，且映射 $T_h\colon\ \dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})\to\dot H^{-\frac12}(\Gamma)$ 是同构，由估计式（18）可知 $g_2^H\in\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})$ 满足

$$\begin{aligned}\|g_2^H\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbf{R}^{n-1})}&\leq C(n)C_s(h)^{\frac n2+3}C_1(h)\|g_2\|_{\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}\\&\leq C(n)C_s(h)^{n+5}C_1(h)^2\big(1+R_h^{\frac n2}\big)\|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot H^{-\frac12}(\Gamma)}.\end{aligned}\tag{37}$$

接下来，我们遵循引理 25(i) 的证明来估计 L^2 $\nabla E*\big(\delta_\Gamma\otimes g_1\big)$的范数。我们考虑满足以下条件的 $\theta\in C_c^\infty(\mathbf{R})$：$0\leq\theta\leq1$, $\theta(\sigma)=1$ 当 $|\sigma|\leq1$ 时，以及 $\theta(\sigma)=0$ 当 $|\sigma|\geq2$时。令$\theta_d:=\theta(4d/\rho_0)$，其中 d 是由表达式 (5) 定义的有符号距离函数。注意，这个θ_d 在 R^n 上是 C^2。我们将 $g_1\in L^\infty(\Gamma)$ 延拓到 $g_1^{\mathrm{e}}\in L^\infty\big(\Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0/2}\big)$，定义为：对任意满足 πx 的 $x\in\Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0/2}$，令 $g_1^{\mathrm{e}}(x):=g_1(\pi x)$，其中 πx 表示 x 在 Γ上的唯一投影。在 $\Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0/2}$中有 $\nabla d\cdot\nabla g_1^{\mathrm{e}}=0$。然后令 $g_{1,\,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}}:=\theta_dg_1^{\mathrm{e}}$。对于任意 $x\in\mathrm{R}^n$，有

$$\begin{aligned}\nabla E*\big(\delta_\Gamma\otimes g_1\big)(x)&=\nabla\,\mathrm{div}\,\big(E*(g_{1,\mathrm{c}}^{\mathrm{e}}1_{\mathbf{R}^n_h}\nabla d)\big)(x)-\nabla E*\big(1_{\mathbf{R}^n_h}g_1^{\mathrm{e}}f_{\theta,\rho_0/4}\big)(x)\\&=I_1(x)+I_2(x)\end{aligned}$$

其中 $f_{\theta,\ \rho_0/4} := \theta_d \Delta d + \frac{4\theta'}{(4d/\rho_0)\,\rho_0}$。由于对于任意 $1 < p < \infty$, $\nabla \mathrm{div}\ E$ 在 L^p 中有界，参见例如定理 5.2.7 和定理 5.2.10], ，我们可以推出

$$\|I_1\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le C\|g^{\mathrm{e}}_{1,\mathrm{c}} 1_{\mathbf{R}^n_h} \nabla d\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le C(n)\rho_0^{\frac{1}{2}} R_h^{\frac{n-1}{2}} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}$$

因为 $\mathrm{supp} g^{\mathrm{e}}_{1,\ \mathrm{c}} \subset \left\{ x \in \Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0/2} \,\middle|\, |(\pi x)'| < 2R_h \right\}$。由于 $\nabla E(x)$ 是一个被 $C(n)|x|^{1-n}$ 支配的积分核，其中 $x \in \mathrm{R}^n \setminus \{0\}$，根据著名的 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式（例如参见 [1, 定理 1.7], ），可得

$$\|I_2\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le C(n)\|1_{\mathbf{R}^n_h} g^{\mathrm{e}}_1 f_{\theta,\rho_0/4}\|_{L^r(\mathbf{R}^n)}$$

其中 $r = \frac{2n}{n+2}$。由于 $\mathrm{supp}\ g^{\mathrm{e}}_1 f_{\theta,\ \rho_0/4} \subset \left\{ x \in \Gamma^{\mathbf{R}^n}_{\rho_0/2} \,\middle|\, |(\pi x)'| < 2R_h \right\}$，我们推得

$$\begin{aligned}
&\|1_{\mathbf{R}^n_h} g^{\mathrm{e}}_1 f_{\theta,\rho_0/4}\|_{L^r(\mathbf{R}^n)} \\
&\quad \le C(n)\rho_0^{\frac{1}{r}} R_h^{\frac{n-1}{r}} \left(\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} \big(1 + \|\nabla' h\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})}\big) + \rho_0^{-1} \right) \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到关于 g_1 的 L^2 估计，即

$$\big\|\nabla E * \big(\delta_\Gamma \otimes g_1\big)\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le C(n) C_{28,1}(h,\rho_0) \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

其中

$$C_{28,1}(h,\rho_0) := \rho_0^{\frac{1}{2}} R_h^{\frac{n-1}{2}} + \rho_0^{\frac{n+2}{2n}} C_s(h)^2 R_h^{\frac{n^2+n-2}{2n}} \big(\|\nabla'^2 h\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})} + \rho_0^{-1}\big).$$

$\nabla E * \big(\delta_\Gamma \otimes g_2\big)$ 在 R^n_+ 中的 L^2 估计可直接由命题 27 和估计 (37) 得到。我们有

$$\begin{aligned}
\big\|\nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H\big)\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} &= C(n)\|g_2^H\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \\
&\le C(n) C_s(h)^{n+5} C_1(h)^2 \big(1 + R_h^{\frac{n}{2}}\big) \|g\|_{L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

注意，对于任意 $x \in \mathrm{R}^n$，都有

$$\nabla E * \big(\delta_\Gamma \otimes g_2\big)(x) = \nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H\big)(x).$$

此外，对于任意 $x = (x', x_n) \in \mathrm{R}^n_+$，都有

$$\Big|\nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H\big)(x', -x_n)\Big| = \Big|\nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H\big)(x', x_n)\Big|.$$

因此，R^n 中 L^2 的 $\nabla E * \big(\delta_\Gamma \otimes g_2\big)$ 估计为

$$\begin{aligned}
\big\|\nabla E * \big(\delta_\Gamma \otimes g_2\big)\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &= 2\big\|\nabla E * \big(\delta_{\partial \mathbf{R}^n_+} \otimes g_2^H\big)\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \\
&\le C(n) C_s(h)^{n+5} C_1(h)^2 \big(1 + R_h^{\frac{n}{2}}\big) \|g\|_{L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

□

5.4 诺伊曼问题的解

设 R_h^n 是一个带有 C^2 边界 $\Gamma = \partial\mathrm{R}_h^n$ 的扰动 $n \geq 3$半空间，并且$_h^n$。进一步假设 R_h^n 具有小扰动，即要求边界函数 $h \in C_c^2(\mathrm{R}^{n-1})$ 满足

$$C_*(h) < \frac{1}{2C^*(n)}$$

其中，$C^*(n)$ 是一个仅依赖于维数 n 的特定常数。在此设定下，我们能够构造诺伊曼问题 (2) 的一个解。

引理 4 的证明。设 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$。由推论 24 和定理 22，对于任意 $i \in \mathrm{N}$，我们有

$$\|(2S)^i g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq 2^i C^*(n)^i C_*(h)^i \|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

由于现在假设 $2C^*(n)C_*(h) < 1$，算子 $I - 2S$（它是从 $L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 到 $L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的有界线性算子）存在良定义的逆算子，该逆算子可由诺伊曼级数构造

$$(I - 2S)^{-1} := \sum_{i=0}^{\infty} (2S)^i$$

也就是说，$(I - 2S)^{-1}\colon L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 也是有界线性算子。对于$g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，我们有

$$\|(I - 2S)^{-1} g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2^i C^*(n)^i C_*(h)^i \right) \|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \frac{\|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}}{1 - 2C^*(n)C_*(h)}.$$

因此，关于 $g \in L^\infty(\Gamma) \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，我们声称诺伊曼问题 (2) 的解可以构造为

$$u(x) = E * \Big(\delta_\Gamma \otimes \big(2(I - 2S)^{-1} g \big) \Big)(x), \quad x \in \mathbf{R}_h^n.$$

直接检验可知，u 形式上满足诺伊曼问题 (2)。只需建立 ∇u 的 $vBMOL^2$估计。由引理 25 可知，∇u在 R_h^n 中的 $vBMO^{\infty,\rho_0}$-范数有保证。根据估计 (33) 和估计 (34)，我们有

$$\|\nabla u\|_{vBMO^{\infty,\rho_0}\left(\mathbf{R}_h^n\right)} \leq \frac{C(n)C_{25}(K,h,\rho_0)}{1 - 2C^*(n)C_*(h)} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

其中 $C_{25}(K,h,\rho_0) := C_{25,i}(h,\rho_0) + C_{25,ii}(K,h,\rho_0)$。由引理 28 可直接得到 ∇u 的 L^2估计，因此我们有

$$\|\nabla u\|_{L^2\left(\mathbf{R}_h^n\right)} \leq C(n)C_{28}(h,\rho_0) \|(I - 2S)^{-1} g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \frac{C(n)C_{28}(h,\rho_0)}{1 - 2C^*(n)C_*(h)} \|g\|_{L^\infty(\Gamma)\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

引理 4 的证明至此完毕。 □

致谢

第一作者部分获得日本学术振兴会通过编号为 19H00639（基盘A）、18H05323（开拓）和 17H01091（基盘A）的资助，以及 Arithmer公司和大金工业株式会社提供的合作研究资助。

参考文献

[1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin, 《傅里叶分析与非线性偏微分方程》, 《数学科学基础》, 343, 施普林格, 海德堡, 2011年。[2] M. Bolkart, Y. Giga, 关于斯托克斯半群导数的 L^∞-BMO 估计, 《数学杂志》, 284 (2016) 1163-1183。[3] M. Bolkart, Y. Giga, T.-H. Miura, T. Suzuki, Y. Tsutsui, 关于某些非亥姆霍兹区域中 L^p-斯托克斯半群的解析性, 《数学新闻》, 290 (2017) 2524-2546。[4] M. Bolkart, Y. Giga, T. Suzuki, BMO型空间中的斯托克斯半群解析性, 《日本数学会杂志》, 70 (2018) 153-177。[5] M. Bolkart, Y. Giga, T. Suzuki, Y. Tsutsui, BMO型范数的等价性及其在热半群和斯托克斯半群中的应用, 《势分析》, 49 (2018) 105-130。[6] L. Brasco, D. G´omez-Castro, J. L. V´azquez, 齐次分数阶索博列夫空间的刻画, 《变分法》, 60, 60 (2021) https://doi.org/10.1007/s00526-021-01934-6 [7] R. Farwig, H. Kozono, H. Sohr, 在一般区域中研究斯托克斯方程和纳维–斯托克斯方程的 L^q 方法, 《数学学报》, 195 (2005) 21-53。[8] R. Farwig, H. Kozono, H. Sohr, 关于一般无界区域中的亥姆霍兹分解, 《巴塞尔数学档案》, 88 (2007) 239-248。[9] C. Fefferman, E. M. Stein, 多变量的 H^p 空间, 《数学学报》, 129 (1972) 137-193。[10] D. Fujiwara, H. Morimoto, 向量场亥姆霍兹分解的一个 L_r 定理, 《东京大学理学部数学科论文集》, 24 (1977) 685-700。[11] G. P. Galdi, 《纳维–斯托克斯方程数学理论导论：稳态问题》, 第二版, 《数学施普林格专著》, 施普林格, 纽约, 2011年。[12] Y. Giga, Z. Gu, 半空间上有界平均振荡向量场及实哈代空间中向量场的亥姆霍兹分解, 《应用数学科学进展》, 29 (2020) 87-128。[13] Y. Giga, Z. Gu, 有界平均振荡向量场的法向迹, 《势分析》, (2022) https://doi.org/10.1007/s11118-021-09973-6

[14] Y. Giga, Z. Gu，有界区域中有界平均振荡向量场空间的亥姆霍兹分解，《数学年刊》，(2022) https://doi.org/10.1007/s00208-022-02410-y[15] Y. Giga, Z. Gu, P.-Y. Hsu，在无滑移边界条件下，涡量方向的连续对齐可防止纳维–斯托克斯流发生爆破，《非线性分析》，189 (2019) 111579。[16] Y. Giga, H. Kuroda, M. Lasica，n维实数空间中的四阶全变差流，预印本 (2022)，arXiv: 2205.07435^{n}I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》，第七版，Elsevier/Academic Press，阿姆斯特丹，2007年。[17] L. Grafakos，《经典傅里叶分析》，第三版，《数学研究生教材》，249，Springer-Verlag，纽约，2014年。[18] L. Grafakos，《现代傅里叶分析》，第三版，《数学研究生教材》，250，Springer-Verlag，纽约，2014年。[19] D. Gilbarg, N. S. Trudinger，《二阶椭圆型偏微分方程》，第二版，《数学科学基础》，224，Springer-Verlag，柏林，1983年。[20] Z. Gu，区域中 [21] 的延拓定理，预印本 (2022)。 bmo Q. Han, F. Lin，《椭圆型偏微分方程》，第二版，《库朗数学讲义》，1，纽约大学库朗数学科学研究所，纽约；美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011年。[22] H. Kozono, H. Wadade，关于临界索博列夫空间与有界平均振荡的 Gagliardo-Nirenberg 型不等式的评注，《数学杂志》，259 (2008) 935-950。[23]S. G. Krantz, H. R. Parks，《隐函数定理：历史、理论与应用》，2003年版重印本。《现代 Birkhäuser 经典著作》，Birkhäuser/Springer，纽约，2013年。[24] O. A. Ladyzhenskaya，《黏性不可压缩流的数学理论》，英文第二版，第2卷，Gordon and Breach Science Publishers，纽约-伦敦-巴黎，1969年。¨J.-L. Lions, E. Magenes，《非齐次边值问题及其应用》第I卷，P. Kenneth 法译本，《数学科学基础》，第181卷，Springer-Verlag，纽约-海德堡，1972年。¨H. Sohr，《纳维–斯托克斯方程：一种初等泛函分析方法》，《Birkhäuser 高级教材：巴塞尔教材》，Birkhäuser Verlag，巴塞尔，2001年。[25] R. Temam，《纳维–斯托克斯方程：理论与数值分析》，修订版，附 F. Thomasset 撰写的附录，《数学及其应用研究》，2，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹-纽约，1979年。