arXiv:2301.02712v1 [math.DS] 6 Jan 2023

高维法图集内的动力学

Mi Hu

2023年1月10日

摘要

本文研究高维吸引盆内轨道的行为。设 $F(z,w) = (P(z)\ Q(w))$，其中 $P(z)\ Q(w)$ 是定义在 $\mathbb{C}$, P 上的两个次数为 $m_1, m_2 \geq 2$ 的多项式，且 $= Q(0) = 0$, $0 < |P'(0)|$, $|Q'(0)| < 1$.。令 Ω 为 $F(z,w)$ 的直接吸引盆。那么存在一个常数 C，使得对于每个点 $(z_0, w_0) \in \Omega$，都存在一点 $(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \cup_k F^{-k}(0,0)$ $k \geq 0$，使得 $d_\Omega\big((z_0, w_0), (\tilde{z}, \tilde{w})\big) \leq C$，其中 d_Ω 是 Ω 上的 Kobayashi 距离。然而，对于许多其他情形，这一结果并不成立。

1 引言

在离散动力系统中，我们关注如何定性和定量地描述满足特定条件的映射在迭代下可能呈现的动力学行为。在我们的论文 [5], 中，Hu 研究了吸引盆上的全纯多项式动力学，并得到了定理 1.1:

定理 1.1. *[*Hu, *2022]* 设 $f(z)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、次数为 $N \geq 2$ 的多项式，$f(z)$ 的吸引不动点为 p，Ω_1 是 p 的直接吸引域，$\{f^{-1}(p)\} \cap \Omega_1 \neq \{p\}$，$\mathcal{A}(p)$ 是 p 的吸引盆，$\Omega_i (i = 1, 2, \cdots)$ 是 $\mathcal{A}(p)$ 的连通分支。˜那么存在常数 C，使得对于任意位于任一 Ω_i 内的点 z_0，都存在位于 Ω_i 内的点$q \in \cup_k f^{-k}(p)$，使得 $d_{\Omega_i}(z_0, q) \leq \tilde{C}$，其中 d_{Ω_i} 是 Ω_i. 上的 Kobayashi 距离。

定理 1.1 表明，对于复多项式的吸引盆，吸引不动点的反向轨道要么仅由该点本身构成，要么会在吸引盆所有分支的边界处聚集，并且相对于 Kobayashi 度量，吸引盆中的所有点到反向轨道的距离都一致有界。这是一个有趣且创新的问题与结果。其他研究者尚未发表相关成果。

然而，Hu [6] 证明，对于一维多项式的抛物盆，定理 1.1 不再成立。这是一个更有趣且令人惊讶的结果。

与一维情形相比，高维中吸引盆内部的动力学有许多非常有趣的结果。设 $F(z,w) = (P(z)\ Q(w))$, 其中 $P(z)\ Q(w)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的两个次数分别为 $m_1, m_2 \geq 2$ 的多项式，而 $F^n \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 是它的 n 次迭代。在

复动力系统中，与 F 相关联的两个重要且互不相交的不变集是茱莉亚集和法图集 [11], ，它们将 $\mathbb{C}^2$ 划分开来。 F 的法图集定义为最大的开集，在该开集上迭代族局部正规。换句话说，对于任意点 $(z,w) \in \mathbb{C}^2$，都存在一个邻域 U，其中包含 (z,w)，使得该映射在 U 上的迭代序列构成正规族，因此迭代的行为良好。法图集的补集称为茱莉亚集。

一维情形下法图分支的分类于 20 世纪 80 年代完成，当时 Sullivan [15] 证明，每个有理映射的法图分支都是预周期的，也就是说，存在 $n,m \in \mathbb{N}$，使得 $f^{n+m}(\Omega) = f^m(\Omega)$。更多细节和结果请参阅 [2, 4, 11]。在高维中，动力学大不相同，也更为丰富。更多细节和结果请参阅 [10, 12, 13, 14] 。

F 的法图集的连通分支称为法图分支。若法图分支 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ 属于 F，且满足 $F(\Omega) = \Omega$，则称其为不变的。对于 $(z,w) \in \mathbb{C}^2$，集合 $\{(z_n,w_n)\} =\{(z_1,w_1) = F(z_0,w_0)$，$(z_2,w_2) = F^2(z_0,w_0) \cdots\}$，称为点 $(z,w) =(z_0,w_0)$的轨道。若对于某个整数 N，有 $(z_N,w_N) =(z_0,w_0)$，则称 (z_0,w_0) 是 F的周期点，其周期为 N。若 $N=1$，则 (z_0,w_0) 是 $F.$的不动点。迄今为止，对法图集内轨道更精确行为的详细研究还很少。例如，设 $\mathcal{A}(z',w') := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2;\ F^n(z,w) \to (z',w')\}$ 为吸引不动点 (z',w') 的吸引盆。我们可以探讨：当 (z_0,w_0) 接近 $\partial\mathcal{A}(z',w')$ 时，从 (z_0,w_0) 出发并趋近吸引不动点 (z',w') 的 (z_0,w_0) 的轨道 $\{(z_n,w_n)\}$ 是什么样的，或者需要迭代多少次。

本文将研究 $\mathbb{C}^2$ 中 $F(z,w)$ 的吸引盆内轨道的行为。我们在第 3 节给出以下定理 3.2：

定理 3.2. 设 $F(z,w) =(P(z)\ Q(w))$，其中 $P(z)\ Q(w)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的两个次数分别为 $m_1,m_2 \geq 2$ 的多项式，$P(0) = Q(0) = 0$，且 $0 < |P'(0)|,|Q'(0)| < 1.$。设 Ω 为 $F(z,w)$ 的直接吸引盆。那么存在一个常数 C，使得对于每个点 $(z_0,w_0) \in \Omega$，都存在一点 $(\tilde{z},\tilde{w}) \in \cup_k F^{-k}(0,0)$ $k \geq 0$，满足 $d_\Omega\big((z_0,w_0),(\tilde{z},\tilde{w})\big) \leq C$，其中 d_Ω 是 Ω 上的 Kobayashi 距离。

然而，定理 3.2 在以下任一情形下均不成立：

设 $F(z,w) =(P(z)\ Q(w))$，其中 $P(z)\ Q(w)$ 是两个次数为 $m_1,m_2 \geq 2$的复数域上的多项式，且 $\mathbb{C}$ 和 $P(0) = Q(0) = 0$。

(1) $P(z) = z^{m_1}, Q(w) = w^{m_2}$; (2) $P(z) = z^m$, $0 < |Q'(0)| < 1$，即 $P'(0) = 0$; (3) $P(z) = z^m, Q'(0) = 1$，即 $P'(0) = 0$; (4) $0 < |P'(0)| < 1, Q'(0) = 1$; (5) $P'(0) = Q'(0) = 1$。

例如， [7, 8], 多项式扭积一直是二维复动力系统中有用的测试案例。这使我们能够在其中一个变量上运用单变量结果：设 F是一个多项式扭积， $F(z,w) =(P(z)\ Q(z,w))$，其中 $P(z)\ Q(z,w)$ 是两个次数为 $m_1,m_2 \geq 2$ 的复数域上的多项式，并且 $P(0) = 0, Q(0,0) = 0$。我们将在第 4 节证明，在以下情形中，定理 3.2 同样不成立：

(1) $P(z) = z^2, Q(z,w) = w^2 + az, a \in \mathbb{C}$; (2) $P(z) = az + z^2, Q(z,w) = w^2 + cw + bz$, $0 < |a|, |b|, |c| << 1$ 和 $|a| >> |c|, |a| >> |b|, |c| >> |ab|$.

致谢

我非常感谢导师 John Erik Fornæss 教授提出这个研究课题，并给予我宝贵的意见和耐心指导。此外，我也非常感谢挪威科技大学的员工在我访问期间给予的热心帮助。最后，我衷心感谢帕尔马大学对我博士学习的资助。

2 预备知识

首先，我们先回顾一下 Kobayashi 度量的定义，例如，[1, 3, 9, 16]。

ˆˆ 定义。设 Ω $\subset \mathbb{C}^n$ 是一个域。我们选取一点 $z \in \Omega$ 和一个在点 z. 处与 $\mathbb{C}^n$相切的向量 ξ。令 $\triangle$ 表示复平面 $\mathbb{C}$中的单位圆盘。我们定义 Kobayashi 度量

$$F_{\hat{\Omega}}(z,\xi) := \inf\{\lambda > 0 : \exists f : \triangle \xrightarrow{hol} \hat{\Omega}, f(0) = z, \lambda f'(0) = \xi\}.$$

ˆ 设 γ : $[0,1] \to \Omega$ 为一条分段光滑曲线。γ 的 Kobayashi长度定义为

$$L_{\hat{\Omega}}(\gamma) = \int_\gamma F_{\hat{\Omega}}(z,\xi)|dz| = \int_0^1 F_{\hat{\Omega}}\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)|\gamma'(t)|dt.$$

ˆ 对于 Ω 中的任意两点 z_1 和 z_2，z_1 与 z_2 之间的 Kobayashi 距离定义为

$$d_{\hat{\Omega}}(z_1, z_2) = \inf\{L_{\hat{\Omega}}(\gamma) : \gamma \text{ is a piecewise smooth curve connecting } z_1 \text{ and } z_2\}.$$

注意，当 z_1 和 z_2 位于 ˆΩ 的同一个连通分支中时，$d_{\hat{\Omega}}(z_1, z_2)$ 才有定义。

令 $d_E(z_1, z_2)$ 表示任意两点 z_1、$z_2 \in \triangle$. 之间的欧几里得度量距离

3 法图集内全纯多项式的动力学

$$F(z,w) = (P(z), Q(w))$$

本节研究轨道在 $F(z,w) = (P(z)\ Q(w))$ 的吸引盆内部如何精确演化，其中 $P(z)\ Q(w)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、次数分别为 m_1、$m_2 \geq 2$ 的两个多项式。

3.1 $F(z,w)=(z^m,w^m)$ $m\geq 2$ 的动力学，即 $|P'(0)|=|Q'(0)|=0$

定理 3.1. 设 $F(z,w)=(z^m,w^m)$ $m\geq 2$。我们任选一个常数 $C>0$和点 $(\varepsilon,\varepsilon)$ $0<\varepsilon<<1$。那么存在一点 $(z_0,w_0)\in\mathcal{A}$，使得对于任意 $(\tilde{z},\tilde{w})\in\cup_k^{\infty}\{F^{-k}(\varepsilon,\varepsilon)\},k\geq 0$，Kobayashi 距离 $d_{\mathcal{A}}((z_0,w_0),(\tilde{z},\tilde{w}))\geq C$。

证明. 我们知道，对于某个正整数 $k.$，有 $(\tilde{z}_k,\tilde{w}_k)=(\varepsilon^{1/m^k},\varepsilon^{1/m^k})$。那么 $|\tilde{z}|=|\tilde{w}|.$。我们取 $(z_0,w_0)=(1-\delta,\delta)$，$\delta$ 足够小，且取决于 C。于是

$$\begin{aligned}
d_{\triangle\times\triangle}\big((z_0,w_0),(\tilde{z}_k,\tilde{w}_k)\big)&=d_{\triangle\times\triangle}\big((z_0,w_0),(\varepsilon^{1/m^k},\varepsilon^{1/m^k})\big)\\
&=\max\left\{d_{\triangle}(z_0,\tilde{z}_k),d_{\triangle}(w_0,\tilde{w}_k)\right\}\\
&=\max\left\{d_{\triangle}(0,\frac{z_0-\tilde{z}_k}{1-z_0\overline{\tilde{z}_k}}),d_{\triangle}(0,\frac{w_0-\tilde{w}_k}{1-w_0\overline{\tilde{w}_k}})\right\}\\
&=\max\left\{\ln\frac{1+|\frac{z_0-\tilde{z}_k}{1-z_0\overline{\tilde{z}_k}}|}{1-|\frac{z_0-\tilde{z}_k}{1-z_0\overline{\tilde{z}_k}}|},\ln\frac{1+|\frac{w_0-\tilde{w}_k}{1-w_0\overline{\tilde{w}_k}}|}{1-|\frac{w_0-\tilde{w}_k}{1-w_0\overline{\tilde{w}_k}}|}\right\}\\
&=\max\left\{\ln\frac{1+|\frac{1-\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-(1-\delta)\varepsilon^{1/m^k}}|}{1-|\frac{1-\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-(1-\delta)\varepsilon^{1/m^k}}|},\ln\frac{1+|\frac{\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-\delta\varepsilon^{1/m^k}}|}{1-|\frac{\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-\delta\varepsilon^{1/m^k}}|}\right\}.
\end{aligned}$$

因此，下面分两种情况:

情况 1：注意到 $d_{\triangle\times\triangle}\big((z_0,w_0),(\tilde{z}_k,\tilde{w}_k)\big)\geq\ln\frac{1+|\frac{\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-\delta\varepsilon^{1/m^k}}|}{1-|\frac{\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-\delta\varepsilon^{1/m^k}}|}\geq\ln\frac{1}{1-|\frac{\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-\delta\varepsilon^{1/m^k}}|}\to\infty$，当 $k\to\infty.$时。因此，$d_{\triangle\times\triangle}\big((z_0,w_0),(\tilde{z}_k,\tilde{w}_k)\big)\geq C$，若存在某个整数 k_0使得 $k>k_0$，且 δ小于 $1/2$。

情况 2：此外，$d_{\triangle\times\triangle}\big((z_0,w_0),(\tilde{z}_k,\tilde{w}_k)\big)\geq\ln\frac{1+|\frac{1-\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-\delta}|}{1-|\frac{1-\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-\delta}|}\to\infty$，当 $\delta\to 0$对每个固定的 $k.$成立时。因此，$d_{\triangle\times\triangle}\big((z_0,w_0),(\tilde{z}_k,\tilde{w}_k)\big)\geq C$，若 $k\leq k_0$且 δ足够小。□

3.2 D复数域中的 $F(z,w)=(P(z)\ Q(w))$ $P(0)=Q(0)=0,0<|P'(0)|,|Q'(0)|<1$ 的动力学

定理 3.2。设 $F(z,w)=(P(z)\ Q(w))$，其中 $P(z)$ $Q(w)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的两个次数分别为 $m_1,m_2\geq 2$ 的多项式，$P(0)=Q(0)=0$，且 $0<|P'(0)|,|Q'(0)|<1.$。令 Ω 为 $F(z,w)$ 的直接吸引盆。那么存在一个常数 C，使得对于每个点 $(z_0,w_0)\in\Omega$，都存在一点 $(\tilde{z},\tilde{w})\in\cup_k F^{-k}(0,0)$ $k\geq 0$，满足 $d_{\Omega}\big((z_0,w_0),(\tilde{z},\tilde{w})\big)\leq C$，其中 d_{Ω} 是 Ω 上的 Kobayashi 距离。

证明。分别用 Ω_P、Ω_Q 表示 $P(z)$ $Q(w)$ 的直接吸引域。则 $\Omega=\Omega_P\times\Omega_Q$.

根据 [5], 中定理 2.9 的结论，我们知道存在一个常数 $C_P(C_Q)$，使得对于每个点 $z_0(w_0)\in\Omega_P(\Omega_Q)$，都存在一点 $\tilde{z}(\tilde{w})\in\cup_k P^{-k}(0)(\cup_k Q^{-k'}(0))$ $k,k'\geq 0$

使得 $d_{\Omega_P}(z_0,\tilde{z}) \leq C_P, (d_{\Omega_Q}(w_0,\tilde{w}) \leq C_Q)$，其中 $d_{\Omega_P}(d_{\Omega_Q})$ 是 $\Omega_P(\Omega_Q)$ 上的 Kobayashi 距离。假设 $K = \max\{k,k'\}$ 和 $C = \max\{C_P,C_Q\}$，则 $\tilde{z} \in \cup_k P^{-K}(0)$ $\tilde{w} \in \cup_k Q^{-K}(0)$。因此 $(\tilde{z},\tilde{w}) \in \cup_K F^{-K}(0,0) \subset \Omega$。于是，$d_\Omega((z_0,w_0),(\tilde{z},\tilde{w})) \leq C, d_\Omega$ 是 Ω 上的 Kobayashi 距离。

□

3.3 $F(z, w) = (P(z)\ Q(w))$的动力学：$P(0) = Q(0) = 0$

(1) $P(z) = z^m$，$0 < |Q'(0)| < 1$，即 $|P'(0)| = 0$；(2) $P(z) = z^m$，$Q'(0) = 1$，即 $|P'(0)| = 0$；(3) $0 < |P'(0)| < 1$，$Q'(0) = 1$；(4) $P'(0) = Q'(0) = 1$.

定理3.3. 假设 $F(z, w) = (P(z)\ Q(w))$，其中 $P(z)$ $Q(w)$是定义在 $\mathbb{C}$、$P(0) = Q(0) = 0$上的两个次数分别为 m_1、$m_2 \geq 2$的多项式，并且 $|P'(0)|$、$|Q'(0)|$的导数模为上述四种情况中的任意一种。设Ω为 $F(z, w)$的直接吸引盆。那么存在一点$(z_0, w_0) \in \Omega$，使得对于 $\{F^{-k}\}$下不动点(0,0)或非常接近(0,0)的一点的原像集中的任意$(\tilde{z}, \tilde{w})$，Kobayashi 距离 $d_\Omega((z_0, w_0), (\tilde{z}, \tilde{w})) \geq C$。

证明。若 $|P'(0)| = 0, 0 < |Q'(0)| < 1$，根据定理 3.1 和 3.2，我们知道 $\Omega = \triangle \times \Omega_{Q^\cdot}$。我们将 $z_0 = 1-\delta$, δ 取足够小。于是我们知道 $\tilde{z} = \varepsilon^{1/m^k}$ and

$$\begin{aligned} d_\Omega((z_0,w_0),(\tilde{z},\tilde{w})) &= \max\left(d_\triangle(z_0,\tilde{z}), d_{\Omega_Q}(w_0,\tilde{w})\right) \\ &\geq d_\triangle(z_0,\tilde{z}) \\ &= \ln \frac{1+|\frac{1-\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-(1-\delta)\varepsilon^{1/m^k}}|}{1-|\frac{1-\delta-\varepsilon^{1/m^k}}{1-(1-\delta)\varepsilon^{1/m^k}}|} \\ &\to \infty \end{aligned}$$

as $\delta \to 0$. 于是证明完成。

若 $P(z) = z^m, Q'(0) = 1$或 $0 < |P'(0)| < 1, Q'(0) = 1$，根据论文 [6],中的结果，我们知道该定理成立，因为 $d_{\Omega_Q}(w_0,\tilde{w})$ 无界。因此，基于同样的理由，$P'(0) = Q'(0) = 1$.

□

4 多项式扭积在 $F(z,w) = (P(z)\ Q(z,w))$ 的吸引盆内的动力学

多项式扭积一直是研究二维复动力系统的有用测试案例。这使得我们能够在其中一个变量上应用单变量结果。然而，对于$F(z,w) = (P(z)\ Q(z,w))$，我们无法计算 Kobayashi 距离 $d_\Omega((z_0,w_0),(\tilde{z},\tilde{w}))$

无法像处理 $F(z,w)=(P(z)\ Q(w))$ 那样，分别分析 $d_{\Omega_P}(z_0,\tilde{z})\ d_{\Omega_Q}(w_0,\tilde{w})$，因为 Ω_Q 也取决于 z 坐标。本节考察 $F(z,w)$ 在 $(0,0)$ 附近的动力学，并研究两个简单情形。

4.1 $F(z,w)=(z^2,w^2+az)$ 的动力学

定理 4.1. 假设 $F(z,w)=(z^2,w^2+az)$，$a\neq 0$。令 Ω 为 (0,0) 的直接吸引盆，且 $0<\varepsilon<<1$。我们任取一个常数 $C>0$. 那么存在一点 $(z_0,w_0)\in\Omega$，使得对于任意 $(\tilde{z},\tilde{w})\in\cup_k^\infty\{F^{-k}(\varepsilon,0)\},k\geq 0$，Kobayashi 距离$d_\Omega((z_0,w_0),(\tilde{z},\tilde{w}))\geq C$。

证明. 我们取 $z_0=0$. 注意到投影映射 $\pi:\Omega\to\triangle,\pi(z,w)=z$ 在 Kobayashi 度量下是距离递减的。此外，我们知道，$F^{-k}(\varepsilon,0)$ 中任意一点的 z 坐标在 $k\to\infty$. 时趋于 $\partial\triangle$。因此存在一个 l，使得若$k>l$，则对于任意 $w_0.$，都有 $d_\Omega((0,w_0)\ F^{-k}(\varepsilon,0))\geq C$。令 $(z_j,w_j)\ j=1,\cdots,N$为 $\{F^{-k}(\varepsilon,0)\}_{k\leq l}$. 中的点。接下来，我们要证明存在一个 w_0，使得 $(0,w_0)\in\Omega$ 且$d_\Omega\big((0,w_0),(z_j,w_j)\big)\geq C$，对于任意 $j=1,\cdots,N$.

我们先处理一个较小的 a，然后再讨论一般的 a。当 a 较小时，有如下引理。

引理 4.2. 设 $D:=\{(z,w);\ |z|<1,|w|<3/4\}$ 为一个双圆盘。若 $|a|<3/16$，则 $D\subset\Omega$。

证明. 若 $|w|<3/4$，则 $|w^2|<9/16.$。因此我们有 $|w^2+az|<9/16+|a|<3/4.$ □

现在我们继续证明定理 4.1。设 $f(z)\equiv w_0=2/3$，其中 $|z|<1.$。那么 $\gamma_0=(z,f(z))$ 是 Ω 内以 $|z|<1$ 为底的图像。于是 $F^{-1}(\gamma_0)=F^{-1}(z,f(z))=(\sqrt{z},\sqrt{f(z)-a\sqrt{z}})$。取 $\gamma_1=(\sqrt{z},\sqrt{f(z)-a\sqrt{z}}):=(z,\sqrt{f(z^2)-az})=(z,f_1(z))$。由归纳法，可得 $\gamma_2=(z,\sqrt{f_1(z^2)-az})=(z,f_2(z));\ldots;\gamma_n=(z,f_n(z))$，这里我们总是选择 $f_n(z)$，使得 $f_n(0)>0$。注意，由归纳法可知 $f_n(z)\geq 2/3$，因此 $f_n(z^2)-az$ 始终没有零点，这意味着 f_n 的任何分支都不会在 $z\in D$ 的某些点相交，即 γ_n 的任意两幅图像在 D 中都不相交。于是 $\lim_{n\to\infty}\gamma_n\subset\partial\Omega$，因为 γ_0 不经过 $(0,0)$，且 $\gamma_0\subset\Omega$，从而 γ_0 的反向轨道收敛到 $\partial\Omega$。由蒙特尔定理，存在收敛子序列 $f_n(z)\to f_\infty(z)$，于是 $(z,f_\infty(z))\subseteq\partial\Omega$ 且 $f_\infty(0)=1.$。这说明，对于任意 z，$\gamma_\infty(z)\in\partial\Omega_z$ 对每个切片 Ω_z.

令 $h(z,w)=w-f_\infty(z)$，则 $h(z,w)$ 在 Ω 上全纯。并且我们知道 $h(0,w)=w-1$，因此 $\lim_{w\to 1}h(0,w)=0.$。由此，$h(z,w)$ 在 $(0,1)$ 处趋于零，且对于某个常数半径 $R>1$，$h(\Omega)\subset\triangle(0,R)\setminus\{0\}$，因为 Ω 是一个有界集。

我们回顾一下穿孔圆盘上的 Kobayashi 度量，参见 [11]中的例2.8。$\triangle(0,R)\setminus\{0\}$ 的万有覆盖曲面可以与左半平面 $\{w=u+iv$等同；$u<0\}$ 在指数映射 $w\mapsto z=Re^w\in\triangle(0,R)\setminus\{0\}$ 下，$dw=\frac{dz}{z}$。因此，左半平面上的 Kobayashi 度量 $|\frac{dw}{u}|$ 对应于穿孔圆盘 $\triangle(0,R)\setminus\{0\}$上的度量 $\left|\frac{dz}{r\ln\frac{r}{R}}\right|$，其中 $r=|z|$ 且 $u=\ln\frac{r}{R}$.

然后令 $x := h(0, w_0) := \lim_{w\to 1} h(0, w)$，且 $y := h(z_j, w_j)$，其中 $j = 1, \cdots, N$. 然后

$$\begin{aligned} d_\Omega((0, w_0), (z_j, w_j)) &\geq d_{\triangle(0,R)\setminus\{0\}}(x, y) \\ &= \left| \int_x^y \frac{1}{|z| \ln \frac{|z|}{R}} dz \right| \\ &= |\ln(|\ln y/R|) - \ln(|\ln x/R|)| \\ &\to \infty, \end{aligned}$$

如 $x \to 0$.

对于一般的 a，尽管我们无法像引理 4.5 中那样选取一个圆柱体，但可以先选取 $\hat{}\hat{}D_0 := \{(z, w); |z| < \eta << 1, |w| < 3/4\}$。令 $f(z) = \hat{}w_0 = 2/3$ for $|z| < \eta$，则 $\hat{}\gamma_0 = (z, f(z))$ 是 $|z| < \eta$. 上的图像。我们有 $F^{-1}(\hat{}\gamma_0) = F^{-1}(z, \hat{}w_0) = (\sqrt{z}, \sqrt{\hat{}w_0^2 - a\sqrt{z}})$。然后选取 $\hat{}f_1 := \sqrt{\hat{}f(z^2) - az}$，并将其限制在 $|z| < \eta$. 。归纳地，$\hat{} f_{n+1}(z) = \sqrt{\hat{}f_n(z^2) - az}$ 也限制在 $\hat{}\hat{}\hat{}|z| < \eta$ 上。于是得到 $f_n(z) \to f_\infty(z)$，接着 $(z, f_\infty(z)) \subseteq \partial\Omega$ 且 $f_\infty(0) = 1$.

$\hat{}$ 其次，令 $D_1 := \{(z, w); |z| < \sqrt{\eta}, w \in \mathbb{C}\}$. 我们选择 $g_0(z) = w_0' = f_\infty(z)$，其中 $|z| < \eta$. 并且 $\gamma_0' = (z, g_0(z))$ 是 $|z| < \eta$. 上的图像。于是，对于 $|z| < \eta$. ，有 $F^{-1}(z, w_0') := (z, g_1(z))$。不过，存在两种情况：

(1) 如果 $g_0 - az \neq 0$ 对于 $|z| < \sqrt{\eta}$. ，那么 g_1 有两个解，我们将它们记为 $g_{1,1} := \sqrt{w_0'^2 - a\sqrt{z}}; g_{1,2} := -\sqrt{w_0'^2 - a\sqrt{z}}, |z| < \sqrt{\eta}$。我们令 g_1 为其中一个，并令 $D_2 := \{(z, w); |z| < \sqrt{\eta}, w \in \mathbb{C}\}$.

(2) 如果 $g_0 - az = 0$ 在 $|z| < \sqrt{\eta}$. 上有一个或多个零点，我们令 g_1 表示该多值函数。我们对 $g_2(z) = \sqrt{g_1(z^2) - az}$ 等重复这一过程。继续此过程，直到得到一个在 $|z| < \eta^{1/2^n}$ 上定义良好的多值函数 $g_n(z)$；这里的 n 将在下文确定。因此，$g_n(z)$ 至多有 2^n 个分支。同时，我们令 $D_{n+2} := \{(z, w); |z| < \eta^{1/2^n}, w \in \mathbb{C}\}$.

于是得到 $g_n(z) \to g_\infty(z)$，接着 $(z, \lim_{n\to\infty} g_n(z)) \subseteq \partial\Omega$，且 $\lim_{n\to\infty} g_n(0) = 1$.$\hat{}$ 然而，我们不能直接选择 $h(z, w) = w - g_\infty(z)$。原因是，对于每个整数 n，$g_n(z)$ 都有 2^n 个分支，其中一些可能在某个 $z \in D_{n+1}$ 处相交，例如 $g_{n,1}(z') = g_{n,100}(z') = 0$ 对某个 $z' \in \{z; |z| < \eta^{1/2^n}\}$，也就是说，$g_{n-1}(z^2) - az$ 在 D_n 中有零点。因此，我们令 $\hat{}h(z, w) := \prod_{i=1,\cdots,2^n} \big(w - g_i(z)\big)$. 于是 h 在 D_{n+1} 上全纯，且 $\hat{}\hat{}\hat{}\lim_{w\to 1} h(0, w) = 0$. 因此，$h$ 在 $(0, 1)$ 处消失，并且 $h(\Omega) \subset \triangle(0, R) \setminus \{0\}$，其中 $R > 1$ 是某个常数半径，因为 Ω 是有界集。此外，我们可以将 n 取得足够大，使得所有有限多个 (z_j, w_j) 都位于 D_{n+1}. 内

$\hat{}\hat{}\hat{}$ 然后令 $x' := h(0, w_0) := \lim_{w\to 1} h(0, w)$ 和 $y' := h(z_j, w_j)$，其中 $j = 1, \cdots, N$. Then

$$\begin{aligned} d_{D_{n+1}}((0, w_0), (z_j, w_j)) &\geq d_{\triangle(0,R)\setminus\{0\}}(x', y') \\ &= \left| \int_{x'}^{y'} \frac{1}{|z| \ln \frac{|z|}{R}} dz \right| \\ &= |\ln(|\ln y'/R|) - \ln(|\ln x'/R|)| \\ &\to \infty, \end{aligned}$$

作为 $x' \to 0$.

最后，我们仍需证明，对于 D_{n+1} 内的任意两点 $(0, w_0)$ 和 (z_j, w_j)，只要 $D_{n+1} \subset\subset D_m$，且 D_m 非常接近 Ω，Kobayashi 距离 $d_{D_m}((0, w_0), (z_j, w_j))$ 就近似等于 $d_\Omega((0, w_0), (z_j, w_j))$。我们证明了 Kobayashi 度量的以下局部化结果（见 [3]）。

引理 4.3. 对于 $0 < s < 1$，设 $\Omega_s = \{(z, w) \in \Omega; |z| < s\}$. 固定 $0 < r < 1$，令 $0 < c < 1$。那么存在一个 $R\,(r < R < 1)$，使得对每个 $p \in \Omega_r$ 和 ξ，都有

$$cK_\Omega(p, \xi) \geq K_{\Omega_R}(p, \xi) \geq K_\Omega(p, \xi).$$

证明。根据第 2 节中的定义，我们知道

$$F_{\Omega_r}(p, \xi) := \inf\{\lambda > 0 : \exists f : \triangle \xrightarrow{hol} \Omega_r, f(0) = p, \lambda f'(0) = \xi\}.$$

我们选取 $r < R < 1$,

$$F_{\Omega_R}(p, \xi) := \inf\{\mu > 0 : \exists g : \triangle \xrightarrow{hol} \Omega_r, g(0) = p, \lambda g'(0) = \xi\}.$$

令 $g: \triangle \to \triangle$ 且 $g(0) = p, g'(0) = \mu\xi.$。根据 Schwarz 引理，我们知道 $|g(rz)| < |rz| < r$，其中 $|z| < 1.$。然后我们选取 $f(z) = g(rz) \in \Omega_r$，使得 $f'(0) = cg'(0.)$。因此，我们有

$$cK_\Omega(p, \xi) \geq K_{\Omega_R}(p, \xi) \geq K_\Omega(p, \xi).$$

□

因此，对于一般的 $a.$， $d_\Omega((0, w_0), (z_j, w_j)) \approx d_{D_{n+1}}((0, w_0), (z_j, w_j)) \to \infty$。于是，存在一点 $(z_0, w_0) = (0, 1-\delta) \in \Omega$，其中 $\delta \to 0$，使得对于任意 $(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \cup_k^\infty \{F^{-k}(\varepsilon, 0)\}, k \geq 0$，Kobayashi 距离 $d_\Omega((z_0, w_0), (\tilde{z}, \tilde{w})) \geq C$。

□

4.2 $F(z, w) = (z^2 + az, w^2 + cw + bz)$ $0 < |a|$ 的动力学， $|b|, |c| << 1$

定理 4.4. 假设 $F(z, w) = (az + z^2, w^2 + cw + bz)$ $0 < |a|, |b|, |c| << 1$，且 $|a| >> |c|, |a| >> |b|$, $|c| >> |ab|$。设 Ω 为 $(0, 0)$ 的直接吸引盆。我们任取一个常数 $C > 0$. 那么存在一点 $(z_0, w_0) \in \Omega$，使得对于任意 $(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \cup_k^\infty \{F^{-k}(0, 0)\}, k \geq 0$，Kobayashi 距离 $d_\Omega((z_0, w_0), (\tilde{z}, \tilde{w})) \geq C$。

注意，如果我们先固定 a、c，再让 b 逐渐变小，那么定理 3.2 总是不成立；但在 $b = 0$ 的极限情形下，定理 3.2 成立。这表明这种情形非常不稳定。

证明。为了证明这个定理，我们先证明以下引理:

引理 4.5. 设 $\Omega_{2/3} = \{(z, w)\ z \in \Omega_P, |w| < 2/3\}$，则 $F(\Omega^{2/3}) \subseteq \Omega^{2/3}$. 此外，$\Omega_{2/3} \subseteq \Omega$。

证明. 我们知道 $\Omega_P \subseteq \{z, |z| < 2\}$. 若 $|w| < 2/3$，则得到 $|w^2 + cw + bz| \leq |w^2| + |c||w| + |b||z| < 4/9 + 2c/3 + |b||z| < 4/9 + |c| + 2|b| < 2/3$ 对于 $0 < |c|, |b| << 1$. 因此， $F(\Omega^{2/3}) \subseteq \Omega^{2/3}$.

令 $(z_1, w_1) \in \Omega^{2/3}$ 和 (z_n, w_n) 为 (z_1, w_1) 的轨道。我们知道 $z_n \to 0$，且 $|w_n| < 2/3$，因为 $F(\Omega^{2/3}) \subseteq \Omega^{2/3}$.。于是 $|w_{n+1}| \leq |w_n|^2 + |c||w_n| + |b||z_n| \leq (2/3 + |c|)|w_n| + |b||z_n|$.。因此$w_n \to 0$.， $\Omega_{2/3} \subseteq \Omega$。 □

引理 4.6. 令 Ω_z 为 Ω 在 z 处的切片，且 $\Omega_{z,\ 2/3} = \{(z, w) \in \Omega_z, |w| < 2/3\}$.。那么，每个 Ω_z 都是连通且单连通的。

证明。由于 $Q(w) = w^2 + cw + bz$ 是一个二对一函数，每个点 $w \in \Omega^{P(z)}$ 在 Ω_z 内恰有两个原像（按重数计）。因此， $F : \Omega_z \to \Omega^{P(z)}$ 是一个二重覆盖，并且它在 w 坐标上有一个临界点 $w = -\frac{c}{2}$。

假设 Ω_z^1、Ω_z^2 至少存在两个互不相交的连通分支，且它们包含于 Ω_z 中，并且 $(z, 0) \in \Omega_z^1$.。那么 $\Omega_{z,2/3} \subseteq \Omega_z^1$.。根据引理 4.5，我们知道 $F(\Omega_{z,2/3}) \subseteq \Omega_{P(z)\ 2/3}$.。此外，$F$将 Ω_z 映射到 $\Omega^{P(z)}$，于是我们知道 $F(\Omega_z^1) \subseteq \Omega_{P(z)}$.

此外，我们知道 $\Omega_{P(z),\ 2/3}$ 内的每个点在 Ω_z^1 内都有两个原像，因为F是一个二重覆盖，并且它有一个临界点 $w = -\frac{c}{2}$，在w坐标中非常接近 0。因此 $F(\Omega_z^2) \cap \Omega_{P(z),\ 2/3} = \emptyset$.。归纳可知 $F^n(\Omega_z^2) \cap \Omega_{P^n(z)\ 2/3} = \emptyset$.。因此， $F^n(\Omega_z^2)$ 不可能收敛到 0。所以，Ω_z^2不包含于 Ω_z.

由最大值原理可知，Ω_z 是单连通的。

□

引理 4.7. 设 z_N是 $-a \in P^{-1}(0)$的一个原像，即 $z_N \in P^{-N}(-a)$，其中 N足够大。则对于任意整数 $n \geq 1$.，有$(0, 0) \notin F^n(\Omega_{z_N,2/3})$

证明. 取一点$(z_N, w_N) \in \Omega_{z_N,2/3}$，其中 N充分大，则 $F(z_N, w_N) = (z_{N-1}, w_{N-1}) \in \Omega_{z_{N-1},1/2}$， $F^2(z_N, w_N) = (z_{N-2}, w_{N-2}) \in \Omega_{z_{N-2},1/3}$， $F^3(z_N, w_N) = (z_{N-3}, w_{N-3}) \in \Omega_{z_{N-3},1/4}$. 。若 $4|b| < |w| < 1/4$，我们知道

$$|w^2 + cw + 2b| < |w|(|w| + |c| + 1/2) < 7/8|w|.$$

这表明 w 会非常快地收缩到 0。因此，对于某个足够大的统一常数 $L >> 4$，对所有 $L \leq l \leq N$. 都有 $|w_{N-l}| < 4|b|$。于是归纳可得， $F^{N-1}(z_N, w_N) = (-a, w_1) \in \Omega_{z_1,\ 4b}, i.e., |w_1| \leq 4|b|$. 并且 $F^N(z_N, w_N) = (0, w_0) = (0, w_1^2 + cw_1 + bz_1)$。然后

$$0 < \frac{1}{2}|ab| \leq |ab| - 16|b|^2 - 4|cb| \leq |w_0| = |w_1^2 + cw_1 + bz_1| < 16|b|^2 + 4|cb| + |ab| \leq 2|ab| << |c|$$

因为 $|a| >> |c|, |a| >> |b|, |c| >> |ab|$.

因此，对于任意 $n \leq N.$，$(0, 0) \notin F^n(z_N, \Omega^{2/3})$。然而，对于 $n > N$，我们注意到 F在 w- 轴上的限制就是 $w \to w^2 + cw \approx cw$，因此 w_n 趋于 0，但永远不会到达 0。

□

引理 4.8. 设 $\Omega_n = F^{-n}(\Omega^{2/3})$。那么对于 $(\tilde{z}_n, \tilde{w}_n) \in \Omega_n$，欧几里得距离 $d_E(\tilde{w}_n, \partial\Omega^{\tilde{z}_n}) \to 0$ 于 $\Omega^{\tilde{z}_n}$ 当 $n \to \infty$.

证明. 假设对于某个 $\varepsilon > 0$，存在任意大的 N_1，使得在 $\Omega^{\tilde{z}_{N_1}}$ 中，欧几里得距离 $d_E(\tilde{w}_{N_1}, \partial\Omega^{\tilde{z}_{N_1}}) > \varepsilon$. 那么，由于 $\left|\frac{\partial Q}{\partial w}\right| > 2|w| - |c| > \frac{7}{6} > 1$ 对于 $|w| > \frac{2}{3}$，可知距离 $d_E(\tilde{w}_{N_1-1}, \partial\Omega^{\tilde{z}_{N_1-1}}) > \frac{7}{6}\varepsilon$. 对任意大的 l 重复此过程，我们有 $d_E(\tilde{w}_{N_1-l}, \partial\Omega^{\tilde{z}_{N_1-l}}) > \frac{7}{6}\varepsilon^l \geq 4$. 这将与 $d_E(\tilde{w}_{N_1-l}, \partial\Omega^{\tilde{z}_{N_1-l}})$ 被 4 所界相矛盾。

□

引理 4.9. 设 $D := \partial\Omega \cap \{(z, w);\ z \in P(z)\}$. 则 D 由全纯图 $w = f_\alpha(z)$ 层叠而成。此外，对于任意 $(z_N, 0) \in \Omega^{z_N}$, $(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \cup_k^\infty \{F^{-k}(0, 0)\} \subset \Omega^{z_k}, k \geq 0, N \geq N(C)$，Kobayashi 距离 $d_\Omega((z_N, 0), (\tilde{z}, \tilde{w})) \geq C$。

证明. 集合 $\partial\Omega^{2/3}$ 由图像 $w = \frac{2}{3}e^{i\theta}$. 层叠而成。然后我们取 $F^{-1}\left(w = \{\frac{2}{3}e^{i\theta}\}\right) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4bz - \frac{8}{3}e^{i\theta}}}{2} := f^{1,\ 21}$。显然，$c^2 - 4bz - \frac{8}{3}e^{i\theta} \neq 0$，因为 $0 < |b|, |c| << 1, |z| < 2$.。因此 $F^{-1}\left(w = \{\frac{2}{3}e^{i\theta}\}\right)$ 总有两个互不相交的原像。接着我们可以使用 $f^{1,\ 21}$ 将 $F^{-1}(\partial\Omega^{2/3})$ 层叠起来。

归纳地，我们可以用 $f^{1,\ {}_j{}^2}$ 将 $F^{-j}(\partial\Omega^{2/3})$ $j \geq 2$ 层化。我们知道，$F^{-(j-1)}(\partial\Omega^{2/3})$ 由 $f^{1,\ {}_{j-1}^{\ 2}}$ 层化，因此 $w = f^{1,\ {}_{j-1}^{\ 2}}(z)$ 是 $F^{-(j-1)}(\partial\Omega^{2/3})$ 内的图像。然后我们计算 $F^{-1}(w = f^{1,\ {}_{j-1}^{\ 2}}(z))$：令

$$(Z, W) \in F^{-1}(w = f_j^{1,2}(z)) \ \text{ i.e., } \ F(Z, W) \in (w = f_j^{1,2}(z)).$$

因此

$$Z^2 + aZ = z, W^2 + cW + bZ = w,$$

then

$$W^2 + cW + bZ = f_j(z) = f_j(Z^2 + aZ),$$

$$W^2 + cW + bZ - f_j(Z^2 + aZ) = 0,$$

因此,

$$W = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4bZ + 4f_j(Z^2 + aZ)}}{2} = f_{j+1}^{1,2}(Z).$$

然后令 $f_\alpha(z) := \lim_{j\to\infty} F^{-j}\left(w = \{\frac{2}{3}e^{i\theta}\}\right)$. 因此，$D$ 由图像 $w = f_\alpha(z)$ 层化。

接下来，我们需要证明：对于任意不同的切片 Ω^{z_N}，以及任意切片 Ω^{z_k} 中的任意 $(\tilde{z}, \tilde{w})$，只要 $(\tilde{z}, \tilde{w}) \to \partial\Omega$，就总有 $d_\Omega((z_N, 0), (\tilde{z}, \tilde{w})) \geq C$。这里我们选取 N 足够大。注意，若 $z_N \to \partial\Omega_P$ 对某个固定的 k 成立，则 Kobayashi 距离 $d_{\Omega_P}(z_k, z_N) \geq C$（见[16]）。因此，我们可以假设 k 和 N 都很大。然而，根据引理 4.8，$\tilde{w}$ 非常接近 $\partial\Omega_{\tilde{z}}$. 中某个记作 $(\tilde{z}, \eta)$ 的点

设 $H: \Omega \to \triangle(0, R) \setminus \{0\}, H(z, w) = w - f_\alpha(z)$。这里我们选择 α，使得 $f_\alpha(\tilde{z}) = \eta$.。那么 $H(z, w)$ 在 Ω 上全纯。并且我们知道 $H(z, w) = w - f_\alpha(z)$，于是 $\lim_{w\to f_\alpha(z)} H(z, w) = 0$.。因此 $H(z, w)$ 在 $(\tilde{z}, \eta)$ 处趋于零，并且 $H(\Omega) \subset \triangle(0, R) \setminus \{0\}$，其中半径为某个常数半径 $R > 1$，因为 Ω 是有界集。

那么设 $x' := H(z,w)$，且 $y' := H(\tilde{z},\tilde{w})$。那么

$$\begin{aligned} d_\Omega((z,w),(\tilde{z},\tilde{w})) &\geq d_{\triangle(0,R)\setminus\{0\}}(x',y') \\ &= \left| \int_{x'}^{y'} \frac{1}{|z| \ln \frac{|z|}{R}} dz \right| \\ &= |\ln(|\ln y'/R|) - \ln(|\ln x'/R|)| \\ &\to \infty, \end{aligned}$$

当 $x' \to 0, i.e., w \to f_\alpha(z)$ 时。 □

现在，我们继续使用与定理 4.1 相同的方法证明定理 4.4。取 $(z_0,w_0) = (z_N,0) \in \Omega_{z_N,2/3}$。那么 $H(\Omega_{2/3}) \subset \triangle(0,R) \setminus \{0\}, H(\tilde{z},\tilde{w}) \to 0$ 当 $k \to \infty$.

因此，我们知道存在一点 $(z_0,w_0) = (z_N,0)$，使得对于任意 $(\tilde{z},\tilde{w}) \in \cup_k^\infty \{F^{-k}(0,0)\}, k \geq 0$, Kobayashi 距离 $d_\Omega((z_0,w_0),(\tilde{z},\tilde{w})) = d_\Omega\big((z_N,0),(P^{-i}(0)\ Q^{-i}(0))\big) \geq d_{\triangle(0,R)\setminus\{0\}}(x',y') \geq C$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$。 □

参考文献

[1] M. Abate，《双曲黎曼曲面上的全纯动力学》，柏林、波士顿：De Gruyter，2023年。

[2] A. F. Beardon，《有理函数的迭代》，Springer-Verlag，纽约，1991年。

[3] F. Bracci、H. Gaussier、N. Nikolov 和 P. J Thomas，《相对于 Kobayashi 距离的区域的局部与整体可见性及 Gromov 双曲性》，arXiv 预印本 arXiv:2201.03070，2022年。

[4] L. Carleson 和 T. W. Gamelin，《复动力系统》，Springer-Verlag，纽约，1993年。

[5] M. Hu，《Fatou 集的内部动力学》，arXiv 预印本 arXiv:2208.00546，2022年。

[6] M. Hu，《抛物吸引盆内的动力学》，arXiv预印本 arXiv:2208.03756，2022年 .

[7] M. Jonsson，《复数域上的多项式扭积动力学》，《数学年刊》，314（1999年），403–447。

[8] J. Raissy，《二维中的多项式斜积：膨胀与游荡的法图分支》，意大利数学联合会公报，10（2017年），441–450。

[9] S.Krantz，《Carathéodory度量与Kobayashi度量及其在复分析中的应用》，《美国数学月刊》，115（2008年），304-329。

[10] K. Lilov，《二维中的法图理论》，博士论文，密歇根大学，2004年。

[11] J. Milnor，《单复变量动力系统》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2006年。

[12] J. E. Fornæss 和 N. Sibony，《高维复动力学 I》，Ast´erisque**222**（1994），201-231。[13] J. E. Fornæss 和 N. Sibony，《某些全纯映射的回归域的分类》，数学年刊，**301** （1995），813-820。[14] J. E. Fornæss 和 N. Sibony，《高维复动力学 II》，《复分析现代方法》（AM-137），**137** （1996），135-182。[15] D. Sullivan，《拟共形同胚与动力学 I：Fatou–Julia 游荡域问题的解决》，数学年鉴，**122** （1985），401–418。[16] E.F. Wold，《法向方向上不变度量的渐近行为及单位圆盘的一种新刻画》，数学年刊 **288** （2018），875–887。帕尔马大学，数学、物理与计算机科学系，Parco Area delle Scienze, 53/A, 43124 Parma PR, 意大利。电子邮箱：mi.hu@unipr.it