arXiv:2301.02717v1 [math.PR] 6 Jan 2023

双曲径向生成树无穷远处的厚迹

David Coupier*，LucasFlammant†，Viet Chi Tran‡

2023年1月10日

摘要

自 Howard & Newman（2001）的研究以来，人们已经知道，对于直线径向有根树，以概率 1，所有无限路径都有渐近方向，并且每个渐近方向都至少由一条无限路径到达。此外，存在一组由至少两条无限路径到达的“特殊”方向，该方向集合是随机、稠密的，并且在二维中仅为可数集。Howard & Newman 的方法对于由两条以上无限路径到达的（随机）方向并未给出任何结论；特别是，它无法回答二维中是否存在此类“非常特殊”的方向。本文证明，对于双曲径向生成树（RST），答案是否定的：在二维中，以概率 1，该树不包含三条具有相同（随机）渐近方向的无限路径。换言之，双曲 RST 中不存在无限但稀疏的子树，即其所有无限路径都具有相同渐近方向的子树。事实上，我们在维数 $d+1$ $d \geq 1$ 中证明了一个更强的结果：双曲 RST 的任意无限子树几乎必然在无穷远处生成厚迹，也就是说，其无限路径所到达的渐近方向集合具有正测度。

关键词：双曲空间、随机几何、随机几何树、径向生成树、连续渗流、泊松点过程。

AMS 2010学科分类：主要分类 60D05、60K35、82B21。

致谢。本研究得到 RT GeoSto 3477、Labex Bézout (ANR-10-LABX-58)、ANR PPPP (ANR-16-CE40-0016) 和 ANR GrHyDy (ANR-20-CE40-0002) 的支持。V.C.T. 感谢 CRM Montréal (IRL CNRS 3457)，本研究的部分工作在此完成。

1 引言

与组合随机图不同，后者中最著名的例子无疑是Erdös-Rényi模型（见 [15, 24]），几何随机图的结构取决于其顶点的位置（嵌入在某个度量空间中）以及一些几何规则。这一特点使几何随机图适合用于模拟现实现象（如生物学、材料科学、图像分析或电信网络中的现象），这也正是它们

*IMT Nord Europe，Institut Mines Télécom，里尔大学，david.coupier@imt-nord-europe.fr

†LAMAV，上法兰西理工大学，法国国家科学研究中心

‡LAMA，古斯塔夫·埃菲尔大学，巴黎东克雷泰伊大学，法国国家科学研究中心；国际联合研究实验室 3457，CRM-CNRS，蒙特利尔大学，加拿大。chi.tran@univ-eiffel.fr

在过去几十年里受到广泛研究的原因。关于这一主题的一般性参考资料，可参见Penrose的著作 [21] 。

对于几何随机图，宏观性质会引出一些棘手的问题，例如研究这些结构的拓扑端数量。Alexander 在 [2] 中解决了无限图上的最小生成森林这一问题。对于欧几里得树，即顶点是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的点且具有 $d \geq 1$的树，Howard & Newman 为直线 根树迈出了关键一步；所谓根树，是指其子树随着自身的根远离整棵树的根而变得越来越细的树 [18, 第2节.3]。他们提出了一种高效的方法 [18, 命题 2.8] ，从而确保任何直线树 T 几乎必然（a.s.）满足以下两个性质：

（A）每条无限路径（z_n）$_{n\geq 0}$ ，即 T的一条路径——由不同的顶点（z_n）$_{n\geq 0}$ 构成的序列，且 $\{z_n, z_{n+1}\}$ 对每个 $n \geq 0$ 都是树的一条边——都具有一个渐近方向 u ，该方向位于 $\mathbb{R}^{d+1}$的单位球面 $\mathbb{S}^d$ 上，即

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{z_n}{|z_n|} = u \ . \tag{1.1}$$

(B) 树 T 的至少一条无限路径会渐近地到达每个方向 $u \in \mathbb{S}^d$ 。

我们还将满足 (1.1) 的方向 u 称为被路径 $(z_n)_{n\geq 0}$渐近到达或作为目标。全文中，环境空间的维数记为 $d+1$。

Howard 和 Newman 将他们的方法应用于基于泊松点过程（PPP）构建的首次通过渗流树。他们还证明，对于任意确定的$u \in \mathbb{S}^d$，树 T 几乎必然恰好包含一条以 u 为渐近方向的无限路径。然而，几乎必然存在一组随机方向（被视为“例外”方向），其中每个方向至少被两条无限路径作为目标；这组方向在 $\mathbb{S}^d$ 中稠密，而在二维中仅为可数集。关于这些“例外”方向的详情，见图 1 和注 3.7。

Howard & Newman 的方法随后启发了许多关于几何随机树的研究（尤其是在二维中）。不同作者证明了各自关注的树具有直线性，从而得到其无限路径的性质 (A) 和 (B)。以下列举一些例子。有向最后通过渗流（LPP）树由网格 $\mathbb{N}^{d+1}$ 顶点上的独立同分布权重通过最后通过过程构造而成。在指数权重且 $d+1=2$ 的情形下，Ferrari & Pimentel [16] 证明了有向 LPP 树具有直线性。根据 LPP 树无限路径的渐近方向，他们推导出竞争界面存在渐近方向。另一些研究则聚焦于指向特定点 0 的几何树，其边由局部几何规则定义。第一个例子是 Baccelli & Bordenave 在欧几里得平面中引入的径向生成树（RST），用于模拟通信网络 [4]。树中的每个顶点都有一条出边，指向距离 0 更近的顶点中离它最近的那个。本文研究的双曲 RST 是他们提出的 RST 的扩展。他们利用一种有向森林（即有向生成森林）来逼近 RST；这种森林在分布意义下于局部范围内逼近 RST，并且远离根。借此，他们证明了 RST 的直线性。第二个例子是 Bonichon & Marckert 在 [6] 中定义的导航树。每个顶点的出度也为一，对应的边将其连接到给定的、指向 0 的圆锥中离它最近的顶点。为了描述导航路径的渐近几何性质，作者证明了导航树具有直线性。

由于在二维中，至少有两条无限路径指向的随机方向只有可数多个，因此自然会问，其中是否有些方向“非常特殊”，即有多于两条无限路径指向它们。假设路径不相交性质

（所有前述的树都满足这一性质），那么这种“非常特殊”方向的存在意味着存在一棵无限子树——其中包含中间无限路径——它会非常纤细，因为它被两条渐近方向相同的极端无限路径夹在中间。这种子树的存在令人怀疑，因为它参与了一场空间竞争，却既未获胜（未能占据空间的宏观部分），也未落败（它是无界的）。这一启发式推理支持对 Howard & Newman 结果作如下改进：

猜想 1.1. 对于文献中研究的大多数具有路径不相交性质的直线型二维几何随机树（包括上文引用的那些），几乎必然不存在一条（随机）方向，使得有两条以上的无限路径以它为目标1。

据我们所知，这一猜想目前只在一种情形下得到证明：由 Coupier [10]证明的、具有指数权重的有向 LPP 树 $\mathbb{N}^2$。他的证明基于 Rost [23] 首次揭示的一种出人意料的耦合——将 LPP 模型与全非对称简单排斥过程（文献中简称 TASEP）联系起来——以及关于该粒子系统 [3]中某些特殊粒子（称为第二类粒子）的结果。

本文给出了满足这一猜想的第二个例子，即 [12]中引入的双曲径向生成树。见图 1。需要强调的是，这个新例子的性质与第一个截然不同，因为它所处的是连续双曲空间，而非 $\mathbb{N}^2$。

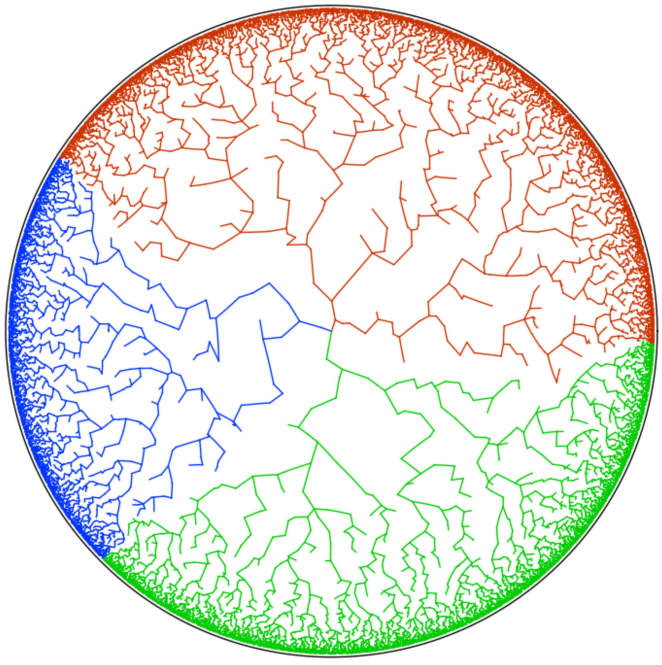

图 1：在庞加莱圆盘模型中，对二维双曲 RST 的模拟，其中 $\lambda = 30$。边以测地线表示。径向生成树（除根之外）的不同连通分量以不同颜色表示。这种着色有助于辨认被两条无限路径抵达的一些随机方向，即在无穷远处分隔三条彩色轨迹的三个方向：详情请见注 3.7。

双曲 RST 的构造与 Baccelli & Bordenave 的二维欧几里得 RST 相同 [4], ，无论维数如何 $d + 1 \geq 2$。顶点集合

由强度为 $\lambda > 0$ 的齐次泊松点过程（PPP） $\mathcal{N}$ 给出。以原点 0 为根的 RST，是通过将每个点 $z \in \mathcal{N}$ 与其父节点$A(z)$相连而得到的图；其父节点定义为在所有比 z更靠近原点的点 $z' \in \mathcal{N} \cup \{0\}$ 中，距离 z 最近的点。该过程定义了一棵以 0 为根的随机径向树，它在 $\mathbb{H}^{d+1}$ 中具有直线性；见 [12, 下文的命题 2.7] 或性质 3.2。得益于双曲度量能够保证径向生成树路径的角偏差随其到原点的距离呈指数级衰减，这一关键性质在此得以成立。事实上，这一特性所蕴含的远不止双曲 RST 的直线性。它还意味着，在层级 r 上，有正比例的径向生成树边会产生无限路径（见下文命题 3.8）。欧几里得情形中则不会出现后一结论：在层级 r 上，给定一条边属于无限路径的概率会随着 $r \to \infty$ [5] 趋于 0。

我们的主要结果（定理 3.5）适用于任意维数。直观地说，我们将证明，从任意一个泊松点 z 出发的无限路径渐近到达的方向集合 $u \in \mathbb{S}^d$，称为 z 在无穷远处的迹，要么为空，要么具有正测度。第一种情况下，以 z 为根的子树是有限的；第二种情况下，它是无限的，并在无穷远处生成厚迹。在二维情况下，借助平面性和路径不相交性质，可以很容易地从定理 3.5 推出，几乎必然不存在被多于两条无限路径到达的方向，即猜想 1.1。参见推论 3.6 的第 (iii) 项。

定理 3.5 的证明可通过图 2 所示的几何构造来概括，其主要依据是：给定的泊松点 z 在层级 r 生成无穷远处的厚迹（并满足额外条件，例如某个稳定化判据）的概率，以一个严格大于零的常数为下界，且该下界对 r 一致成立（引理 4.5）。这一技术结果是双曲度量所特有的：这解释了为什么我们能够证明双曲 RST 满足猜想 1.1，却无法对其欧几里得对应形式证明这一点（尽管欧几里得径向生成树中无限路径所占比例低于双曲 RST）。引理 4.5 还利用了 [12] 中提出的路径波动控制方法（引理 5.2 中回顾）。

第2节中，我们简要回顾本文将用到的一些双曲几何结果。第3节中，我们陈述主要结果：适用于一般维数 $d+1, d \geq 1$ 的定理 3.5，以及适用于二维的推论 3.6。该推论回答了关于双曲径向生成树的猜想 1.1，并提供了连续空间中首个能够回答这一问题的例子。第4节给出定理 3.5 的证明，以及上一段中引入的技术性引理 4.5 的证明。第5节专门用于证明后一个结果。最后，在第 6 节中，我们证明树中处于层级 r 的点有正比例会生成无穷远处的粗迹。

2 双曲几何与记号

双曲几何概述。有关双曲几何的完整介绍，请参阅 [7, 8, 20, 22] 。对于 $d \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$，记作 $\mathbb{H}^{d+1}$ 的（$d+1$）维双曲空间是一个具有常负曲率 -1 的（$d+1$）维黎曼流形，可以通过若干个等距模型来定义。其中之一是开球模型 $\mathfrak{D}$ （二维时也称庞加莱圆盘模型），它由单位开球构成

$$\mathfrak{D} := \{(x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1^2 + \dots + x_{d+1}^2 < 1\}$$

其度量定义为:

$$ds^2_{\mathfrak{D}} := 4\frac{dx_1^2 + \ldots + dx_{n+1}^2}{(1 - x_1^2 - \ldots - x_{d+1}^2)^2} \ .$$

$(\mathfrak{D}, ds^2_{\mathfrak{D}})$ 上的体积测度因此由 $2^{d+1}dx_1 \ldots dx_{d+1}/(1-x_1^2-\ldots-x_{d+1}^2)^{d+1}$ 给出。

在开球模型中表示点的一种便捷方式是使用极坐标（相对于原点 0）。任意 $z \in \mathfrak{D}$ 都可以写成 $z = (r; u)$，其中 $r = d(z,0)$ 是其到 0 的距离，而 $u \in \mathbb{S}^d$ 是其方向。令 σ 为 $\mathbb{S}^d$ 上的球面概率测度（特别地，$\sigma(\mathbb{S}^d) = 1$）。在极坐标下，与缩放后的概率测度 σ 对应的 缩放后的体积测度 Vol 变为

$$d\mathrm{Vol}(r; u) = \sinh(r)^d \, dr \, d\sigma(u) \ . \tag{2.1}$$

采用这种体积测度的缩放方式，是为了避免反复书写常数 $2\pi^{(d+1)/2}/\Gamma((d+1)/2)$；否则该常数会在本文中频繁出现（这个常数是 $\mathbb{S}^d$ 的未缩放测度，见 [8, (III.3.10) 第 125] 页）。

双曲空间 $\mathbb{H}^{d+1}$ 还自然带有一组无穷远点，记作 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$。在开球模型中，这组点与单位球面$\mathbb{S}^d$相对应。与欧几里得距离相比，距离会发生扭曲；当我们接近边界 $\partial\mathfrak{D} = \mathbb{S}^d$ 时，距离会变得“更小”，而该边界到中心 0 的双曲距离为无穷大。我们还定义 $\overline{\mathbb{H}^{d+1}} := \mathbb{H}^{d+1} \cup \partial\mathbb{H}^{d+1}$，并赋予它由闭球给出的拓扑。

在 $(\mathfrak{D}, ds^2_{\mathfrak{D}})$ 中，测地线有两种类型：要么是 $\mathfrak{D}$ 的直径，要么是垂直于边界 $\partial\mathfrak{D}$的弧。此外，这个模型是保角的，也就是说，在开球表示中，两条测地线之间的双曲角等于它们之间的欧几里得角。关于双曲几何，另一个重要事实是，所有点和所有方向的地位都相同：$\mathbb{H}^{d+1}$ 是齐次且各向同性的。

记号。我们用 $d(\cdot,\cdot)$ 表示 $\mathbb{H}^{d+1}$ 中的双曲距离。对于 $z, z' \in \overline{\mathbb{H}^{d+1}}$，令 $[z, z']$ 为连接 z 和 z' 的测地线。我们用 (z, z') 表示去掉端点 z 和 z' 后的测地线。

对于 $z \in \mathbb{H}^{d+1}$ 和 $r > 0$，我们分别用 $B(z, r) := \{z' \in \mathbb{H}^{d+1} : d(z, z') < r\}$ 和 $S(z, r) := \{z' \in \mathbb{H}^{d+1} : d(z, z') = r\}$ 表示以 z 为中心、半径为 $r > 0$ 的双曲开球和双曲球面。简记为 $B(r) := B(0, r)$ 和 $S(r) := S(0, r)$。记 $\mathrm{Vol}(B(r)) = \int_0^r \sinh^d(\rho)d\rho$（例如参见 [22, 第 79] 页），容易证明存在 $c = c(d) \in (0,1)$，使得对任意 $r \geq 1$,

$$ce^{dr} \leq \mathrm{Vol}(B(r)) \leq \nu e^{dr} \ . \tag{2.2}$$

我们也将半径为$r < R$ 和 C的环域记作 $C(z, r, R) := \{z' \in \mathbb{H}^{d+1} : r < d(z, z') < R\}$。

对于 $z, z', z'' \in \overline{\mathbb{H}^{d+1}}$, $\widehat{zz'z''}$，其表示相应的（无向）双曲角的测度。对于任意 $z \in \overline{\mathbb{H}^{d+1}}$ 和 $\theta > 0$，$\mathrm{Cone}(z, \theta) := \{z' \in \mathbb{H}^{d+1} : \widehat{z0z'} \leq \theta\}$ 定义为顶点为0、轴为 z、张角为 θ的圆锥。此外，对于 $z \in \mathbb{H}^{d+1}$ 和 $r > 0$，我们将使用球冠

$$B_{S(r)}(z, \theta) := \mathrm{Cone}(z, \theta) \cap S(r) \ . \tag{2.3}$$

对于其曲面，请注意存在一个常数 $C = C(d) > 0$，使得:

$$\sigma\big(B_{S(r)}(z, \theta)\big) \leq C\theta^d \ . \tag{2.4}$$

3 主要结果

接下来，我们任意选取一个原点 $0 \in \mathbb{H}^{d+1}$（将其视为开球表示中 $\mathfrak{D}$ 的中心），作为下面要定义的双曲 RST 的根。

双曲 RST。设 $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{H}^{d+1}$ 中强度为 $\lambda > 0$ 的齐次泊松点过程。双曲 RST 的定义与欧几里得情形类似。它是一个有向图，顶点集为 $\mathcal{N} \cup \{0\}$，其中每个顶点 $z \in \mathcal{N}$ 都与 $(\mathcal{N} \cup \{0\}) \cap B(r)$ 中距离其最近的泊松点相连，其中 $r := d(0, z)$，这里的距离指双曲距离。

定义 3.1（$\mathbb{H}^{d+1}$ 中的径向生成树）。 $z \in \mathcal{N}$ 的**祖先** 定义为

$$A(z) := \operatorname*{argmin}_{z' \in (\mathcal{N} \cup \{0\}) \cap B(d(0,z))} d(z', z) \ . \tag{3.1}$$

$\mathbb{H}^{d+1}$ 中的径向生成树（RST）是有向图 $(V, \vec{E})$，其中 $V := \mathcal{N} \cup \{0\}$，且 $\vec{E} := \{(z, A(z)) : z \in \mathcal{N}\}$。

由于 $\mathcal{N} \cup \{0\}$ 以概率 1 不含等腰三角形，因此任意泊松点 z 的祖先 $A(z)$ 几乎必然定义良好。换句话说，任意泊松点只有一条出边，但可能有多条入边。无论如何，这些入边的数量有限：

性质 3.2（[12]的命题 2.2）。几乎必然，径向生成树是一棵以0 为根的树，且所有顶点的度数都有限。在二维情形（$d = 1$）中，测地线的并集 $[z, A(z)], z \in \mathcal{N}$是平面的；也就是说，无论 $z \neq z' \in \mathcal{N}$如何，测地线 $[z, A(z)]$和 $[z', A(z')]$都只能在端点处重叠。

对于 $z \in \mathcal{N}$ 和 $r > 0$，我们还定义

$$B^+(z, r) := B(z, r) \cap B(d(0, z)) \quad \text{and} \quad B^+(z) := B^+(z, d(z, A(z))) \ . \tag{3.2}$$

根据祖先的构造，随机集 $B^+(z)$ 避开了泊松点过程 $\mathcal{N}$。这一事实给径向生成树的研究带来了许多困难。事实上，当从$A(z) = (r'; u')$重新开始并向前（朝向 0）构造路径时，以概率 1，$B(r') \cap B^+(z)$非空。这意味着，用于确定 $A(z)$ 的几何信息仍会参与该过程的后续步骤，从而产生统计依赖。

径向生成树的一条路径 是在$\mathcal{N} \cup \{0\}$ 中的一列不同顶点（有限或无限）$(z_0, z_1, z_2 \ldots)$，满足对任意 $n \geq 0$，$A(z_{n+1}) = z_n$。由 (3.1) 可知，对所有 $z \in \mathcal{N}$,$d(0, A(z)) < d(0, z)$。将此应用于 $z = z_n$, $n \geq 1$，可得 $d(0, z_n) < d(0, z_{n+1})$。因此，路径$(z_0, z_1, z_2 \ldots)$可以看作是从 z_0出发、远离 0 的径向生成树探索过程。我们称朝向 0 的方向为正向，朝向无穷远的方向为反向。每条路径都可以从 $z_0 = 0$开始，但并非必须如此。

给定顶点 z 的后代集合 $\mathcal{D}(z)$由所有可以从 z 出发、沿有限反向路径到达的顶点组成（按惯例也包括 z 自身）。由于一个顶点可能不是任何其他顶点的祖先，因此所有后代集合都不是无限集。

正如引言中所提到的，双曲 RST 的一个非常重要的特征是其直线性：

性质 3.3（命题 2.7，见 [12]）。几乎必然地，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在某个 $r_0 > 0$，使得对于任意半径 $r \geq r_0$，以及双曲 *RST* 中满足 $d(0, z) \geq r$ 的任意顶点 z，其后代集合 $\mathcal{D}(z)$ 包含于一个顶点为 0、张角为 $e^{-(1-\varepsilon)r}$ 的圆锥中；也就是说，对于任意 z'，$z'' \in \mathcal{D}(z)$，$\widehat{z'0z''} \leq e^{-(1-\varepsilon)r}$。

边界上的迹 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$。考虑一个点 $z \in \mathcal{N}$ 及其后代集合$\mathcal{D}(z)$。当该集合为无限集时，根据有限度性质（性质 3.2），它至少包含一条无限路径（z_n）$_{n\geq 0}$。于是，[12] 的定理 1.1 断言，这条路径（z_n）$_{n\geq 0}$ 存在一个渐近方向 $u \in \partial\mathbb{H}^{d+1}$。因此，我们将 $\mathcal{D}^\infty(z)$ 定义为 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 中可由 $\mathcal{D}(z)$ 的无限路径到达的渐近方向集合。粗略地说，$\mathcal{D}^\infty(z)$ 是后代集合 $\mathcal{D}(z)$ 在边界 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 上留下的迹（参见图 1 中 0 的子代在无穷远处留下的迹）。我们刚刚证明了：

性质 3.4. 几乎必然，对于任意顶点 $z \in \mathcal{N}$，

$$\#\mathcal{D}(z) = +\infty \iff \mathcal{D}^\infty(z) \neq \emptyset \ . \tag{3.3}$$

我们的主要结果（定理 3.5）证明了一个更强的结论：在 $\mathcal{D}(z)$ 中有无穷多个后代，实际上意味着 $\mathcal{D}(z)$ 在无穷远处留下的迹具有正体积，即 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(z)) > 0$。在这种情况下，我们称 z 在无穷远处生成厚迹。

定理 3.5. 考虑 $\mathbb{H}^{d+1}$ 中的双曲 *RST*，其中维数 $d \geq 1$ 任意。几乎必然，对于任意顶点 $z \in \mathcal{N}$，要么 z 只有有限多个后代，要么 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(z)) > 0$。

在 $\mathbb{H}^2$ 中的推论。 定理 3.5 在任意维数下都成立。在二维中（即对于$d = 1$），结合路径不相交性质（性质 3.2），可得猜想 1.1：几乎必然，径向生成树不包含三条具有相同（随机）渐近方向的无限路径。该陈述——推论 3.6 的第 iii 项——完整描述了从 [12] 出发的双曲 RST 的无限路径及其渐近方向。下面的前三项由定理 1.1] 给出。其证明基于 Howard 和 Newman 在 [18] 中提出的策略，以及双曲 RST 的直线性 。

推论 3.6. 以下性质涉及 $\mathbb{H}^2$ 中的双曲 *RST*。

(o) 几乎必然，每条无限路径都有一个渐近方向；对于任意 $u \in \partial\mathbb{H}^2$，径向生成树中都存在一条渐近方向为 u 的无限路径。(i) 对于任意（确定性的）$u \in \partial\mathbb{H}^2$，径向生成树几乎必然包含一条渐近方向为 u 的唯一无限路径。(ii) 几乎必然，$\partial\mathbb{H}^2$ 中至少被两条无限路径到达的渐近方向构成的子集在 $\partial\mathbb{H}^2$ 中稠密且可数。(iii) 几乎必然，$\partial\mathbb{H}^2$ 中没有任何（随机）渐近方向会被超过两条无限路径到达。

条目（o）表明，$\partial\mathbb{H}^2$ 中的任意 u 都至少被一条无限路径到达；当 u 为确定性时，恰好被一条无限路径到达（条目（i））。根据条目（ii），存在被多条无限路径到达的渐近方向，但这些方向是随机的，而且数量很少（仅可数个）。最后，定理 3.5 指出，不存在被超过两条无限路径到达的随机渐近方向。

推论 *3.6* 的证明，条目 (iii)。假设双曲 RST 包含三条不同的无限路径，分别记为 $(x_n)_{n\geq 0}$、$(y_n)_{n\geq 0}$ 和 $(z_n)_{n\geq 0}$，它们在 $\partial\mathbb{H}^2$ 中具有相同的渐近方向。不失一般性，我们还可以假设这三条路径没有共同顶点。根据路径不相交性质和平面性，这三条无限路径中的一条（记为 $(y_n)_{n\geq 0}$）被夹在另外两条路径之间，而后两条路径根据假设具有相同的渐近方向。这就意味着 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(y_0)) = 0$，而后代集合 $\mathcal{D}(y_0)$ 是无限的。根据定理 3.5，这种情况发生的概率为零。 □

备注 3.7。 我们来证明，图 1 中在无穷远处分隔绿色和红色轨迹的渐近方向，是由两条无限路径（一条绿色路径和一条红色路径）到达的。在绿色（分别为红色）无限子树中，按三角意义选取最左侧（分别为最右侧）的无限路径。得益于路径不相交性质，这种构造在二维中是有意义的。这两条路径 π_{green} 和 π_{red} 根据推论 3.6 的条目 (o)，分别具有渐近方向，记为 u_{green} 和 u_{red}，且属于 $\partial\mathbb{H}^2$。如果 u_{green} 和 u_{red} 不同，那么根据推论 3.6 的条目 (o)，它们之间（严格位于两者之间）的任意渐近方向 u' 都应由一条无限路径 π 到达。根据 π_{green} 和 π_{red} 的构造，路径 π 既不可能是绿色的，也不可能是红色的，从而导致矛盾。

正密度为 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(\cdot)) > 0$。 尽管前述结果涉及径向生成树的组合结构，但在证明中，将图径向生成树表示为 $\mathbb{H}^{d+1}$ 的一个子集会很有用，记作 **径向生成树**。其中，每条边 $(z, A(z))$ 都表示为弧 $[\![z, A(z)]\!]$（定义见附录 A），而不是（双曲）测地线 $[z, A(z)]$:

$$\mathbf{RST} := \bigcup_{z\in\mathcal{N}} [\![z, A(z)]\!] \ . \tag{3.4}$$

这一选择（虽有些不自然）源于这样一个事实：沿着弧 $[\![z, A(z)]\!]$，到原点 0 的（双曲）距离单调变化；而沿测地线 $[z, A(z)]$（或沿 z 与其祖先 $A(z)$ 之间的欧几里得线段）则不然。特别地，每条弧$[\![z, A(z)]\!]$ 与任意给定球面至多相交一次。因此，我们将第 $r > 0$ 层的径向生成树定义为以下随机集:

$$\mathcal{L}_r := \mathbf{RST} \cap S(r) \ . \tag{3.5}$$

$\mathcal{L}_r$ 中的元素几乎必然不是 $S(r)$ 上的泊松点。然而，我们将记号 $\mathcal{D}(\cdot)$ 和 $\mathcal{D}^\infty(\cdot)$ 扩展到 $\mathcal{L}_r$ 中的元素，具体如下。对于 $z \in \mathcal{L}_r$，我们将穿过 $S(r)$ 于 z处的弧 $[\![z_\downarrow, A(z_\downarrow)]\!]$ 所对应的泊松点记为 $z_\downarrow$：稍微滥用记号后，$z_\downarrow$ 可以无歧义地定义（见附录）。然后我们令 $\mathcal{D}(z) = \mathcal{D}(z_\downarrow)$，并令 $\mathcal{D}^\infty(z) = \mathcal{D}^\infty(z_\downarrow)$。

本节以一个密度结果结束。命题 3.8 从直观上说明， $\mathcal{L}_r$ 中的元素在期望意义下有宏观比例生成无穷远处的厚迹:

命题 3.8。 存在 $c = c(d) > 0$，使得对于任意 $r > 0$,

$$\mathbb{E}\big[\#\{z \in \mathcal{L}_r : \sigma(\mathcal{D}^\infty(z)) > 0\}\big] \geq c\,\mathbb{E}\big[\#\mathcal{L}_r\big] \ .$$

命题 3.8 与若干欧几里得二维树 [1, 11], 形成对比，其中包括欧几里得径向生成树 [5], ；在这些树中，属于无限路径的层级 r 处的边所占比例可以忽略不计。

命题 3.8 是导出定理 3.5 的一些中间结果的直接推论，其证明见第 6 节。它可以在几个方向上得到改进（例如，得到几乎必然成立的结果而非期望意义下的结果，或使比值具有正极限而非正的下极限等），但这并非本文的目标。

4 定理 3.5 的证明

4.1 总体策略

令 $r_0 \in (0,1)$，并选择距（r_0； u_0）（采用极坐标）最近的泊松点，记为

$$z_0 := \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{N}} d(z, (r_0; u_0)) \ .$$

考虑事件 $E(r_0;u_0)$：由 z_0 的后代所到达的无穷远点集 $\mathcal{D}^\infty(z_0)$ 非空，但其体积为零：

$$E(r_0;u_0) := \left\{\mathcal{D}^\infty(z_0) \neq \emptyset \text{ and } \sigma\big(\mathcal{D}^\infty(z_0)\big) = 0\right\} . \tag{4.1}$$

我们的目的是证明 $\mathbb{P}(E(r_0;u_0)) = 0$。

对于 $\delta > 0$，考虑后代集合 $\mathcal{G}(\delta)$，其中 z 属于 z_0，且其祖先 $A(z)$ 与 z的距离不太近：

$$\mathcal{G}(\delta) := \left\{z \in \mathcal{D}(z_0) : d(z, A(z)) \geq \delta\right\} .$$

令 $\mathcal{H}(\delta)$ 为相应半径的集合：

$$\mathcal{H}(\delta) := \left\{r > 0 : \exists u \in \mathbb{S}^d, (r;u) \in \mathcal{G}(\delta)\right\} .$$

下一个结果指出，对于足够小的 δ，若 z_0 有无穷多个后代（或等价地，$\mathcal{D}^\infty(z_0) \neq \emptyset$），那么其中有无穷多个属于 $\mathcal{G}(\delta)$：

引理 4.1. 对于任意足够小的 $\delta > 0$，$\mathcal{D}^\infty(z_0) \neq \emptyset$ 几乎必然成立，这意味着 $\mathcal{H}(\delta)$ 无界。

对于任意半径 $r > 0$，令 $\mathcal{N}_{B(r)} := \mathcal{N} \cap B(r)$ 表示限制在球$B(r)$内的泊松点过程 $\mathcal{N}$。下面的引理 4.2 表明，几乎必然在 $\mathcal{D}^\infty(z_0)$ 上，$\neq \emptyset$ 随机变量$\mathbb{P}(\sigma(\mathcal{D}^\infty(z_0)) > 0 \,|\, \mathcal{N}_{B(r)})$ 对所有半径 $r \in \mathcal{H}(\delta)$ 都与 0 保持正距离，并且这一结论对这些半径一致成立。

Le引理 4.2。 对于任意足够小的 $\delta > 0$，存在 $\varepsilon > 0$，使得几乎必然在 $\mathcal{D}^\infty(z_0) \neq \emptyset$，

$$\forall r \in \mathcal{H}(\delta), \mathbb{P}\big(\sigma(\mathcal{D}^\infty(z_0)) > 0 \,|\, \mathcal{N}_{B(r)}\big) \geq \varepsilon . \tag{4.2}$$

如下所示，引理 4.1 和引理 4.2 一起推出 $\mathbb{P}(E(r_0;u_0)) = 0$，由此立即得到定理 3.5。引理 4.1 和引理 4.2 的证明分别放在第 4.2 节和第 4.3 节。

定理 *3.5* 的证明。 选择参数 δ 和 ε，使得引理 4.1 和引理 4.2 均成立。第二个引理指出，对于这组 δ 和 ε，我们有：几乎必然在 $\{\mathcal{D}^\infty(z_0) \neq \emptyset\}$，且对于任意 $r \in \mathcal{H}(\delta)$，

$$\mathbb{P}\big(E(r_0;u_0) \,|\, \mathcal{N}_{B(r)}\big) \leq \mathbb{P}\big(\sigma(\mathcal{D}^\infty(z_0)) = 0 \,|\, \mathcal{N}_{B(r)}\big) \leq 1 - \varepsilon .$$

由于 ε 在 $r \in \mathcal{H}(\delta)$上均匀分布，且我们在 $\{\mathcal{D}^\infty(z_0) \neq \emptyset\}$上进行讨论，因此集合 $\mathcal{H}(\delta)$几乎必然无界。我们可以取下极限：几乎必然在 $\{\mathcal{D}^\infty(z_0) \neq \emptyset\}$，

$$\liminf_{r\to\infty} \mathbb{P}\big(E(r_0;u_0) \,|\, \mathcal{N}_{B(r)}\big) \leq 1 - \varepsilon . \tag{4.3}$$

但是，鞅收敛定理断言：

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\big(E(r_0;u_0) \,|\, \mathcal{N}_{B(r)}\big) = \mathbf{1}_{E(r_0;u_0)}. \tag{4.4}$$

因此，在 $E(r_0;u_0) \subset \{\mathcal{D}^\infty(z_0) \neq \emptyset\}$ 上，(4.4) 中的极限等于 1。因此，只有当 $\mathbb{P}(E(r_0;u_0)) = 0$ 时，(4.3) 和 (4.4) 这两个陈述才相容。

因此，有理半径 r_0 和有理方向u_0 对应的事件 $E(r_0;u_0)$ 的并集也具有零概率。由于任意一个泊松点都是双曲空间 $\mathbb{H}^{d+1}$中某个有理元素 $(r_0;u_0)$ 的最近点，我们可以得出结论：以概率 1，任意顶点 $z \in \mathcal{N}$都满足 $\mathcal{D}^\infty(z) = \emptyset$，或者 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(z))$ 严格为正（等价地，$\mathcal{D}(z)$ 有限）。 □

4.2 引理 4.1 的证明

引理 4.1 的证明基于一个渗流论证。为建立这一论证，我们首先需要对双曲空间 $\mathbb{H}^{d+1}$（原点附近除外）进行覆盖，并对覆盖之间的重叠加以统一控制。这将通过覆盖引理（如下）来完成。这一经典结果将在本文中多次使用，并陈述于 [12, 引理 4.2] 中。

引理 4.3（覆盖引理）。存在一个覆盖常数 $K = K(d) > 0$，使得对于任意 $r > 0$，都存在一组由 $N(r)$ 个点组成的集合 $z_1, ..., z_{N(r)} \in S(r)$，满足：

(a) $\bigcup_{1 \le i \le N(r)} B_{S(r)}(z_i, e^{-r}) = S(r)$,

(b) $\forall z \in S(r), \#\{1 \le i \le N(r) : z \in B_{S(r)}(z_i, e^{-r})\} \le K.$

此外，存在 $C = C(K, d) > 0$，使得对于任意 $r > 0$、$z \in S(r)$ 和 $A \ge 1$，与 $B_{S(r)}(z, Ae^{-r})$ 重叠的球冠数量均不超过 CA^d：

$$\#\Big\{1 \le i \le N(r) : B_{S(r)}(z_i, e^{-r}) \cap B_{S(r)}(z, Ae^{-r}) \neq \emptyset\Big\} \le CA^d \ .$$

特别地（在前一个不等式中取 $A := \pi e^r$），$N(r) \le Ce^{dr}$。

对于任意整数半径 $r > 0$ 和任意指标 $1 \le m \le N(r)$，令

$$B_{r,m} := C(r, r+1) \cap \mathrm{Cone}(z_{r,m}, e^{-r})$$

其中，$\{z_{r,1}, \dots, z_{r,N(r)}\}$ 是引理 4.3 给出的球面 $S(r)$ 上点的集合（在本证明中，我们通过在 $z_{r,m}$ 中添加指标 r，强调 z_m 对 r 的依赖）。每个块 $B_{r,m}$ 以球冠 $B_{S(r)}(z_{r,m}, e^{-r}) = S(r) \cap \mathrm{Cone}(z_{r,m}, e^{-r})$ 为基础，厚度为 1。若两个块 $B_{r,m}$ 和 $B_{r',m'}$ 之间的距离小于 δ，则称它们相邻，记作 $B_{r,m} \sim B_{r',m'}$。引理 4.4 断言，$B_{r,m}$ 的体积一致有界，且由邻接关系生成的图中各顶点的度有界。

引理 4.4。存在两个正数 C_1 和 C_2，它们仅依赖于 d，使得对于任意整数半径 $r > 0$ 和 $m \in \{1, \dots, N(r)\}$，以下结论成立：

$$Vol(B_{r,m}) \le C_1, \quad \text{and} \quad \#\big\{(r', m') : B_{r',m'} \sim B_{r,m}\big\} \le C_2 \ . \tag{4.5}$$

证明。首先，利用 (2.4)，

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(B_{r,m}) &= \int_r^{r+1} \sinh^d(\rho) \times \sigma\big(\mathrm{Cone}(z_{\rho,m}, e^{-\rho}) \cap \mathbb{S}^d\big)\, d\rho \\ &\le C \int_r^{r+1} e^{d\rho}\, d\rho \times e^{-dr} = \frac{C}{d}(e^d - 1) =: C_1 \ . \end{aligned}$$

对于 (4.5) 中的第二个不等式，只要 $B_{r',m'}$ 与 $\{z \in \mathbb{H}^{d+1}$ 有重叠，两个块 $B_{r',m'}$ 和 $B_{r,m}$ 就相邻：$d(z, B_{r,m}) \le \delta\}$。由于 $\delta < 1$，这就迫使 r' 属于 $\{r-1, r, r+1\}$，并且 $B_{r',m'}$ 与 $\mathrm{Cone}(z_{r,m}, (1+\delta)e^{-r})$ 重叠。现在，引理 4.3 断言，对于每一层 $r' \in \{r-1, r, r+1\}$，与 $\mathrm{Cone}(z_{r,m}, (1+\delta)e^{-r})$ 重叠的块 $B_{r',m'}$ 至多有 $CA^d = C(1+\delta)^d e^{d(r'-r)} \le C2^d e^d$ 个。因此，$B_{r,m}$ 至多有 $C_2 := 3C2^d e^d$ 个相邻块。 □

如果块 $B_{r,\ m}$ 包含一个泊松点 z，使得 $d(z, A(z)) < \delta$，则称其为 δ-坏块。我们首先证明，可以将 $\delta > 0$ 选得足够小，使得记作 Ψ_δ 的 δ-坏块集合关于邻接关系几乎必然是次临界的，即 Ψ_δ 仅有有限个连通分量。为此，我们首先利用 Mecke公式 [14, 命题 13.1.IV]，来估计一个块为 δ-坏块的概率：对任意 (r, m)，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(B_{r,m} \text{ is } \delta\text{-bad}\big) &\leq \mathbb{E}\left[\#\{z \in B_{r,m} \cap \mathcal{N} : d(z, A(z)) < \delta\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\#\{z \in B_{r,m} \cap \mathcal{N} : B^+(z, \delta) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset\right] \\
&= \lambda \int_{B_{r,m}} \mathbb{P}\big(B^+(z, \delta) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset\big)\, dz \\
&\leq \lambda \mathrm{Vol}(B_{r,m})\big(1 - e^{-\lambda \mathrm{Vol}(B(\delta))}\big) \\
&\leq \lambda C_1\big(1 - e^{-\lambda \mathrm{Vol}(B(\delta))}\big) =: p(\delta) \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

由引理 4.4 可知。因此，$\mathbb{P}(B_{r,\ m}$ 是 δ-坏的) 当 $\delta \to 0$ 时趋于 0，且关于这一对 (r, m) 一致。

第二步，我们将 Peierls论证调整到当前情境，以证明当 δ 足够小时，Ψ_δ 具有次临界性。给定 (r, m)，令 $\mathcal{P}_{r,\ m}(k)$ 表示从 $B_{r,\ m}$ 出发、由长度为 k 的相邻块组成的路径集合。由引理 4.4，$\#\mathcal{P}_{r,\ m}(k) \leq (C_2)^k$。若路径 $\pi = (B_1, \ldots, B_k)$ 中包含的所有块 B_i 都是 δ-坏的，则称该路径为 δ-坏的。因此，$B_{r,\ m}$ 属于由 δ-坏块构成的无限连通分支的概率，上界为

$$\limsup_{k \to \infty} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{r,m}(k)} \mathbb{P}\big(\pi \text{ is } \delta\text{-bad}\big)\ .$$

对于 $\mathcal{P}_{r,\ m}(k)$ 中的任意路径 $\pi = (B_1, \ldots, B_k)$，我们可以选取一个包含于 $\{B_1, \ldots, B_k\}$ 的块子集 $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_\ell}\}$，使得这些 B_{i_j} 两两不相邻，并且 $\ell \geq k/C_2$（此处我们利用每个块至多有 C_2 个相邻块这一事实）。此外，邻接关系的定义方式保证事件 $\{B_{i_j}$ 是 δ-坏的$\}$ 两两独立。因此

$$\mathbb{P}\big(\pi \text{ is } \delta\text{-bad}\big) \leq \mathbb{P}\big(B_{i_1}, \ldots, B_{i_\ell} \text{ are } \delta\text{-bad}\big) \leq p(\delta)^{k/C_2}\ ,$$

其中，$p(\delta)$ 的定义见式 (4.6)。于是

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_{r,m}(k)} \mathbb{P}\big(\pi \text{ is } \delta\text{-bad}\big) \leq \big(C_2 p(\delta)^{1/C_2}\big)^k\ .$$

取 δ 足够小，使得 $C_2 p(\delta)^{1/C_2} < 1$，于是我们得到，几乎必然地，块 $B_{r,\ m}$ 不可能属于 δ-坏块的无界连通分支。因此，对于这样的参数 δ，集合 Ψ_δ 以概率 1 处于次临界状态。

为了完成引理 4.1 的证明，取 δ 足够小，使得 δ-坏块的集合不发生渗流。同时假设 $\mathcal{D}^\infty(z_0)$ 非空，即以 z_0 为根的径向生成树的子树至少包含一条无限路径 $(z_n)_{n \geq 0}$，其由泊松点构成。由于泊松点过程 $\mathcal{N}$ 局部有限，路径 $(z_n)_{n \geq 0}$ 不可能从某个指标开始一直停留在一个 δ-坏块的连通分支中；根据 δ 的选取，该连通分支是有界的。它最终会离开每个 δ-坏块的连通分支。必须区分两种情况。
要么 $(z_n)_{n \geq 0}$ 会经过无穷多个 δ-良好块，当然，若一个块不是 δ-坏块，就称它为 δ-良好 块。因此，无穷多个 z_n'满足 $d(z_n, A(z_n)) \geq \delta$。这些顶点位于 $\mathcal{G}(\delta)$ 中，这意味着 $\mathcal{H}(\delta)$ 无界。

或者，无限路径 $(z_n)_{n\geq 0}$ 会无数次从一个 δ-坏连通分量跳到另一个坏连通分量。但根据构造，不同的坏连通分量之间的距离至少为 δ。因此，这些跳跃在 $\mathcal{G}(\delta)$ 中产生了同样多个 z_n：这种情况下， $\mathcal{H}(\delta)$ 也无界。

4.3 引理 4.2 的证明

接下来，我们将对构型进行局部修改。因此，我们强调任意随机集 $\mathcal{A}$ （例如 $\mathcal{D}(z)$、 $\mathcal{D}^{\infty}(z)$ 或 $\mathcal{H}(\delta)$）对当前构型 η（即泊松点过程 $\mathcal{N}$ 的一个实现）的依赖，并将其记作 $\mathcal{A}[\eta]$。

给定 $r_0 > 0$ 和 $u_0 \in \mathbb{S}^d$，回想一下， z_0 是距离 $(r_0; u_0)$ 最近的泊松点。本节中，考虑满足 $\mathcal{D}^{\infty}(z_0) \neq \emptyset$ 的构型 η。令 $\delta > 0$ 和 $r > r_0$为集合 $\mathcal{H}(\delta)[\eta]$中的一个元素——根据引理 4.1，只要 δ足够小，这个集合就是无界的。对于某个 $u \in \mathbb{S}^d$ （z_1 属于 $\mathcal{N}$），令 $z_1 := (r; u) \in \mathcal{G}(\delta)$。接下来，我们将以 $\mathcal{N}_{B(r)} = \eta_{B(r)}$ 为条件进行讨论，其中 $\mathcal{N}_{B(r)} = \eta_{B(r)}$是泊松点过程 $\mathcal{N}$ 限制在球 $B(r)$上的构型。

设 $0 < \delta' < \delta$ 和 $h > 0$ （视为较大）。再设 $z_2 := (r + h; u)$（方向与 z_1相同）。事件 $\mathrm{Stab}(r, h, \delta')$ 表示：任意一个位于 $B(z_2, \delta')$ 中的泊松点，其后代集合不受 $B(r)$ 内发生的事情影响：

$$\mathrm{Stab}(r, h, \delta') := \left\{\eta' : \forall z \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta'),\, \forall \eta'',\, \mathcal{D}(z)[\eta''_{B(r)} \cup \eta'_{B(r)^{\complement}}] = \mathcal{D}(z)[\eta']\right\}. \quad (4.7)$$

引理 5.4 将证明，当 $h \to \infty$ 时，$\mathrm{Stab}(r, h, \delta')$ 的概率趋于 1，且该结论在 r 上一致成立。

现在引入事件 $F(r, h, \delta')$，在该事件中，存在 $z \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta')$，使得以下四项均成立：

(i) $\mathcal{N} \cap B(z_2, \delta') = \{z\}$,

(ii) $\sigma(\mathcal{D}^{\infty}(z)) > 0$,

(iii) $\mathrm{Stab}(r, h, \delta')$ occurs

(iv) and $\mathcal{D}(z) \subset B(r + h + \delta')^{\complement}$.

在事件 $F(r, h, \delta')$ 中，泊松点过程 $\mathcal{N}$在球 $B(z_2, \delta')$ 内有且仅有一个点具有无穷远处的厚迹。该子树位于球 $B(r + h + \delta')$ 之外，且不依赖于 $\mathcal{N}$ 在球 $B(r)$ 内的点。距离 h是分隔间隙，确保以 $z_2 = (r + h; u)$ 为根的子树与球 $B(r)$ 内的泊松点保持独立。

引理 4.5 表明，事件 $F(r, h, \delta')$ 的概率大于某个正数 ε，且该概率在 r 上一致。要使 ε（或 A）在 r 上具有这种一致性，将使引理 4.5 的证明大为复杂，因此该证明推迟到第 5 节。

引理 4.5。存在足够大的 $A > 0$，使得对于任意足够小的 $\delta' > 0$，都存在 $\varepsilon = \varepsilon(A, d, \lambda, \delta') > 0$，使得对于任意足够大的 $h_0 > 0$ 及 $r > 0$，都存在 $h \in [h_0, h_0 + A]$，使得 $\mathbb{P}(F(r, h, \delta')) \geq \varepsilon$。还需注意，在上述参数中，只有 h 可能依赖于 r。

对于 $\theta > 0$，考虑 $\mathbb{H}^{d+1}$ 的子集 $U = U(r, h, \delta', \theta)$，其定义如下：

$$U := \Big(B(r + h + \delta') \setminus (B(r) \cup B(z_2, \delta'))\Big) \cap \mathrm{Cone}(0, \theta). \quad (4.8)$$

参见图 2。令 $\eta' \in F(r,h,\delta')$，使得 $\eta'_{B(r)} = \eta_{B(r)}$。移除构型 η' 中位于集合 U 内的所有泊松点后，z 的祖先——根据事件 $F(r,h,\delta')$，它是 $B(z_2,\delta')$ 中唯一的泊松点——变为 z_1，而 z_1 本身是 z_0 的后代。由此得到 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(z_0))[\eta'_{U^\complement}] > 0$。此构造要求满足假设 $r \in \mathcal{H}(\delta)[\eta]$，即 $B^+(z_1,\delta)$ 中没有泊松点；这是引理 4.2 的证明中唯一用到该假设的地方。

引理 4.6。对于任意满足 $r \geq r_0$ 的 $r \in \mathcal{H}(\delta)$，以及任意 h 和 $\delta' < \delta/3$，都存在足够大的 θ，使得下述陈述成立。几乎所有满足 $\eta'_{B(r)} = \eta_{B(r)}$ 且有 $\eta' \in F(r,h,\delta')$ 的构型 η'，都满足 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(z_0))[\eta'_{U^\complement}] > 0$。

PSfrag替换

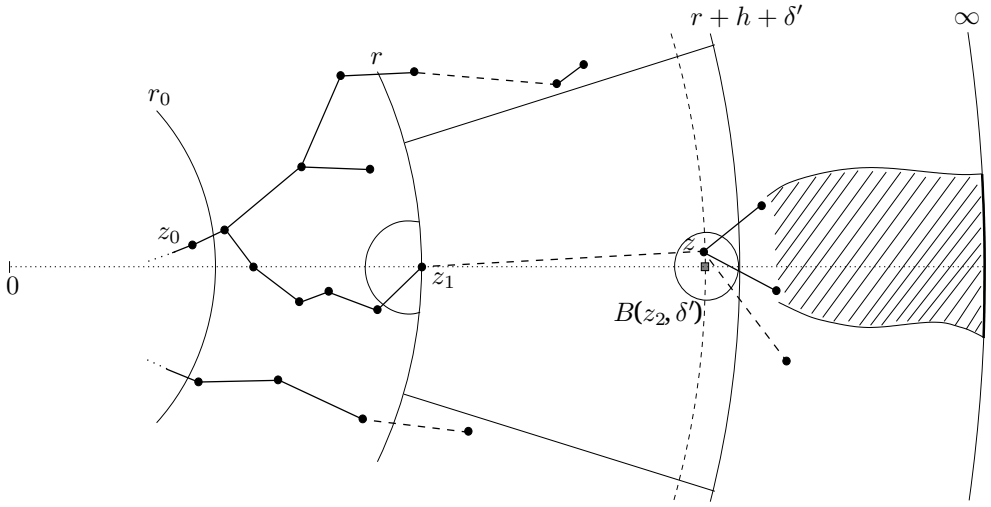

图 2：引理 4.6 的示意图。黑点表示泊松点。此图表示一个构型 $\eta'_{U^\complement}$（即，η'_U 中的泊松点已被移除），其中 $\eta'_{B(r)} = \eta_{B(r)}$ 和 $\eta' \in F(r,h,\delta')$。球 $B(z_2,\delta')$ 的（确定性）中心为 z_2，以灰色方块标出；球内仅有一个泊松点，即 z。其后代集合 $\mathcal{D}(z)$ 以阴影区域表示，并满足 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(z))[\eta'] > 0$（单位球面 $\mathbb{S}^d$ 上的粗黑曲线）。当集合 U 中的泊松点被清空时，则有 $A(z)[\eta'_{U^\complement}] = z_1$，这意味着 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(z_0))[\eta'_{U^\complement}] > 0$。删除 η'_U 后，虚线表示的边发生了改变。

现在我们可以证明引理 4.2 了。

引理 *4.2* 的证明。根据引理 4.5 选取参数 A, δ', ε 和 h_0。于是，对于任意 $r > 0$，都存在 $h \in [h_0, h_0 + A]$，使得 $\mathbb{P}(F(r,h,\delta')) \geq \varepsilon$。由于这需要 Stab$(r,h,\delta')$，事件 $F(r,h,\delta')$ 不依赖于球$B(r)$内的构型。因此，

$$\mathbb{P}\big(F(r,h,\delta') \,|\, \mathcal{N}_{B(r)} = \eta_{B(r)}\big) = \mathbb{P}\big(F(r,h,\delta')\big) \geq \varepsilon \ .$$

Now r 可以在 $\mathcal{H}(\delta)$ 中选取，并满足 $r > r_0$ 和 $0 < \delta' < \delta/3$，使得引理 4.6 适用 s:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \mathbb{P}\big(\eta' \in F(r,h,\delta') \,|\, \mathcal{N}_{B(r)} = \eta_{B(r)}\big) \\
&\leq \mathbb{P}\big(\sigma(\mathcal{D}^\infty(z_0))[\eta'_{U^\complement}] > 0 \,|\, \mathcal{N}_{B(r)} = \eta_{B(r)}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\sigma(\mathcal{D}^\infty(z_0))[\eta'] > 0,\, \eta'_U = \emptyset \,|\, \mathcal{N}_{B(r)} = \eta_{B(r)}\big) \\
&\leq \mathbb{P}\big(\sigma(\mathcal{D}^\infty(z_0)) > 0 \,|\, \mathcal{N}_{B(r)} = \eta_{B(r)}\big) \ .
\end{aligned}$$

注意，下界 $\varepsilon = \varepsilon(A,d,\lambda,\delta')$ 不依赖于参数 r。 □

本节以引理 4.6 的证明作结。

引理 *4.6* 的证明。考虑一个构型 η'，它在球 $B(r)$ 内等于 η，并且属于事件 $F(r,h,\delta')$。首先假设，对于构型 $\eta'_{U^{\complement}}$，泊松点 z 的祖先（其存在性由 $F(r,h,\delta')$ 保证）是 z_1，即

$$A(z)[\eta'_{U^{\complement}}] = z_1 \ . \tag{4.9}$$

让我们由 (4.9) 证明 $\mathrm{Vol}(\mathcal{D}^{\infty}(z_0))[\eta'_{U^{\complement}}] > 0$。由于 $\eta' \in F(r,h,\delta')$，后代集合$\mathcal{D}(z)[\eta']$ 包含于 $B(r+h+\delta')^{\complement}$ 中。因此，只要满足 $A(z') \in \mathcal{D}(z)$，移除 η'_U 中的泊松点就不会改变径向生成树的任何边（$z', A(z')$）。事实上，移除 η'_U 只会为顶点 z 增添新的后代。因此，$\mathcal{D}(z)[\eta']$ 包含于 $\mathcal{D}(z)[\eta'_{U^{\complement}}]$，由此得到 $\sigma(\mathcal{D}^{\infty}(z))[\eta'_{U^{\complement}}] \geq \sigma(\mathcal{D}^{\infty}(z))[\eta'] > 0$。最后，利用 $A(z)[\eta'_{U^{\complement}}] = z_1$（它本身是 z_0 的一个后代），我们得到 $\sigma(\mathcal{D}^{\infty}(z_0))[\eta'_{U^{\complement}}] > 0$。

接下来只需证明（4.9）。设 R 为 z 与 z_1 之间的双曲距离。只需证明 $B^{+}(z,R)$ 包含于 $U \cup B^{+}(z_1,\delta)$，因为移除 U 中的泊松点后，z_1 将成为 z 的最近泊松点。这里我们利用了 $r \in \mathcal{H}(\delta)$，也就是说，球 $B^{+}(z_1,\delta)$ 中除 z_1 外不含其他泊松点。首先注意到

$$R = d(z,z_1) \leq d(z,z_2) + d(z_2,z_1) \leq \delta' + h \leq h+1$$

其中 $\delta' < 1$。因此，取足够大的 θ，使得 $B^{+}(z,R) \subset \mathrm{Cone}(0,\theta)$，接下来只需证明

$$V := B^{+}(z,R) \cap B(r) \quad \subset \quad B^{+}(z_1,\delta). \tag{4.10}$$

为此，取测地线 γ 上的 v_1、v_2、v_3，它们位于 0 与 z 之间，具体如下：v_1、v_2 和 v_3 分别是 γ 与球面 $S(0,r+h)$、$S(0,r)$ 以及 $S(z,R)$ 的交点。记 w 为 z_1 关于直线 $(0z)$ 的对称点。接下来，只需证明 w、z_1 和 v_3 属于 $B^{+}(z_1,\delta)$。首先，我们有 $d(v_2,z_1) \leq d(v_1,z_2) \leq \delta'$。因此，根据对称性，$d(w,z_1) \leq d(w,v_2) + d(v_2,z_1) = 2d(v_2,z_1) \leq 2\delta'$。由于 v_3、v_2 和 z 位于同一条测地线上，我们可以写成：

$$d(v_3,v_2) = d(v_3,z) - d(z,v_2) \leq R - h + \delta' \ .$$

由于 $R \leq h+\delta'$，我们得到 $d(v_3,v_2) \leq 2\delta'$，于是 $d(v_3,z_1) \leq d(v_3,v_2) + d(v_2,z_1) \leq 3\delta'$。每当 $\delta' < \delta/3$ 时，三个点 w、z_1 和 v_3 都位于 $B^{+}(z_1,\delta)$ 内。这证明了 (4.10)，并完成了证明。

□

5 引理 4.5 的证明：关于 r 的一致性

本节旨在证明引理 4.5，即 $\mathbb{P}(F(r,h,\delta')) \geq \varepsilon$，其中下界 ε 不依赖于 r,h。回顾第 4.3 节和图 2 中的记号。我们首先在第 5.2 节证明，$B(z_2,\delta')$ 中有正比例的泊松点满足$\sigma(\mathcal{D}^{\infty}(\cdot)) > 0$——即 $F(r,h,\delta')$ 定义中的条件（ii）——其中 $z_2 = (r+h;\, u)$。接着，我们证明其余三项所描述的性质以高概率出现。具体而言，我们在第 5.3 节指出，$\mathrm{Stab}(r,h,\delta')$ 的概率趋于 1，当 $h \to \infty$ 时，该结论关于 r 一致成立。不过首先，在第 5.1 节，我们回顾最大向后角偏差（MBD）的一些性质；这是控制双曲 RST 中路径波动的关键工具。

5.1 最大向后角偏差

本研究的一个关键要素是对最大向后角偏差（MBD）的控制，这一问题已在 [12] 中解决（另见 [17]，其中介绍了这些概念）。下面回顾主要定义和结果。

给定 $r>0$ 和 $z\in\mathcal{L}_r$，回顾一下，$z_\downarrow$ 表示其弧 $[\![z_\downarrow, A(z_\downarrow)]\!]$ 在 z 处与 $S(r)$相交的泊松点，并令 $z_\uparrow := A(z_\downarrow)$。另令 $A^{(k)}(z) := A\circ\ldots\circ A(z)$（$k$ 次）表示任意 $k\in\mathbb{N}$ 的第 k个祖先（按照惯例，令 $A(0) := 0$）。

考虑 $0<r\le r'$ 和 $z'\in\mathcal{L}_{r'}$。令 $z\in\mathcal{L}_r$ 表示连接 z' 与原点的径向生成树路径和球面 $S(r)$ 的交点。定义 $\mathrm{CFD}_r^{r'}(z')$ 为层级 r 和 r' 之间的累积向前角偏差，即**径向生成树**

$$\mathrm{CFD}_r^{r'}(z') := \begin{cases} \widehat{z'0z} \text{ if } z_\downarrow = z'_\downarrow, \\ \widehat{z'0z'_\uparrow} + \sum_{k=0}^{n-1} A^{(k)}(z'_\uparrow)\widehat{0A^{(k+1)}}(z'_\uparrow) + \widehat{z_\downarrow 0z} \text{ else,} \end{cases}$$

其中，$0 \quad n \quad = z_\downarrow \quad =$ 是满足 $A^{(n)}(z'_\uparrow)$ 的唯一非负整数。我们还令 $\mathrm{CFD}_r^{r'}(z')$: 当 $z'\notin\mathcal{L}_{r'}$时。

定义 5.1 （最大后向角偏差）。对于 $0<r\le r'$，定义层级 r 和 r' 之间的最大向后角偏差为

$$\mathrm{MBD}_r^{r'}(z) := \sup_{\rho\in[r,r']}\max_{y\in\mathcal{D}_r^\rho(z)} \mathrm{CFD}_r^\rho(y) \tag{5.1}$$

若 $z\in\mathcal{L}_r$ 且 $\mathrm{MBD}_r^{r'}(z) := 0$ 若 $z\notin\mathcal{L}_r$，其中 $\mathcal{D}_r^\rho(z)$ 是点 $y\in\mathcal{L}_\rho$ 的集合，这些点从 y 到 0 的**径向生成树**路径会在 z 处与 $S(r)$ 相交（或者粗略地说，是 z 在层级 ρ 上的后代集合）。

由于 $r'\mapsto\mathrm{MBD}_r^{r'}(z)$ 是非递减的，因此可以通过如下定义将 MBD 自然地扩展到 $r'=\infty$:

$$\mathrm{MBD}_r^\infty(z) := \lim_{r'\to\infty}\mathrm{MBD}_r^{r'}(z)\ .$$

下一个引理给出了对 $\mathrm{MBD}_r^\infty(z)$ 的矩的控制，这对于证明正密度至关重要。其思路是，由于路径不会有太大波动，因此在给定层级 r 上有空间容纳正数量的点，使其在无穷远处具有厚迹。

引理 5.2 ([12]的命题 2.6。对于任意 $p\ge 3d/2$，存在一个常数 $C=C(d)>0$，使得对于任意 $r>2$、$A>0$ 以及任意方向 $u\in\mathbb{S}^d$，

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{z\in B_{S(r)}(u,Ae^{-r})\cap\boldsymbol{RST}}\big(MBD_r^\infty(z)\big)^p\Big] \le CA^d e^{-rp}\ . \tag{5.2}$$

5.2 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(\cdot))>0$ 的正密度

引理 5.3。 存在足够大的 $A>0$ 和 $c_0=c_0(A,\ d,\ \lambda)>0$，使得对于任意 $0<\delta'<1$、$h_0>0$ 和 $r>0$，存在 $h\in[h_0,h_0+A]$，使得对于任意 $z_2=(r+h;\ u)$ $(u\in\mathbb{S}^d)$

$$\mathbb{E}\Big[\#\big\{z\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta') : \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big\}\Big] \ge c_0\,Vol\big(B(\delta')\big)\ . \tag{5.3}$$

还要注意，在前述参数中，只有 $h=h$（r）可能取决于 r。

引理 *5.3* 的证明。 证明分为三个步骤。我们首先证明一个接近（5.3）的估计，但针对的是 $z \in \mathcal{L}_r$ （步骤 1）。然后，我们将该结果推广到部分环带和球。

步骤 1. 我们首先证明，存在 $c = c(d) > 0$，使得对任意 $r > 0$,

$$\mathbb{E}\Big[\#\big\{z \in \mathcal{L}_r : \sigma(\mathcal{D}^\infty(z)) > 0\big\}\Big] \geq ce^{dr} . \tag{5.4}$$

我们首先对内积 $\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}[\sum_i X_i Y_i]$ 使用柯西-施瓦茨不等式:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sum_{z\in\mathcal{L}_r} \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))\Big]^2 &\leq \mathbb{E}\Big[\sum_{z\in\mathcal{L}_r} \mathbf{1}_{\sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0}\Big]\mathbb{E}\Big[\sum_{z\in\mathcal{L}_r} \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))^2\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\#\big\{z \in \mathcal{L}_r : \sigma(\mathcal{D}^\infty(z)) > 0\big\}\Big]\mathbb{E}\Big[\sum_{z\in\mathcal{L}_r} \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))^2\Big] . \end{aligned}\tag{5.5}$$

因此，(5.4) 的左侧有如下下界:

$$\mathbb{E}\Big[\#\big\{z \in \mathcal{L}_r : \sigma(\mathcal{D}^\infty(z)) > 0\big\}\Big] \geq \frac{\mathbb{E}\Big[\sum_{z\in\mathcal{L}_r} \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))\Big]^2}{\mathbb{E}\Big[\sum_{z\in\mathcal{L}_r} \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))^2\Big]}.$$

回顾一下，在开球模型中，无穷远点集 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 被认作单位 d 维球面 $\mathbb{S}^d$，其球面概率测度 $\sigma(\mathbb{S}^d)$ 归一化后为 1。根据 [12, 定理 1.1 (i)], ，以概率 1，任意无穷远点都是双曲 RST 中至少一条无限路径的渐近方向。因此,

$$\text{a.s. } 1 = \sigma(\mathbb{S}^d) \leq \sum_{z\in\mathcal{L}_r} \sigma(\mathcal{D}^\infty(z)) . \tag{5.6}$$

给定 $r > 0$ 和 $z \in \mathcal{L}_r$，记 $\mathrm{Ang}(z) := \sup\{z0I : I \in \mathcal{D}^\infty(z)\}$ if $\mathcal{D}^\infty(z) \neq \emptyset$，而 $\mathrm{Ang}(z) := 0$ 表示其他情况。于是，集合 $\mathcal{D}^\infty(z)$ 包含于球冠 $\mathrm{Cone}(z, \mathrm{Ang}(z)) \cap \partial\mathbb{H}^{d+1}$，这意味着 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(z)) \leq C\mathrm{Ang}(z)^d$。此外，$\mathrm{Ang}(z)$ 的值由最大向后角偏差 $\mathrm{MBD}_r^\infty(z)$ 所界；参见定义 5.1。由此可得

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{z\in\mathcal{L}_r} \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))^2\Big] \leq \mathbb{E}\Big[\sum_{z\in\mathcal{L}_r} \mathrm{MBD}_r^\infty(z)^{2d}\Big] \leq Ce^{-dr} \tag{5.7}$$

由引理 5.2（分别应用于 $A = \pi e^r$ 和 $p = 2d$）可得，其中常数 $C = C(d) > 0$ 不依赖于 $r > 0$。

最后，结合 (5.5)、(5.6) 和 (5.7) 即可得到 (5.4)。

不等式 (5.4) 针对的是 $\mathcal{L}_r$ 中的元素，而 (5.3) 涉及泊松点。在两者之间转换，同时保持 r 中 A 的一致性，需要考虑一些技术细节。现在我们将 (5.4) 推广到环带，再推广到球。

步骤 2. 对于任意足够大的 A，存在 $c_0 = c_0(d, A) > 0$，使得对于任意 $r > 0$ 和 $0 < \delta' < 1$,

$$\mathbb{E}\Big[\#\big\{z \in \mathcal{N} \cap C(r, r + A - 2\delta') : \sigma(\mathcal{D}^\infty(z)) > 0\big\}\Big] \geq c_0 \mathrm{Vol}\big(C(r, r + A - 2\delta')\big) , \tag{5.8}$$

这里回顾一下， $C(r,R)$ 已在第2节的记号中定义。

对于 $z\in\mathcal{L}_r$，回想一下，$z_\downarrow$ 表示其弧 $[\![z_\downarrow,A(z_\downarrow)]\!]$ 在 z 中与 $S(r)$相交的泊松点。特别地，$\sigma(\mathcal{D}^\infty(z))$ 与 $\sigma(\mathcal{D}^\infty(z_\downarrow))$ 相等。以下，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\#\big\{z\in\mathcal{N}\cap C(r,r+A-2\delta')\colon \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big\}\Big]&\\ \geq \mathbb{E}\Big[\#\big\{z\in\mathcal{L}_r\colon z_\downarrow\in B(r+A-2\delta') \text{ and } \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big\}\Big]&\\ \geq c_1\mathbb{E}\Big[\#\big\{z\in\mathcal{L}_r\colon \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big\}\Big].&\qquad(5.9)\end{aligned}$$

不等式 (5.9) 构成引理 5.5 的研究对象，其证明推迟到第5.5节。之所以这样安排，是因为该证明在一个更困难的情形下使用了与下一节中所采用的论证类似的方法。根据引理 5.5， $c_1=c_1(d)>0$ 和上文的 A 取足够大的值。接下来只需使用步骤 1 和以下不等式

$$\mathrm{Vol}\big(C(r,r+A-2\delta')\big)\leq \mathrm{Vol}\big(B(r+A)\big)\leq Ce^{d(r+A)}\ ,$$

即可最终得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\#\big\{z\in\mathcal{N}\cap C(r,r+A-2\delta')\colon \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big\}\Big]&\\ \geq c_1\ c\ e^{dr}&\\ \geq c_1\times c\times (Ce^{dA})^{-1}\mathrm{Vol}\big(C(r,r+A-2\delta')\big)\ .&\end{aligned}$$

步骤3. 简言之，令 $f(z'):=\mathbb{P}(\sigma(\mathcal{D}^\infty(z'))>0\,|\,z'\in\mathcal{N})$。利用 Mecke公式和 Fubini定理，我们可以写出:

$$\begin{aligned}\int_{C(r,r+A)}\mathbb{E}\Big[\#\big\{z'\in\mathcal{N}\cap B(z,\delta')\colon \sigma(\mathcal{D}^\infty(z'))>0\big\}\Big]\,dz&\\ =\lambda\int_{z\in C(r,r+A)}\int_{z'\in B(z,\delta')}f(z')\,dz'\,dz&\\ =\lambda\int_{z'\in C(r-\delta',r+A+\delta')}f(z')\mathrm{Vol}\big(B(z',\delta')\cap C(r,r+A)\big)\,dz'&\\ \geq\lambda\mathrm{Vol}\big(B(\delta')\big)\int_{z'\in C(r+\delta',r+A-\delta')}f(z')\,dz'&\\ \geq\lambda\mathrm{Vol}\big(B(\delta')\big)\mathbb{E}\Big[\#\big\{z'\in\mathcal{N}\cap C(r+\delta',r+A-\delta')\colon \sigma(\mathcal{D}^\infty(z'))>0\big\}\Big]&\\ \geq\lambda\mathrm{Vol}\big(B(\delta')\big)c_0\mathrm{Vol}\big(C(r+\delta',r+A-\delta')\big)&\qquad(5.10)\end{aligned}$$

根据步骤 2。

现在，利用不等式(2.2)，不难选取足够小的 $\tilde{c}=\tilde{c}(d)>0$ 和足够大的 $A=A(d)>0$，使其在 $r>0$ 和 $\delta'<1$ 上一致，从而 $\mathrm{Vol}(C(r+\delta',r+A-\delta'))$ 大于 $\tilde{c}\mathrm{Vol}(C(r,r+A))$。结合 (5.10)，我们得到

$$\int_{C(r,r+A)}\mathbb{E}\Big[\#\big\{z'\in\mathcal{N}\cap B(z,\delta')\colon \sigma(\mathcal{D}^\infty(z'))>0\big\}\Big]\,dz\geq c_2\mathrm{Vol}\big(B(\delta')\big)\mathrm{Vol}\big(C(r,r+A)\big)\ .$$

其中 $c_2:=\lambda c_0\tilde{c}$。这迫使某个 $(r+h;u)\in C(r,r+A)$ 的存在，其中 $h\in[0,A]$和 $u\in\mathbb{S}^d$，满足

$$\mathbb{E}\Big[\#\big\{z'\in\mathcal{N}\cap B((r+h;u),\delta')\colon \sigma(\mathcal{D}^\infty(z'))>0\big\}\Big]\geq c_2\mathrm{Vol}\big(B(\delta')\big)\ .\qquad(5.11)$$

最后，我们首先说明，由于模型的各向同性，(5.11) 对任意方向 $u \in \mathbb{S}^d$ 均成立。此外，对于任意给定的 $h_0 > 0$，满足 $r > h_0$ 的半径 $r + h$ 可写为 $r' + h'$，其中 $r' > 0$ 且 $h' \in [h_0, h_0 + A]$。因此，我们证明了存在足够大的 A和 $c_2 = c_2(A, d, \lambda) > 0$，使得对于任意 $0 < \delta' < 1$、 $h_0 > 0$和 $r > 0$，均存在$h \in [h_0, h_0 + A]$，使 (5.11) 对任意 $u \in \mathbb{S}^d$成立。这就是引理 5.3。

量词的这一最后变更，即将 $r > h_0$ 和 $h \in [0, A]$ 替换为 $r > 0$ 和$h \in [h_0, h_0 + A]$，将使我们能够同时取到处于良好区间 $[h_0, h_0 + A]$内且足够大的 h。参见第 5.4 节。 □

5.3 径向生成树的子树的稳定性结果

对于 $0 < \delta' < \delta$和 $r, h > 0$，回顾 $z_2 = (r + h; u)$，并回顾 (4.7) 中 $\mathrm{Stab}(r, h, \delta')$ 的定义。在本节中，我们证明一个稳定性结果：以 $B(z_2, \delta')$ 中的泊松点为根的径向生成树子树，在 $h \to \infty$ 时以高概率不依赖于 $B(r)$ 内部发生的情况。

引理 5.4。对于任意 $0 < \delta' < \delta$，

$$\lim_{h\to\infty} \sup_{r>0} \mathbb{P}(Stab(r, h, \delta')) = 1 \ .$$

证明。记 χ 为后代集 $\mathcal{D}(z)$ 的并，其中 z 属于 $\mathcal{N} \cap B(z_2, \delta')$。因此，要使 $B(r)$ 中的构型改变 χ，必须存在一个顶点 $z' = (r'; u') \in \chi$，使得其 $B^+(z', d(z', A(z')))$ 与 $B(r)$ 重叠，这意味着 $d(z', A(z')) \geq r' - r$。粗略地说，这将意味着出现一个半径为 $r' - r \geq h - \delta'$ 且内部没有泊松点的大球，而当 $h \to \infty$ 时这极不可能发生。因此，$\mathrm{Stab}(r, h, \delta')^{\complement}$ 被包含在 $\mathrm{I} \cup \mathrm{II}$ 中，其中对于某个正常数 $M > 0$，

$$\mathrm{I} := \left\{\chi \not\subset \mathrm{Cone}(z_2, Me^{-r-h})\right\}$$

and

$$\mathrm{II} := \left\{\exists z' = (r'; u') \in \mathcal{N} \cap \mathrm{Cone}(z_2, Me^{-r-h}) : \, d(z', A(z')) \geq r' - r\right\} \ .$$

We 我们将证明存在 $c, C > 0$（不依赖于 r, h 和 M），使得 t

$$\forall r, h > 0, \, \mathbb{P}(\mathrm{I}) \leq \frac{C}{M^{d/2}} + e^{-cM} \ \text{ and } \ \lim_{h\to\infty} \sup_{r>0} \mathbb{P}(\mathrm{II}) = 0 \ . \tag{5.12}$$

The 无论常数 $M > 0$ 取何值，前述结论都成立，于是引理 5.4 得证。

现在来处理 $\mathbb{P}(\mathrm{II})$。根据 Mecke公式和 $\delta' < 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathrm{II}) &\leq \mathbb{E}\left[\#\left\{z' = (r'; u') \in \mathcal{N} \cap \mathrm{Cone}(z_2, Me^{-r-h}) : \, d(z', A(z')) \geq r' - r\right\}\right] \\ &\leq \sum_{n \geq h-1} \lambda \int_{V_n} \mathbb{P}\big(d(z', A(z')) \geq n \,|\, z' \in \mathcal{N}\big) \, dz' \end{aligned}$$

其中 $V_n :=$ 圆锥$(z_2, Me^{-r-h}) \cap C(r + n, r + n + 1)$。另一方面，对于 $z' \in V_n$,

$$\mathbb{P}\big(d(z', A(z')) \geq n \,|\, z' \in \mathcal{N}\big) \leq \mathbb{P}\big(\mathcal{N} \cap B^+(z', n) = \emptyset\big) = e^{-\lambda \mathrm{Vol}(B^+(z', n))} \ .$$

这里我们需要 $B^+((r'; \cdot) \ \rho)$ 的下界，并使用 $[12, \text{eq. (A1)}]$ 中得到的下界：存在 $c = c(d) > 0$，使得对于任意半径 r'、 $\rho \geq 1$,

$$\mathrm{Vol}\big(B^+((r'; \cdot), \rho)\big) \geq c e^{d(r' \wedge \rho)/2} \ . \tag{5.13}$$

因此我们使用（5.13）得到

$$\mathbb{P}(d(z', A(z')) \geq n \,|\, z' \in \mathcal{N}) \leq e^{-\lambda c e^{dn/2}}.$$

另一方面，我们对 V_n 的体积给出上界：

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(V_n) &= \int_{r+n}^{r+n+1} \sinh(\rho)^d \, d\rho \times \sigma\big(\{u' \in \mathbb{S}^d : \widehat{u0u'} \leq M e^{-r-h}\}\big) \\ &\leq c_d e^{d(r+n)} \times M^d e^{-d(r+h)} \\ &= c_d M^d e^{d(n-h)} \ . \end{aligned}$$

综合前面的上界，我们得到：

$$\mathbb{P}(\text{II}) \leq \lambda c_d M^d e^{-dh} \sum_{n \geq h-1} e^{dn - \lambda c e^{dn/2}}, \tag{5.14}$$

当 $h \to \infty$ 时，该值趋于 0，且在 r 上一致收敛。

现在考虑项 $\mathbb{P}(\text{I})$。记 π_z 为径向生成树中从泊松点 z 出发直至原点的路径。我们将 $\mathrm{Rad}(z_2)$ 定义为路径 π_z 从某个 $z \in B(z_2, \delta')$ 出发并穿过球面 $S(r+h-\delta')$ 时产生的最大角偏差：

$$\mathrm{Rad}(z_2) := \max\big\{\widehat{u0u'} : \exists z \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta') \text{ s.t. } \pi_z \text{ intersects } S(r+h-\delta') \text{ at } (\cdot; u')\big\} \ .$$

最大角偏差不会太大。具体而言，令 Rad：
{ z_2 $\leq M e^{-(r+h-\delta')}$ } 4 3 [12] $\mathbb{P}$ $\mathbb{C}$ $\leq e^{-cM}$ $c = c\ d$ > 0 $\overset{=}{\mathrm{Rad}}$( )，的引理 . 表明，对于 ( )，当 M 足够大时，(Rad)。此外，

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{I} \cap \mathrm{Rad}) &= \mathbb{P}\big(\big\{\exists z' = (r'; \cdot) \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta') : \mathrm{MBD}^{\infty}_{r'}(z') \geq M e^{-(r+h)}\big\} \cap \mathrm{Rad}\big) \\ &\leq \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\mathrm{Rad}} \sum_{z' \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta')} \mathbf{1}_{\{\mathrm{MBD}^{\infty}_{r'}(z')^d \geq M^d e^{-d(r+h)}\}}\Big) \\ &\leq M^{-d} e^{d(r+h)} \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\mathrm{Rad}} \sum_{z' \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta')} \mathrm{MBD}^{\infty}_{r'}(z')^d\Big]. \end{aligned}$$

现在，为了应用引理 5.2，我们必须将对 $\mathcal{N} \cap B(z_2, \delta')$ 中元素的求和转化为对 $\mathcal{L}_{r+h-\delta'}$ 中元素的求和。给定 $z' = (r'; \cdot)$，我们用 $A^{r+h-\delta'}_{r'}(z')$ 表示 **径向生成树**中路径 $\pi_{z'}$ 与 $S(r+h-\delta')$ 的交点。它是**径向生成树**中 z' 在半径 $r+h-\delta' < r'$ 处的"祖先"。几乎必然。

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}_{\mathrm{Rad}} \sum_{z' \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta')} \mathrm{MBD}^{\infty}_{r'}(z')^d \\ &\leq \mathbf{1}_{\mathrm{Rad}} \sum_{z' \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta')} \mathrm{MBD}^{\infty}_{r+h-\delta'}(A^{r+h-\delta'}_{r'}(z'))^d \\ &\leq \sum_{z'' \in B_{S(r+h-\delta')}(z_2, M e^{-(r+h-\delta')}) \cap \mathbf{RST}} \#\big\{z' \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta') : \ z' \in \mathcal{D}(z'')\big\} \mathrm{MBD}^{\infty}_{r+h-\delta'}(z'')^d. \end{aligned}$$

因此，由柯西-施瓦茨不等式可得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\mathrm{Rad}} \sum_{z'\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta')} \mathrm{MBD}^{\infty}_{r'}(z')^d\Big] \\ \leq \mathbb{E}\Big[\sum_{z''\in\mathcal{L}_{r+h-\delta'}} \#\big\{z'\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta') :\, z'\in\mathcal{D}(z'')\big\}^2\Big]^{1/2} \\ \times\mathbb{E}\Big[\sum_{z''\in B_{S(r+h-\delta')}(z_2,Me^{-(r+h-\delta')})\cap\mathbf{RST}} \mathrm{MBD}^{\infty}_{r+h-\delta'}(z'')^{2d}\Big]^{1/2}. \quad (5.15)\end{aligned}$$

另一方面，记

$$\begin{aligned}\sum_{z''\in\mathcal{L}_{r+h-\delta'}} \#\big\{z'\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta') :\, z'\in\mathcal{D}(z'')\big\}^2 \\ \leq \Big(\sum_{z''\in\mathcal{L}_{r+h-\delta'}} \#\big\{z'\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta') :\, z'\in\mathcal{D}(z'')\big\}\Big)^2 \\ = \big(\#\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta')\big)^2\end{aligned}$$

这意味着，(5.15) 中上界的第一项被 $C_1 := \mathbb{E}[\#(\mathcal{N}\cap B(1))^2]^{1/2}$ 所界。最后，我们对 (5.15) 中上界的第二项应用引理 5.2：它被 $CM^d e^{-2d(r+h-\delta')}$ 的平方根所界。结合前述界，我们得到

$$\mathbb{P}(\mathtt{I}\cap\mathrm{Rad}) \leq CM^{-d/2}. \quad (5.16)$$

综合 (5.14) 和 (5.16) 即可证明引理 5.4。 □

5.4 结论

我们来证明引理 4.5。我们特别关注参数之间的依赖关系。令 $A>0$ 和 $c_0 = c_0(A,d,\lambda) > 0$ 由引理 5.3 给出。众所周知，

$$\mathbb{E}\big[\#\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta')\,\mathbf{1}_{\#\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta')\geq 2}\big] \quad (5.17)$$

根据泊松点过程的平稳性，该式不依赖于 r,h，且当 $\delta'\to 0$ 时，相对于 $\mathrm{Vol}(B(\delta'))$ 可忽略。因此，我们选择足够小的 $\delta'>0$，并使其在 $r,h > h_1 = h_1(d)$ 上一致，从而使期望 (5.17) 和

$$\mathbb{P}\big(\exists z\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta'),\ \mathcal{D}(z)\backslash\{z\}\not\subset B(r+h+\delta')^{\complement}\big)$$

都小于 $\frac{c_0}{4}\mathrm{Vol}(B(\delta'))$。第二个上界和常数 $h_1 = h_1(d)$ 已在引理 5.6 中证明，其证明推迟到第5.5节。在此阶段，参数 $r>0$ 和 $h>h_1$ 仍是自由的。现在，我们将 $h_0\geq h_1$ 取足够大，使得对于任意 $h\geq h_0$，且在 $r>0$ 上一致地，由引理 5.4 可得：

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{Stab}(r,h,\delta')^{\complement}\big) \leq \frac{c_0}{4}\mathrm{Vol}(B(\delta'))\,.$$

Fin最后，对于任意给定的半径 $r>0$，我们在 $[h_0,h_0+A$ 中选取 h（可能依赖于 r）] such that

$$\mathbb{E}\Big[\#\big\{z\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta') :\, \sigma(\mathcal{D}^{\infty}(z))>0\big\}\Big] \geq c_0\mathrm{Vol}\big(B(\delta')\big)$$

根据引理 5.3。

对于这些固定参数 A、c_0、δ'、h_0、r 和 h,

$$\begin{aligned} c_0\mathrm{Vol}(B(\delta')) &\le \mathbb{E}\big[\#\big\{z\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta'):\sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big\}\big] \\ &\le \mathbb{P}\big(\exists! z\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta'),\,\sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big) \\ &\qquad +\mathbb{E}\big[\#\{\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta')\}\,\mathbf{1}_{\#\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta')\ge 2}\big] \\ &\le \mathbb{P}\big(\exists! z\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta'),\,\sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big)+\frac{c_0}{4}\mathrm{Vol}(B(\delta')) \end{aligned}$$

由此得到 $\mathbb{P}(\exists! z\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta')\ \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0)\ge \frac{3c_0}{4}$体积$(B(\delta'))$。因此我们得出

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(F(r,h,\delta')\big) &\ge \mathbb{P}\big(\exists! z\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta'),\,\sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big)-\mathbb{P}\big(\mathrm{Stab}(r,h,\delta')^{\complement}\big) \\ &\quad -\mathbb{P}\big(\exists z\in\mathcal{N}\cap B(z_2,\delta'),\ \mathcal{D}(z)\backslash\{z\}\not\subset B(r+h+\delta')^{\complement}\big) \\ &\ge \frac{c_0}{4}\mathrm{Vol}(B(\delta'))\,. \end{aligned}$$

因此，$\varepsilon := \frac{c_0}{4}$体积$(B(\delta'))$（取决于 A、d、λ 和 δ'）是合适的，引理 4.5 得证。

5.5 技术引理

为了完成引理 4.5 的证明，还需陈述以下两个技术引理。

引理 5.5。存在 $c_1=c_1(d)>0$，使得对于任意足够大的 A，$r>0$ 和 $0<\delta'<1$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[\#\big\{z\in\mathcal{L}_r:\,z_\downarrow\in B(r+A-2\delta')\ \textit{and}\ \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big\}\Big] \\ &\qquad\qquad \ge c_1\mathbb{E}\Big[\#\big\{z\in\mathcal{L}_r:\,\sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big\}\Big]\,. \end{aligned}$$

证明。证明时，我们先考虑半径为 r 的球面的一部分，然后利用（覆盖）引理 4.3 将结果推广至整个 $\mathcal{L}_r$。

步骤 1： 给定 $z_0\in S(r)$，考虑事件

$$L(A,r):=\big\{\exists z\in B_{S(r)}(z_0,e^{-r})\cap\mathcal{L}_r:\,z_\downarrow\notin B(r+A-2\delta')\big\}\,.$$

简记 $X_{0,\,r}:=\#\big\{z\in B_{S(r)}(z_0,e^{-r})\cap\mathcal{L}_r:\ \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big\}$。我们将证明

$$\mathbb{E}\big[X_{0,r}\mathbf{1}_{L(A,r)^{\complement}}\big]\ge\frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{0,r}]\,. \tag{5.18}$$

With

$$X_{0,r}\mathbf{1}_{L(A,r)^{\complement}}=\#\big\{z\in B_{S(r)}(z_0,e^{-r})\cap\mathcal{L}_r:\,z_\downarrow\in B(r+A-2\delta')\ \text{and}\ \sigma(\mathcal{D}^\infty(z))>0\big\}\,.$$

利用引理 4.3（覆盖引理），将 $c_1:=1/(2K)$ 代入上述不等式，即可立即得到引理 5.5，其中覆盖常数 $K=K(d)$ 由该引理给出。

式 (5.18) 的证明依赖于以下两个不等式 (5.19) 和 (5.20)，它们将在稍后证明。

第一个不等式表明，当 $A\to\infty$ 时，$L(A,r)$ 的概率趋于 0，且在 r,δ' 上一致:

$$\lim_{A\to\infty}\sup_{r>0,\ \delta'<1}\mathbb{P}(L(A,r))=0\,. \tag{5.19}$$

第二个不等式确保存在 $c = c(d) > 0$，使得对于任意 $r > 0$,

$$\mathbb{E}\big[X_{0,r}\big] \geq c\ . \tag{5.20}$$

于是，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\mathbb{E}\big[X_{0,r}\mathbf{1}_{L(A,r)}\big] \leq C^{1/2}\mathbb{P}(L(A,r))^{1/2}$$

其中 $C = C(d) > 0$ 根据引理 6.1 对 $\#\big(B_{S(r)}(z_0,e^{-r}) \cap \mathcal{L}_r\big)^2$ 的期望给出了上界。因此，结合 (5.19) 和 (5.20)，我们可以选取足够大的 A，使其对 $r \geq 2$ 和 $\delta' < 1$ 一致成立，从而

$$\mathbb{E}\big[X_{0,r}\mathbf{1}_{L(A,r)}\big] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[X_{0,r}\big]\ .$$

这就证明了 (5.18)。

步骤 2：(5.19) 的证明。证明与引理 5.4 的证明非常相似，只是技术上的困难较少。类似地，我们将 $L(A,r)^{\complement}$ 分为 I $\cup$ 和 II，其中

$$\mathrm{I} := \big\{\exists z \in B_{S(r)}(z_0,e^{-r}) \cap \mathcal{L}_r : \mathcal{D}(z) \not\subset \mathrm{Cone}(z_0, Ae^{-r})\big\}$$

and

$$\mathrm{II} := \big\{\exists z \in B_{S(r)}(z_0,e^{-r}) \cap \mathcal{L}_r : z_{\downarrow} \in \mathrm{Cone}(z_0, Ae^{-r}) \cap B(r + A - 2\delta')^{\complement}\big\}\ .$$

由于事件 I 涉及的点 z 已经处于 $\mathcal{L}_r$中，因此与引理 5.4 的证明相比，我们更容易对 $\mathbb{P}$(I) 给出上界：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{I}) &\leq \mathbb{P}\big(\exists z \in B_{S(r)}(z_0,e^{-r}) \cap \mathcal{L}_r : \mathrm{MBD}_r^{\infty}(z) \geq Ae^{-r}\big)\\ &\leq A^{-2d}e^{2dr}\,\mathbb{E}\Big[\sum_{z\in B_{S(r)}(z_0,e^{-r})\cap\mathcal{L}_r}\big(\mathrm{MBD}_r^{\infty}(z)\big)^{2d}\Big] \leq CA^{-2d}\end{aligned}$$

（由引理 5.2）该项在 r, δ' 上一致趋于 0。对 $\mathbb{P}$(II) 也可以像引理 5.4 的证明那样处理。因此，我们省略细节。

步骤3：证明 (5.20)。 该不等式源于模型的各向同性、（覆盖）引理 4.3以及引理 5.3证明中的步骤 1:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\#\big\{z \in B_{S(r)}(z_0,e^{-r}) \cap \mathcal{L}_r : \sigma(\mathcal{D}^{\infty}(z)) > 0\big\}\Big]\\ &\qquad = \frac{1}{N(r)}\sum_{i=1}^{N(r)}\mathbb{E}\Big[\#\big\{z \in B_{S(r)}(z_i,e^{-r}) \cap \mathcal{L}_r : \sigma(\mathcal{D}^{\infty}(z)) > 0\big\}\Big]\\ &\qquad \geq \frac{1}{N(r)}\mathbb{E}\Big[\#\big\{z \in \mathcal{L}_r : \sigma(\mathcal{D}^{\infty}(z)) > 0\big\}\Big]\\ &\qquad \geq c\,C^{-1}\end{aligned}$$

其中 $N(r) \leq Ce^{dr}$。引理的证明至此完成。 □

引理 5.6。 存在 $h_1 = h_1(d) > 0$ 使得以下极限关于 $r > 0$和 $h > h_1$一致收敛：

$$\lim_{\delta'\to 0}\frac{1}{Vol(B(\delta'))}\mathbb{P}\big(\exists z \in \mathcal{N} \cap B(z_2,\delta'),\, \mathcal{D}(z)\backslash\{z\} \not\subset B(r + h + \delta')^{\complement}\big) = 0\ .$$

证明。 由 Mecke公式可得:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\exists z \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta'),\, \mathcal{D}(z)\backslash\{z\} \not\subset B(r+h+\delta')^{\complement}\big) \\
&\qquad \le \mathbb{P}\big(\exists z \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta'),\, \exists z' \in \mathcal{N} \cap B(r+h+\delta') \text{ s.t. } A(z') = z\big) \\
&\qquad \le \mathbb{E}\big[\#\big\{z \in \mathcal{N} \cap B(z_2, \delta') : \exists z' \in \mathcal{N} \cap B(r+h+\delta') \text{ s.t. } A(z') = z\big\}\big] \\
&\qquad = \lambda \int_{B(z_2,\delta')} \mathbb{P}\big(\exists z' \in \mathcal{N} \cap B(r+h+\delta') \text{ s.t. } A(z') = z \,|\, z \in \mathcal{N}\big)\, dz\ . \quad (5.21)
\end{aligned}$$

对于 z 属于 $B(z_2, \delta')$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\exists z' \in \mathcal{N} \cap B(r+h+\delta') \text{ s.t. } A(z') = z \,|\, z \in \mathcal{N}\big) \\
&\qquad \le \sum_{n \ge 0} \mathbb{E}\big[\#\big\{z' \in \mathcal{N} \cap V_{\delta',n} : A(z') = z\big\} \,|\, z \in \mathcal{N}\big]
\end{aligned}$$

其中我们设

$$V_{\delta',n} := C(r+h-\delta', r+h+\delta') \cap \mathrm{Cone}(u, ne^{-r-h}, (n+1)e^{-r-h})$$

而 $\mathrm{Cone}(u, ne^{-r-h}, (n+1)e^{-r-h})$ 是满足 $ne^{-r-h} \le \widehat{u0u'} \le (n+1)e^{-r-h}$ 的方向 $u' \in \mathbb{S}^d$ 所构成的集合。再次使用 Mecke 公式可得:

$$\mathbb{E}\big[\#\big\{z' \in \mathcal{N} \cap V_{\delta',n} : A(z') = z\big\} \,|\, z \in \mathcal{N}\big] = \lambda \int_{V_{\delta',n}} \mathbb{P}\big(A(z') = z \,|\, z, z' \in \mathcal{N}\big)\, dz'\ .$$

给定 $z' \in V_{\delta',n}$, 我们有

$$\mathbb{P}\big(A(z') = z \,|\, z, z' \in \mathcal{N}\big) = \mathbb{P}\big(B^+(z', d(z,z')) \cap \mathcal{N} = \emptyset\big) = e^{-\lambda \mathrm{Vol}(B^+(z', d(z,z')))}\ .$$

此外

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(B^+(z', d(z,z'))) &\ge ce^{\frac{d}{2} d(0,z') \wedge d(z,z')} \quad \text{by (5.13)} \\
&\ge ce^{\frac{d}{4} d(z,z')} \quad \text{since } d(z,z') \le 2d(0,z') \\
&\ge ce^{\frac{d}{4} c' n}
\end{aligned}$$

因为 $z' \in V_{\delta',n}$ 且 $r+h$ 大于某个 $h_1 = h_1(d) > 0$。

现在来计算 $V_{\delta',\ n}$ 的体积:

$$\mathrm{Vol}(V_{\delta',n}) = \int_{r+h-\delta'}^{r+h+\delta'} \sinh(\rho)^d\, d\rho \times \sigma\big(\{u' \in \mathbb{S}^d : ne^{-r-h} \le \widehat{u0u'} \le (n+1)e^{-r-h}\}\big)\ . \quad (5.22)$$

利用 (2.2), (5.22) 右侧的第一项有界于 $c_1 \delta' e^{d(r+h)}$ ，而第二项有界于 $c_2 n^d e^{-d(r+h)}$ 。前面的常数 c_i、 $i \in \{1,2\}$ 为正，且仅依赖于 d。因此, $V_{\delta',\ n}$ 的体积小于 $c_1 c_2 n^d \delta'$。综合以上结果，我们最终得到，对于任意 $r > 0$ 和 $h > h_1$

$$\mathbb{P}\big(\exists z' \in \mathcal{N} \cap B(r+h+\delta') \text{ s.t. } A(z') = z \,|\, z \in \mathcal{N}\big) \le \sum_{n \ge 0} \lambda e^{-\lambda c e^{\frac{d}{4} c' n}} c_1 c_2 n^d \delta'$$

其上界可表示为 $C\delta'$，其中 $C = C(\lambda, d, h_1)$ 是一个正的有限常数。接下来，只需将此上界代入 (5.21) 即可得出结论。 □

6 命题 3.8 的证明

我们先回顾一下球冠 $B_{S(r)}(\cdot, e^{-r})$ 中 $\mathcal{L}_r$ 的元素个数上界。

引理 6.1 ([12]的引理 4.4。对于任意 $p \geq 1$，存在常数 $C = C(d,\ p) > 0$，使得对于任意 $r \geq 0$ 和任意方向 $z \in S(r)$，

$$\mathbb{E}\Big[\#\big(\boldsymbol{RST} \cap B_{S(r)}(z, e^{-r})\big)^p\Big] \leq C\ .$$

借助覆盖引理（引理 4.3），现在很容易证明，$\mathcal{L}_r$ =**径向生成树** $\cap\ S(r)$ 的元素数量的期望约为 e^{dr}：

$$\mathbb{E}\big[\#\mathcal{L}_r\big] \leq \sum_{i=1}^{N(r)} \mathbb{E}\big[\#(B_{S(r)}(z_i, e^{-r}) \cap \mathcal{L}_r)\big] \leq Ce^{dr}\ . \tag{6.1}$$

最后，结合前一个不等式以及步骤 1 的引理 5.3 中证明的 (5.4)，我们得到命题 3.8。

A 径向生成树的弧作为 $\mathbb{H}^{d+1}$ 的子集

给定 z_1、$z_2 \in \mathbb{H}^{d+1}$，弧 $[\![z_1, z_2]\!]$ 的定义见 [12] 的第 2.2 节，为方便起见，我们在此回顾其要点。用极坐标将 $z_i = (r_i; u_i)$ 写作 $i \in \{1, 2\}$。每当 u_1 和 u_2 不对跖时（当 z_2 是 z_1 的祖先时，几乎必然如此），我们考虑球面上连接 u_1 和 u_2 的唯一测地线 $\gamma_{u_1,\ u_2}\colon [0,1] \to \mathbb{S}^d$。于是，弧 $[\![z_1, z_2]\!]$ 是这条路径

$$t \in [0,1] \mapsto \big((1-t)r_1 + tr_2; \gamma_{u_1,u_2}(\phi_{z_1,z_2}(t))\big) \in \mathbb{H}^{d+1}$$

其中 $\phi_{z_1,\ z_2}\colon [0,1] \to [0,1]$ 定义为

$$\phi_{z_1,z_2}(t) := \frac{1}{\widehat{u_1 0 u_2}} \arccos\Big(\frac{(1-t)\sinh(r_1) + t\cos(\widehat{u_1 0 u_2})\sinh(r_2)}{\sinh((1-t)r_1 + tr_2)}\Big)\ .$$

弧 $[\![z_1, z_2]\!]$ 的这种构造确保了沿路径 $[\![z_1, z_2]\!]$到原点的距离（以及到 z_1的距离）是单调的。

根据性质 3.2，我们知道，对于 $z, z' \in \mathcal{N}$，测地线 $[z, A(z)]$ 和 $[z', A(z')]$，只能在其端点处重叠。而使用弧 $[\![z, A(z)]\!]$ 和 $[\![z', A(z')]\!]$时，情况就不同了。对于任意 $r > 0$，可能存在一些点 $z \in \mathcal{L}_r$ 属于多个弧，例如 $[\![z_1, A(z_1)]\!]$，……，$[\![z_k, A(z_k)]\!]$。因此，这样的点 z在 $\mathcal{L}_r$中将按重数 k 计数。此外，为了无歧义地标识该点 z，我们应将其正式表示为一对信息：它在 $\mathbb{H}^{d+1}$ 中的位置，以及生成它的某条弧，例如 $[\![z_i, A(z_i)]\!]$。此时，顶点 $z_\downarrow \in \mathcal{N}$ 定义为 $z_\downarrow := z_i$。本文将采用以下记号滥用：对 $\mathcal{L}_r$ 中的元素按重数计数，而不注明区分它们的弧。

参考文献

[1] D. Ahlberg、J. Hanson 和 C. Hoffman。《平面首次通过渗流中测地线的数量呈次线性增长》。arXiv:2208.11576，2022。

[2] K.S. Alexander。《无限图中的渗流与最小生成森林》。概率年刊，23(1):87–104，1995。[3] G. Amir、O. Angel 和 D. Valkó。《TASEP 速度过程》。概率年刊，39 1242，2011 4 1205( ): – 。[4] F. Baccelli 和 C. Bordenave。《泊松点过程的径向生成树》。应用概率年刊，17(1):305–359，2007。[5] F. Baccelli、D. Coupier 和 V.C. Tran。《二维径向生成树的半无限路径》。应用概率进展，45(4):895–916，2013。[6] N. Bonichon 和 J.-F. Marckert。《平面随机点集上的几何导航的渐近性质》。应用概率进展，43(4):899–942，2011。[7] J.W. Cannon、W.J. Floyd、R. Kenyon 和 W.R. Parry。《双曲几何》。几何的风格，31:59–115，1997。[8] I. Chavel。《黎曼几何：现代导论（第二版）》。剑桥高级数学研究，98。剑桥大学出版社，2006。[9] C.F. Coletti 和 L.A. Valencia。《在原点吸收的一族合并径向随机路径的标度极限》。数学物理杂志，63:033303，2022。[10] D. Coupier。《方向相同的多条测地线》。概率电子通讯，16:517–527，2011。[11] D. Coupier。《几何随机树中半无限分支数量的次线性增长》。概率电子期刊，23:第37号论文，2018。[12] D. Coupier、L. Flammant 和 V.C. Tran。《双曲径向生成树》。arXiv 预印本 arXiv:2012.03467，2022。[13] D. Coupier、J.-F. Marckert 和 V.C. Tran。《有向、圆柱形和径向布朗网络》。概率电子期刊，24(20):1-48，2019。[14] D.J. Daley 和 D. Vere-Jones。《点过程理论导论》。第II卷，第二版。施普林格，纽约，2008。[15] P. Erdös 和 A. Rényi。《随机图的演化》。Mat. Kuttató. Int. Közl.，5:17–60，1960。[16] P.A. Ferrari 和 L.P.R. Pimentel。《竞争界面与第二类粒子》。概率年刊，33(4):1235–1254，2005。[17] L. Flammant。《双曲空间中的有向生成森林》。arXiv 预印本 arXiv:1909 13731，2022 . 。[18] C. D. Howard 和 C. M. Newman。《欧几里得首次通过渗流中的测地线与生成树》。概率年刊，29(2):577–623，2001。[19] T.M. Liggett、R.H. Schonmann 和 A.M. Stacey。《乘积测度的支配》。概率年刊，25(1):71–95，1997。[20] J. Paupert。《双曲几何导论》。亚利桑那州立大学讲义，2016。[21] M. Penrose。《随机几何图》，第5卷。牛津大学出版社，2003。[22] J.G. Ratcliffe。《双曲流形基础》，第二版。施普林格。数学研究生教材149，2006。[23] H. Rost。《多粒子过程的非平衡行为：密度剖面与局部平衡》。Z. Wahrsch. Verw. Gebiete，58(1):41–53，1981。[24] R. van der Hofstad。《随机图与复杂网络》。第1卷。剑桥统计与概率数学丛书，2017。