arXiv:2301.02733v1 [cs.DM] 6 Jan 2023

A_α 特征值的界 *

JoãoDomingosG. da Silva Jr.工程生产系 里约热内卢联邦技术教育中心 里约热内卢，巴西
joao.dgomes@gmail.com

Carla Silva Oliveira
数学系 国家统计科学学院 里约热内卢，巴西
carla.oliveira@ibge.gov.br

Liliana Manuela G.C. da Costa数学系 佩德罗二世学校
里约热内卢，巴西
lmgccosta@gmail.com

摘要

设 G 为一个图，其邻接矩阵为 $A(G)$，度对角矩阵为 $D(G)$。2017 年，Nikiforov[1] 将矩阵 $A_\alpha(G)$定义为 $A(G)$和 $D(G)$的凸组合，定义如下：$A_\alpha(G) = \alpha A(G) + (1-\alpha)D(G)$，其中 $\alpha \in [0,1]$。本文给出了 A_α-矩阵最大特征值、次大特征值和最小特征值的一些新的上界和下界。此外，我们还刻画了达到其中一些界的极值图。

***K*关键词** A_α-矩阵， A_α-特征值，界。

1 引言

设 $G = (V, E)$是一个简单图，满足 $|V| = n$ 和 $|E| = m$。若 v_i 与 v_j 相邻，则记为 $v_i \sim v_j$；否则记为 $v_i \nsim v_j$。对于 $v \in V$，其邻点集合记为 N_v，$|N_v|$ 是 N_v的基数。对于每个顶点 $v \in V$，v的度记为 $d(v)$，即其邻点的数量。G的最小度为 $\delta(G) := \min\{d(v);\ v \in V\}$，$G$的最大度为 $\Delta(G) := \max\{d(v);\ v \in V\}$。最后，我们用 d_i、Δ 和 δ 分别表示 $d(v_i)$、$\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$。还假设顶点的标号满足 $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n = \delta$，度序列定义为 $d(G) = (d_1, \ldots, d_n)$。当且仅当一个图的度序列仅有两个不同的值时，称其为双度图。

$_n$第一扎格瑞布指数定义为 $Z_1(G) = \sum_{i=1} d^2(v_i)$，其界与性质的研究见 [2–6]。$_{i=1}$非空子集 $I \subset V$当且仅当其中任意两个元素都不相邻时，才称为独立的。G的独立数 $\gamma(G)$ 是 G所有独立集中基数最大的值。

如果一个图的所有顶点具有相同的度，则称该图为正则图。图 G 的补图记为 $\overline{G}$，它是由 G 在相同的顶点集 $V = V(\overline{G})$ 上得到的图，当且仅当 $v_iv_j \notin E$ 时，$v_iv_j \in E(\overline{G})$。我们分别用 K_n、$K_{a,b}$ 和 $\overline{K}_1 \vee P_b$ 表示完全图、完全二分图、星图和路。连通二分图 G 的二部补图记为 $\widetilde{G}$，其划分为 V_1 和 V_2；它是一个二分图 G，满足：G 在 V_1 与 V_2 之间有边，当且仅当 G 没有边，即 $V(G) = V(K_{|V_1|,|V_2|})$ 且 $E(\widetilde{G}) = E(K_{|V_1|,|V_2|}) - E(G)$。如果图 G 是一个参数为 (n_1, n_2, r_1, r_2) 的半正则二分图，则 G 是二分图，满足 $V = V_1 \cup V_2$，其中 $n_1 = |V_1|$ 和 $n_2 = |V_2|$；并且同一划分中的顶点具有相同的度。换言之，n_1 个顶点的度为 r_1，n_2 个顶点的度为 r_2，且满足 $n_1r_1 = n_2r_2$。

*

设 $G=(V,\ E)$ 和 $H=(W,\ F)$ 是顶点集互不相交的图。G 与 H 的粘合记为 $G\cdot H$，是一个具有 $|V|+|W|-1$ 个顶点的图，可通过将 G 的某个顶点与 H 的某个顶点识别为同一顶点而得到。给定非负整数 s 和 l，双风筝图记为 $DK(s;l)$，它是将路 P_{l+2} 的一个悬挂顶点与完全图 K_s 的一个顶点粘合而得到的图。图 1 展示了双风筝图 $D(4,\ 3)$。

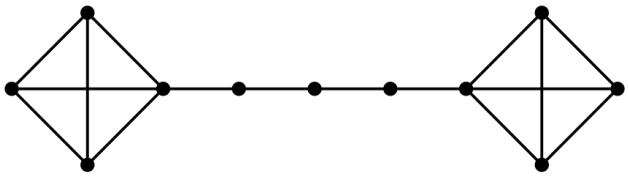

图 1：DK(4,3)。

设 $x\in \mathrm{IR}^n$，记 $|x|$ 为 x的欧几里得范数。设 M 为一个 $n\times n$ 矩阵。若 M 是对称的，则 M-特征值均为实数，并按非递增顺序排列，记为 $\lambda_1(M)\ \geq \ldots \geq \lambda_n(M)$。所有 M-特征值及其重数组成的集合称为 M-谱，记为 $\sigma(M)$。

图 G的邻接矩阵 $A=A(G)\ =[a_{ij}]$是一个 n阶方阵，且当 $v_i\sim v_j$时 $a_{ij}=1$，否则为 $a_{ij}=0$。图 G的度矩阵记为 $D(G)\ =[d_{ij}]$，它是满足 $d_{ii}=d(v_i)$ 的对角矩阵。拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵分别定义为 $L(G)\ =D(G)\ -A(G)$ 和 $Q(G)\ =D(G)\ +A(G)$。图谱理论中的一个有趣问题是，利用与图相关的不变量，求出 A-特征值、L-特征值和 Q-特征值的界。

2017 年，Nikiforov 对任意实数 $\alpha\in[0,1]$ 定义了 $A(G)$ 和 $D(G)$ 的凸线性组合 $A_\alpha(G)$，定义如下:

$$A_\alpha(G)=\alpha D(G)+(1-\alpha)A(G),\ \ \alpha\in[0,1].$$

容易看出，$A(G)\ =A_0(G)$、$D(G)\ =A_1(G)$ 和 $Q(G)\ =2A_{\frac{1}{2}}(G)$。因此，求得 A_α-特征值的界是一个有趣的问题，因为这涉及对邻接矩阵和无符号拉普拉斯矩阵的界的研究。

关于 A_α-特征值界的结果已有研究，例如 [1,7–16]。本文给出了图 G 矩阵的最大特征值、第二大特征值和最小特征值的一些界。本文结构如下：第 2 节介绍证明主要结果所需的一些定义和结果；随后，第 3 节给出关于 A_α-特征值界的主要结果。

2 预备知识

本节介绍矩阵理论中的若干内容，这些内容将用于证明本文的主要结果。矩阵的主子矩阵是通过删除具有相同指标 [17] 的行和列得到的。定理 2.1 给出了一个关于子矩阵的重要结果。

定理 2.1. *[18]* 设 $A\in M_n(\mathrm{IR})$ 为对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_n$。若 $B\in M_m(\mathrm{IR})$ 满足 $m<n$，且为 A 的主子矩阵，其特征值为 $\mu_1\geq\ldots\geq\mu_m$，则对于 $i=1,\ \ldots,m$，有 $\lambda_{n-m+i}\leq\mu_i\leq\lambda_i$。

下述结果是韦伊和苏的定理，它给出了厄米矩阵之和的特征值所满足的不等式。

定理 *2.2*（韦伊）。 *[18]* 设 $A,B\in M_n$*(IR)* 为厄米矩阵，且 A,B 和 $A+B$ 的谱分别为 $\sigma(A)\ =\{\lambda_1(A)\ldots,\lambda_n(A)\}$, $\sigma(B)\ =\{\lambda_1(B)\ldots,\lambda_n(B)\}$ 和 $\sigma(A+B)\ =\{\lambda_1(A+B)\ldots,\lambda_n(A+B)\}$。那么，

$$\lambda_{i+j-1}(A+B)\leq\lambda_i(A)+\lambda_j(B),\ \ j=1,\ldots,n-i+1 \tag{1}$$

对于每个 $i=1,\ldots,n$，当且仅当存在非零向量 x 使得 $Ax=\lambda_ix$,$Bx=\lambda_jx$ 且 $(A+B)x=\lambda_{i+j-1}x$ 时，某一对 i,j 取等号。此外，

$$\lambda_i(A)+\lambda_j(B)\leq\lambda_{i+j-n}(A+B),\ \ j=i,\ldots,n \tag{2}$$

对于每个 $i=1,\ldots,n$，当且仅当存在非零向量 x 使得 $Ax=\lambda_ix$,$Bx=\lambda_jx$ *e* $(A+B)x=\lambda_{i+j-n}x$ 时，某一对 i,j 取等号。如果 A 和 B 没有共同特征向量，那么 *(1)* 和 *(2)* 中的不等式都是严格的。

由定理 2.2 可得推论 2.3。

推论 2.3。 *[18]* 设 $A, B \in M_n(\mathrm{IR})$ 为厄米矩阵。那么，

$$\lambda_i(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_i(A+B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_1(B), \tag{3}$$

其中 $i = 1$、...、 n。上界取等号当且仅当存在非零向量 x，它是 A、B 和 $A+B$ 的特征向量，对应特征值分别为 λ_i、λ_1 和 λ_i。类似地，下界取等号当且仅当存在非零向量 x，它是 A、B 和 $A+B$ 的特征向量，对应特征值分别为 λ_i、λ_n 和 λ_i。

引理 2.4. *[19]* 设 G 是一个有 n 个顶点的连通图， $A(G)$ 是其邻接矩阵。设 $P(x)$ 是任意多项式函数， $S_v(P(A(G)))$ 是 $P(A(G))$ 中与各顶点 v对应的行和。则

$$\min S_v(P(A)) \leq P(\lambda_1(A(G))) \leq \max S_v(P(A)).$$

此外，取等号当且仅当 $P(A(G))$ 的行和全部相等。

T给出引理 2.5 的证明，是因为该证明将在下一节用于证明定理 3.4。 on.

引理 2.5. *[20]* 设 G 为一个具有 n 个顶点、 m 条边且最小度为 δ的图。那么， $S_v(A^2(G)-(\delta-1)A(G)) \leq 2m - \delta(n-1)$。

证明。 注意， $S_v(A^k(G))$恰好等于 G 中从 v出发、长度为 k 的游走数。特别地， $S_v(A(G))$为 $d(v)$，而 $S_v(A^2(G))= \sum_{u\sim v} d(u)$。因此，

$$\begin{aligned} S_v(A^2(G)) &= \sum_{u\sim v} d(u) \\ &= 2m - d(v) - \sum_{u\nsim v, u\neq v} d(u) \\ &\leq 2m - d(v) - (n - d(v) - 1)\delta \\ &= 2m + (\delta-1)d(v) - \delta(n-1). \end{aligned}$$

因此，

$$S_v(A^2(G) - (\delta-1)A(G)) \leq 2m - \delta(n-1).$$

□

接下来的两个定理分别给出利用 Δ、 δ、 m 和 n对 $Z_1(G)$的下界和上界。

定理 2.6. *[3]* 设 G 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的简单图。设 δ 和 Δ 分别为 G的最小度和最大度。那么，对于 $n \geq 3$， $Z_1(G) \geq \Delta^2 + \delta^2 + (2m - \Delta - \delta)_{n-2}^{2}$ 。此外，当且仅当 $d_2 = \ldots = d_{n-1}$时，等号成立。

定理 2.7. *[3]* 设 G 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的连通图。设 δ 是 G的最小度。那么， $Z_1(G)$ $\leq 2mn - n(n-1)\delta + 2m(\delta-1)$。此外，当且仅当 G 是星图或正则图时，等号成立。

接下来的结果涉及 $A(G)$ 的最大、第二大和最小特征值的性质与界。

Th定理 2.8. *[21]* 图 G是二部图，当且仅当其谱关于原点对称 .

命题 2.9. *[21]* 设 G 是一个 r-正则图。那么

(i) r 是 $A(G)$的一个特征值;

(ii) G是连通图，当且仅当 r 的代数重数为1;

(*iii*) 任意 λ 特征值 A（G）均满足 $|\lambda| \leq r$。

命题 2.10。 *[22]* 设 G 为一个有 m 条边的图，则

$$\lambda_1(A(G)) \geq \frac{1}{m} \sum_{i\sim j} \sqrt{d_i d_j}.$$

当且仅当 G是正则图或半正则二部图时，等号成立。

定理 2.11. *[23]* 设 G 是一个具有 m 条边和 n 个顶点的连通图。那么，

$$\lambda_1(A(G)) \leq \sqrt{2m-n+1},$$

当且仅当 $G \cong K_n$ 或$G \cong K_{1,n-1}$时等号成立。

定理 2.12. *[24]* 设 G 是一个有 n 个顶点和 m 条边的图。令 $\lambda_1(A(G))$ 为邻接矩阵 $A(G)$的最大特征值。则

$$\lambda_1(A(G)) \leq \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{j \\ v_i \sim v_j}} d_j}$$

The推论 2.13. *[25]* 设 G 是一个 r-正则图，阶为 n，独立数为 $\gamma(G)$，则

$$\lambda_2(A(G)) \geq -1 + \frac{2(n-1-r)^{\gamma(G)}}{\gamma(G)n^{\gamma(G)-1}}$$

定理 2.14. *[26]* 设 G 是一个有 n 个顶点的 r-正则二分连通图。则 $\lambda_2(A(G)) \leq \frac{n}{2} - r$ − .

推论 2.15. *[26]* 设 G 是一个有 n 个顶点的 r-正则二分图。则 $\lambda_1(A(G)) + \lambda_2(A(G)) \leq \frac{n}{2}$。此外，_ 当且仅当其二部补图是不相交的， $\lambda_1(\underline{A}(G)) + \lambda_2(A(G)) = \frac{n}{2}$。

定理 2.16. *[27]* 设 G 是一个最小度为 $\delta \neq 0$且独立数为 $\gamma(G)$的图，则

$$\lambda_n(A(G)) \leq \frac{\gamma(G)\delta^2}{\lambda_1(A(G))(\gamma(G)-n)}$$

定理 2.17. *[21, 28]* 若 G 是一个 r-正则图，且独立数为 $\gamma(G)$，则

$$\lambda_n(A(G)) \leq \frac{\gamma(G)r}{\gamma(G)-n}$$

引理 2.18. *[29]* 设 G 是一个具有 n 个顶点的无三角形图，则，

$$\lambda_n(A(G)) \leq \frac{\lambda_1^2(A(G))}{\lambda_1(A(G))-n}.$$

~**定理 2.19.** *[26]* 设 G 是一个具有 $2n$ 个顶点的 r-正则连通二分图，且 G 是其二部补图，则，

$$\frac{P_{A(G)}(\lambda)}{\lambda^2-r^2} = \frac{P_{A(\widetilde{G})}(\lambda)}{\lambda^2-(n-r)^2}.$$

定理 2.20. *[30]* 若 G 是一个阶为 n的正则图，则 $\lambda_1(A(G)) + \lambda_2(A(G)) \leq n-2$。此外， $\lambda_1(A(G)) + \lambda_2(A(G)) = n-2$ 当且仅当 G 的补图含有一个作为二分图的连通分支时成立。

命题 2.21. *[21]* 设 $\sigma(L(G)) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ 是 $L(G)$-谱，使得 $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$。若 G 是一个具有 n 个顶点的图，则 $\mu_1 \leq n$，且当且仅当 G 非连通时等号成立。

下面的结果涉及 A_α-矩阵。

命题 2.22。 *[1]* 如果 $\alpha \in [0,1]$ 且 G 是一个阶为 n 的图，那么

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) = \max_{|x|=1} \langle A_\alpha(G)x, x\rangle \text{ and } \lambda_n(A_\alpha(G)) = \min_{|x|=1} \langle A_\alpha(G)x, x\rangle. \tag{4}$$

此外，如果 x 是一个单位向量，那么 $\lambda_1(A_\alpha(G)) = \langle A_\alpha(G)x, x\rangle$ 当且仅当 x 是 $\lambda_1(A_\alpha(G))$的特征向量，并且 $\lambda_n(A_\alpha(G)) = \langle A_\alpha(G)x, x\rangle$ 当且仅当 x 是 $\lambda_n(A_\alpha(G))$ 的特征向量。

引理 2.23。 *[1]* 如果 $\alpha \in [0,1]$ 且 $k = 1, \ldots, n$ 且 G 是一个阶为 n 的 r-正则图，那么 $A_\alpha(G)$ 与 $A(G)$的特征值之间存在如下线性对应关系

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) = \alpha r + (1-\alpha)\lambda_k(A(G)). \tag{5}$$

特别地，如果 G 是 r-正则的，那么 $\lambda_1(A_\alpha(G)) = r$, $\forall \alpha \in [0,1]$。

命题 命题 2.24。 *[1]* 设 $\alpha \in [0,1)$， G 为一个图，且 x 为 $\lambda_1(A_\alpha(G)$ 的非负特征向量).

(i) 若 G 是连通的，则 x 为正，且除相差一个标量因子外唯一；

(ii) 若 G 非连通，且 P 是 x 中取正值的顶点集合，则由 P 诱导的子图是图 G 的 H 个连通分量的并，其中 $\lambda_1(A_\alpha(H)) = \lambda_1(A_\alpha(G))$；

(iii) 若 G 连　通，且 μ 是 $A_\alpha(G)$ 的特征值，并具有一个非负特征向量，则 $\mu = \lambda_1(A_\alpha(G))$；

(iv) 若 G 连通，且 H 是 G 的特征图子图，则 $\lambda_1(A_\alpha(H)) < \lambda_1(A_\alpha(G))$。

命题 2.25。 *[1]* $A_\alpha(K_n)$ 的特征值为 $\lambda_1(A_\alpha(K_n)) = n-1$ 和 $\lambda_k(A_\alpha(K_n)) = \alpha n - 1$，其中 $2 \leq k \leq n$。

命题 2.26。 *[1]* 设 $a \geq b \geq 1$。若 $\alpha \in [0,1]$，则 $A_\alpha(K_{a,b})$ 的特征值为

$$\lambda_1(A_\alpha(K_{a,b})) = \frac{1}{2}\left(\alpha(a+b) + \sqrt{\alpha^2(a+b)^2 + 4ab(1-2\alpha)}\right),$$
$$\lambda_{\min}(A_\alpha(K_{a,b})) = \frac{1}{2}\left(\alpha(a+b) - \sqrt{\alpha^2(a+b)^2 + 4ab(1-2\alpha)}\right),$$
$$\lambda_k(A_\alpha(K_{a,b})) = \alpha a \, for \, 1 < k \leq b,$$
$$\lambda_k(A_\alpha(K_{a,b})) = \alpha b \, for \, b < k < a+b.$$

3 主要结果

本节介绍本文的主要结果，这些结果涉及 A_α-矩阵的最大、次大和最小特征值的界。

3.1 λ_1（$\mathbf{A}_\alpha$（图 G））的界

定理 3.1. 设 $\alpha \in [0,1]$ 和 G 是一个有 $m \neq 0$ 条边、 $n \geq 3$ 个顶点的图， Δ 和 δ 分别为其最大度和最小度。那么，

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \left(\Delta^2 + \delta^2 + \frac{(2m - \Delta - \delta)^2}{n-2}\right)\frac{\alpha}{2m} + \frac{1-\alpha}{m}\sum_{i\sim j}\sqrt{d_i d_j}. \tag{6}$$

$l-1$等号成立当且仅当 G 是正则图，或者 $G \cong \bigcup_{k=1} G_k \cup K_1$ 满足 G_k 是 r-正则的。

证明。由命题 2.22 可知，存在一个与 $\lambda_1(A_\alpha(G))$相关联的特征向量 $x \in \mathbb{R}^n$ ，满足$\lambda_1(A_\alpha(G)) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{x^T A_\alpha(G) x}{x^T x}$。因此，对所有 $y \neq kx$、 $k \in \mathbb{R}$，有

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \frac{y^T A_\alpha(G) y}{y^T y} = \frac{y^T(\alpha D(G) + (1-\alpha)A(G))y}{y^T y} = \frac{\alpha y^T D(G) y + (1-\alpha) y^T A(G) y}{y^T y}.$$

取 $y = (\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, ..., \sqrt{d_n})$，可得

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \frac{\alpha\sum_{i=1}^n d_i^2 + (1-\alpha)y^T A(G))y}{2m} = \frac{\alpha\sum_{i=1}^n d_i^2}{2m} + \frac{(1-\alpha)\sum_{v_i\sim v_j} 2\sqrt{d_i d_j}}{2m} = \frac{\alpha\sum_{i=1}^n d_i^2}{2m} + \frac{(1-\alpha)}{m}\sum_{v_i\sim v_j}\sqrt{d_i d_j}$$

由定理 2.6 可得

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \frac{\alpha}{2m}\left[\Delta^2 + \delta^2 + \frac{(2m-\Delta-\delta)^2}{n-2}\right] + \frac{(1-\alpha)}{m}\sum_{v_i\sim v_j}\sqrt{d_i d_j} \tag{7}$$

最初假设 G 是 r正则图。因此， $\Delta = \delta = r$ 和 $m = \frac{nr}{2}$。于是，

$$\frac{\alpha}{2m}\left[\Delta^2 + \delta^2 + \frac{(2m-\Delta-\delta)^2}{n-2}\right] + \frac{(1-\alpha)}{m}\sum_{v_i\sim v_j}\sqrt{d_i d_j} = \frac{\alpha}{nr}\left[r^2 + r^2 + \frac{(nr-r-r)^2}{n-2}\right] + \frac{(1-\alpha)}{m}mr =$$
$$\frac{\alpha}{nr}\left[2r^2 + \frac{r^2(n-2)^2}{n-2}\right] + (1-\alpha)r = \frac{\alpha}{nr}r^2\left[2+n-2\right] + (1-\alpha)r = \alpha r + (1-\alpha)r = r$$

$l-1$ $l-1$现在，假设 $G \cong \bigcup G_k \cup K_1$ 使得 G_k 是 r正则。我们有 $\sum_{k=1} |V(G_k)| + 1 = n$， $\Delta = r$、 $\delta = 0$ 和 $k=1$ $k=1$$m = (n-1)\frac{r}{2}$。因此，

$$\frac{\alpha}{2m}\left[\Delta^2 + \delta^2 + \frac{(2m-\Delta-\delta)^2}{n-2}\right] + \frac{(1-\alpha)}{m}\sum_{v_i \sim v_j}\sqrt{d_i d_j} = \frac{\alpha}{(n-1)r}\left[r^2 + \frac{((n-1)r-r)^2}{n-2}\right] + \frac{(1-\alpha)}{m}mr =$$

$$\frac{\alpha}{(n-1)r}\left[r^2 + \frac{r^2(n-2)^2}{n-2}\right] + (1-\alpha)r = \frac{\alpha}{(n-1)r}r^2\left[n-1\right] + (1-\alpha)r = \alpha r + (1-\alpha)r = r.$$

此外，由引理 2.23 可得 $\lambda_1(A_\alpha(G)) = r$。

现在，假设存在一个图 G，满足等号

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) = \left(\Delta^2 + \delta^2 + \frac{(2m-\Delta-\delta)^2}{n-2}\right)\frac{\alpha}{2m} + \frac{1-\alpha}{m}\sum_{v_i \sim v_j}\sqrt{d_i d_j}.$$

这意味着 $x = (\sqrt{d_1}、\ldots、\sqrt{d_n})$ 是图 $A_\alpha(G)$ 的特征向量，对应于 $\lambda_1(A_\alpha(G))$，即 $A_\alpha(G)x = \lambda_1(A_\alpha(G))x$。

如果 G 连通，则有

$$\alpha d_i + (1-\alpha)\frac{\sum_{v_j \sim v_i}\sqrt{d_i d_j}}{d_i} = \lambda_1(A_\alpha(G)),$$

对所有 $i = 1, \ldots n$ 均成立。因此，对于任意满足 $i \neq s$ 的 i 和 s，有

$$\alpha d_i + (1-\alpha)\frac{\sum_{v_j \sim v_i}\sqrt{d_i d_j}}{d_i} = \alpha d_s + (1-\alpha)\frac{\sum_{v_j \sim v_s}\sqrt{d_s d_j}}{d_s}$$

这意味着 $d_i = d_s$，进而 G 是正则的。

l现在，假设 G 是非连通的。那么 $G \cong \bigcup G_k$，因此，对每个满足 $|E(G_k)| \neq 0$的连通分支，$k=1$

我们也有

$$\alpha d_i + (1-\alpha)\frac{\sum_{v_j \sim v_i}\sqrt{d_i d_j}}{d_i} = \lambda_1(A_\alpha(G_k)),$$

对所有 $i = 1$、.....、$|V(G_k)|$均成立。因此，对于任意满足 $i \neq s$ 的 i 和 s，我们有

$$\alpha d_i + (1-\alpha)\frac{\sum_{v_j \sim v_i}\sqrt{d_i d_j}}{d_i} = \alpha d_s + (1-\alpha)\frac{\sum_{v_j \sim v_s}\sqrt{d_s d_j}}{d_s}$$

这意味着 $d_i = d_s$，进而 G_k， $\forall k$，是正则的。根据定理 2.6 $Z_1(G) = \Delta^2 + \delta^2 + \frac{(2m-\Delta-\delta)^2}{n-2}$必定

l $l-1$当且仅当 $d_2 = \ldots = d_{n-1}$时成立。于是，$G \cong \bigcup G_k$或$G \cong \bigcup G_k \cup K_1$，其中 G_k是 r-正则的。$k=1$ $k=1$ □

定理 3.2 给出了 $\lambda_1(A_\alpha(G))$的另一个下界。该下界的推导方式与 Kumar [31] 给出的$\lambda_1(A(G))$下界类似。记 $(\mathbf{A}_\alpha)_i$、$\mathbf{A}_i$ 和$\mathbf{D}_i$ 分别表示矩阵$A_\alpha(G)$、 $A(G)$和 $D(G)$的 i^{th} 列向量。此外，定义 $c_{ij} = |N_{v_i} \cap N_{v_j}|$。

定理 3.2。 设 G 是一个有 $n \geq 2$ 个顶点且 $\alpha \in [0,1]$的图。那么

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \max\left\{\max_{j<i}\sqrt{\frac{\alpha^2(d_i^2+d_j^2)+(1-\alpha)^2(d_i+d_j)+\sqrt{C}}{2}}, \max_{j<i}\sqrt{\frac{\alpha^2(d_i^2+d_j^2)+(1-\alpha)^2(d_i+d_j)+\sqrt{F}}{2}}\right\}, \tag{8}$$

其中 $C = \alpha^4(d_i^4 + d_j^4) + 2\alpha^2(1-\alpha)^2(d_i^3 + d_j^3) + 8\alpha c_{ij}d_i(1-\alpha)^3 - 2d_j^2 d_i\alpha^2(\alpha^2 d_i + (1-\alpha)^2) - 2d_j\alpha(1-\alpha)^2(\alpha d_i^2 + 2c_{ij}(\alpha-1)) + (4c_{ij}^2 + d_i^2 + d_j^2)(1-\alpha)^4 + 2d_i d_j(7\alpha^2 + 2\alpha - 1)(1-\alpha)^2$ 且 $F = (d_i^2 - d_j^2)^2 + 2\alpha^2(1-\alpha)^2(d_i^3 + d_i^2 d_j - d_i d_j^2 + d_j^3) + (1-\alpha)^4(4c_{ij} + (d_i + d_j)^2)$

证明。 我们知道，对于任意对称矩阵 M， $\lambda_1(M)$ 大于或等于 M 的任意主子矩阵的最大特征值。我们还知道， $A_\alpha^2(G)$ 的任意二阶主子矩阵都具有如下形式 $B = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_\alpha^T)_i(\mathbf{A}_\alpha)_i & (\mathbf{A}_\alpha^T)_i(\mathbf{A}_\alpha)_j \\ (\mathbf{A}_\alpha^T)_j(\mathbf{A}_\alpha)_i & (\mathbf{A}_\alpha^T)_j(\mathbf{A}_\alpha)_j \end{bmatrix}$. $(\mathbf{A}_\alpha^T)_j(\mathbf{A}_\alpha)_i(\mathbf{A}_\alpha^T)_i(\mathbf{A}_\alpha)_j$ 然后，

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_\alpha^T)_i(\mathbf{A}_\alpha)_i & (\mathbf{A}_\alpha^T)_i(\mathbf{A}_\alpha)_j \\ (\mathbf{A}_\alpha^T)_j(\mathbf{A}_\alpha)_i & (\mathbf{A}_\alpha^T)_j(\mathbf{A}_\alpha)_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha\mathbf{D}_i^T + (1-\alpha)\mathbf{A}_i^T)(\alpha\mathbf{D}_i + (1-\alpha)\mathbf{A}_i) & (\alpha\mathbf{D}_i^T + (1-\alpha)\mathbf{A}_i^T)(\alpha\mathbf{D}_j + (1-\alpha)\mathbf{A}_j) \\ (\alpha\mathbf{D}_j^T + (1-\alpha)\mathbf{A}_j^T)(\alpha\mathbf{D}_i + (1-\alpha)\mathbf{A}_i) & (\alpha\mathbf{D}_j^T + (1-\alpha)\mathbf{A}_j^T)(\alpha\mathbf{D}_j + (1-\alpha)\mathbf{A}_j) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^2\mathbf{D}_i^T\mathbf{D}_i + \alpha(1-\alpha)(\mathbf{D}_i^T\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T\mathbf{D}_i) + (1-\alpha)^2\mathbf{A}_i^T\mathbf{A}_i & \alpha^2\mathbf{D}_i^T\mathbf{D}_j + \alpha(1-\alpha)(\mathbf{D}_i^T\mathbf{A}_j + \mathbf{A}_i^T\mathbf{D}_j) + (1-\alpha)^2\mathbf{A}_i^T\mathbf{A}_j \\ \alpha^2\mathbf{D}_j^T\mathbf{D}_i + \alpha(1-\alpha)(\mathbf{D}_j^T\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j^T\mathbf{D}_i) + (1-\alpha)^2\mathbf{A}_j^T\mathbf{A}_i & \alpha^2\mathbf{D}_j^T\mathbf{D}_j + \alpha(1-\alpha)(\mathbf{D}_j^T\mathbf{A}_j + \mathbf{A}_j^T\mathbf{D}_j) + (1-\alpha)^2\mathbf{A}_j^T\mathbf{A}_j \end{bmatrix} \tag{9}$$

我们需要考虑两种情况。第一种是如果 $v_i \sim v_j$，由 (9) 可得

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_\alpha^T)_i(\mathbf{A}_\alpha)_i & (\mathbf{A}_\alpha^T)_i(\mathbf{A}_\alpha)_j \\ (\mathbf{A}_\alpha^T)_j(\mathbf{A}_\alpha)_i & (\mathbf{A}_\alpha^T)_j(\mathbf{A}_\alpha)_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 d_i^2 + (1-\alpha)^2 d_i & \alpha(1-\alpha)(d_i + d_j) + (1-\alpha)^2 c_{ij} \\ \alpha(1-\alpha)(d_i + d_j) + (1-\alpha)^2 c_{ij} & \alpha^2 d_j^2 + (1-\alpha)^2 d_j \end{bmatrix}.$$

由于 $\lambda_1(A_\alpha^2(G)) \geq \lambda_1(B)$，我们得到

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha^2(d_i^2 + d_j^2) + (1-\alpha)^2(d_i + d_j) + \sqrt{C}}$$

其中 $C = \alpha^4(d_i^2 - d_j^2)^2 + 2\alpha^2(1-\alpha)^2(d_i^3 + d_j^3) - 8\alpha c_{ij}(\alpha-1)^3(d_i + d_j) + (\alpha-1)^2(5\alpha^2 - 2\alpha + 1)(d_i^2 + d_j^2) - 2\alpha^2(1-\alpha)^2 d_i d_j(d_i + d_j) + 4c_{ij}^2(\alpha-1)^4 + 2d_i d_j(1-\alpha)^2(1+\alpha)(3\alpha - 1)$

第二种是如果 $v_i \nsim v_j$。在这种情况下，由 (9) 可得

$$B = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_\alpha^T)_i(\mathbf{A}_\alpha)_i & (\mathbf{A}_\alpha^T)_i(\mathbf{A}_\alpha)_j \\ (\mathbf{A}_\alpha^T)_j(\mathbf{A}_\alpha)_i & (\mathbf{A}_\alpha^T)_j(\mathbf{A}_\alpha)_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 d_i^2 + (1-\alpha)^2 d_i & (1-\alpha)^2 c_{ij} \\ (1-\alpha)^2 c_{ij} & \alpha^2 d_j^2 + (1-\alpha)^2 d_j \end{bmatrix}.$$

于是，

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha^2(d_i^2 + d_j^2) + (1-\alpha)^2(d_i + d_j) + \sqrt{F}}$$

其中 $F = (d_i^2 - d_j^2)^2 + 2\alpha^2(1-\alpha)^2(d_i^3 + d_i^2 d_j - d_i d_j^2 + d_j^3) + (1-\alpha)^4(4c_{ij} + (d_i + d_j)^2)$，结论随即得证。 □

例1。 设 G 为图2中的一个图。表1表明，(6) 和(8) 中给出的下界不可比较。

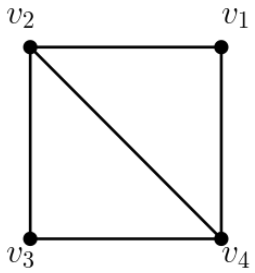

图2：图 G G。

	$\alpha = 0.0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$
$\lambda_1(A_\alpha(G))$	2.56155	2.56815	2.57631	2.58661	2.6	2.61803	2.6434	2.68102	2.74031	2.83852
(6)	2.55959	2.55863	2.55767	2.55671	2.55576	2.5548	2.55384	2.55288	2.55192	2.55096
(8)	2.23607	2.16333	2.12603	2.12603	2.16333	2.23607	2.34094	2.47386	2.63059	2.80713

表1：不同 α 取值下 $\lambda_1(A_\alpha(G))$的下界表。

定理 3.3。若 G 是一个有 n 个顶点、 m 条边、最大度为 Δ、最小度为 δ 和$\alpha \in [0,1]$的连通图，则

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \leq \sqrt{\alpha^2(2mn - n(n-1)\delta + 2m(\delta-1)) + 2m(1-\alpha)^2 + \delta(\alpha^2\delta + (1-\alpha)^2)(\Delta - n + 1)}. \quad (10)$$

证明。记 $(A_\alpha)_i$ 为矩阵 $A_\alpha(G)$ 的第 i 行。由命题 2.24，设 $X = (x_1, \ldots, x_n)$ 为与 $\lambda_1(A_\alpha(G))$ 对应的单位正特征向量。记 X^i 为由 X 得到的向量：若 v_j 与 v_i 不相邻，则将 x_j 替换为 0。由于 $A_\alpha(G)X = \lambda_1(A_\alpha(G))X$，我们有 $\lambda_1(A_\alpha(G))x_i = (A_\alpha)_i X = (A_\alpha)_i X^i$.

由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\lambda_1^2(A_\alpha(G))x_i^2 = |(A_\alpha)_i X^i|^2 \leq |(A_\alpha)_i|^2 |X^i|^2 = \left(d_i^2\alpha^2 + (1-\alpha)^2 d_i\right)\left(1 - \sum_{v_i \nsim v_j} x_j^2\right). \quad (11)$$

对所有 i, 应用不等式 (11)，可得

$$\lambda_1^2(A_\alpha(G)) \leq \alpha^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 + (1-\alpha)^2 \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n \left(d_i^2\alpha^2 + (1-\alpha)^2 d_i\right)\left(\sum_{v_i \nsim v_j} x_j^2\right). \quad (12)$$

由于

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left(d_i^2\alpha^2 + (1-\alpha)^2 d_i\right)\left(\sum_{v_i \nsim v_j} x_j^2\right) &= \alpha^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 \left(\sum_{v_i \nsim v_j} x_j^2\right) + (1-\alpha)^2 \sum_{i=1}^n d_i \left(\sum_{v_i \nsim v_j} x_j^2\right) \\
&\geq \alpha^2\delta^2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v_i \nsim v_j} x_j^2\right) + (1-\alpha)^2\delta \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v_i \nsim v_j} x_j^2\right) \\
&= \alpha^2\delta^2 \sum_{i=1}^n (n - d_i - 1)x_i^2 + (1-\alpha)^2\delta \sum_{i=1}^n (n - d_i - 1)x_i^2 \\
&= \alpha^2\delta^2(n-1) + (1-\alpha)^2\delta(n-1) - \alpha^2\delta^2 \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 - (1-\alpha)^2\delta \sum_{i=1}^n d_i x_i^2
\end{aligned} \quad (13)$$

因此，将 (13) 代入 (12)，可得

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2(A_\alpha(G)) &\leq \alpha^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 + (1-\alpha)^2 \sum_{i=1}^n d_i - \delta(n-1)(\alpha^2\delta + (1-\alpha)^2) + \alpha^2\delta^2 \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 + (1-\alpha)^2\delta \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 \\
&\leq \alpha^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 + 2m(1-\alpha)^2 + \delta(\alpha^2\delta + (1-\alpha)^2)(\Delta - n + 1)
\end{aligned}$$

由定理 2.7 可得

$$\lambda_1^2(A_\alpha(G)) \leq \alpha^2(2mn - n(n-1)\delta + 2m(\delta-1)) + 2m(1-\alpha)^2 + \delta(\alpha^2\delta + (1-\alpha)^2)(\Delta - n + 1).$$

Then

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \leq \sqrt{\alpha^2(2mn - n(n-1)\delta + 2m(\delta-1)) + 2m(1-\alpha)^2 + \delta(\alpha^2\delta + (1-\alpha)^2)(\Delta - n + 1)} \quad (14)$$

结论由此得出。 □

定理 3.4。设 Gb e 是一个有 n 个顶点、 m 条边、最大度为 Δ、最小度为 δ 且 $\alpha \in [0,1]$的图。则

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \leq \frac{1}{2}\left(\delta - 1 + \sqrt{(\delta-1)^2 + 4(\alpha\Delta - \alpha(\delta-1)\delta + (1-\alpha)(2m - \delta(n-1))}\right). \quad (15)$$

当且仅当 G 是正则的，等号成立。

证明。设 M 是与图 G 关联的任意矩阵，且 $S_v(M)$ 是 M 中与顶点 v 对应的行之和。显然，

$$S_v(A_\alpha^2(G)-(\delta-1)A_\alpha(G))=S_v(A_\alpha^2(G))-(\delta-1)S_v(A_\alpha(G)).$$

由 [1], 可得

$$S_v(A_\alpha^2(G))=\alpha S_v(D^2(G))+(1-\alpha)S_v(A^2(G))$$

因此

$$\begin{aligned}S_v(A_\alpha^2(G)-(\delta-1)A_\alpha(G)) &= \alpha S_v(D^2(G))+(1-\alpha)S_v(A^2(G))-\alpha(\delta-1)S_v(D(G))-(1-\alpha)(1-\delta)S_v(A(G))\\ &= \alpha S_v(D^2(G))-\alpha(\delta-1)S_v(D(G))+(1-\alpha)S_v(A^2(G)-(1-\delta)A(G)).\end{aligned}$$

由引理可得 2 5 h

$$S_v(A_\alpha^2(G)-(\delta-1)A_\alpha(G))\le \alpha S_v(D^2(G))-\alpha(\delta-1)S_v(D(G))+(1-\alpha)(2m-\delta(n-1)) \tag{16}$$

不等式 (16) 对每个顶点 $v\in V(G)$ 以及 $\alpha\in[0,1]$ 均成立。由引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}\lambda_1^2(A_\alpha(G))-(\delta-1)\lambda_1(A_\alpha(G)) &\le \alpha d^2(v)-\alpha(\delta-1)d(v)+(1-\alpha)(2m-\delta(n-1))\\ &\le \alpha\Delta^2-\alpha(\delta-1)\delta+(1-\alpha)(2m-\delta(n-1))\end{aligned} \tag{17}$$

然后，解这个二次不等式可得

$$\lambda_1(A_\alpha(G))\le\frac{1}{2}\left(\delta-1+\sqrt{(\delta-1)^2+4(\alpha\Delta-\alpha(\delta-1)\delta+(1-\alpha)(2m-\delta(n-1))}\right).$$

现在，假设 G 是一个 r-正则图。因此 $\delta=\Delta=r$ 且 $m=\dfrac{nr}{2}$。于是，

$$\frac{1}{2}\left(\delta-1+\sqrt{(\delta-1)^2+4(\alpha\Delta-\alpha(\delta-1)\delta+(1-\alpha)(2m-\delta(n-1))}\right)=r=\lambda_1(A_\alpha(G)).$$

现在，假设等 号成立。那么，上述论证中的所有不等式都必须取等号。根据引理 2 .5

$$\sum_{u\sim v,u\ne v}d(u)=(n-d(v)-1)\delta,$$

对所有 $v\in V(G)$。因此，对于所有 $u\in V(G)$ 和 $u\sim v$，要么 $d(v)=n-1$，要么 $d(u)=\delta$，这意味着图 G 是正则图，或图 G 是双度图，其中每个顶点的度为 δ 或 $n-1$。由于第二种情况不可能成立（由不等式 (17) 可知），故得证。

□

例 2. 如图 *3* 所示，令 $G\cong K_{1,6}$。表 *2* 对上界 *(10)* 和 *(15)* 进行了比较，结果表明二者不可比较。

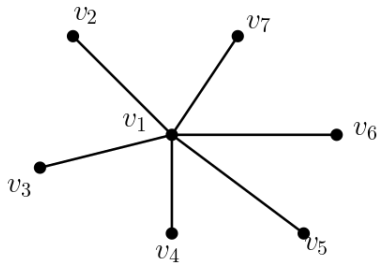

图 3：图 G。

	$\alpha=0.0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$
$\lambda_1(A_\alpha(G))$	2.44949	2.56867	2.72237	2.9215	3.17764	3.5	3.89165	4.34803	4.85913	5.41329
(10)	3.4641	3.18434	3.05941	3.10805	3.32265	3.67423	4.12795	4.65403	5.23068	5.84294
(15)	2.44949	3.0	3.4641	3.87298	4.24264	4.58258	4.89898	5.19615	5.47723	5.74456

表 2：$\lambda_1(A_\alpha(G))$ 在不同 α 值下的上界表。

备注 3.5。由定理 *3.4* 可知，式 *(15)* 中等号成立当且仅当 G 是正则的。取这个极值图并将其信息代入式 *(10)*，可得

$$\alpha^2(2mn-n(n-1)\delta+2m(\delta-1))+2m(1-\alpha)^2+\delta(\alpha^2\delta+(1-\alpha)^2)(\Delta-n+1)=\alpha^2(r^3+2r^2+r)+(1-2\alpha)(r^2+r)\ge r^2.$$

那么，对于正则图，式 *(10)* 中得到的界大于式 *(15)* 中得到的界。

3.2 λ_2(**A**α(**图 G**))**的界**

命题 3.6。L 设 G 是一个具有 n 个顶点、独立数为 $\gamma(G)$ 且 $\alpha \in [0,1]$ 的 r-正则图。该 n,

$$\lambda_2(A_\alpha(G)) \geq \alpha r + (1-\alpha)\left(-1 + \frac{2(n-1-r)^{\gamma(G)}}{\gamma(G)n^{\gamma(G)-1}}\right). \tag{18}$$

当 $G \cong K_n$时，等号成立。

证明。 由定理 2.2 可知

$$\lambda_2(A_\alpha(G)) = \lambda_2(\alpha D(G) + (1-\alpha)A(G)) \geq \alpha\lambda_n(D(G)) + (1-\alpha)\lambda_2(A(G)) = \alpha r + (1-\alpha)\lambda_2(A(G))$$

由定理 2.13 可得结论。

现在，假设 $G \cong K_n$。那么 $\gamma(G) = 1$, $r = n-1$ 因此

$$\alpha r + (1-\alpha)\left(-1 + \frac{2(n-1-r)^{\gamma(G)}}{\gamma(G)n^{\gamma(G)-1}}\right) = \alpha n - 1$$

根据命题 2.25，等号成立。 □

~**命题 3.7**。 设 G 是一个有 n 个顶点的连通二分图， G 是 G 的二部补图， $K_{p,\ q}(p \leq q)$是一个划分与 G 相同的完全二分图，并且 $\alpha \in [0,1]$。那么，

$$p\alpha + \lambda_{j+1}(A_\alpha(\widetilde{G})) \leq \lambda_j(A_\alpha(G)) \leq p\alpha + \lambda_{j-1}(A_\alpha(\widetilde{G}))$$

当 $2 \leq j \leq n-1$ 时。

~证明。 容易看出 $A_\alpha(G) + A_\alpha(G) = A_\alpha(K_{p,\ q})$。由定理 2.2 可得

$$\lambda_j(A_\alpha(G)) + \lambda_{i-j+n}(A_\alpha(\widetilde{G})) \leq \lambda_i(A_\alpha(K_{p,q})),\ 1 \leq i \leq j \leq n \tag{19}$$

and

$$\lambda_i(A_\alpha(K_{p,q})) \leq \lambda_j(A_\alpha(G)) + \lambda_{i-j+1}(A_\alpha(\widetilde{G})),\ 1 \leq j \leq i \leq n. \tag{20}$$

由不等式 (19) 和 (20) 可得

$$\lambda_j(A_\alpha(G)) \leq \lambda_i(A_\alpha(K_{p,q})) - \lambda_{i-j+n}(A_\alpha(\widetilde{G})) \tag{21}$$

and

$$\lambda_i(A_\alpha(K_{p,q})) - \lambda_{i-j+1}(A_\alpha(\widetilde{G})) \leq \lambda_j(A_\alpha(G)) \tag{22}$$

由命题 2.26 可得 $\lambda_2(A_\alpha(K_{p,\ q})) = \alpha p$, 并将 $i = 2$ 代入不等式 (21) 和 (22)，得到

$$\lambda_j(A_\alpha(G)) \leq p\alpha - \lambda_{2-j+n}(A_\alpha(\widetilde{G})).$$

and

$$p\alpha - \lambda_{3-j}(A_\alpha(\widetilde{G})) \leq \lambda_j(A_\alpha(G))$$

~ ~ ~ ~此外，由定理 2.8 可知 $\lambda_{2-j+n}(A_\alpha(G)) = -\lambda_{j-1}(A_\alpha(G))$ 且 $\lambda_{3-j}(A_\alpha(G)) = -\lambda_{j+1}(A_\alpha(G))$。于是

$$p\alpha + \lambda_{j+1}(A_\alpha(\widetilde{G})) \leq \lambda_j(A_\alpha(G)) \leq p\alpha + \lambda_{j-1}(A_\alpha(\widetilde{G})),\ 2 \leq j \leq n-1.$$

□

~**推论 3.8.** 设 G 是一个连通的二部 r-正则图，且有 n 个顶点。若 G 是G 的二部补图，且 $\alpha \in [0,1]$ ，则

$$\lambda_2(A_\alpha(G)) \leq \frac{n}{2}(\alpha+1) - r. \tag{23}$$

证明. 设 G 是一个连通的二部 r-正则图，满足 $V = V_1 \cup V_2$，其中 $|V_1| = p$ 和 $|V_2| = q$ （$p \le q$）。由命题 3.7 可知

$$\lambda_j(A_\alpha(G)) \le p\alpha + \lambda_{j-1}(A_\alpha(\widetilde{G})),\ 2 \le j \le n-1.$$

取 $j = 2$，我们有

$$\lambda_2(A_\alpha(G)) \le p\alpha + \lambda_1(A_\alpha(\widetilde{G}))$$

由于 G 是 r-正则二部图，因此可得 $p = \frac{n}{2}$。此外，我们知道图 $\widetilde{G}$ 也是二部且为 $\left(\frac{n}{2} - r\right)$-正则，这意味着 $\lambda_1(A_\alpha(\widetilde{G})) = \frac{n}{2} - r$，从而得到所需结果。 □

推论 3.8 得到的上界可以进一步改进，如命题 3 所示。 9.

命题 3.9. 设 G 是一个具有 n 个顶点的 r-正则连通二部图。那么

$$\lambda_2(A_\alpha(G)) \le \alpha\left(2r - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} - r. \tag{24}$$

证明. 由于 G 是 r-正则二部图，由定理 2.8 和命题 2.9 可得，$\lambda_1(A(G)) = r$ 和 $\lambda_n(A(G)) = -r$ 是 $A(G)$的特征值。此外，由于 $\widetilde{G}$ 是 $\left(\frac{n}{2} - r\right)$-正则二部图，因此 $\lambda_1(A(\widetilde{G})) = \frac{n}{2} - r$ 和 $\lambda_n(A(\widetilde{G})) = -\frac{n}{2} + r$ 是 $A(\widetilde{G})$ 的特征值。由定理 2.19 和引理 2.23，我们有 $\lambda_k(A(G)) = \lambda_k(A(G))$，当 $2 \le k \le n-1$时，

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) = \alpha r + (1-\alpha)\lambda_k(A(G)),\ \text{for } 1 \le k \le n \tag{25}$$

and

$$\lambda_k(A_\alpha(\widetilde{G})) = \alpha\left(\frac{n}{2} - r\right) + (1-\alpha)\lambda_k(A(\widetilde{G})),\ \text{for } 1 \le k \le n. \tag{26}$$

So, $\lambda_1(A_\alpha(G)) = r$, $\lambda_1(A_\alpha(\widetilde{G})) = \frac{n}{2} - r$, $\lambda_n(A_\alpha(G)) = r(2\alpha - 1)$ and $\lambda_n(A_\alpha(\widetilde{G})) = \left(\frac{n}{2} - r\right)(2\alpha - 1)$.

将公式 (26) 从 (25) 中相减，并利用 $2 \le k \le n-1$时 $\lambda_k(A_\alpha(G))$ 与 $\lambda_k(A_\alpha(G))$ 之间的关系，可得

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) = \alpha\left(2r - \frac{n}{2}\right) + \lambda_k(A_\alpha(\widetilde{G})) \tag{27}$$

取 $k = 2$并考虑 $\lambda_1(A_\alpha(G)) \ge \lambda_2(A_\alpha(G))$，我们有

$$\lambda_2(A_\alpha(G)) \le \alpha\left(2r - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} - r = \frac{n}{2}(1-\alpha) + r(2\alpha - 1) \tag{28}$$

结论由此得出。 □

注释 3.10. 值得注意的是，若 G 是正则连通二分图，且其正则度为 $\frac{n}{2}$，那么公式 *(23)* 和 *(24)* 中给出的上界相等。

命题 3.11. 设 G 是一个阶为 n 的 r-正则图。那么 $\lambda_1(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(G)) \le 2r\alpha + (1-\alpha)(n-2)$。当且仅当 G 有一个连通分支是二分图时，等号成立。

证明。 设 G是一个阶为 n 的 r-正则图。由定理 2.20 和引理 2.23 可得 e

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(G)) = 2\alpha r + (1-\alpha)(\lambda_1(A(G)) + \lambda_2(A(G))) \le 2\alpha r + (1-\alpha)(n-2) \tag{29}$$

等号成立当且仅当 G 有一个连通分支是二分图，结论得证。 □

命题 3.12。 设 G 是一个阶为 n、$\alpha \in [0,1)$的 r-正则二分图。那么 $\lambda_1(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(G)) \le 2r\alpha + (1-\alpha)\frac{n}{2}$。当且仅当 $\widetilde{G}$ 非连通时，等号成立。

证明。 设 G 是一个 r-正则二分图。由引理 2.23 可得 $\lambda_1(A_\alpha(G)) = r$。此外，由命题 3.9 可得

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(G)) \leq r + \alpha\left(2r - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} - r = \alpha\left(2r - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} = 2r\alpha + (1-\alpha)\frac{n}{2}.$$

现在，假设 $\lambda_1(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(G)) = 2r\alpha + (1-\alpha)\frac{n}{2}$。由于 G 是 r-正则的，我们有

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) = \alpha r + (1-\alpha)\lambda_1(A(G)) \text{ and } \lambda_2(A_\alpha(G)) = \alpha r + (1-\alpha)\lambda_2(A(G))$$

因此

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(G)) = 2\alpha r + (1-\alpha)(\lambda_1(A(G)) + \lambda_2(A(G))).$$

So,

$$\lambda_1(A(G)) + \lambda_2(A(G)) = \frac{n}{2}$$

$\widetilde{}$，由推论 2.15 可知， G 是非连通的。
现在，假设 $\widetilde{G}$ 是非连通的。由推论 2.15， $\lambda_1(A(G)) + \lambda_2(A(G)) = \frac{n}{2}$.。由于 G 是 r-正则的，我们有

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(G)) = 2\alpha r + (1-\alpha)(\lambda_1(A(G)) + \lambda_2(A(G))) = 2\alpha r + (1-\alpha)\frac{n}{2}.$$

结论由此得出。 □

3.3 $\lambda_n(\mathbf{A}_\alpha(\text{图 } \mathbf{G}))$ 的界

命题 3.13. 设 G 是一个有 n 个顶点、最小度为 $\delta \neq 0$、最大度为 Δ 且独立数为 $\gamma(G)$的图。那么

$$\lambda_n(A_\alpha(G)) \leq \alpha\Delta + (1-\alpha)\frac{\gamma(G)\delta^2}{\lambda_1(A(G))(\gamma(G)-n)} \tag{30}$$

特别地，如果 G 是一个 r-正则图，则有

$$\lambda_n(A_\alpha(G)) \leq \alpha r + (1-\alpha)\frac{\gamma(G)r}{\gamma(G)-n}, \tag{31}$$

$_{n2}$，其中等号成立当且仅当 $G \cong K_n$，或者当 n 为偶数时， $G \cong \bigcup K_2$,
或者$G \cong K_{\frac{n}{2}} \cup K_{\frac{n}{2}}$.$_{i=1}$

证明。 由推论 2.3 和定理 2.16 可得界（30），由推论 2.3 和定理 2.17 可得界（31）。首先假设 $G \cong K_n$。那么 $\gamma(G) = 1$，由命题 2.25 可得,
$\lambda_n(A_\alpha(G)) = \alpha n - 1$. So, $\alpha r + (1-\alpha)\frac{\gamma(G)r}{\gamma(G)-n} = \alpha n - 1$.

$_n$现在假设 n 为偶数且 $G \cong \bigcup_{i=1}^{2} K_2$。我们知道 $\gamma(G) = \frac{n}{2}, r = 1, \lambda_n(A_\alpha(G)) = 2\alpha - 1$，因此$\alpha r + (1-\alpha)\frac{\gamma(G)r}{\gamma(G)-n} = 2\alpha - 1$。最后，假设 n 为偶数且 $G \cong K_{\frac{n}{2}} \cup K_{\frac{n}{2}}$。在这种情况下， $\gamma(G) = 2$, $r = \frac{n}{2} - 1$ 且 $\lambda_n(A_\alpha(G)) = \frac{n}{2}\alpha - 1$。因此 $\alpha r + (1-\alpha)\frac{\gamma(G)r}{\gamma(G)-n} = \alpha\frac{n}{2} - 1$，结论得证。 □

命题 3.14. 设 G 是一个有 n 个顶点、独立数为 $\gamma(G)$ 的无三角形图。则

$$\lambda_n(A_\alpha(G)) \leq \alpha\Delta + (1-\alpha)\frac{\lambda_1^2(A(G))}{\lambda_1(A(G)) - n}$$

证明。 由定理 2.2 可得 $\lambda_n(A_\alpha(G)) \leq \alpha\Delta + (1-\alpha)\lambda_n(A(G))$，再应用定理 2.18 即可得出结论。

□

致谢

C. S. Oliveira 的研究得到了 CNPq Grant 304548/2020-0 的资助。

参考文献

[1] V. Nikiforov. A-与Q-谱理论的融合。《应用分析与离散数学》，11(1):81–107, 2017.[2] Sonja Nikoli´c, Goran Kova˘cevi´c, Ante Mili˘cevi´c, and Nenad Trinajsti´c. Zagreb 指数问世30年。《克罗地亚化学学报》，76:113–124, 06 2003.[3] Ch. Das. 图的度平方和的精确界。载于《克拉古耶瓦茨数学杂志》，2003.[4] Kinkar Ch. Das. 图的度平方和的最大化。《离散数学》，285(1):57–66, 2004.[5] Sebastian M. Cioab˘a. 图的度幂之和。《离散数学》，306(16):1959–1964, 2006.[6] Kinkar Das, Kexiang Xu, and Junki Nam. 图的Zagreb指数。《中国数学前沿》，10:567–582, 03 2015.[7] Shuting Liu, Kinkar Chandra Das, and Jinlong Shu. 关于图的A_α-矩阵的特征值。《离散数学》，343(8):111917, 2020.[8] Huiqiu Lin, Jie Xue, and Jinlong Shu. 关于图的A_α-谱。《线性代数及其应用》，556:210–219, 2018.[9] Huiqiu Lin, Xing Huang, and Jie Xue. 关于图的A_α-谱半径的注记。《线性代数及其应用》，557:430–437, 2018.[10] Sai Wang, Dein Wong, and Fenglei Tian. 根据顶点度给出图的最大和最小A_α 特征值的界。《线性代数及其应用》，590:210–223, 2020.[11] Shariefuddin Pirzada. 连通图A_α-谱半径的两个上界。《组合学与优化通讯》，7(1):53–57, 2022.[12] Shuting Liu, Kinkar Chandra Das, Shaowei Sun, and Jinlong Shu. 关于图的A_α-矩阵的最小特征值。《线性代数及其应用》，586:347–376, 2020.[13] Shuang Zhang and Yan Zhu. 关于A_α-矩阵的一些谱性质。《离散数学、算法与应用》，11(06):1950070, 2019.[14] Yuanyuan Chen, Dan Li, and Jixiang Meng. 关于图的第二大A_α-特征值。《线性代数及其应用》，580:343–358, 2019.[15] Abdollah Alhevaz, Maryam Baghipur, Hilal Ahmad Ganie, and Kinkar Chandra Das. 关于连通图的A_α-谱半径。《当代数学》，23(01), 2023.[16] Vladimir Nikiforov, Germain Pastén, Oscar Rojo, and Ricardo L. Soto. 关于树的A_α-谱。《线性代数及其应用》，520:286–305, 2017.[17] K. Goldberg. 满行秩非负矩阵的主子矩阵。《美国国家标准局研究杂志》，B辑：数学与数理物理，63B(1):19–20, 1959.[18] R.A. Horn and C.R. Johnson.《矩阵分析》。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，2013.[19] M.N. Ellingham and Xiaoya Zha. 曲面上图的谱半径。《组合理论杂志B辑》，78(1):45–56, 2000.[20] Yuan Hong, Jin-Long Shu, and Kunfu Fang. 图的谱半径的一个精确上界。《组合理论杂志B辑》，81(2):177–183, 2001.[21] D. Cvetkovi´c, P. Rowlinson, and S. Simi´c.《图谱理论导论》。伦敦数学会学生教材。剑桥大学出版社，2009.[22] A.J. Hoffman, P. Wolfe, and M. Hofmeister. 关于近正则矩阵的注记。《线性代数及其应用》，226-228:105–108, 1995。纪念J.J.Seidel。[23] Hong Yuan. 图的谱半径的一个界。《线性代数及其应用》，108:135–139, 1988。

[24] Pintu Bhunia, Santanu Bag, and Kallol Paul. 图的邻接矩阵特征值的界。跨学科数学杂志, 22(4):415–431, 2019.[25] Vladimir Nikiforov. 无 Kr 图的最小特征值。《离散数学》, 306(6):612–616, 2006.[26] Koledin Tamara and Stani´c Zoran. 无三角形正则图的一些谱不等式。*Filomat*, 27(8):1561–1567, 2013.[27] Willem Haemers. 设计与图论中的特征值方法, 第121卷。Mathematich Centrum, Amsterdan, 01 1980年.[28] Willem H. Haemers. 霍夫曼比值界。《线性代数及其应用》, 617:215–219, 2021.[29] Péter Csikvári. 关于无三角形图最小和最大特征值之和的注记。《线性代数及其应用》, 650:92–97, 2022.[30] Javad Ebrahimi B, Bojan Mohar, Vladimir Nikiforov, and Azhvan Sheikh Ahmady. 关于对称矩阵的两个最大特征值之和。《线性代数及其应用》, 429(11):2781–2787, 2008。专题纪念在首届IPM代数图论会议上发表的精选论文。[31] Ravinder Kumar. 图的特征值界。数学不等式杂志, 4:399–404, 01 2010年。