arXiv:2301.02746v2 [math.FA] 9 Feb 2023

莱因哈特自由谱半空间

MUNIR BEN JEMAA* 和 SCOTT MCCULLOUGH

Abstract. 通过一种涉及代数方法的新颖论证，确定了某个特定自由谱半空间的自同构群。

1. Introduction

取范数为 1 的矩阵 C_1, C_2，其大小为 $s \times s.$。对于正整数 n，令 $M_n(\mathbb{C})^2$ 表示由矩阵对 $X = (X_1, X_2)$ 构成的集合，并令 $\mathfrak{P}[n]$ 表示那些使厄米分块矩阵 4×4 正定的 $X \in M_n(\mathbb{C})^2$

$$\mathscr{L}(X) = \begin{pmatrix} I_s \otimes I_n & C_1 \otimes X_1 & C_2 \otimes X_2 & 0 \\ (C_1 \otimes X_1)^* & I_s \otimes I_n & 0 & C_2 \otimes X_2 \\ (C_2 \otimes X_2)^* & 0 & I_s \otimes I_n & C_1 \otimes X_1 \\ 0 & (C_2 \otimes X_2)^* & (C_1 \otimes X_1)^* & I_s \otimes I_n \end{pmatrix}$$

。这里，X_j^* 是 X_j 的伴随（共轭转置），而 I_n 是 $n \times n$单位矩阵。集合序列 $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}[n])_n$ 是自由谱半空间的一个例子。

给定 $X \in M_n(\mathbb{C})^2$ 和 $Y \in M_m(\mathbb{C})^2$, 以及酉矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$，则

$$X \oplus Y = \left(\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} \right)$$

and

$$U^* X U = (U^* X_1 U, U^* X_2 U).$$

注意，若 $X \in \mathfrak{P}[n]$ 和 $Y \in \mathfrak{P}[m]$，则 $X \oplus Y \in \mathfrak{P}[n+m]$ 和 $U^* X U \in \mathfrak{P}[n]$；也就是说，$\mathfrak{P}$关于直和和酉相似封闭。

令 $M(\mathbb{C})$ 表示序列 $(M_n(\mathbb{C}))$，令 $M(\mathbb{C})^2$表示序列 $(M_n(\mathbb{C})^2)$。自由解析函数 f: $\mathfrak{P} \to M(\mathbb{C})$ 是由解析函数 $f[n]$:$\mathfrak{P}[n] \to M_n(\mathbb{C})$ 构成的序列 $(f[n])$，且保持直和与酉相似关系。也就是说，给定 $X \in \mathfrak{P}[n]$和 $Y \in \mathfrak{P}[m]$ 以及酉矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$,

$$f[n+m](X \oplus Y) = f[n](X) \oplus f[m](Y)$$

2010年数学主题分类。47L25、32H02（主要）；52A05、46L07（次要）。关键词和短语: 双解析映射、双有理映射、自由谱半空间、自由分析。

* 本研究得到佛罗里达大学大学学者本科生研究计划的资助。

and

$$f[n](U^*XU) = U^*f[n](X)U.$$

通常我们将 f 写作 $f[n]$. 自由解析函数的一般定义见下文第 1.3 小节。虽然乍看之下未必如此，但自由解析函数是多复变函数中解析函数的自然（自由）非交换类比物。

自由解析映射 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$ 是一对自由解析函数$\varphi_j : \mathfrak{P} \to M(\mathbb{C})^2$，满足

$$\varphi(X) = (\varphi_1(X), \varphi_2(X)) \in \mathfrak{P}$$

对于所有 $X \in \mathfrak{P}.$，$\mathfrak{P}$ 的一个自同构 φ 是一个自由解析映射 $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$，且存在一个自由解析映射 $\psi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$，使得 $\psi(\varphi(X)) = X = \varphi(\psi(X))$ 对于$X \in \mathfrak{P}.$

给定 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{C}^2$ 满足 $|\gamma_j| = 1$，函数 $f(x) = (\gamma_1 x_1, \gamma_2 x_2)$ 是 的自同构。类似地，$f(x) = (\gamma_2 x_2, \gamma_1 x_1)$ 是一个自同构。我们称这些自同构为 平凡自同构。定理 1.1 是本文的主要结果。

定理 1.1. 若

(i) C_1 和 C_2 均可逆；且 (ii) 由 $\{C_1^*C_1, C_2^*C_2\}$和 $\{C_1C_1^*, C_2C_2^*\}$生成的 C*代数均为 $M_s(\mathbb{C})$,

那么 $\mathfrak{P}$ 的自同构都是平凡的。

我们希望强调本文的另外两项贡献。在命题 1.2 中，我们证明，本文给出的自由解析函数定义——该定义专为研究自由域上的映射而设——与文献中的其他表述一致；特别是，这类函数满足交织关系。在 [HKM11 的命题 2.5], 中，仅假设连续性（而非解析性），便证明了自由函数（按本文其他方式定义）实际上是解析的。另一方面，解析性这一假设是自然的，而且命题 1.2 的证明比 [HKM11] 中给出的证明简单得多。命题 1.2的证明借鉴了 [A+] 中的论证。刻画谱球的命题 2.3 源自 [EHKM]。这里我们给出另一种证明。

本引言余下部分将更完整地定义自由谱体和谱球、自由解析函数与映射，并介绍研究 $\mathfrak{P}$的自同构群的背景与动机。预备结果见第2节，定理1.1 的证明见第3节。

1.1. 自由多项式及其求值。固定一个正整数 g. 令 $x=(x_1,\dots,x_g)$ 表示 g 个自由非交换变量，并令 $<x>$ 表示由 x中的词构成的词半群，其中 $\varnothing$（空词）充当单位元。空词的词长为 0；否则，词长

$$w = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m} \tag{1.1}$$

记作 m $|w|=m.$

对于正整数 n，令 $M_n(\mathbb{C})^g$ 表示由元素取自 $\mathbb{C}$ 的 $n\times n$ 矩阵组成的 g 元组 $X=(X_1,\dots,X_g)$ 的集合。令 $M(\mathbb{C})^g$ 表示序列 $(M_n(\mathbb{C})^g)$。给定一个元组$X=(X_1,\dots,X_g)\in M(\mathbb{C})^g$，令

$$X^w = X_{j_1}X_{j_2}\cdots X_{j_m},$$

其中 $w\in<x>$ 如方程 (1.1) 中所示。因此 X^w 是词 w 在元组$X.$ 处的求值。该求值可扩展到由自由多项式 $\mathbb{C}<x>$ 构成的 $\mathbb{C}$ 自由代数，即 $<x>.$ 元素 $p\in\mathbb{C}<x>$ 具有如下形式

$$p = \sum_{w\in<x>} p_w w, \tag{1.2}$$

其中求和是有限的。多项式 p 在 $X\in M(\mathbb{C})^g$ 处的求值为

$$p(X) = \sum_{w\in<x>} p_w X^w.$$

矩阵值自由多项式既可以看作一个多项式条目组成的矩阵，也可以看作一个具有矩阵系数的多项式。在后一种情形下，给定正整数 d、e 和$p_w\in M_{d,\,e}(\mathbb{C})$，方程 (1.2) 中的有限和是一个矩阵值多项式。为在元组 p $X\in M(\mathbb{C})^g$ 处对此求值，我们将用到矩阵 $S\otimes T$与 S 的（克罗内克）张量积 T，并令

$$p(X) = \sum p_w\otimes X^w.$$

1.2. 自由谱半空间。给定 $A\in M_{d\times e}(\mathbb{C})^g$，令 Λ_A 表示齐次线性铅笔$\Lambda_A(x)=\sum_j A_jx_j.$ 它在 $X\in M_n(\mathbb{C})^g$ 处的取值为

$$\Lambda_A(X) = \sum_{j=1}^{g} A_j\otimes X_j \in M_{d\times e}(\mathbb{C})\otimes M_n(\mathbb{C}).$$

当 A 是方阵（$d=e$）时，我们令

$$\begin{aligned} L_A(X) &= I_d\otimes I_n + \Lambda_A(X) + \Lambda_A(X)^* \\ &= I + \sum A_j\otimes X_j + \sum A_j^*\otimes X_j^* \in M_d(\mathbb{C})\otimes M_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

集合 $\mathcal{D}_A[1] \subseteq \mathbb{C}^g$ 由 $x \in \mathbb{C}^g$ 满足 $L_A(x) \succ 0$ 组成，是一个谱半空间。谱半空间是数学多个领域中的基本对象，例如半定规划、凸优化 [WSV12] 和实代数几何 [BPT]。

由 $A \in M_d(\mathbb{C})^g$ 确定的自由谱半空间是集合序列 $\mathcal{D}_A = (\mathcal{D}_A[n])$，其中

$$\mathcal{D}_A[n] = \{X \in M_n(\mathbb{C})^g : L_A(X) \succ 0\},$$

且 $T \succ 0$ 表示方阵 T 是正定的（厄米且特征值为正）。注意，$\mathfrak{P}$ 是自由谱半空间 $\mathcal{D}_R$，其中

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

自由谱半空间 $\mathcal{D}_A$ 并非由谱胞 $\mathcal{D}_A[1]$. 确定。参见命题 2.5。自由谱半空间是算子系统、算子空间及完全正映射理论中的典范对象。它们与量子信息理论中的量子信道有关。它们在由信号流图控制的某些系统工程问题中自然出现这一事实[dOH06、dOHMP、SIG97] 也为研究自由谱半空间提供了动机。

1.2.1. 谱球。给定一个由 $d \times e$ 个矩阵组成的元组 $G = (G_1, \ldots, G_g)$，由下式定义的序列 $\mathcal{B}_G = (\mathcal{B}_G[n])_n$

$$\mathcal{B}_G[n] = \{X \in M_n(\mathbb{C})^g : \| \sum_{j=1}^{g} G_j \otimes X_j \| < 1\}$$

是一个谱球。位于层级1 的谱球，$\mathcal{B}_G[1]$，是 $\mathbb{C}^g$. 的旋转不变凸子集。谱球 $\mathcal{B}_G$ 是一个谱半空间，因为 $\mathcal{B}_G = \mathcal{D}_B$ 对于 $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$。在定理1.1的假设下，谱半空间 $\mathfrak{P}$ 不是谱球。参见命题 2.2。

谱半空间 $\mathcal{D}_A$ 有其自然关联的谱球，

$$\mathcal{B}_A = \{X : \|\Lambda_B(X)\| < 1\} = \{X : \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_A\}. \tag{1.4}$$

与 $\mathfrak{P} = \mathcal{D}_R$ 关联的谱球 $\mathcal{B}_R$ 在本文中发挥着重要作用。

1.2.2. 自由集。自由集合 $\mathscr{S} \subseteq M(\mathbb{C})^g$ 是一个序列 $\mathscr{S} = (\mathscr{S}[n])_n$，满足：对于每个正整数 n，$\mathscr{S}[n] \subseteq M_n(\mathbb{C})^g$；并且 $\mathscr{S}$ 关于直和与酉相似封闭：

(i) 若 $X \in \mathscr{S}[n]$ 和 $Y \in \mathscr{S}[m]$，则

$$X \oplus Y = (X_1 \oplus Y_1, \ldots, X_g \oplus Y_g) \in \mathscr{S}[n+m],$$

其中

$$X_j \oplus Y_j = \begin{pmatrix} X_j & 0 \\ 0 & Y_j \end{pmatrix};$$

(ii) 若 $X \in \mathscr{S}[n]$ 和 $U \in M_n(\mathbb{C})$ 是酉的，则

$$U^* X U = (U^* X_1 U, \ldots, U^* X_g U) \in \mathscr{S}[n].$$

我们称 $\mathscr{S}$ 是开的，若每个 $\mathscr{S}[n]$ 都是开的；若存在一个 κ，使得对所有 n 和 $X \in \mathscr{S}[n]$，矩阵 $n \times ng$

$$\begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_g \end{pmatrix}$$

的范数至多为 κ.

自由谱半空间是开自由集。

1.3. 自由解析函数。给定一个开自由集 $\mathscr{S}$，自由函数 $f\colon \mathscr{S} \to M(\mathbb{C})$ 是一个序列 $f = (f[n])$，其中 $f[n]\colon \mathscr{S} \mapsto M_n(\mathbb{C})$，满足以下公理

(i) 若 $X \in \mathscr{S}[n]$ 且 $Y \in \mathscr{S}[m]$，则

$$f[n+m](X \oplus Y) = f[n](X) \oplus f[m](Y);$$

(ii) 若 $X \in \mathscr{S}[n]$ 且 U 是一个 $n \times n$ 酉矩阵，则

$$f[n](U^* X U) = U^* f[n](X) U.$$

因此，自由函数保持直和和酉相似。若每个 $f[n]$ 都是解析的，则自由函数 f 是解析的。我们通常用 f 代替 $f[n]$.

来看一些例子，自由多项式显然是自由解析函数。自由有理函数 r （在 0 处正则）是具有实现公式的自由解析函数；也就是说，存在一个正整数 e、一个元组 $A \in M_e(\mathbb{C})^g$ 以及向量 c、$b \in \mathbb{C}^e$，使得

$$r(x) = c^*(I - \Lambda_A(x))^{-1} b.$$

r 的自然定义域由满足以下条件的元组 $X \in M_n(\mathbb{C})^g$ 组成：$I - \Lambda_A(X)$ 可逆；对于这样的 X,

$$r(X) = (I_d \otimes c)^* \left(I_d \otimes I_n - \Lambda_A(X)\right)^{-1} (I_d \otimes b) \in M_n(\mathbb{C}).$$

参见[KVV14] 了解有关自由函数的更多信息。

文献中还有两种等价且更常见的自由函数表述。它们并不假设解析性，而是将其视为

连续性或有界性等温和附加假设的推论；在这种情况下，它们与此处采用的表述等价。其中一种表述将条件 (ii) 替换为假设 f 保相似关系：若 $X \in \mathscr{S}[n]$ 和 T 是满足 $T^{-1}XT \in \mathscr{S}[n]$的可逆矩阵，则 $f(T^{-1}XT) = T^{-1}f(X)T$。另一种表述则用单一公理替换条件 (i) 和 (ii)： f保交织关系；若 $X \in \mathscr{S}[n]$ 和 $Y \in \mathscr{S}[m]$，且 Γ 是满足 $\Gamma X = Y\Gamma$ 的 $m \times n$ 矩阵，则 $\Gamma f(X) = f(Y)\Gamma$。命题1.2是对 [A+、引理 3.5] 的一种变体。证明见第 2.4 小节。另请参见 [HKM11，命题 2.5]。

命题1.2. 若 $\mathscr{S}$ 是一个自由开集，且 $f\colon \mathscr{S} \to M(\mathbb{C})$ 是一个自由解析函数，则 f 保持交织关系。

1.4. 自由谱半空间的自同构。给定自由集 $\mathscr{S} \subseteq M(\mathbb{C})^g$ 和 $\mathscr{T} \subseteq M(\mathbb{C})^g$，自由映射 $f\colon \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ 是一个 g 元组 $f = (f^1, \dots, f^g)$，其分量为自由函数 $f\colon \mathscr{S} \to M(\mathbb{C})$，且对所有 $X \in \mathscr{S}_n$，都有 $f(X) \in \mathscr{T}_n$。自由谱胞 $\mathcal{D}_A$ 和 $\mathcal{D}_B$ 之间的双解析映射 f 是一个自由映射 $f : \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_B$，并且存在一个自由解析映射 $g\colon \mathcal{D}_B \to \mathcal{D}_A$，使得对所有 $X \in \mathcal{D}_A$ 和 $Y \in \mathcal{D}_B$，都有 $g(f(X)) = X$ 且 $f(g(Y)) = Y$。我们将 g 称为 f 的逆，并记作 $g = f^{-1}$。从多个不同角度来看，一个自然的问题是确定两个自由谱胞之间的双解析映射。这个问题是多复变函数中刚性现象在自由分析中的对应问题；从这一角度看，两个自由谱胞很少会是双解析的。

本文[HKMV20] 在 A和 B上满足某些一般不可约性启发假设的条件下，确定了双解析映射 A、 B和 f的元组（ $f\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_B$.结果表明， A与B 密切相关，而 f 具有高度代数化的描述。在同一篇论文中，无需任何附加假设，即可确定谱球之间的双解析映射。这些映射同样具有高度代数化的描述。

自由谱半空间 $\mathcal{D}_A$ 的自同构 f 是一个双解析映射 $f\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_A$. 若$f$， $g\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_B$ 是双解析映射，那么映射 $g^{-1} \circ f\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_A$ 是一个自同构。因此， $\mathcal{D}_A$ 的自同构群对双解析映射 $f\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_B$.施加了限制

若自由集合 $\mathscr{S}$ 满足

$$\gamma X = (\gamma X_1, \dots, \gamma X_g) \in \mathscr{S}$$

只要 $X \in \mathscr{S}$ 且 $\gamma \in \mathbb{C}$ 为模为 1 的数。HKMV[HKMV20] 的结果未涵盖的一类自然自由谱半空间，是具有圆对称性但不是谱球的自由谱半空间。特别是， $\mathfrak{P}$满足定理 1.1 假设的谱半空间，其自同构群尚未得到分类。

现在我们可以概述定理 1.1的证明了。一个相当常规的论证表明，如果 φ 是 $\mathfrak{P}$的线性自同构，那么 φ 是平凡的。其推论是

Carathéodory-Cartan-Kaup-Wu 自由类比在 [HKM11] 中的结果如下：如果$\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$是一个自同构，且 $\varphi(0) = 0$，那么 φ 是线性的。本文采用的策略是：证明若 φ 是 $\mathfrak{P}$的一个自同构，则 $\varphi(0) = 0$，这一策略是新颖的，因为它利用了谱球理论的代数方面。给定一个自同构 $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$，且其 $\varphi(0) \in \mathbb{C}^2$ 不一定为 0，我们构造一个元组 B，它完全由 $\varphi(0) \in \mathbb{C}^2$ 和 $\varphi'(0) \in M_2(\mathbb{C})$ 描述，使得 $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}_B.$。这一等式利用 [HKMV20], 中的代数结果进行分析，最终得出 $s = 1.$。当 $s = 1$时，谱半空间 $\mathfrak{P}[1]$ 是广义复椭圆盘$\{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| + |z_2| < 1\}.$。已知 [K、JP08], 使用与本文截然不同的技术证明了，该复椭圆盘的解析自同构是平凡的。特别是，$\varphi(0) = 0.$。我们利用本文发展的结果，对这一事实给出一个自洽的证明。

相比之下，对下文及[MT、M], 中定义的超莱因哈特域的自同构群进行分类，其证明策略是研究自同构复合的动力学，并运用与经典 Carathéodory插值定理相关的结果。

2. Preliminary results

本节汇集定理1.1的预备结果及辅助结果。小节2.1给出了关于属于 $\mathfrak{P}$ 的另一种刻画，并证明在定理1.1的假设下，$\mathfrak{P}$ 既不是谱球，也不是超莱因哈特域。此外，还给出了 [EHKM] 中一项结果的另一种证明。小节2.2 汇集了有关谱球 $\mathcal{B}_R$ （与 $\mathfrak{P} = \mathcal{D}_R.$ 相关）的事实。小节HKMV20] 回顾了球极小性，并在小节2.3中确定了一个球极小元组 E，使得 $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_R$ 成立。小节2.4讨论了在幂零元组上对一个在 0 附近定义的自由函数求值。命题1.2 的证明见小节2.5。

2.1. 属于 $\mathfrak{P}$。矩阵 T 是严格压缩映射，当且仅当 $\|T\| < 1$，其中 $\|T\|$ 是 T.的算子范数

命题 2.1. 对于 $X = (X_1, X_2) \in M(\mathbb{C})^2$和 $Y_j = C_j \otimes X_j$，以下条件等价。

(a) $X \in \mathfrak{P}$;
(b) 矩阵

$$T(X) := \begin{pmatrix} Y_1^* & Y_2 \\ Y_2^* & Y_1 \end{pmatrix}$$

是严格压缩;

(c) 矩阵

$$\begin{aligned}\mathscr{L}'(X) &:= \begin{pmatrix} I - Y_1^*Y_1 - Y_2Y_2^* & -Y_1^*Y_2 - Y_2Y_1^* \\ -Y_2^*Y_1^* - Y_1Y_2^* & I - Y_1Y_1^* - Y_2^*Y_2 \end{pmatrix} \\ &= I - T(X)T(X)^*\end{aligned}$$

是正定的;

(d) 矩阵

$$\begin{aligned}\mathscr{L}'_*(X) &:= \begin{pmatrix} I - Y_1Y_1^* - Y_2Y_2^* & -Y_1Y_2 - Y_2Y_2 \\ -Y_2^*Y_1^* - Y_1^*Y_2^* & I - Y_1^*Y_1 - Y_2^*Y_2 \end{pmatrix} \\ &= I - T(X)^*T(X)\end{aligned}$$

是正定的。

证明。自伴分块方阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}$$

其 A 正定，当且仅当其 (1, 1) 块的舒尔补

$$S = D - B^*A^{-1}B$$

是正定的。

根据定义， $X \in \mathfrak{P}$ 意味着 $\mathscr{L}(X) \succ 0$. 首先对 $\mathscr{L}(X)$ 的 (1, 1) 块元素取舒尔补，然后对 (3, 3) 块元素（一个单位矩阵）取舒尔补，可知 $\mathscr{L}(X) \succ 0$ 当且仅当 $\mathscr{L}'(X) \succ 0$, 这里用到了本证明开头的观察。直接计算可得 $\mathscr{L}'(X) = I - T(X)T(X)^*$.

为完成证明，注意到， $I - T(X)T(X)^* \succ 0$ 当且仅当 $\|T(X)\| < 1$ 当且仅当 $I - T(X)^*T(X) \succ 0$ 当且仅当 $\mathscr{L}'_*(X) \succ 0$. □

专门考虑两个变量的情形，谱半空间 $\mathcal{D} \subseteq M(\mathbb{C})^2$ 是超 Reinhardt 的，当且仅当存在一个元组 $G = (G_1, G_2)$，其中包含大小相容的矩阵，使得

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

我们有 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$. 超 Reinhardt 自由谱胞是圆形的，但不一定是谱球。超 Reinhardt 自由谱胞的自同构由以下文献确定：[MT，M]。

命题 2.2。在定理1.1的假设下，谱胞 $\mathfrak{P}$ 既不是超 Reinhardt，也不是谱球。

命题的证明2.2 用到了以下 [EHKM]结果的一个方向。

命题 2.3。谱半空间 $\mathcal{D}_A$ 是谱球，当且仅当对于每个正整数n、每个 $X \in \mathcal{D}_A[n]$ 以及每个酉矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$，元组 $UX \in \mathcal{D}_A$.

证明。若 $\mathcal{D}_A = \mathcal{B}_B$ 是谱球，则显然， $X \in \mathcal{D}_A[n]$ 且 U 酉蕴含 $UX \in \mathcal{D}_A$.

反过来，假设对于每个正整数 n、每个 $X \in \mathcal{D}_A[n]$ 以及每个酉矩阵$U \in M_n(\mathbb{C})$，元组 $UX \in \mathcal{D}_A[n]$. 。为证明 $\mathcal{D}_A$ 是谱球，只需证明 $\mathcal{D}_A = \mathcal{B}_A$。为此，给定 $X \in M_n(\mathbb{C})^{\mathrm{g}}$ 。令

$$U = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

并注意到 $X \in \mathcal{D}_A$ 当且仅当 $0_n \oplus X \in \mathcal{D}_A[2n]$ 当且仅当

$$U(0_n \oplus X) = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_A[2n]$$

当且仅当 $X \in \mathcal{B}_A[n]$ （见方程1.4）。因此 $\mathcal{D}_A = \mathcal{B}_A$ 证明完毕。 □

证明命题2.2时还需要以下引理。

引理 2.4。在定理1.1的假设下， $C_1^*C_1+C_2^*C_2 \succ I_s$ 以及 $C_1C_1^*+C_2C_2^* \succ I_s$.

证明。若 $C_1^*C_1 + C_2^*C_2 \preceq I_s$，则 $I - C_1^*C_1$的核 K非平凡，且与 $C_2^*C_2$.的值域正交。因此 K约化了 $C_1^*C_1$和 $C_2^*C_2$，从而也约化了它们生成的 C*-代数。因此 $C_1^*C_1 + C_2^*C_2 \succ I_s$. 同理，$C_1C_1^* + C_2C_2^* \succ I_s$. □

命题 2.2 的证明。 经常规计算可知，若 $\mathcal{D} \subseteq M(\mathbb{C})^{\mathrm{g}}$ 是超 Reinhardt 自由谱半空间，$X \in \mathcal{D}[n]$ 且 W_0， W_1， $W_2 \in M_n(\mathbb{C})$ 是酉矩阵，则

$$W \cdot X := (W_0^*XW_1, W_1^*XW_2) \in \mathcal{D}[n].$$

经另一项常规计算并结合命题 2.1 可得

$$X = (X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \tag{2.1}$$

位于 $\mathfrak{P}$. Let 的边界上

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

以及 $(W_0, W_1, W_2) = (I, U, U^2)$。因此，每个 W_j 都是酉的，并且

$$W \cdot X = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

根据条目 (d) 或命题 2.1 和引理 2.4，$W \cdot X$ 不在 $\mathfrak{P}$. 的闭包中。因此 $\mathfrak{P}$不是超 Reinhardt。

如果 $\mathfrak{P}$是一个谱球，$X \in \mathfrak{P}[n]$并且 U是一个 $n \times n$酉矩阵，那么 $UX = (UX_1, UX_2)$ 也属于 $\mathfrak{P}[n]$ 根据命题 2.3。取 X_1，X_2 以及 U 如方程 (2.1) 和 (2.2) 中所示，并注意，取 $\mathscr{L}'$ 如命题 2.1，

$$\mathscr{L}'(UX) = I - \begin{pmatrix} C_1C_1^* + C_2^*C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1^*C_1 + C_2C_2^* \end{pmatrix},$$

因为 $X_1^*X_2 = 0 = X_2X_1^*$.如果 UX位于 $\mathfrak{P}$的边界上，那么 $I - C_1^*C_1 - C_2C_2^* \succeq 0$.根据假设，存在一个向量 x使得 $C_1^*C_1x = x$，由此可得 $C_2^*x = 0$，这与 C_2 可逆的假设矛盾。□

2.2. 谱球 $\mathcal{B}_R$。令 $\{e_1, e_2\}$ 表示 $\mathbb{C}^2$ 的标准基，并令 e_j^T表示 e_j. 的转置。令 $E^r \in M_2(\mathbb{C})^2$ 表示元组，

$$E_1^r = e_1^T \otimes C_1 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2^r = e_2^T \otimes C_2 = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

并令 $E^c \in M_2(\mathbb{C})$ 表示元组 $E^c = (E_1^c, E_2^c)$，其中 $E_j^c = e_j \otimes C_j$.

与 $\mathfrak{P}$相关联的谱球为 $\mathcal{B}_R$，其中 R 由方程（1.3）定义。由于 R_j 的第一行和最后一列均为零，$\mathcal{B}_R = \mathcal{B}_E$，其中

$$E = (E_1, E_2) = \left(\begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} E^r & 0 \\ 0 & E^c \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

命题 2.5。等式 $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_{E^r} \cap \mathcal{B}_{E^c}$ 成立。特别地，$X \in \mathcal{B}_R$ 当且仅当二者均

$$\begin{pmatrix} C_1 \otimes X_1 & C_2 \otimes X_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (C_1 \otimes X_1)^* & (C_2 \otimes X_2)^* \end{pmatrix}$$

为严格压缩算子。另一方面，在定理 1.1的假设下，$\mathcal{B}_{E^j}[2] \not\subseteq \mathcal{B}_{E^k}[2]$ 对于 j，$k \in \{r, c\}$ 以及 $j \neq k$.

证明。 这些等式 $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_{E^r} \cap \mathcal{B}_{E^c}$ 可直接由方程（2.3）得出。

利用引理 2.4，选取 $\rho < 1$ 使得 $\rho^2(C_1^*C_1 + C_2^*C_2) \not\preceq I$. 该元组

$$X = \rho\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

属于 $\mathcal{B}_{E^r}$，但不属于 $\mathcal{B}_{E^c}$. 。因此 $\mathcal{B}_{E^r}[2] \not\subseteq \mathcal{B}_{E^c}[2]$. 。类似的论证

$$X = \rho\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

表明 $\mathcal{B}_{E^c}[2] \not\subseteq \mathcal{B}_{E^r}[2]$. □

注 2.6。 按照 [HKMV20], 的术语，直和 $E^r \oplus E^c$ 是 不可冗余的。 □

2.3. 球极小性。此处关于球极小性的讨论借鉴自 [HKMV20]。特别地，下面的引理 2.7 摘录自 [HKMV20，引理 3.1]。若 g-元组 $E = (G_1, \ldots, G_g)$ 的 $d \times e$ 矩阵对于 $\mathcal{B}_G$ 是球极小的，则当且仅当 $F \in M_{k\times\ell}$，且 $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_G$ 推出$d \le k$ 和 $e \le \ell$. 。作为例子，显然 E^r 和 E^c 都是球极小的（分别对应于$\mathcal{B}_{E^r}$ 和 $\mathcal{B}_{E^c}$）。元组 G、$F \in M_d$、$_e(\mathbb{C})^g$ 是球等价的，如果存在酉矩阵 $U \in M_e$、$_e(\mathbb{C})$以及$V \in M_d$、$_d(\mathbb{C})$，使得 $F = V^*GU$. 。注意，在这种情况下，$\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_G$. 。元组 $A \in M_d(\mathbb{C})^g$ 对于 $\mathcal{D}_A$ 是极小的，如果 $B \in M_k(\mathbb{C})^g$ 且 $\mathcal{D}_B = cD_A$ 推出$d \le k$.

引理 2.7。球极小元组存在；也就是说，如果 $\mathcal{B} \subseteq M(\mathbb{C})^g$ 是一个谱球，那么存在 d、e 以及一个球极小元组 $G \in M_{d,\ e}(\mathbb{C})^g$，使得 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_G$.

设给定 $G \in M_{d,\ e}(\mathbb{C})^g$。

(i) 如果 G 是球极小的，$F \in M_{k\times\ell}(\mathbb{C})^g$ 且 $\mathcal{B}_G = \mathcal{B}_F$，那么存在一个元组 $J \in M_{(k-d)\times(\ell-e)}(\mathbb{C})^g$以及酉矩阵 U、V，其大小分别为 $k \times k$ 和 $\ell \times \ell$，使得 $\mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}_J$ 并且

$$F = U\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}V.$$

特别地，

(a) $d \le k$ 和 $e \le \ell$；(b) 如果 $F \in M_{d\times e}(\mathbb{C})^g$ 也是球极小的，那么 G 和 F 球等价。(ii) $G \in M_{d,\ e}(\mathbb{C})^g$ 是球极小的，当且仅当

$$H = \begin{pmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{d+e}(\mathbb{C})^g$$

对 $\mathcal{D}_H$. 是极小的

命题 2.8。 方程 E 中的元组 (2.3)是球极小的。

证明。设

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{6s,6s}.$$

因此 $\mathcal{B}_E = \mathcal{D}_H$ 并且根据引理 2.7， E 对于 $\mathcal{B}_E$ 是球极小，当且仅当 H 对于$\mathcal{D}_H$.是极小的

设 $\{\mathbb{E}_{j,k}： 1 \le j \le 6\}$ 表示 $M_6(\mathbb{C})$ 的矩阵单位。设

$$F_1 = [\mathbb{E}_{1,2} + \mathbb{E}_{5,6}] \otimes C_1, \quad F_2 = [\mathbb{E}_{1,3} + \mathbb{E}_{4,6}] \otimes C_2.$$

由于 F 和 H 酉等价，我们有 $\mathcal{D}_H = \mathcal{D}_F$ ，此外， H 是 $\mathcal{D}_H$ 的极小定义，当且仅当 F 对于 $\mathcal{D}_F$ 是极小的，当且仅当 E 对于 $\mathcal{B}_E$.是球极小的

设 $\mathcal{F}$表示由 $\{F_1, F_2\}$.生成的 C*-代数。由于 $F_1F_1^* = [\mathbb{E}_{1,1}+\mathbb{E}_{5,5}]\otimes C_1C_1^*$和 $F_2F_2^* = [\mathbb{E}_{1,1} + \mathbb{E}_{4,4}] \otimes C_2C_2^*$，且根据假设， $\{C_1C_1^*, C_2C_2^*\}$ 作为 C*-代数生成 $M_s(\mathbb{C})$，对于每个 $X \in M_s(\mathbb{C})$，存在 Y_1、 $Y_2 \in M_s(\mathbb{C})$，使得 $\mathcal{F}$ 包含$\mathbb{E}_1$、$_1 \otimes X + \mathbb{E}_4$、$_4 \otimes Y_2 + \mathbb{E}_5$、$_5 \otimes Y_1$.。右乘 $F_1F_1^*\,F_2F_2^*$后可得，$\mathcal{F}$包含 $\mathbb{E}_1$、$_1 \otimes XC_1C_1^*C_2C_2^*$.。由于 $C_1C_1^*C_2C_2^*$可逆，可得 $\mathcal{F}$包含$\mathbb{E}_1$、$_1 \otimes M_s(\mathbb{C})$。考虑 $F_j^*\,[\mathbb{E}_{1,1} \otimes M_s(\mathbb{C})]\,F_k$，其中 j、 $k = 0$取 1、2，且 $F_0 = I$，并如上推理，可得 $\mathcal{F}$包含 $\sum_j^3$、$_{k=1}\mathbb{E}_j$、$_k \otimes M_s(\mathbb{C})$；也就是说， $\mathcal{F}$作为 C*-代数子代数包含 $\mathcal{F}_1 = M_{3s}(\mathbb{C})\oplus 0$ 。转而考虑 $F_j^*F_j$，并利用 $\{C_1^*C_1, C_2^*C_2\}$作为 C*-代数生成 $M_s(\mathbb{C})$，可得 $\mathcal{F}$ 作为 C*-代数子代数包含 $\mathcal{F}_2 = 0 \oplus M_{3s}(\mathbb{C})$。因此 $\mathcal{F} = M_{3s}(\mathbb{C}) \oplus M_{3s}$ $(\mathbb{C})$。特别地，除平凡子空间外， $\mathcal{F}$的约化子空间，等价地， $\{F_1, F_2\}$的约化子空间，只有 $\mathbb{C}^{3s} \oplus \{0\}$ 和 $\{0\} \oplus \mathbb{C}^{3s}$.

假设 $A \in M_k(\mathbb{C})^2$ 是 $\mathcal{D}_F$. 的极小定义。因此 $k \le 6s$. 。根据 [EHKM 的命题 2.2], ，存在一个元组 $J \in M(\mathbb{C})^{\mathrm{g}}$，使得在酉等价意义下， $F = A \oplus J$.。假设 $A \ne F$.。由此可知，要么 $A = (\mathbb{E}_{1,2} \otimes C_1, \mathbb{E}_{1,3} \otimes C_2)$，要么 $A = (\mathbb{E}_{4,6} \otimes C_1, \mathbb{E}_{4,6} \otimes C_2)$。但这样一来， $\mathcal{D}_A$ 要么是 $\mathcal{B}_{E^r}$，要么是 $\mathcal{B}_{E^c}$，这与命题 2.8 的结论（$\{\mathcal{B}_{E^r}, \mathcal{B}_{E^c}\}$ 是不可冗余的）矛盾。因此， F 是 $\mathcal{D}_F$ 的极小定义，而 E 是球极小的。□

2.4. 幂零求值。给定 $\delta > 0$， 令

$$B(0, \delta) = \{X \in M(\mathbb{C})^{\mathrm{g}} : \sum_{j=1}^{\mathrm{g}} X_j X_j^* < \delta^2\}$$

容易验证， $B(0, \delta)$ 是一个开自由集。

（形式）幂级数 F in $<x>$ 是如下形式的表达式

$$F(x) = \sum_{w \in <x>} F_w w. \tag{2.4}$$

一个元组 $X \in M(\mathbb{C})^{\mathrm{g}}$ 是 阶数至多为 m 的幂零元组，当且仅当 $X^w = 0$ 对所有长度为 w 的词m. 下面的定理 2.9 可见于 [KVV14、KS、HKM12] 等文献中。

定理 2.9。 设 S 是一个开自由集，并且存在一个 $\delta > 0$ 使得 $B(0,\delta) \subseteq S$.若 $f: S \to M(\mathbb{C})$ 是一个自由解析函数，则存在一个如方程 (2.4) 所示的形式幂级数，使得若 $X \in B(0,\delta)$，则

$$f(X) = F(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{|w|=\ell} F_w X^w,$$

其中级数按范数收敛。此外， f 可解析地延拓至所有幂零元组。特别地，如果 X 的幂零阶数至多为 m，那么

$$f(zX) = \sum_{\ell=0}^{m} (\sum_{|w|=\ell} F_w X^w) z^\ell$$

对于 $z \in \mathbb{C}$.

Let

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，给定 $X = (X_1, X_2) \in M_n(\mathbb{C})^2$, , 元组

$$S \otimes X = (S \otimes X_1,\, S \otimes X_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & X_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \in M_{2n}(\mathbb{C})^2$$

是二阶幂零的。自由映射 $f: \mathfrak{P} \to M(C)$在 $S \otimes X$ 上的求值具有特别简单的形式。

命题2.10. 若 $f: \mathfrak{P} \to M(\mathbb{C})$是一个自由解析函数，则 f 可唯一延拓为一个函数，仍记作 f，其定义域为所有形如 $S \otimes X$的元组，其中 $X \in M(\mathbb{C})^2$.此外，存在 $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{C}$ 使得

$$f(S \otimes X) = f(0) + S \otimes (\sum_{j=1}^{2} \ell_j X_j) \in M_2(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C}) = M_{2n}(\mathbb{C}).$$

我们以命题的证明结束本节：1.2。证明思路大量借鉴了 [A+]。

2.5. 命题1.2的证明。我们需要证明：如果 $\mathscr{S}$ 是一个自由开集，且 $f: \mathscr{S} \to M(\mathbb{C})$ 是解析的自由函数，即 f 同时保持直和与酉相似不变，那么 f 保持交织关系。为此，设 $X \in \mathscr{S}[m]$ 、 $Y \in \mathscr{S}[n]$，且 Γ 是一个 $m \times n$ 矩阵，满足 $X\Gamma = \Gamma Y$. 。为证明 $f(X)\Gamma = \Gamma f(Y)$，首先注意到，对于任意非零的 $t \in \mathbb{C}$. ，我们可以将 Γ 替换为 $t\Gamma$ 。由于 $\mathscr{S}$ 关于直和封闭，$Z = X \oplus Y \in \mathscr{S}[n+m]$. 。由于 $\mathscr{S}[n+m]$ 是开集，存在一个 $\epsilon > 0$，使得如果 T 是一个 $(n+m) \times (n+m)$ 矩阵且 $\|T - I\| < \epsilon$，那么 T 是可逆的，并且

$$T^{-1}\,[X \oplus Y]\,T \in \mathscr{S}[n+m].$$

对于满足 $|\rho|\,\|M\| < 1$ 的矩阵 M 和 $\rho \in \mathbb{C}$，令

$$D_\rho(M) = (I - \rho^2 M^* M)^{\frac{1}{2}}$$

并令，对于 $0 \neq z \in \mathbb{C}$,

$$T_\rho(M)[z] = \begin{pmatrix} D_\rho(M^*) & \frac{\rho}{z} M \\ -\rho\, z M^* & D_\rho(M) \end{pmatrix}.$$

对于 $|z| = 1$ 矩阵 $T_\rho[M](z)$ 是 Julia 矩阵的一种变体，并且是酉矩阵。

通过将 $\|\Gamma\|$ 取为足够小，我们可以假设，对于所有 $0 < \rho < 1$ 和 $\rho < |z| < \frac{1}{\rho}$，

$$\|I - T_\rho(\Gamma)[z]\| < \epsilon.$$

因此，

$$T_\rho(\Gamma)[z]^{-1}\,[X \oplus Y]\,T_\rho(\Gamma)[z] \in \mathscr{S}[n+m].$$

函数（对于固定的 ρ）

$$F(z) = f\left(T_\rho(\Gamma)[z]^{-1}\,[X \oplus Y]\,T_\rho(\Gamma)[z]\right) - T_\rho(\Gamma)[z]^{-1}\,f(X \oplus Y)\,T_\rho(\Gamma)[z]$$

在环域 $\rho \leq |z| \leq \frac{1}{\rho}$ 上有定义且解析，并且当 $|z| = 1$ 时为零，因为 f 保持酉相似关系。因此， F 恒等于零。取 $z = \rho$，再令 ρ 趋于 0，得到：

$$f(\begin{pmatrix} I & -\Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} I & -\Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix} f(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} I & \Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

因此，利用 f 保持直和，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & f(Y) \end{pmatrix} &= f(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} X & X\Gamma - \Gamma Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}) \\ &= f(\begin{pmatrix} I & -\Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} I & -\Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix} f(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} I & \Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & -\Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & f(Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(X) & f(X)\Gamma - \Gamma f(Y) \\ 0 & f(Y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所需结论即得。

3. A proof of Theorem 1.1

本节将证明定理1.1。在小节3.1中，我们构造一个与自同构 $\mathcal{B}_B$ 规范关联的谱球 $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$。在小节3.2中，我们汇总等式 $\mathcal{B}_B = \mathcal{B}_R = \mathcal{B}_E$ 的推论，并在小节3.3 中使用这些推论证明 $b = 0$。证明在小节3.4中结束。

3.1. 仿射变量替换。本节构造一个与自同构 $\varphi\colon \mathfrak{P}\to\mathfrak{P}$ 规范关联的谱球 $\mathcal{B}_B$。

假设 $\varphi\colon \mathfrak{P}\to\mathfrak{P}$ 是双解析的。映射 φ 的坐标函数为 φ_j，使得

$$\varphi(X)=(\varphi_1(X),\varphi_2(X))$$

对于 $X\in\mathfrak{P}$.

将 φ_j的级数展开写至一次项为

$$\varphi_j(x)=b_j+\sum_k \ell_{j,k}x_k+\cdots.$$

由于 φ是双解析的，矩阵

$$\mathfrak{L}=\begin{pmatrix}\ell_{1,1} & \ell_{1,2}\\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2}\end{pmatrix} \tag{3.1}$$

是可逆的。

给定一个元组 $X\in M_n(\mathbb{C})^2$,

$$\varphi_j(S\otimes X)=\begin{pmatrix}b_j & \sum_k \ell_{j,k}X_k\\ 0 & b_j\end{pmatrix}.$$

令 $\mathfrak{b}_j=b_jC_j$. 令

$$B_0=\begin{pmatrix}I & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & 0\\ \mathfrak{b}_1^* & I & 0 & \mathfrak{b}_2\\ \mathfrak{b}_2^* & 0 & I & \mathfrak{b}_1\\ 0 & \mathfrak{b}_2^* & \mathfrak{b}_1^* & I\end{pmatrix}.$$

由于 $\varphi(0)=b\in\mathfrak{P}$，矩阵 $B_0=\mathscr{L}(\varphi(0))$ 是正定的，因此是可逆的 .

Let

$$Y_j=\begin{pmatrix}0 & \ell_{1,j}C_1 & \ell_{2,j}C_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ell_{2,j}C_2\\ 0 & 0 & 0 & \ell_{1,j}C_1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\sum_k \ell_{k,j}R_k, \tag{3.2}$$

其中 R 定义于方程（1.3）中。令 $B=$ （B_1, B_2）表示由下式定义的元组

$$B_j=B_0^{-\frac{1}{2}}Y_jB_0^{-\frac{1}{2}}.$$

令 $\Lambda_B(x)=B_1x_1+B_2x_2$，并令 $\mathcal{B}_B$ 表示所得的谱球,

$$\mathcal{B}_B=\{X:\|\Lambda_B(X)\|<1\}.$$

命题 3.1。等式 $\mathcal{B}_R=\mathcal{B}_B$ 成立。

在证明命题 3.1之前，我们记录如下引理。

引理 3.2. 存在一个置换矩阵 Σ 作用于 $\{1,2,\dots,8\}$，使得

$$(\Sigma^* \otimes I_s)\mathscr{L}(\varphi(S\otimes x))(\Sigma\otimes I_s) = \begin{pmatrix} B_0 & \Lambda_Y(x) \\ \Lambda_Y(x)^* & B_0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

证明。令 $\mathfrak{y}_j = (\sum_{k=1}^{2} \ell_{j,k}x_k)\, C_j$. 将 0 视为大小为 $s\times s$ 的零矩阵,

$$\mathscr{L}(\varphi(S\otimes x)) = \begin{pmatrix} I & 0 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{y}_2 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \mathfrak{b}_1 & 0 & \mathfrak{b}_2 & 0 & 0 \\ \mathfrak{b}_1^* & 0 & I & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{y}_1^* & \mathfrak{b}_1^* & 0 & I & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{b}_2 \\ \mathfrak{b}_2^* & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{y}_2^* & \mathfrak{b}_2^* & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \mathfrak{b}_1 \\ 0 & 0 & \mathfrak{b}_2^* & 0 & \mathfrak{b}_1^* & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{y}_2^* & \mathfrak{b}_2^* & \mathfrak{y}_1^* & \mathfrak{b}_1^* & 0 & I \end{pmatrix}.$$

因此，方程 (3.3) 成立，其中 Σ等于与置换 (1,3,5,7,2,4,6,8) 相关联的矩阵的张量积，其中 I_s，单位元 $s\times s$，注意到

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{y}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{y}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda_Y(x). \qquad \square$$

命题 *3.1* 的证明。利用 φ 是 $\mathfrak{P}$ 的自同构这一假设，方程 1.4 和引理 3.2，元组 X 属于 $\mathcal{B}_R[n]$ 当且仅当 $S\otimes X\in\mathfrak{P}[2n]$ 当且仅当$\varphi(S\otimes X)\in\mathfrak{P}$ 当且仅当 $\mathscr{L}(\varphi(S\otimes X))\succ 0$ 当且仅当

$$\begin{pmatrix} B_0\otimes I_n & \Lambda_Y(X) \\ \Lambda_Y(X)^* & B_0\otimes I_n \end{pmatrix} \succ 0$$

当且仅当

$$0 \prec \begin{pmatrix} B_0^{-\frac12}\otimes I_n & 0 \\ 0 & B_0^{-\frac12}\otimes I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0\otimes I_n & \Lambda_Y(X) \\ \Lambda_Y(X)^* & B_0\otimes I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^{-\frac12}\otimes I_n & 0 \\ 0 & B_0^{-\frac12}\otimes I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \Lambda_B(X) \\ \Lambda_B(X)^* & I \end{pmatrix}$$

当且仅当 $X\in\mathcal{B}_B[n]$. $\square$

3.2. 分析等式 $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}_B$。本节利用谱球理论，推导命题 $\mathcal{B}_E$ 和 $\mathcal{B}_B$ 中 $\mathcal{B}_R$ 分别出现的两个表示 2.5 和3.1所蕴含的结论。

由于根据命题2.8， E 是球极小的，且 $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_B$，引理 2.7 表明存在酉矩阵 U， V 使得

$$U \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} V^* = B,$$

其中 $J = (J_1, J_2) \in M_s(\mathbb{C})^2$ 且 $\mathcal{B}_E \subseteq \mathcal{B}_J$. 令 $\{e_1, \ldots, e_4\}$ 表示 $\mathbb{C}^4$ 的标准基，并且 $H_j = \{e_j \otimes h : h \in \mathbb{C}^s\}$,

$$\ker(B) := \cap_{j=1}^2 \ker(B_j) = B_0^{\frac{1}{2}} H_1,$$

因为 $\cap_{j=1}^2 \ker(Y_j) = H_1$. 因此

$$\begin{pmatrix} E_j & 0 \\ 0 & J_j \end{pmatrix} V^* B_0^{\frac{1}{2}} H_1 = 0.$$

[1]由于 E 没有核，因此 $J = 0$ 和 $V^* B_0^{\frac{1}{2}} H_1 = H_4$. 特别地,

$$U^* B_j V = \begin{pmatrix} E_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中左下角的零矩阵大小为 $s \times s$.

综上，存在酉矩阵 U、 V，使得

$$B_j = U \begin{pmatrix} E_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*.$$

[1] [1]令 $P = B_0^{\frac{1}{2}} U$和 $Q^* = V^* B_0^{\frac{1}{2}}$.。因此 $PP^* = B_0 = QQ^*$和

$$Y_j = P \begin{pmatrix} E_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^*.$$

将 P和 Q 用它们的分块列表示为

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{j,k} \end{pmatrix}_{j,k=1}^4 \\ Q &= \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{j,k} \end{pmatrix}_{j,k=1}^4 , \end{aligned}$$

其中 $P_{j,\ k}$和 $Q_{j,\ k}$是 $s \times s$ 矩阵。采用这些记号,

$$\begin{aligned} Y_1 =& P \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^* = P[(e_1 e_1^* + e_3 e_3^*) \otimes C_1] Q^* = p_1 C_1 q_1^* + p_3 C_1 q_3^* \\ Y_2 =& P \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^* = P[(e_1 e_2^* + e_2 e_3^*) \otimes C_2] Q^* = p_1 C_2 q_2^* + p_2 C_2 q_3^*, \end{aligned} \tag{3.4}$$

wh其中 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是 $\mathbb{C}^4$. 的标准基。设 $T = Q_4^{-*}$, $_3$ 和 $S = P_1^{-*}$, .

引理 3.3。沿用上述记号，$Q_{1,\ 4}$ 和$P_{4,\ 4}$ 是酉的，$Q_{4,\ 3}$ 和 $P_{1,\ 1}$ 是可逆的，并且

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} & 0 \\ 0 & \ell_{2,2}C_2TC_2^{-1} & \ell_{2,1}C_2TC_1^{-1} & b_2C_2P_{4,4} \\ 0 & \ell_{1,2}C_1TC_2^{-1} & \ell_{1,1}C_1TC_1^{-1} & b_1C_1P_{4,4} \\ 0 & 0 & 0 & P_{4,4} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Q_{1,4} \\ \ell_{1,1}^*C_1^*SC_1^{-*} & \ell_{1,2}^*C_1^*SC_2^{-*} & 0 & b_1^*C_1^*Q_{1,4} \\ \ell_{2,1}^*C_2^*SC_1^{-*} & \ell_{2,2}^*C_2^*SC_2^{-*} & 0 & b_2^*C_2^*Q_{1,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & 0 \end{pmatrix}.$$

证明。令

$$W_j = \begin{pmatrix} 0 & \ell_{1,j}C_2^{-1} & -\ell_{2,j}C_1^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

注意到

$$0 = W_1Y_1 = W_1p_1C_1q_1^* + W_1p_2C_1q_3^*.$$

由于 Q 是可逆的，存在 r_1、...、 $r_4 \in M_{4s,\ s}(\mathbb{C})$，使得

$$q_j^*r_k = \delta_{j,k}.$$

因此，由方程（3.4）和方程（3.2）中的第一个单位元，

$$0 = W_1p_1C_1q_1^*r_1 + W_1p_2C_1q_3^*r_1 = W_1p_1C_1 = [\ell_{1,1}C_2^{-1}P_{2,1} - \ell_{2,1}C_1^{-1}P_{3,1}]C_1$$

因此 $\ell_{1,\ 1}C_2^{-1}P_{2,\ 1} - \ell_{2,\ 1}C_1^{-1}P_{3,\ 1} = 0$. 利用方程（3.4）中的第二个单位元进行类似论证，可得

$$0 = [\ell_{1,2}C_2^{-1}P_{2,1} - \ell_{2,2}C_1^{-1}P_{3,1}]C_2$$

因此 $\ell_{1,2}C_2^{-1}P_{2,1} - \ell_{2,2}C_1^{-1}P_{3,1} = 0$. 由于 $\mathfrak{L}$ 在方程（3.1）中可逆，我们得出$C_2^{-1}P_{2,\ 1} = C_1^{-1}P_{3,1} = 0$ 因此 $P_{2,1} = P_{3,1} = 0$.

由于 $[e_4^* \otimes I_s]\, Y_j = 0$，还可推出 $P_{4,\ 1} = P_{4,\ 2} = P_{4,\ 3} = 0$. 特别地，$P_{1,\ 1}$是可逆的。考察 $PP^* = B_0$ 的（分块）(4, 4) 项可得 $P_{4,\ 4}P_{4,\ 4}^* = I_s$. 由 $PP^* = B_0$ 的最后一列可知 $P_{1,\ 4} = 0$，且 $P_{2,\ 4} = b_2C_2P_{4,\ 4}$ 以及 $P_{3,\ 4} = b_1C_1P_{4,\ 4}$。至此，我们已如图所示确定了 P. 的第一行、最后一行、第一列和最后一列。类似的推理也适用于 Q. 的第三列和第四列，以及第一行和第四行。

比较方程（ Y_j 中的描述3.4）和（3.2）可得，

$$
\begin{aligned}
P_{1,1}C_1Q_{2,1}^* &= \ell_{1,1}C_1 \qquad & P_{2,3}C_1Q_{4,3}^* &= \ell_{2,1}C_2\\
P_{1,1}C_1Q_{3,1}^* &= \ell_{2,1}C_2 \qquad & P_{3,3}C_1Q_{4,3}^* &= \ell_{1,1}C_1\\
P_{1,1}C_2Q_{2,2}^* &= \ell_{1,2}C_1 \qquad & P_{2,2}C_2Q_{4,3}^* &= \ell_{2,2}C_2\\
P_{1,1}C_2Q_{3,2}^* &= \ell_{2,2}C_2 \qquad & P_{3,2}C_1Q_{4,3}^* &= \ell_{1,2}C_2.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

将上述恒等式与 T 和 S 的定义进行比较，即完成了证明。 □

Let

$$
\Sigma = \begin{pmatrix} P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,2} & P_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} b_2C_2P_{4,4} \\ b_1C_1P_{4,4} \end{pmatrix}.
$$

从 $PP^* = B_0$的中间 2×2块，

$$
\Sigma\Sigma^* + \Lambda\Lambda^* = I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{3.6}
$$

Let

$$
G = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & -\ell_{2,1} \\ -\ell_{1,2} & \ell_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2^{-1} & 0 \\ 0 & C_1^{-1} \end{pmatrix},
$$

并注意到

$$
G\Sigma = \det \mathfrak{L} \begin{pmatrix} TC_2^{-1} & 0 \\ 0 & TC_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad G\Lambda = \begin{pmatrix} \ell_{1,1}b_2 - \ell_{2,1}b_1 \\ -\ell_{1,2}b_2 + \ell_{2,2}b_1 \end{pmatrix} P_{4,4}.
$$

因此，在 G 左侧和 G^* 右侧应用方程（3.6），并比较（1，2）块项可得，

$$
-\left[\ell_{1,1}\ell_{1,2}^* C_2^{-1}C_2^{-*} + \ell_{2,1}\ell_{2,2}^* C_1^{-1}C_1^{-*}\right] = (\ell_{1,1}b_2 - \ell_{2,1}b_1)(-\ell_{1,2}b_2 + \ell_{2,2}b_1)^*. \tag{3.7}
$$

3.3. 二分。 有了方程（3.7），现在我们可以陈述并证明以下引理。回顾一下， s 是 C.的大小

引理 3.4. 如果 $s > 1$，那么 $b_1b_2^* = 0$ 和

(i) $\ell_{1,2} = 0 = \ell_{2,1}$ *or*
(ii) $\ell_{1,1} = 0 = \ell_{2,2}$.

证明。 如果方程（3.7）的右侧不为 0，那么要么 $C_1^{-1}C_1^{-*}$和 $C_2^{-1}C_2^{-*}$可交换，要么 $C_j^{-1}C_j^{-*}$ 对于 $j = 1$ 或 $j = 2$. 而言是单位元的倍数。在这两种情况下，$C_1^*C_1$和 $C_2^*C_2$都可交换，因此，由于 $\{C_1^*C_1, C_2^*C_2\}$生成 $M_s(\mathbb{C})$ 作为一个 C*-代数，$s = 1$. 因此，若 $s > 1$，则 方程（3.7）的右侧为 0。

若 $\ell_{1,1}\ell_{1,2}^* \neq 0$或 $\ell_{2,1}\ell_{2,2}^* \neq 0$，那么它们都不为零，并且再次有， $C_1^*C_1$和 $C_2^*C_2$可交换，且 $s = 1$. 因此，若 $s > 1$，则 $\ell_{1,1}\ell_{1,2}^* = 0 = \ell_{2,1}\ell_{2,2}^*$。由于 $\mathfrak{L}$ is可逆，存在

两种情况：要么 $\ell_{2,1}=0=\ell_{1,2}$ （并且 $\ell_{1,1}\neq 0\neq \ell_{2,2}$），要么 $\ell_{1,1}=0=\ell_{2,2}$ （并且 $\ell_{2,1}\neq 0\neq \ell_{1,2}$）。无论哪种情况， $b_1b_2^*=0.$ □

引理 3.5。如果 $s>1$，那么 $b=0.$

证明。 反证法，假设 $s>1$ 且 $b\neq 0$.注意，$b_1b_2^*=0$ 引理 3.4 的结论适用于 $\mathfrak{P}.$ 的任意自同构。因此，不失一般性，$b_1\neq 0$ 且 $b_2=0.$。再次应用引理 3.4 可得，要么 $\ell_{j,\ k}=0$，其中 $j\neq k$；要么 $\ell_{j,\ k}=0$，其中 $j=k.$。假设第一种情况成立。给定实数 θ，令 f_θ 表示由 $f_\theta(y_1,y_2)=e^{i\theta}(y_2,y_1)$ 定义的 f_θ 的自同构，并令 $\psi=\varphi\circ f_\theta.$。因此 $\psi\colon \mathfrak{P}\to\mathfrak{P}$ 是一个自同构，且

$$\psi(0)=\varphi\circ f_\theta(b_1,0)=\varphi(0,e^{i\theta}b_1)=(\varphi_1(0,e^{i\theta}b_1),\ \varphi_2(0,e^{i\theta}b_1)).$$

因此 $\varphi_1(0,e^{i\theta}b_1)$ $\varphi_2(0,e^{i\theta}b_1)$ 恒等于 0。由解析性，存在某个 k，使得对所有 θ，都有 $\varphi_k(0,e^{i\theta}b_1)=0$，因此，无论是 $k=1$ 还是 $k=2$，我们都有 $g_k(z)=\varphi_k(0,z)$ 恒等于 0。由于 $g_1(0)=b_1\neq 0$，可知 $g_2(z)$ 恒等于 0。因此 $0=g_2'(0)=\ell_{2,\ 2}\neq 0$，矛盾。

现在改为假设 $\varphi_{j,\ j}=0$ 对于 $j=1,\ 2$。在这种情况下，令 $f_\theta(y_1,y_2)=e^{i\theta}(y_1,y_2)$ 和 $\psi=\varphi\circ f_\theta\circ\varphi.$ 因此，

$$\psi(0)=\varphi(e^{i\theta}b_1,0)$$

并且 $\varphi_1(e^{i\theta}b_1,0)$ $\varphi_2(e^{i\theta}b_1,0)$ 恒等于 0。因此 $g_2(z)=\varphi_2(z,0)$ 恒等于 0，从而$0=g_2'(0)=\ell_{2,\ 1}\neq 0$，这与假设矛盾，由此可知 $b_1=0=b_2.$ □

引理 3.6. 若 $s=1$，则 $b=0.$

证明。由于 $s=1$，我们有 $C_1,C_2\in\mathbb{C}$ 是模为 1 的，且 $\mathfrak{P}[1]$ 是集合 $\{z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_1|+|z_2|<1\}.$ 事实上，给定 $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$，矩阵

$$\begin{pmatrix} z_1^* & z_2\\ z_2^* & z_1\end{pmatrix}$$

是压缩映射，当且仅当自伴矩阵，

$$\begin{pmatrix} r & z_2e^{it}\\ z_2^*e^{-it} & r\end{pmatrix}$$

是压缩映射，其中 $z_1=re^{it}$ 是 $z_1.$ 的极分解。后一个矩阵的特征值为 $r\pm|z_2|$，因此当且仅当 $|z_1|+|z_2|<1$.时，它是压缩映射

集合 $\mathfrak{P}[1]$ 称为伪椭圆，而 $f=\varphi[1]:\ \mathfrak{P}[1]\to\mathfrak{P}[1]$ 是一个自同构（按经典多复变函数论的意义而言）。已知（见 [JP08]），$\mathfrak{P}[1]$ 的自同构是以下形式映射的复合：$(z_1,\ z_2)\mapsto(\gamma_1z_1,\ \gamma_2z_2)$ 和 $(z_1,\ z_2)\mapsto(z_2,\ z_1)$，其中 $\gamma_j\in\mathbb{C}$ 为模为 1 的（证明用到了多复变函数论中的技巧

复变量和李群）。特别地，$b = 0$. 因此，无论如何 $b = 0$ 和 φ根据 [HKM11定理 4, 都是线性的。4], 因为 $\varphi(0) = b = 0$ 且定义域 $\mathfrak{P}$ 是圆对称的。□

现在，我们给出一个基于本文结果的自包含引理 3.6 的另一种证明。

引理 *3.6*的第二个证明。 除了方程（3.5）中通过比较方程（3.4）和（3.2）得到的恒等式外，注意到

$$P_{1,1}Q_{4,1}^* + P_{1,3}Q_{4,3}^* = 0$$
$$P_{1,1}Q_{4,2}^* + P_{1,2}Q_{4,3}^* = 0,$$

可概括为

$$Q_{4,3}^* \begin{pmatrix} P_{1,3} \\ P_{1,2} \end{pmatrix} = -P_{1,1} \begin{pmatrix} Q_{4,1}^* \\ Q_{4,2}^* \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

根据 $PP^* = B_0$ 的（1, 2）和（1, 3）项，并使用 $T_j = Q_{4\,3,}^{-*}$ ，

$$\begin{pmatrix} P_{1,2} & P_{1,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{2,2}^* & \ell_{1,2}^* \\ \ell_{2,1}^* & \ell_{1,1}^* \end{pmatrix} = Q_{4,3} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

等价地,

$$Q_{4,3}^{-*} \begin{pmatrix} P_{1,3}^* & P_{1,2}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{2,1} \\ \ell_{1,2} & \ell_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2^* & b_1^* \end{pmatrix}.$$

同样，由 $QQ^* = B_0$ 的 (4, 2) 和 (4, 3) 项,

$$P_{1,1}^{-1} \begin{pmatrix} Q_{4,1} & Q_{4,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{2,1} \\ \ell_{1,2} & \ell_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2^* & b_1^* \end{pmatrix}.$$

由此可得

$$Q_{4,3}^{-1} \begin{pmatrix} P_{1,3} \\ P_{1,2} \end{pmatrix} = P_{1,1}^{-*} \begin{pmatrix} Q_{4,1}^* \\ Q_{4,2} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

由方程（3.8）和（3.9），

$$(|Q_{4,3}|^2 + |P_{1,1}|^2) \begin{pmatrix} Q_{4,1}^* \\ Q_{4,2} \end{pmatrix} = 0$$

并且我们得出$Q_{4,\ 1} = Q_{4,\ 2} = 0$ 因此 $b = 0$. □

3.4. 定理**1.1**的证明。由引理3.5 和引理3.6 可知 $b = 0$ 因此，根据[HKM11，定理 4.4]，φ 是线性的。

由于 φ 是线性的，

$$\varphi(x) = (w_1, w_2),$$

其中

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathfrak{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

若 $s > 1$，则由引理 3.4 并与自同构 $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$复合后，可假设 $\mathfrak{L}$ 是对角的，此时对角元必为模为 1 的，证明完成。

现在设 $s = 1$. 由引理 3.6 的（第一种）证明可知，φ 是平凡的。或者，由引理 3.3 及关系式 $PP^* = B_0$，可得矩阵

$$\begin{pmatrix} \ell_{2,2} & \ell_{2,1} \\ \ell_{1,2} & \ell_{1,1} \end{pmatrix} T$$

是酉矩阵。因此 $\mathfrak{L}$ 是酉矩阵的倍数。由于 φ 是 $\mathfrak{P}$ 的自同构，我们得出 $\mathfrak{L}$ 是酉矩阵。特别地，$|\ell_{1,1}|^2 + |\ell_{2,1}|^2 = 1$. 由于 $(t, 0)$ 对于 $0 < t < 1$ 属于 $\mathfrak{P}$，所以 $\varphi(t, 0) = t(\ell_{1,1}, \ell_{2,1})$ 也属于其中。由此，根据命题 2.1 的 (c) 项可得 $\ell_{1,1}\ell_{2,1} = 0$. 类似的论证表明 $\ell_{1,2}\ell_{2,2} = 0$. 因此 $\mathscr{L}$ 是酉矩阵，并且对于 $j \neq k$，要么 $\ell_{j,k} = 0$，要么对于 $j = k$，$\ell_{j,k} = 0$，证明完成。□

References

[A+] 《自由势函数》，arXiv:2005.01850。2、6、13[BPT] G. Blekherman、P.A. Parrilo、R.R. Thomas（编），《半定优化与凸代数几何》，SIAM，2013。4[dOH06] M.C. De Oliveira 和 J. W. Helton，《面向矩阵不等式的计算机代数》，《国际控制杂志》，（2006）79:11，1382-1400，DOI:10.1080/00207170600725529 4[dOHMP] Mauricio C. de Oliveira、J. William Helton、Scott McCullough 和 Mihai Putinar，《工程系统与自由半代数几何》，载于《代数几何的新兴应用》，17–61，IMA Vol. Math. Appl.，149，施普林格，纽约，2009。4[EHKM] Eric Evert、Bill Helton、Scott McCullough 和 Igor Klep，《圆形自由谱胚》，《数学分析与应用杂志》，445（2017），第1期，1047–1070。2、7、9、12[HKM11] Bill Helton、Igor Klep 和 Scott McCullough，《适当解析自由映射》，《泛函分析杂志》260（2011），第5期，1476–1490。2、6、7、21、22[HKM12] Bill Helton、Igor Klep 和 Scott McCullough，《自由分析、凸性与 LMI 域》。载于《系统、优化与控制中的数学方法》，195–219，Oper. Theory Adv. Appl.，222，Birkhäuser/Springer Basel AG，巴塞尔，2012。12

[HKMV20]Bill Helton、Igor Klep、Scott McCullough 和 Jurij Volˇciˇc，《谱胞与谱球之间的双解析自由映射》，《泛函分析杂志》278，第11期，2020年6月15日，doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108472。6、7、11[KVV14] Dmitry Kalyuzhnyi-Verbovetskiˇi 和 Victor Vinnikov，《自由非交换函数理论基础》，《数学调查与专著》199，Amer. Math. Soc.，2014。5、12[KS] Igor Klep 和 ˇSpela ˇSpenko，《通过矩阵不变量研究自由函数理论》，Canad. J. Math. 69（2017），第2期，408–433。12[K] A. Kodama，《广义复椭球的全纯自同构群》，《复变函数与椭圆方程》59（2014）1342–1349。7[M] Scott McCullough，《超Reinhardt自由谱胞》，arXiv:2107.11641 7、8[MT] S. McCullough 和 N. Tuovila，《Reinhardt自由谱胞》，《线性代数及其应用》640（2022），91–117。7、8[SIG97] R.E. Skelton、T. Iwasaki、K.M. Grigoriadis，《线性控制设计的统一代数方法》，泰勒与弗朗西斯，1997。4[JP08] M. Jarnicki 和 P. Pflug，《多复变函数入门：Reinhardt域》，欧洲数学学会数学教材。欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2008。viii+359 pp。ISBN：978- 3-03719-049-4。7、20[WSV12] H. Wolkowicz、R. Saigal、L. Vandenberghe（编），《半定规划手册：理论、算法与应用》，国际运筹学与管理科学丛书27，施普林格，2012。4

Index

B_0, 15E^c,
10E^r,
10L_A, 3
S, 13
U^*XU,
1$X \oplus Y$,
1$\mathbb{C}<x>$,
3$\Lambda_A(x)$,
3$\mathcal{B}_G$, 4
$\mathcal{D}_A$, 4$\mathcal{D}_R$,
4$\mathscr{L}$, 1$\mathfrak{L}$,
15$\mathfrak{P}[n]$,
1$f[n]$, 5

解析的，5相关谱球，4
自同构，2，6

球等价，11球极
小，11双解析，
6有界的，5

圆对称的，6关于直和与酉相似封闭，4关
于直和封闭，1关于酉相似封闭，1

求值，3

自由代数，3自由解析函
数，1自由解析映射，2
自由函数，5自由映射，
6自由多项式，3自由集
合，4自由谱半空间，1，
4

齐次线性铅笔，3超
Reinhardt，8

逆，6

词长，3层级，4

极小定义，12

阶数至多为 m，12

开，5

幂级数，12

保持直和与酉相似，5保持交织关系，6保持
相似关系，6

谱球，4谱半空间，
4严格压缩，7

平凡自同构，2

University of Flordia, Gainesville, FL
电子邮件地址：munirbenjemaa@ufl.edu

Department of Mathematics, University of Flordia, Gainesville, FL
电子邮箱地址：sam@ufl.edu