# 强词闭群的有限正规子群

Filipp D. Denissov

莫斯科国立大学数学力学系，莫斯科 119991，列宁山，莫斯科国立大学。莫斯科基础与应用数学中心。
denissov.filipp@gmail.com

A. A. Klyachko、V. Yu. Miroshnichenko 和 A. Yu. Olshanskii 最近的一篇论文证明，任意有限强词闭群的中心都是它的直因子。本文的结果之一是将这一重要事实推广到任意强词闭群的有限正规子群情形。由此可知，具有非阿贝尔挠子群的有限生成幂零群不是强词闭群。

arXiv:2301.02752v2 [math.GR] 1 Feb 2023

## 1. 引言

群 $G$ 的子群 $H$ 称为言词闭 [MR14] ，如果任意形如以下形式的方程

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = h, \text{ 其中 } w \text{ 是自由群 } F(x_1, \dots, x_n) \text{ 的一个元素，且 } h \in H,$$

在 $G$ 中有解的方程组在 $H$ 中也有解。如果每个系数取自 H 的方程组

$$\{w_1(x_1,\dots) = 1,\dots, \ \ , w_m(x_1, \dots) = 1\}, \text{ where } w_i \in H * F(x_1, \dots, x_n) \text{ (and } * \text{ means the free product)}$$

在 $G$ 中有解的方程组在 $H$ 中也有解，则称子群 $H$ 在 $G$ 中是 代数闭的。注意，如果子群 $H$ 在群 $G$ 中代数闭，那么它在 $G$ 中是言词闭的。

如果群 $G$ 在任何将其作为言词闭子群的群中都代数闭，则称其为强词闭群。因此，词闭性（以及代数闭性）是子群的一种性质，而强文字闭性则是抽象群的一种性质。强词闭群的范围相当广。例如，它包括

— 所有阿贝尔群 [Maz18],— 所有自由群 [KM18],— 所有不含非平凡有限正规子群的几乎自由群 [KM18], [KMM18],— 所有可非平凡地分解为自由积的群 [Maz19],— 除克莱因瓶外所有连通曲面的基本群 [Maz18], [Kly21],— 所有具有非阿贝尔单底的有限群 [KMO21],— 无限二面体群 [KMM18] 以及阶不能被 8 整除的任意有限二面体群[KMO21],— 所有不含非平凡有限正规子群的圆柱双曲群 [Bog22]。

T非强文字闭群的类别也相当广泛。此类群包括：— 前文提到的克莱因瓶基本群 [Kly21],— 离散海森堡群 [KMO21],— 中心不是其直因子的任意有限群（特别是任意有限非阿贝尔幂零群） [KMO21], [RKK17], [KM18]。

证明一个群具有强文字闭性（以及证明其不具有强文字闭性）并非易事。例如，在 [KMO21], 中提出了这样一个问题：

**问题 1.** 是否存在有限生成幂零非阿贝尔强文字闭群?

对这个问题给出否定回答，将对上文提到的最后两个非强文字闭群实例作出广泛推广。迄今为止，我们对这个问题给出了部分答案。更确切地说，我们证明了，具有非阿贝尔挠子群的有限生成幂零群，以及某些具有阿贝尔挠子群的有限生成幂零非阿贝尔群，都不具有强文字闭性。

比强文字闭性更强的一种性质是成为强收缩[KMO21]。如果群 $H$ 是由群 $H$ 生成的簇中的任意群 $G \geqslant H$ 的收缩，那么它就称为强收缩。

我们回顾一些术语 [Neu67]:

— 由一类群生成的簇 $\mathcal{K}$ 是满足所有在 $\mathcal{K}$中的群里都成立的恒等式的全体群所构成的类；— 由一个群 $G$ 生成的簇记作 $\operatorname{var} G$。由此引出 [KMO21]提出的以下问题:

**问题 2**。 任意有限强收缩是什么?

在 [KMO21] 中给出了一些强收缩的例子。下一节中，我们将描述所有幂零强收缩。

下面简要列出我们使用的**符号**。

若 $x$、 $y$是某个群的元素，则符号 $[x, y]$ 表示它们的交换子 $x^{-1}y^{-1}xy$。符号 ord($x$) 表示群 $G$中元素 $x$ 的阶。群 $G$的中心记作$Z(G)$，其交换子子群记作 $G'$。群 $G$ 中子集 $X$ 的中心化子记作 $C(X)$。符号 $\langle\langle X\rangle\rangle$ 表示群 $G$ 中子集 $X$ 的正规闭包（即群 $G$ 中所有包含 $X$的正规子群的交）。以基 $X$ 为基的自由群记作$F(X)$；若 $X$ 有 $n \in \mathbb{N}$ 个元素，则记作 $F_n$。从 $X$ 到其自身的恒等映射记作 $id$。我们用符号 $H \cong G$ 表示群 $H$ 与 $G$ 同构。最后，符号 $H \leqslant G$表示群 $H$ 是 $G$的子群。符号 $H \trianglelefteq G$ 表示 $H$ 是 $G$的正规子群。

作者感谢导师 Anton Alexandrovich Klyachko 提出问题，并在研究过程中给予宝贵意见。

## 2. 幂零强收缩

注意，当 $G$ 是阿贝尔群时， $H \leqslant G$ 是其收缩，当且仅当 $H$ 是 $G$ 的直和项。这意味着，对于阿贝尔群 $G$ ，成为强收缩的性质等价于 $G$ 是任意包含 $G$ 的群 $H \in \operatorname{var} G$ 的直和项。为了进一步讨论，我们需要了解所有阿贝尔群簇的描述（见 [Fuc70], 第 18 节，习题 7）:

> 阿贝尔群簇恰好是以下这些群类：1）所有阿贝尔群组成的类；2）所有周期整除 $n \in \mathbb{N}$ 的阿贝尔群组成的类。

回顾一下，群的周期 $G$ 是满足以下条件的最小数 $n \in \mathbb{N}$: 对于任意 $x \in G$，都有 $x^n = 1$。如果这样的数存在，则 $G$ 是一个有界周期群。

首先，考虑 $G$ 不是有界周期群的情形。于是，根据描述，$\operatorname{var} G$ 是所有阿贝尔群组成的类。可除阿贝尔群具有以下性质（例如，参见 [Kur60]）：

> 如果 $G$ 是可除阿贝尔群，且 $H$ 是满足 $G \leqslant H$ 的阿贝尔群，那么 $G$ 是 $H$ 的直和项。

提醒一下，若对于任意 $g \in G$ 和 $n \in \mathbb{N}$，方程 $x^n = g$ 在群 $G$ 中都有解，则称群 $G$ 为可除群。

**命题 1.** 无界周期阿贝尔群 $G$ 是强收缩，当且仅当它是可除群。

**证明**。 充分性由上文给出的事实可知。设 $G$ 是无界周期阿贝尔群。那么，正如前文所述，$\operatorname{var} G$ 是所有阿贝尔群组成的类。特别地，$\operatorname{var} G$ 包含一个可除群 $H$，其中含有 $G$ [Kur60]。然而，如果 $G$ 本身不可除，那么它就不是 $H$ 的直和项（因为可除群的直和项本身也是可除的 [Kur60]），所以 $G$ 不是强收缩。□

接下来讨论有界周期的阿贝尔群。Pr¨ufer 第一定理完整地描述了这类群 [Kur60]:

有界周期的阿贝尔群 $G$ $d$ 是主循环群的直和，即 $G \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}$，其中 $p_i$ 是素数， $k_i$ 是满足 $p_i^{k_i}|d$、 $i \in I$ 的自然数（$I$是指标集）。

我们需要以下形式的佐恩引理 [Fuc70]:

设 $M \neq \varnothing$ 是一个偏序集。若 $M$ 中的每条链（即 $M$的全序子集）都有上界，则 $M$ 含有一个极大元。

现在，我们可以开始进行描述:

**命题 2.** 一个有界周期的阿贝尔群 $G$ 是强收缩，当且仅当它分解为主循环群的直和时，任意两个不同直和项的阶要么相等，要么互素:

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^{m} C_{p_i^{k_i}}(n_i), \text{ where } C_{p_i^{k_i}}(n_i) \text{ is equal to the direct sum of } n_i \text{ copies of the group } \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}},$$

其中所有素数 $p_i$ 互不相同， $m$、 $k_i \in \mathbb{N}$和 $n_i$ 是某些基数。

**证明。** 假设 $G$不能分解为这样的直和。我们可以假设

$$G = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j\in I_i} \mathbb{Z}_{p_i^{k_j}}, \tag{1}$$

其中 $m \in \mathbb{N}$、 $|I_i| = n_i$ 以及 $k_j$、 $j \in I_i$ 之间只有有限多个不同的对象（因为 $G$ 是有界周期群），但存在 $i \in \{1, \ldots, m\}$，使得对于某些 $j_1$、 $j_2 \in I_i$、 $k_{j_1} \neq k_{j_2}$。

考虑群： $H = \bigoplus_{i=1}^{m} C_{p_i^{s_i}}(n_i)$，其中

$s_i = \max\{k_j \mid \mathbb{Z}_{p_i^{k_j}} \text{是分解 (1)}\}$, $i = 1,2, \ldots, m.$ 中的一个直和项

由于 $G$ 和 $H$ 的周期均为 $\prod_{i=1}^{m} s_i$，根据阿贝尔簇的描述可得 $H \in \operatorname{var} G$。

考虑单射 $f: G \to H$，它在 (1) 中每个直和项上的作用如下：令 $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in I_i$, $f: \mathbb{Z}_{p_i^{k_j}} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{p_i^{s_i}}$，其中 $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}}$ 是将 $C_{p_i^{s_i}}(n_i)$ 分解为直和后得到的第 $j$ 个项。(1) 中的每个直和项都映射到 $H$ 分解中相应的直和项，因此，将 $f$ 限制在 $\mathbb{Z}_{p_i^{k_j}}$ 上得到一个自然的单射：若 $k_j = s_i$，那么它就是恒等映射；否则，它映射到 $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}}$ 的一个阶为 $p_i^{k}$ 的子群。由有界周期阿贝尔群分解为主循环群直和的唯一性 [Fuc70], 可知， $f(G)$ 不是 $H$ 的直和项。因此， $G$ 不是强收缩。

现在，假设 $G$ 具有定理陈述中的分解。令 $H \in \operatorname{var} G$，并令 $f: G \hookrightarrow H$ 为一个单态射。由于任何单态射都保持元素的阶， $G$ 的第 $p_i$ 个分量在 $f$ 作用下映射到 $H$ 的第 $p_i$ 个分量，因此只需对情形 $G = C_{p^k}(n)$ 证明定理，其中 $p$ 是素数， $k \in \mathbb{N}$，且 $n$ 是某个基数。

下面证明存在这样的 $X \leqslant H$ 使得 $H = f(G) \oplus X$。应用佐恩引理，取所有与 $f(G)$交集平凡的 $H$的子群组成的集合，作为 $M$:

$$M = \{Y \leqslant H \mid Y \cap f(G) = \{0\}\}.$$

在 $M$ 上引入如下偏序：对于 $X$、$Y \in M$、 $X \leqslant Y$，若 $X$ 是 $Y$ 的子群，则.....。可以直接验证，这确实是 $M$ 上的一个偏序。集合 $M$ 非空： $\{0\} \in M$。任何与 $f$ （$G$）交集平凡的子群链 $\{Y_\alpha\} \subseteq M$ 都有一个上界 $Y \in M$, 其中 $Y = \cup_\alpha Y_\alpha$。因此,

佐恩引理适用，且 $M$ 含有一个极大元 $X$： $X \leqslant H$、 $X \cap f(G) = \{0\}$，并且 $X$ 不是任何满足此性质的更大子群（相对于我们引入的偏序）的子群。

由 $X \cap f(G) = \{0\}$ 可得 $f(G) + X = f(G) \oplus X$。剩下要证明 $H = f(G) + X$。令 $h \in H$。存在这样的 $k \in \mathbb{N}$，使得 $kh \in f(G) + X$。事实上，否则 $\langle h \rangle \cap (f(G) + X) = \{0\}$，这意味着 $(\langle h \rangle + X) \cap f(G) = \{0\}$，从而与 $X$ 的极大性矛盾。

令 $s$ 为这些数 $k$ 中最小的一个。不失一般性，假设 $s$ 是素数，或者 $s = 1$（否则，用 $h$ 的一个幂代替 $h$）。有两种情况：

1) $s = p$。于是，对某些 $g \in G$、 $x \in X$，有 $ph = f(g) + x$。若 $g = pg_1$，则 $g_1 \in G$ ($g_1$ 可以等于零)，从而 $ph - f(pg_1) = x$。然而，由 $h - f(g_1) \notin X$（因为 $h \notin f(G) + X$），可得 ( $X + \langle h - f(g_1) \rangle) \cap f(G) = \{0\}$，这与 $X$ 的极大性矛盾。因此，对任意 $g_1 \in G$，都有 $g \neq pg_1$。由于 $g \neq 0$，$\mathrm{ord}(g) = p^k$。不过，$\mathrm{ord}(ph) = p^r < p^k$，所以 $p^r(ph) = 0 = p^r(f(g)) + p^r x$。由于和 $f(G) + X$ 是直和， $p^r f(g) = p^r x = 0$，这意味着 $p^r g = 0$，这是不可能的。

2） $s \neq p$。对于周期为 $p$ 的阿贝尔群，映射 $g \mapsto sg$ 是一个自同构，因此，由于 $sh = f(g)+x$ 对某个 $g \in G, x \in X$ 成立，存在这样的 $g_1 \in G, x_1 \in X$，使得 $g = sg_1, x = sx_1$。于是， $s(h-f(g_1)-x_1) = 0$。 $H$ 中没有任何非平凡元素的阶等于 $s$ 的阶，因此 $h = f(g_1) + x_1$。

因此， $H = f(G) \oplus X$，而且 $G$ 是一个强收缩。 □

**命题 3.** 强收缩的中心是它的直因子。

**证明.** 设 $G$ 是一个强收缩。任意群的中心都是正规子群，因此只需证明 $\sim$： $Z(G)$ 是 $G$ 的一个收缩。考虑 $G$ 与其副本 $G$ 的中心积，它们具有相同的中心：

$$K = G \underset{Z(G)=Z(\widetilde{G})}{\times} \widetilde{G} = (G \times \widetilde{G})/\{(g, g^{-1}) | g \in Z(G)\} \in \mathbf{var}\, G.$$

$\sim$群 $G$ 与群 $G$同构，因此它也是一个强收缩。设 $\rho$ 是从 $K$ 到其子群 $G$的收缩映射。由群 $K$中群 $G$ 与群 $G$交换这一事实，我们得到$\rho(G) \leqslant Z(G)$。根据收缩映射的定义，对于任意元素 $g \in Z(G)$, $\rho(g) = g$ 都成立。因此， $\rho$ 在群 $K$ 的子群 $G$ 上的限制就是到 $Z(G)$的所需收缩映射。□

下面这个简单命题表明，考虑幂零群并不会产生任何新的强收缩子群：

**命题4.** 幂零强收缩是一个阿贝尔群。

**证明.** 幂零群的任何非平凡正规子群都与该群的中心有非平凡交（参见 [KM79]）。由此以及命题 3 可得，任何幂零强收缩都等于其中心。□

因此，我们证明了以下定理：

**幂零强收缩定理**。 幂零强收缩恰好是可除阿贝尔群，以及有界周期的阿贝尔群；在这些群分解为主循环群的直和时，任意两个不同直和项的阶要么相等，要么互素。

在下一段 中，我们将说明许多幂零群甚至不是强词闭的。 .

### 3. 强词闭群的有限正规子群

我们称群表示 $\langle X \mid R \rangle$是关于群表示 $\langle Y \mid S \rangle$的有限表示，如果存在有限集 $A$ 和 $B$，使得 $\langle X \mid R \rangle \cong \langle X' \mid R' \rangle$，其中 $X' = Y \cup A$、 $R' = S \cup B$。

下面的引理表明，这一定义实际上是一种群性质（也就是说，它不依赖于群表示的选择），因此，讨论一个群相对于另一个群的有限可表示性是有意义的：

**引理 1.** 设群表示 $\langle X \mid R \rangle$ 有限呈示于群表示 $\langle Y \mid S \rangle$ 和 $\langle Y \mid S \rangle \cong \langle Y' \mid S' \rangle$。那么 $\langle X \mid R \rangle$ 有限呈示于 $\langle Y' \mid S' \rangle$。

**证明**。 我们不妨假设 $X = Y \cup A$ 和 $R = S \cup B$，其中 $A$ 和 $B$ 是有限集。众所周知（例如，参见 [LS15]），由群表示 $\langle Y \mid S \rangle$ 和 $\langle Y' \mid S' \rangle$ 定义的群同构，当且仅当

群表示 $\langle Y' \mid S' \rangle$ 可由群表示 $\langle Y \mid S \rangle$ 经有限次*Tietze* 变换得到：

— 向集合 $S$ 中添加其后果的任意集合 $T \subseteq \langle\langle S \rangle\rangle \trianglelefteq F(Y)$，

— 向集合 $Y$ 中添加任意集合 $\widetilde{Y}$，并向 $S$ 中添加所有形如 $\widetilde{y} = w_{\widetilde{y}}$ 的关系，其中 $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$，$w_{\widetilde{y}} \in F(Y \cup \widetilde{Y})$。

只需证明引理在以下情形成立：$\langle Y' \mid S' \rangle$ 可由 $\langle Y \mid S \rangle$ 应用一次 Tietze 变换得到。容易验证，在第一种变换的情形下，$X' = X$ 和 $R' = R \cup T$；而在第二种变换的情形下，$X' = X \cup Y$ 和 $R' = R \cup \{\widetilde{y} = w_{\widetilde{y}} \mid \widetilde{y} \in Y, w_{\widetilde{y}} \in F(Y)\}$ 给出了所需的群表示。

□

根据引理 1，可以引入以下定义：

群 $G$ 有限呈示于群 $H$，是指存在这样一个 $G$ 的表示，使得它有限表示于 $H$的任意表示。

**引理 2**。假设 $G$包含子群 $H$ 和有限正规子群 $N$，使得 $G/N$ 有限呈示于 $H/(H \cap N)$。那么 $G$ 有限呈示于 $H$。

**证明** （稍作修改后）复现了 Hall 定理 [Hal54] 关于群在扩张下保持有限可表示性的证明（另见 [Rob82]）。

设 $G$ 是一个群，$H = \langle X \mid R \rangle \leqslant G$，且 $N = \langle Y \mid S \rangle \trianglelefteq G$ 是它的有限子群，其中 $Y$ 和 $S$ 是有限集。根据引理的条件，群 $G/N$ 有限呈示于 $H/(H \cap N) = \langle X \mid R \cup C \rangle$，其中 $\langle\langle C \rangle\rangle = H \cap N$，且集合 $C$ 是有限的。因此

$$G/N \cong \langle X \cup A \mid R \cup C \cup B \rangle,$$

其中集合 $A$ 和 $B$ 是有限的。

我们来构造群 $G$ 的一个表示。取 $\overline{X} \cup \overline{A} \cup \overline{Y}$ 作为生成元集，其中集合 $\overline{X}$、$\overline{A}$、$\overline{Y}$ 分别与集合 $X$、$A$、$Y$ 一一对应。集合 $R$、$S$、$C$ 和 $B$ 分别与集合 $\overline{R}$、$\overline{S}$、$\overline{C}$ 和 $\overline{B}$ 对应。取以下各集合的并作为定义关系集：$\overline{R}$、$\overline{S}$、$\overline{C}_1 = \{c w_c^{-1} \mid c \in \overline{C}, w_c \in F(\overline{Y})\}$、$\overline{B}_1 = \{b w_b^{-1} \mid b \in \overline{B}, w_b \in F(\overline{Y})\}$（$c \in \overline{C}$ 和 $b \in \overline{B}$ 分别视为来自 $F(\overline{X})$ 和 $F(X \cup A)$ 的字）、$\overline{T} = \{a^{-1} y a w_{a,y}^{-1},\ a y a^{-1} v_{a,y}^{-1} \mid a \in \overline{A}, y \in \overline{Y},\ w_{a,y}, v_{a,y} \in F(\overline{Y})\}$：

$$\widetilde{G} = \langle \overline{X} \cup \overline{A} \cup \overline{Y} \mid \overline{R} \cup \overline{S} \cup \overline{C}_1 \cup \overline{B}_1 \cup \overline{T} \rangle.$$

考虑一个满射同态 $\theta\colon G \to G$，它由生成元上的以下双射 $\overline{X} \to X$, $\overline{A} \to A$, $\overline{Y} \to Y$ 定义（定义关系在此类映射下会映为真恒等式，因此这样的同态存在）。子群上的限制 $\theta|_K \quad K \to N$ 是一个同构，因为 $K = \langle \overline{Y} \rangle \leqslant G$ 中字母表 $\overline{Y}$ 内的所有关系都是定义关系 $\overline{S}$ 的推论。此外，$K \trianglelefteq G$。

同态 $G/K \to G/N$ 由 $\theta$ 生成的群也是一个同构。现在，令 $g \in \ker\theta$。那么 $gK \in \ker\theta$，但 $\theta$ 是一个同构，因此 $g \in K$。最后，$\theta|_K$ 是一个同构，因此 $g = 1$。 □

以下引理给出了群 $G$ 的子群 $H$ 具有代数闭性的一个判据，适用于 $G$ 有限呈示于 $H$ 的情形（类似的命题请参阅 [MR14]）：

**引理 3**。假设 $H = \langle X \mid R \rangle$ 是 $G$的一个子群，且 $G$有限呈示于 $H$。当且仅当 $H$ 是 $G$的一个收缩时，子群 $H$ 在 $G$ 中代数闭。

**证明**。假设 $H$在 $G$中代数闭，且 $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$、$B = \{s_1, \ldots, s_n\}$ 是 $G$ 有限呈示于 $H$的定义中所涉及的集合。关系 $s_i(a_1, \ldots, a_m, X) = 1$, $i = 1, \ldots, n$ 对应于一个系数取自 $H$的方程组：

$$\begin{cases} s_1(t_1, \ldots, t_m, X) = 1 \\ \cdots \\ s_n(t_1, \ldots, t_m, X) = 1 \end{cases}$$

根据条件，它有一个解 $t_1 = a_1, \ldots, t_m = a_m$。由于 $H$在 $G$中的代数闭性，该方程组在 $H$中有一个解 $t_1 = h_1, \ldots, t_m = h_m$。映射 $X \sqcup \{a_1, \ldots, a_m\} \to H$, $x \in X \mapsto x$,

$a_i \mapsto h_i$ 可扩张为一个满射同态 $\varphi\colon G \to H$，因为在这种生成元映射下，$G$ 的定义关系都映射为成立的恒等式（注意，$R$ 是字母表 $X$中的词集）。

这个同态就是所需的收缩映射：令 $h \in H$，$h = v(x_1, \dots, x_r)$，$x_i \in X$。将同态 $\varphi$作用于这个字，我们得到：$\varphi(h) = v(\varphi(x_1) \dots, \varphi(x_r)) = h$。

群 $G$ 的子群 $H$ 的代数闭性，源于对每个群$G$ [MR14]，$H$ 在 $G$ 中的收缩性。

□

**逼近引理**。设 $C$ 是有限初等阿贝尔 $p$-群（其中 $p$ 是素数）。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 $t \geqslant k$，使得由 $C_i$ 个 $C$ 的副本构成的直积 $P = \times_{i=1}^{t} C_i$ 包含一个子群 $R$，该子群在 $P$ 上 $\operatorname{End} C$ 自同态代数的对角作用下保持不变，并具有以下性质：

1) $R \subseteq \bigcup \ker \rho_j$，其中 $\rho_j\colon P \to C_j$, $j = 1, \dots, t$ 是自然投影；2) 但是，对于基数为 $|J| = k$的任意子集 $J \subseteq \{1, \dots, t\}$，$R \cdot \times_{j \notin J} C_j = P$；3) 此外，每个这样的 $J$ 都包含在集合 $J' \supseteq J$ 中，使得 $P = R \times (\times_{j \notin J'} C_j)$；并且存在整数 $n_{ij} \in \mathbb{Z}$，使得投影 $\pi\colon P \to \times_{j \notin J'} C_j$ 的核为 $R$，其作用方式如下：$C_i \ni c_i \mapsto \prod_{j \notin J'} c_j^{n_{ij}}$，其中 $c_j \in C_j$ 是在同构$C_i \cong C \cong C_j$下与 $c_i$ 对应的元素。

以下定理推广了 [KMO21] 关于有限强言词闭群中心的结果。除了一些细微差别外，其证明也与该定理的证明类似。

**有限正规子群定理**。设 $H$ 是一个强词闭群。对于 $H$的任意有限正规子群 $T$，以及 $H$中任意阿贝尔子群 $A$，都有 $Z(C_T(A))$ 是 $C_T(A)$ 的一个直因子，且存在一个在 $H$中正规的不变补。这里 $C_T(X) = C(X) \cap T$。

**证明**。设 $H$ 是这样的群，并令 $L = C_T(A)$。对于每个素数 $p$，只需找到一个同态$\psi_p\colon L \to Z(L)$，它与共轭作用 $H \curvearrowright L$ 相交换（由于 $L \trianglelefteq H$，该作用定义良好），并且在 $L$的中心 $Z_p(L)$ 的 $p$-分量上是单射。于是，同态 $\psi\colon L \to Z(L)$,$x \mapsto \prod \pi_p(\psi_p(x))$ 在 $Z(L)$,$_p$ 上是单射，其中 $\pi_p\colon Z(L) \to Z_p(L)$ 是到 $p$-分量的投影，因此其核就是所需的补 $D$（$D$ 在 $H$ 中的正规性可由 $\psi$ 与 $H \curvearrowright L$交换这一事实推出）。

假设对于某个素数 $p$，不存在这样的同态，即每个与作用 $H \curvearrowright L$ 相容的同态$f\colon L \to Z(L)$ 在 $Z_p(L)$ 上都不是单射。那么它在极大初等阿贝尔 $p$-子群 $C \leqslant Z_p(L)$ 上也不是单射（因为 $L$ 是有限的，所以该子群也是有限的）。事实上，若 $x \neq 1 \in Z_p(L)$ 是一个满足 $f(x) = 1$ 的元素，那么将它提升到适当的幂 $d$，便得到 $f(x^d) = 1$和 $x^d \in C$,$x^d \neq 1$。

对 $C$ 应用逼近引理（取稍后指定的某个 $k$），选取 $t$，并考虑由 $H$ 这个群的 $t$ 个副本构成的纤维积：

$$Q = \{(h_1, \dots, h_t) \mid h_1 L = \dots = h_t L\} \leqslant H^t.$$

首先，我们来证明来自逼近引理的子群 $R \leqslant C^t \leqslant Q$ 是 $Q$ 的正规子群。子群 $R$ 在自同构 $\operatorname{Aut} C \leqslant \operatorname{End} C$ 的对角作用下保持不变。剩下需要证明的是，$Q$ 对 $P = C^t$ 的共轭作用是对角的。这由引理可知：

**引理 4.** 设 $G$ 是一个群，且 $N \trianglelefteq G$。如果对某些 $x, y \in G$，有 $xC(N) = yC(N)$，那么 $x$ 和 $y$ 在 $N$ 上的作用（通过共轭）相同。

**证明**。由 $x \quad C(N) = yC(N)$ 可知，对于某个 $c \in C(N)$，有 $x = yc$。那么对于 $n \in N$，我们有：

$$x^{-1} n x = c^{-1}(y^{-1} n y)c = y^{-1} n y.$$

最后这个等式成立，因为（由正规性可知）$y^{-1} n y \in N$ 和 $c \in C(N)$。 □

设 $q = (q_1, \dots, q_t) \in Q$, $p = (p_1, \dots, p_t) \in P$。由于 $q_1 L = q_2 L = \dots = q_t L$，于是（根据引理 4）$q^{-1} p q = \widetilde{q}^{-1} p \widetilde{q}$，其中 $\widetilde{q} = (q_1, \dots, q_1)$。这意味着 $Q$ 在 $P$ 上的共轭作用是对角的。

另一方面，共轭所诱导的对角作用给出了 $C^t$ 的一个自同态（这是由于 $C \trianglelefteq H$ 的正规性），而且 $R$ 对这类自同态的对角作用保持不变，从而得到 $R$ 在 $Q$ 中的正规性。

设 $G = Q/R$。首先，我们证明 $H$ 嵌入到 $G$中。群 $H$ 对角嵌入到 $Q$ 中：$h \mapsto (h, \dots, h)$，$h \in H$。这个同态也构成到 $G$ 中的嵌入，因为 $Q$ 中任意非平凡对角元素的所有投影都非平凡（而且 $R$ 包含在这些投影的核的并集中）。

现在，我们证明这个对角子群（也记作 $H$）在 $G$ 中的词闭性。考虑方程

$$w(x_1, \dots, x_n) = (h, \dots, h)$$

有一个解 在 $G$ 中，并设 $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n$ 是解 $x_1, \dots, x_n$ 的一个原像（在 $Q$ 中）。那么（在 $Q$ 中）：

$$w(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) = (hc_1, \dots, hc_t),$$

其中 $(c_1, \dots, c_t) \in R$。根据逼近引理的性质 1)，对于某个 $i$，有 $c_i = 1$。这意味着在 $H$（群本身）中，$w(\widetilde{x}_1^i, \dots, \widetilde{x}_n^i) = h$，其中 $\widetilde{x}_j^i$ 是向量 $\widetilde{x}_j$, $j = 1, \dots, n$ 的第 $i$ 个坐标。

取 $y_j = (\widetilde{x}_j^i, \dots, \widetilde{x}_j^i)$，$j = 1, \dots, n$。那么在 $H \leqslant G$ 中，以下结论成立：

$$w(y_1, \dots, y_n) = (h, \dots, h),$$

由此证明了 $H$ 在 $G$中的词闭性。

设 $U \leqslant L$。我们采用以下记法：

$U_i := \{(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) \mid u \in U\} \leqslant Q$，$i = 1, \dots, t$（坐标 $u$ 位于第 $i$个位置）。

剩下要证明的是，$H$ 在 $G$中不是代数闭的。

**引理 5.** 群 $Q$有限呈示于其子群 $H$。

**证明。** 根据引理 2，只需证明 $Q/(L_1 \times \cdots \times L_t)$ 有限呈示于 $\sim$ $\sim H/L$，其中 $L = \{(l, \dots, l) \mid l \in L\}$。然而，$Q = H \cdot (L_1 \times \cdots \times L_t)$，因此我们要证明的命题由此结论得出（参见 [KM79], 定理 4.2.4）：

设 $G$ 是一个群，$F$ 是它的子群，而 $K$ 是它的正规子群。则 $(K \cdot F)/K \cong F/(F \cap K)$。

因此，群 $\sim Q/(L_1 \times \cdots \times L_t)$ 不仅有限呈示于 $H/L$，而且与它同构。 □

由引理 3 和引理 5 可知，只需证明 $H$ 不是 $G$ 的收缩。设 $\rho : G \to H$ 是一个假设存在的收缩映射，并设 $\hat{}\rho : Q \to H$ 是它与自然满同态 $Q \to Q/R = G$ 的复合。此后，我们所说的所有子群和中心化子都与 $Q$ 有关。

让我们验证，对于每个 $i$，都有 $\hat{}\rho(L_i) \leqslant C_T(C_T(L)) \leqslant L$。首先，证明左侧的包含关系。设 $h \in C_T(L)$。那么，$h$ 与 $L$ 中的每个元素都交换；因此，作为 $Q$ 的一个元素，$h$ 与 $L_i$ 交换。将收缩映射 $\hat{}\rho$ 应用于这个等式，我们得到 $\hat{}\rho(h)$ $(= h)$ 与子群 $\hat{}\rho(L_i)$ 交换；根据中心化子的定义，这就证明了该包含关系。第二个包含关系由以下事实得出：$L = C_T(A) = C(A) \cap T$，这意味着

$$C_T(C_T(L)) \leqslant C_T(A \cap T) = C_T(A) = L.$$

这里的第一个包含关系成立，因为 $C(L) \geqslant A$。以下等式成立，因为 $A \leqslant T$ .

另一方面，对于 $i \neq j$，相互交换子子群 $[L_i, L_j]$ 是平凡的（如 $i$ 和 $j$ 不同的情形，$L_i$ 和 $L_j$ 包含在纤维积的不同分量中）。这意味着该相互交换子子群的像也平凡：$[\hat{}\rho(L_i), \hat{}\rho(L_j)] = \{1\}$。因此，$[L_i, \prod_{j \neq i} L_j] = \{1\}$ 且 $[\hat{}\rho(L_i) \prod_{j \neq i} \hat{}\rho(L_j)] = \{1\}$。若对某个 $i \neq l$，有 $\hat{}\rho(L_i) = \hat{}\rho(L_l)$，那么（根据众所周知的换位子恒等式）$[\hat{}\rho(L_i) \prod_j \hat{}\rho(L_j)] = \{1\}$，这意味着 $\hat{}\rho(L_i) \leqslant C_T(L)$（因为 $L = \hat{}\rho(L) \leqslant \prod_j \hat{}\rho(L_j)$）。

因此，若对某些不同的 $i$ 和 $j$，有 $\hat{\rho}(L_i) = \hat{\rho}(L_j)$，则 $\hat{\rho}(L_i) \leqslant C_T(L)$。由此并结合我们先前证明的包含关系，可得 $\hat{\rho}(L_i) \leqslant L \cap C_T(L) = Z(L)$。

令逼近引理中的 $k$ 等于 $T$ 的所有子群的个数，并令 $J$ 为所有互异数 $i$ 的集合，即满足对于任意 $l \neq i$，$\hat{\rho}(L_i) \neq \hat{\rho}(L_l)$ 的数。由于在 $\hat{\rho}(L_i) \leqslant T$ 中不同的子群不超过 $k$ 个，因此 $|J| \leqslant k$。于是，根据逼近引理的性质 3)，我们有如下分解：

$$\times_{i=1}^{t} C_i = R \times (\times_{i \in I} C_i),$$

其中 $I \subseteq \{1, \ldots, t\} \setminus J$ 是某个由非互异元素组成的集合。同样，根据逼近引理的性质 3)，投影 $\pi$：$\times_{i=1}^{t} C_i \to \times_{i \in I} C_i$ 到该分解的第二个因子的映射由一个整数矩阵 $(n_{ij})$ 定义，即对于 $c_i \in C_i$，$\pi$：$c_i \mapsto \prod_{j \in I} c_j^{n_{ij}}$，其中 $c_j$ 是在同构 $C_i \cong C \cong C_j$ 下与 $c_i$ 对应的元素。

这意味着，$\pi$ 到 $C = \{(c, \ldots, c) \text{上的限制} \mid c \in C \leqslant H\}$ 由以下公式定义：

$$\hat{\pi} : (c, \ldots, c) \mapsto \prod_{j \in I} c_j^{m_j}, \; m_j = \sum_i n_{ij}.$$

这里，$c_j$ 是在同构 $C \cong C_j$ 下与 $c$ 对应的元素。

于是（由于 $i \in I$ 不互斥，我们有 $\hat{\rho}(L_i) \leqslant Z(L)$），考虑如下复合：

$$\Psi : C \leqslant Q \to Z(L), \; c \overset{\pi}{\mapsto} \prod_{j \in I} c_j^{m_j} \overset{\hat{\rho}}{\mapsto} \prod_{j \in I} \hat{\rho}(c_j^{m_j}).$$

它可以延拓为一个同态 $\Phi : L \to Z(L)$，其定义公式类似：

$$\Phi : g \mapsto \prod_{j \in I} \hat{\rho}(g_j^{m_j}),$$

其中，$g \in L$ 和 $g_j \in L_j$ 是与 $g \in L$ 对应的元素。显然，它是 $\Psi$ 的延拓，也是一个同态；对于 $j \in I$，$\hat{\rho}(L_j) \leqslant Z(L)$，且群 $Z(L)$ 是阿贝尔群。这个同态与 $H$ 在 $L$ 上的共轭作用交换。事实上，设 $g \in H$，并令 $\mathfrak{g}$ 表示 $g$ 通过共轭对 $L$ 的作用，即对于 $x \in L$，$\mathfrak{g}(x) = g^{-1} x g$。我们来证明 $\Phi \circ \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \circ \Phi$。设 $h \in L$。那么 $\Phi(\mathfrak{g}(h)) = \prod_{j \in I} \hat{\rho}(g^{-1} h_j^{m_j} g) = \prod_{j \in I} g^{-1} \hat{\rho}(h_j^{m_j}) g = \mathfrak{g}(\Phi(h))$。倒数第二个等式成立，因为 $\hat{\rho}$ 是到 $H$ 的收缩映射，所以它在 $H$ 自身上作用为恒等映射。根据我们在开头所作的假设，这个同态的核与 $C$ 有非平凡交：$\ker \Phi \cap C \neq \{1\}$，所以限制 $\Psi = \Phi|_C$ 也有非平凡的核。

另一方面，$\Psi$ 是恒等映射，因为 $\Psi = \hat{\rho}|_C \circ \pi|_C = \hat{\rho}|_C \circ \hat{\pi} = \hat{\rho}|_C$（最后一个等式成立，是因为 $\hat{\pi}$ 是一个「遗忘」$R$ 坐标的投影，而 $\hat{\rho}(R) = \{1\}$ 是到商群的自然同态与到 $H$ 的收缩映射的复合），且 $\hat{\rho}|_C = id$，因为 $\hat{\rho}$ 是从 $Q$ 到 $H$ 的收缩映射，所以它在 $C$ 上作用平凡。由此得到的矛盾完成了证明。□

下面给出该定理的一些推论：

**推论 1.** 具有非阿贝尔挠子群的有限生成幂零群不是强词闭的。

**证明。** 取该群的挠子群作为定理中的 $T$，取此挠子群的中心作为 $A \neq \{1\}$。由于 $T$ 是幂零且非阿贝尔的，$T$ 的每个非平凡正规子群都与 $A$ [KM79], 有非平凡交，因此 $A$ 不是 $T$ 的直因子。□

**推论 2 [KMO21]。** 中心不是直因子的有限群不是强词闭群。

该定理未涵盖挠子群为阿贝尔群的有限生成幂零非阿贝尔群这一情形，目前仍不清楚这类群中是否存在强词闭群。迄今为止，我们只能对这个问题给出部分答案（见下一段中的第一个命题）。

**4. 幂零非强词闭群**

这里提醒一下，离散海森堡群是由两个自由生成元生成的二阶幂零类自由幂零群。容易验证，该群在3×3 上三角矩阵群中有一个忠实表示。

**命题5.** 设 $H$ 为离散海森堡群，其自由生成元为 $a$ 和 $b$，而 $N$为它的子群：

$$N = \langle\langle a^{\alpha}, [a,b]^{n} \rangle\rangle,\ \alpha, n \geqslant 0.$$

群 $G = H/N$ 是强词闭的，当且仅当 $\gcd(\alpha, n) = 1$。

**证明.** 令 $T(G)$ 为 $G$的挠子群。群 $H$ 的中心等于其交换子子群，并且同构于无限循环群。如前所述（参见命题4的证明），幂零群的任何非平凡正规子群都与其中心有非平凡交。因此，若 $T(G) = \{1\}$，则 $G = H$ 要么是离散海森堡群，要么 $G$ 是阿贝尔群。 $H$ 非强词闭性已在 [KMO21], 中证明，而阿贝尔群的强词闭性已在 [Maz18] 中证明。 $T(G) = \{1\}$ 的情形对应于 $\alpha = 0$、 $n = 0$ 和 $\alpha = 0$、$n = 1$ 的情形。

若 $\gcd(\alpha, n) = 1$，那么同样地， $G$ 是阿贝尔群，因为 $[a,b]^{\alpha} = [a^{\alpha}, b] \in N$；因此，它是强词闭的。

考虑 $\gcd(\alpha, n) = d \neq 1$ 的情形。不失一般性，我们可以假设 $\alpha$ 和 $n$是满足

$$a^{\alpha} \in N \quad [a,b]^{n} \in N$$

$G$ 的最小非负数。考虑与其副本 $\widetilde{G}$ 作成的中心积，其中交换子子群相粘合：

$$K = G \underset{G' = \widetilde{G}'}{\times} \widetilde{G} = (G \times \widetilde{G}) / \{(c, c^{-1}) | c \in G'\}.$$

群 $G$ 在 $K$中不是代数闭的，因为 $G$ 不是 $K$的收缩。事实上，设 $\rho$ 是一个假设的收缩映射。群 $G$ 在 $K$中与 $G$ 交换，因此 $\rho(G) \leqslant Z(G)$且 $\rho(G') = \{1\}$，这与收缩映射的定义矛盾。然而， $G$在 $K$中是言词闭的。设 $w \in F(t_1, \ldots, t_s)$是某个词，并且

$$w((h_1 N, h_1' N), \ldots, (h_s N, h_s' N)) = (hN, N)$$

对某些 $hN, h_i N \in G$, $h_i' N \in G$。于是，对于某个 $cN \in G'$，以下结论成立：

$$\begin{cases} w(h_1', \ldots, h_s') N = cN \\ w(h_1, \ldots, h_s) N = hc^{-1} N \end{cases}$$

通过自由群的一个自同构，词 $w$ 可以化为标准形 [KMO21]:$w(t_1, \ldots, t_s) = t_1^m w'(t_1, \ldots, t_s)$，其中 $m \in \mathbb{N}$, $w' \in F_s'$。由第一个方程可得 $cN \in G' \cap \varphi(G^s)$，其中 $\varphi\colon\ G^s \to G$, $(g_1, \ldots, g_s) \mapsto w(g_1, \ldots, g_s)$ 是一个词映射。这意味着，对于某些$w_1, w_2 \in N$，在 $H$ 中有：

$$\begin{cases} w(h_1', \ldots, h_s') = cw_1 \\ w(h_1, \ldots, h_s) = hc^{-1} w_2 \end{cases}$$

我们来证明，在 $G$ 中，恒等式 $(aN)^x = [aN, bN]^z$ 对 $x \notin \alpha\mathbb{Z}$ 不成立。反之则意味着，在离散海森堡群中以下结论成立：

$$a^x [a,b]^{-z} = b^{-k} a^{-l} a^{\alpha t} [a,b]^{ns} a^l b^k$$

对于某些 $k, l, t, s \in \mathbb{Z}$。经过一些约化，我们得到： $a^{x-\alpha t} = [a,b]^{ns+z+\alpha t k}$。在 $H$中，只有当 $x = \alpha t \in \alpha\mathbb{Z}$ 时才可能。我们得到了矛盾。因此，对于某些 $\gamma \in \mathbb{Z}$，有 $h_1' = [a,b]^{\gamma}$，从而$cw_1 \in H'$。由于离散海森堡群中的任意词映射 $\varphi$ （参见 [KMO21])

$$\text{for any } g \in \varphi(H^s),\ \text{it is true that } g(\varphi(H^s) \cap H') \subseteq \varphi(H^s),$$

对某些 $g_1, \ldots, g_s \in H$, $w(g_1, \ldots, g_s) = w(h_1, \ldots, h_s) cw_1$。这意味着：

$$w(g_1, \ldots, g_s) = hw_3$$

对某些 $w_3 \in W$，并且在 $G$ 中：

$$w(g_1, \dots, g_s)N = hN,$$

这证明了 $G$ 在 $K$ 中的词闭性。 □

最后，我们来证明，任意域上的高维海森堡群都不是强词闭的：

域 $2n+1$ 上的维数为 $K$ 的海森堡群，其中 $n \in \mathbb{N}$ 是由如下形式的上三角矩阵构成的群

$$H_n(K) = \left\{ T(\bar{a}, \bar{b}, c) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{a} & c \\ 0 & I_n & \bar{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \bar{a}, (\bar{b})^\intercal \in K^n, c \in K \right\},$$

其中 $I_n$ 是大小为 $n$ 的单位矩阵。

**命题 6.** 群 $H_n(K)$ 不是强词闭的。

**证明**。 考虑 t $\widetilde{}$ 将 $H_n(K)$ 与其副本 $H_n(K)$ 作中心积，并合并交换子子群 :

$$G = H_n(K) \underset{H_n(K)' = \widetilde{H}_n(K)'}{\times} \widetilde{H}_n(K).$$

用符号 $H$ 表示这个中心积的第一个因子。我们来证明 $H$ 在 $G$ 中不是代数闭的。群 $H$ 是线性的，因此它是方程诺特的 [BMR99], ，所以它在 $G$ 中代数闭，当且仅当它是 $H$ 上的每个有限生成子群 $G$[KMM18]的收缩。特别是，以下这样的子群： $G$：

$$\bar{H} = \langle H, (1, h_1), \dots, (1, h_n), (1, g_1), \dots, (1, g_n) \rangle, \text{ where } h_i = \begin{pmatrix} 1 & \bar{a}_i & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \bar{b}_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\bar{}$ 其中 $\bar{a}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) = (b_i)^\intercal$，（单位元位于第 $i$ 个位置）。因此， $N = \langle h_1$、.....、$h_n$、$g_1$、.....、$g_n \rangle$ 是 $H_n(K)$ 的一个子群$\widetilde{}$，同构于维数为 $(2n+1)$ 的离散海森堡群。设 $\rho$ 是一个假设的收缩映射。由于在 $G$ 中，群 $H$ 与 $N$ 交换，因此我们得到 $\rho(N') = \{1\}$，这与收缩映射的定义矛盾。

然而，子群 $H$ 在 $G$ 中是言词闭的：设 $w \in F_s$ 是某个词（不失一般性，假设该词具有我们之前建立的标准形），并令 $\varphi$ ： $H^s \to H$ 为与该词相关联的词映射 $\widetilde{}$。假设对某些 $h_i$、$h \in H$、$h_i' \in H$、$c \in H'$，有：

$$\begin{cases} w(h_1', \dots, h_s') = c \\ w(h_1, \dots, h_s) = hc^{-1} \end{cases}$$

$\bar{}$ 一般而言，对于矩阵 $g_i = T$（$\bar{a}_i$， $b_i$， $c_i$）、 $i = 1$、.....、$s$，映射 $\varphi$ 的作用如下：

$$\varphi(g_1, \dots, g_s) = \begin{pmatrix} 1 & m\bar{a}_1 & mc_1 + f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s; \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_s) \\ 0 & I_n & m\bar{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $f$： $(K^n)^s \times (K^n)^s \to K$ 是一个关于每个自变量都是线性的函数。 $f$ 的像要么是平凡的，要么等于 $K$，由此得到：

$$\varphi(H_n(K)^s) = \begin{cases} \{1\}, & \text{if } m = 0 \text{ and the image of } f \text{ is trivial} \\ (H_n(K))', & \text{if } m = 0 \text{ and the image of } f \text{ equals } K \\ H_n(K), & \text{if } m \neq 0 \end{cases}$$

于是 $\varphi$（$H_n$（$K$）$^s$）$\cap$（$H_n$（$K$））$' \leqslant H_n$（$K$），并且对每个元素 $h \in \varphi$（$H_n$（$K$）$^s$），都有

$$h(\varphi(H_n(K)^s) \cap (H_n(K))') \subseteq \varphi(H_n(K)^s),$$

由此可得词闭性。 □

参考文献

[BMR99] G. Baumslag、A. Myasnikov 和 V. Remeslennikov. 群上的代数几何 I：代数集合与理想理论。《代数杂志》，219:1，1999，16–79。[Bog22] O. Bogopolski. 圆柱双曲群中的方程与词闭性。《群、几何与动力系统》，16:2，2022，613–682。[Fuc70] L. Fuchs.《无限阿贝尔群》第 1 卷。学术出版社，1970。[Hal54] P. Hall. 可解群的有限性条件。《伦敦数学会会刊》，4:1，1954，419–436。[Kly21] A. A. Klyachko. 克莱因瓶群并非强词闭，尽管它与强词闭仅一步之遥。《加拿大数学通报》，64:2，2021，491–497。[KM18] A. A. Klyachko 和 A. M. Mazhuga. 几乎自由子群的词闭性。《数学文集》，209:6，2018，850–856。[KM79] M. I. Kargapolov 和 Ju. I. Merzljakov. 群论基础。《数学研究生教材》，62，施普林格，1979。[KMM18] A. A. Klyachko、A. M. Mazhuga 和 V. Yu. Miroshnichenko. 几乎自由的无有限正规子群群是强词闭群。《代数杂志》，510，2018，319–330。[KMO21] A. A. Klyachko、V. Yu. Miroshnichenko 和 A. Yu. Olshanskii. 有限群与幂零强词闭群。《代数与应用杂志》（即将刊出），2021。[Kur60] A. G. Kurosh. 群论。切尔西出版公司，1960。[LS15] R. Lyndon 和 P. Schupp. 组合群论。施普林格，2015。[Maz18] A. M. Mazhuga. 强词闭群。《代数杂志》，493，2018，171–184。[Maz19] A. M. Mazhuga. 群的自由积是强词闭的。《数学文集》，210:10，2019，1456–1492。[MR14] A. Myasnikov 和 V. Roman’kov. 自由群的词闭子群。《群论杂志》，17:1，2014，29–40。[Neu67] H. Neumann. 群簇。施普林格出版社，柏林—海德堡—纽约，1967。[RKK17] V. A. Roman’kov、N. G. Khisamiev 和 A. A. Konyrkhanova. 有限生成幂零群的代数闭子群、词闭子群及收缩。《西伯利亚数学杂志》，58:3，2017，536–545。[Rob82] D. J. S. Robinson. 群论教程。施普林格出版社，1982。