arXiv:2301.02762v1 [physics.app-ph] 7 Jan 2023

压电弹性板中高阶拓扑角态的主动调控

Ze Ma、Yang Liu、Yu-Xin Xie、* 和 Yue-Sheng Wang
School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China
（日期：2023年1月10日）

与传统的体边对应原理不同，高阶拓扑态的发现引发了广泛关注。在二阶二维弹性波拓扑绝缘体中，波动信息可被局限于角部，且该状态受到拓扑保护。为更好地应用拓扑角态，本文利用压电控制能力，设计了一种拓扑角态可调的二维弹性板。通过选择性地将负电容电路连接到蜂窝弹性板上的压电片，可以翻转能带。借助有限元软件，在有限晶格中两种不同拓扑相结构的边界处观测到了位于 $2\pi/3$角的拓扑角态。通过在角部设置缺陷对照组，验证了拓扑角态具有很强的鲁棒性。此外，本文还讨论了这种压电弹性板的拓扑角态在频率和位置方面的可调性。由于其拓扑角态可调，这种压电弹性板有望为弹性波局域控制和能量采集装置的设计提供参考，从而促进拓扑角态在实际中的应用。

关键词：高阶拓扑绝缘体、可调角态、压电弹性板

一、引言

拓扑绝缘体（TIs）最初在凝聚态物理领域得到研究[1–3]。其优异的涨落反向散射抑制能力和强鲁棒性等特性吸引了众多研究者对其展开探索。根据拓扑不变量的表征方式，拓扑绝缘体可分为量子霍尔绝缘体、量子自旋霍尔绝缘体和量子谷霍尔绝缘体[4–7]。近年来，电磁波[8–10], 、声波[11–15] 和弹性波[16–22]领域的拓扑器件得到了广泛研究。其构建主要依赖于打破结构的时空反演对称性。近期，基于扩展的体边对应原理，理论上预测了高阶拓扑绝缘体（HOTIs）[23, 24]。与传统的一阶拓扑绝缘体不同，在二阶二维拓扑绝缘体中，（2-1）一维边界态缺乏拓扑保护，但（2-2）零维角态仍具有良好的鲁棒性[25, 26]。随着具有量子化四极矩的拓扑超材料对高阶拓扑态的验证日益充分，高阶拓扑绝缘体的实验研究也迅速发展[27–29]。通过在电磁四方晶格中构造磁场以产生 π 磁通，可以相应地观测到二维材料的角模[26]。基于一维SSH模型的扩展，二维高阶拓扑绝缘体的角态在 kagome、四方和六角晶格等晶格中得以实现[25–28, 30–41]。

带隙频率与波的主动调制

* xyx@tju.edu.cn

可通过在声子晶体或超材料中引入某些外部因素来实现[42]。在以往的一阶弹性波拓扑绝缘体中，Gao 等人通过旋转基底上的Y形钢棱柱打破镜像对称性，从而实现了宽带隙、可重构的拓扑谷传输路径[43]。Zhang 等人设计了一种可编程升降磁腔，通过控制磁流体的填充来打破空间反演对称性，并在实验中观察到了可调的拓扑谷传输[44]。通过模拟量子谷霍尔效应，Liu 等人通过切换晶胞中的亚稳态结构，实现了拓扑波导的重构[45]。利用介电弹性体的电致变形特性，Chen 等人研究了软膜型超材料中赝自旋边界态的主动调控，拓宽了工作频率范围[46]。Li 等人采用压电控制技术，通过调节与压电片相连的负电容电路，控制双狄拉克锥的出现与消失，并在实验中验证了拓扑波导的强鲁棒性[47]。Forward 首先提出了压电分流技术，该技术也已在声与振动领域的主动控制中得到充分发展[48–54]。将负电容电路连接到超材料板的压电片上，可将其视为一种可调刚度元件。通过调节负电容电路，可以控制谐振器的局域共振频率[50, 54]。

继电磁波和声波高阶拓扑绝缘体的研究之后，弹性波高阶拓扑绝缘体的角态近来也开始受到探索。Fan 等人设计了具有不同胞间和胞内耦合强度的弹性蜂窝声子晶体板

并通过实验观测到了拓扑角态的存在[40]。基于声学 Wannier 型高阶拓扑绝缘体的研究，Wu 等人通过实验验证了弹性 Kagome 晶格板中的二维二阶角态[55]。Chen 等人通过在铝板上循环安装钢螺栓，观察到了位于拓扑平凡结构与拓扑非平凡结构之间界面处的机械拓扑角态[41]。然而，目前关于弹性波二维高阶拓扑绝缘体可调角态的研究尚不充分。因此，受 Liu 等人关于一维局域共振可调拓扑态的研究启发[53] ，我们将负电容电路连接到六角晶格内侧或外侧支撑上的压电片。这样便能主动调控弹性板的拓扑角态。通过调节电容器参数的大小，可以拓宽其拓扑角态的工作频率范围。此外，通过选择性地将负电容电路连接到支架的压电片上，可以主动调控拓扑角态的位置。

II. 压电弹性板的结构设计与拓扑能带反转

如图1a所示，本文设计的压电弹性板由基底、圆柱振子和压电片组成。基底由环氧树脂制成，呈连续六角晶格形状，厚度为 $d = 2$ mm，边长为 $L = 15$ mm，宽度为 $w = 5$ mm。基底的顶部和底部均粘贴有与基底厚度相同的P-4压电片。六角晶格的六个角的上方和下方均粘接有圆柱磁体振子，其半径为 $r = 2.5$ mm，高度为 $h = 5d$。磁体、环氧树脂和P-4压电片的材料参数如表I所示。压电弹性板的多胞结构见图1b。黄色线框圈出的部分作为晶胞，其边长为 $a = 45$ mm。为区分压电片，我们将内侧和外侧六角形压电片分别标记为紫色和蓝色。主动控制系统中的负电容电路如图1(c)所示。该电路包括电容器 C_p、补偿电阻 R_0、LM324N运算放大器、固定电阻 R_1 和滑动电阻 R_2。表II列出了负电容电路中各器件的参数。通过将负电容电路连接至P-4压电片，可以调控压电片的等效弯曲刚度，从而实现弹性板的拓扑相变。

当压电片连接负电容电路时，我们推导出压电片的等效弹性模量如下。x、 y 和 z 方向分别表示为 1、2 和 3。由于压电片仅沿 z轴受到电场作用，压电材料在平面应力状态下的本构方程可表示为[47, 53, 54]

$$\begin{aligned} S_1 &= s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3, \\ D_3 &= d_{31} T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3, \end{aligned} \tag{1}$$

其中， S_1 和 T_1 分别为沿 x方向的应变和应力， s_{11}^E 表示恒定电场下的柔量系数， d_{31} 和 ε_{33}^T 分别为压电常数和介电常数， E_3 和 D_3 描述沿 z方向的电场强度和电势变化。

在应变恒定时，压电片的本征电容可表示为

$$C_p = \varepsilon_{33}^T A_s h_p^{-1}, \tag{2}$$

其中， A_s 和 h_p 分别表示压电片的面积和厚度。然后，引入复阻抗 Z，可推导出应变与应力之间的关系：

$$S_1 = \left(s_{11}^E - \frac{s Z d_{31}^2 A_s}{(1 + s Z C_p) h_p} \right) T_1, \tag{3}$$

其中， s 为拉普拉斯参数。

与负电容电路相连的压电片的等效模量可由方程（3）推导如下：

$$E_p = \frac{h_p (1 + s Z C_p)}{h_p s_{11}^E (1 + s Z C_p) - s Z d_{31}^2 A_s}. \tag{4}$$

其复阻抗 Z 表示为

$$Z = -\left(\alpha s C_p\right)^{-1}, \tag{5}$$

其中 $\alpha = R_2 C (R_1 C_p)^{-1}$。

因此，我们可以通过调整参数 α 来改变压电片的弹性模量，即调节压电片的连接刚度。

接下来，使用 COMSOL Multiphysics 软件分析晶胞的能带结构。当内侧和外侧压电片均未连接负电容电路时，每个支架的刚度因子相同。在图 2(a) 中，四条能带在点 Γ处简并，形成双狄拉克锥。在能带结构中，我们只关注面外模态（标记为红色），不考虑面内模态（标记为灰色）。当内侧或外侧压电片连接到负电容电路时，相应弹性支撑的刚度因子增大。因此，双狄拉克锥消失，并在

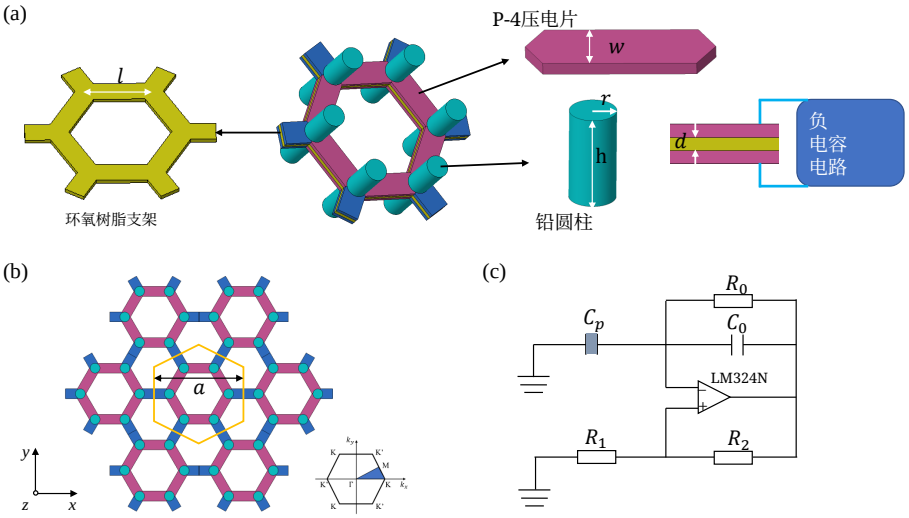


图1。（a）压电弹性板元胞结构示意图。黄色蜂窝支撑用作柔性板基底。P-4 压电片贴附在支架的顶部和底部，且两端的压电片均倾斜120° 。紫色标记的部分为内部六边形压电片，外部压电片以蓝色标记。圆柱形磁体振子粘接在蜂窝弹性板六个角的顶部和底部。负电容电路连接至压电片表面。（b）压电弹性板的复合元胞结构。黄色线框围住的部分被选作晶胞。（c）负电容电路示意图。

表I。**压电弹性板的材料参数。**

材料	模量 E(Pa)	密度 ρ(kg/m^3)	柔度系数 s_{11}^E (m^2/N)	压电应变系数 d_{31}(C/N)	介电常数 ε_{33}^T(F/m)
磁体	41×10^9	7400	…	…	…
环氧树脂	3×10^9	1180	…	…	…
P-4 压电片	8.83×10^{10}	7450	1.2×10^{-11}	-1×10^{-10}	1.2×10^{-8}

表 II. **负电容电路的参数。**

C(pF)	C_p(pF)	R_2(kΩ)	R_1(kΩ)	R_0(kΩ)	运算放大器
9.684	8.155	51.54	68	2000	LM324N

附近相应位置形成带隙。如图 2(b) 所示，随着负电容电路中参数 α 增大，禁带宽度也随之增大。外侧压电片连接到负电容电路时，能带结构中d 模态位于带隙上方，而 p 模态位于带隙下方。相反，当内侧压电片连接到负电容电路时， d 和 p 模态在带隙上下方的分布互换。在此过程中，拓扑相由平庸态转变为非平庸态。具体而言，外部幂运算产生平庸带隙（图 2(c)），而内部驱动对应非平庸带隙（图 2(d)）。绘制了构成带隙的上、下能带在高对称点 Γ 处的本征模态图，并分别显示在能带结构图的上方和下方。在这种情况下， d模态代表量子化的四极化。 $d_{x^2-y^2}$ 的模态分布关于 x 轴和 y轴对称，而 d_{xy} 的模态则呈反对称。 p模态代表量子化的偶极化。 p_x 和 p_y 模态分别关于 y 和 x 轴呈反对称分布[19]。

III. 拓扑角态讨论

此外，还分析了压电弹性板的超胞色散关系。该超胞由左侧六个内部供能晶胞和右侧六个外部供能晶胞组成。超胞的左右两端采用自由边界条件，上下两端沿 y 轴施加 Floquet 周期边界条件。计算分析得到的色散关系如图 3(a) 所示，其中灰色和浅蓝色标记点分别表示面内模态和面外模态。我们只关注面外模态，其中间部分有两个清晰的拓扑边界态（绿色和紫色），对应于赝自旋霍尔效应产生的手性传播模态。点 A_1 和 A_2 对应的拓扑边界振动模态图如图 3(b) 所示，可以看到位移在中间界面处最大。为了更好地描述这两种拓扑赝自旋态，我们展示了界面处的能流箭头（黄色）

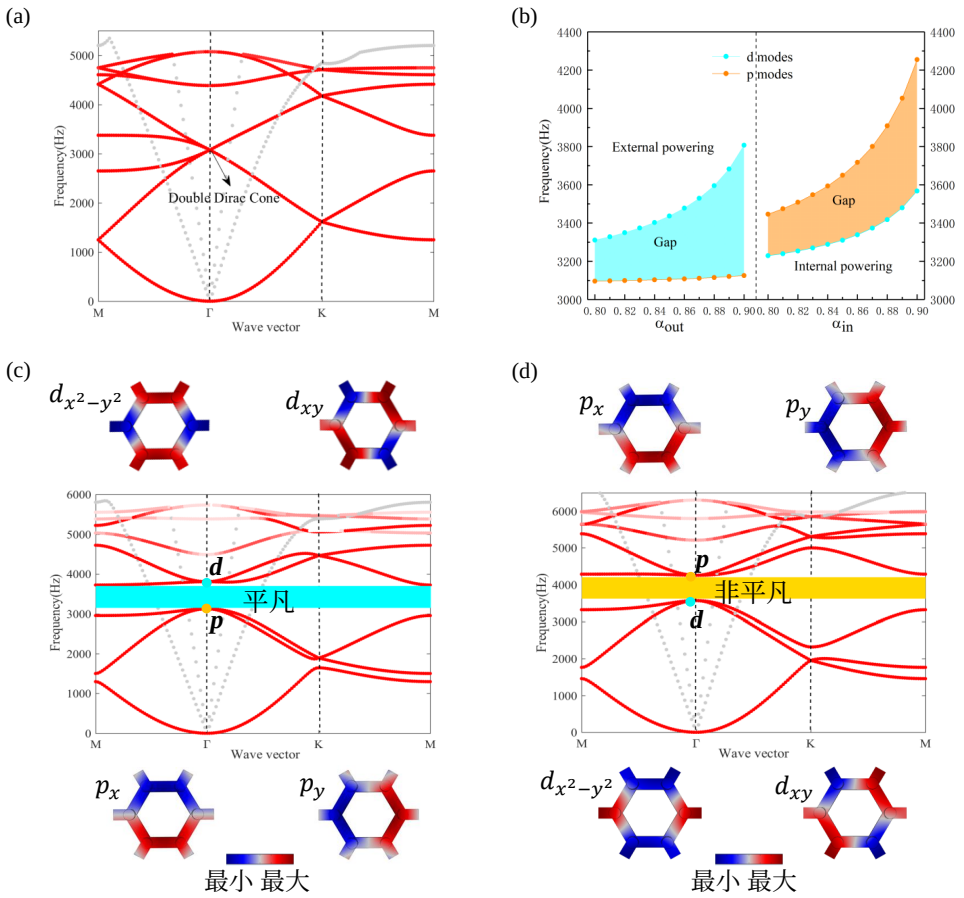


图 2. (a) 未连接负电容电路时压电片的晶胞色散曲线。(b) 蜂窝状弹性板内部或外部充电时，带隙宽度随参数 α 变化的曲线。(c)、(d) 当外部和内部压电片充电时， $\alpha = 0.9$ 对应的能带结构及其本征模态图案。

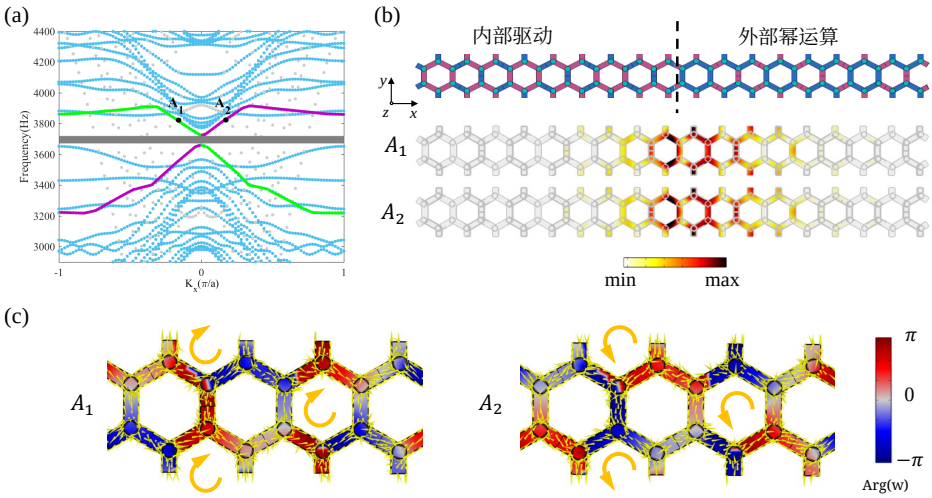


图 3. (a) 超晶胞的色散关系图。(b) 超晶胞结构示意图及其在点A_1 和 A_2处对应的振动模态。色条表示模型 z方向位移绝对值的大小。(c) 点 A_1 和 A_2处模态界面的 z方向本征态的相位分布云图及能流箭头。

如图 3(c) 所示。在点 A_1和 A_2处的边界模态中，能流分别呈顺时针和逆时针方向。同时，我们将边界处本征态的相位场绘制为云图。可以观察到，在相同位置，两个边界模态的相位彼此相反。这表明这两种赝自旋边界态具有方向相反的传播模态

方向。但这类边界态不同于受时间反演对称性保护的费米子赝自旋无带隙边缘态[56]。在该模型能带结构的两条边缘态之间，存在一条灰色禁带。带隙由不同拓扑相结构边界处的晶体对称性破缺所形成C_6 [41]。我们尝试根据该带隙的频率分布寻找拓扑角态

该带隙的。

为了分析压电弹性板的拓扑角态，我们构建了如图 4(a) 所示的 13×13菱形有限晶格模型。连接压电片的负电容电路参数 α 设为 0.9。模型内 7×7 晶胞的外部支架带电，对应于上文分析的平庸相结构。外部晶胞则为非平庸相结构。因此，这两种不同的相结构形成了菱形边界。我们使用 COMSOL Multiphysics 软件计算了模型的本征频率，所得本征频率谱如图 4(b) 所示。可以观察到体态（灰色圆圈）、边缘态（蓝色方形三角形）、拓扑角态（红色菱形）和平庸角态（绿色倒三角形）。边缘态和体态对应的振动模态图见图 4(c、d)。我们主要关注带隙范围内出现的拓扑角态，它们受到拓扑保护。本征频率为 3670.9 赫兹的拓扑角态模态图如图 4(e) 所示。从图中可以看出，面外位移 $|w|$ 的绝对值较大处集中在菱形边界弯折处的 $2\pi/3$ 个角上。带隙下方 3649.3 赫兹处的角态为平庸角态。在对应的振动模态图中，位移较大处出现在边界的 $\pi/3$ 个角上。类似于电磁波高阶拓扑中的理论解释，每个未耦合波导[57]上都有一个零模（拓扑角模）。每个零模都带有一个拓扑荷（+ 或 –）。N_+ 和N_- 分别用于表示手性对称算符 Π中拓扑荷为 + 和 –的本征态数量[40]。 $2\pi/3$ 角处有三个零模，其中两个带有相同的拓扑荷，一个带有相反的拓扑荷。因此，拓扑指标$\mathcal{N} = |N_+ - N_-| = 1 \neq 0$代表拓扑角态。详情见附录 B。在 $\pi/3$ 处的两个零模的拓扑荷为正，而另外两个零模的拓扑荷为负，因此拓扑指标 $\mathcal{N}$=0。这些理论可以

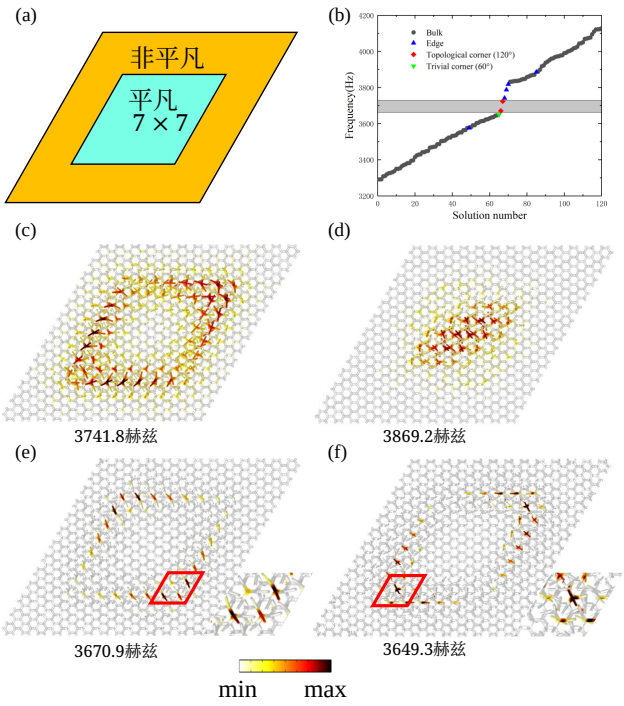


图4. 压电弹性板的本征模计算结果。(a) 菱形有限晶格示意图。内部为外部带电的平庸相结构（青色），外围为内部带电的非平庸相结构（黄色）。(b) 本征频率的数值计算结果。红色菱形代表拓扑角态，灰色圆形、蓝色正三角形和绿色倒三角形分别代表体态、边缘态和平庸角态。(c) 频率为3741.8赫兹的边缘态。(d) 频率为3869.2赫兹的体态。(e) 频率为3670.9赫兹的拓扑角态。(f) 频率为3649.3赫兹的平庸角态。色标表示 z方向位移的绝对值。

有助于解释这一现象：本文蜂窝压电弹性板的拓扑角态仅出现在 2π/3个角上。

接下来，我们验证了压电弹性板拓扑角态的强鲁棒性。图中放大显示了有限晶格内不同相结构之间界面的 $2\pi/3$角。图 5(a) 展示无缺陷态，而图 5(b、c) 分别展示受扰动和空腔模型。选取边界 $2\pi/3$ 角处的一个点，绘制归一化频率能谱，如图 5(d) 所示。无缺陷结构的灰色带隙中出现明显的高能峰，对应于

拓扑角态的存在。在存在扰动和空位缺陷时，具有较高能量峰的频率区间仍局限于带隙内。含缺陷结构角部的平均弹性能量密度峰值与无缺陷结构情况下的峰值接近，且耗散较小。分析结果表明，压电弹性板的拓扑角态对小缺陷不敏感，具有很强的鲁棒性。

为突出这块压电弹性板中拓扑角态的频率可调性，我们研究了其有限晶格的拓扑角态谱随压电参数 α 变化的情况，如图 6 所示。随着 α 增大，与负电容电路相连的支架刚度随之提高，压电弹性板中的拓扑角态也相应出现在更高的频率处。此外，随着该参数增大，两个拓扑角态之间的距离越来越近。这意味着压电弹性板能够实现

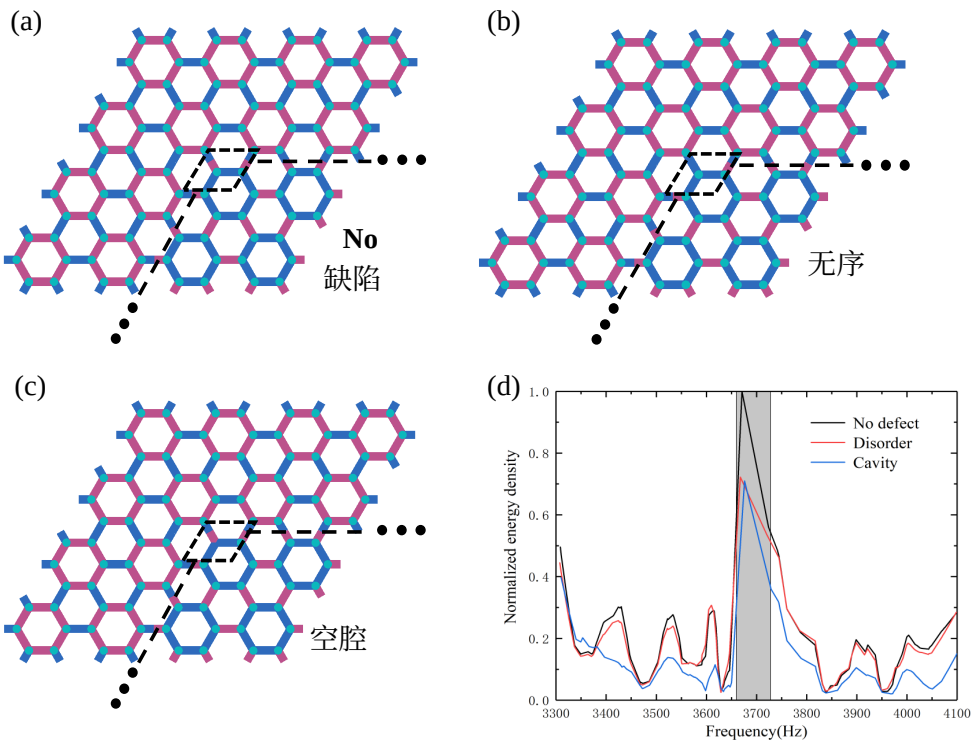


图 5. (a) 有限晶格在 $2\pi/3$ 角处的局部示意图。紫色支架表示已连接负电容电路。角外为非平庸相结构，角内为平庸相结构。(b) 受扰有限晶格模型。角处的支架未连接负电容电路，从而对拓扑模型造成扰动。(c) 空腔有限晶格模型。角处支撑结构上下两个振子的缺失形成空腔缺陷拓扑模型。(d) 无缺陷模型和有缺陷模型的归一化能谱曲线。灰色带表示超胞的边界态带隙。黑线表示无缺陷模型，红线和蓝线分别表示受扰模型和空腔缺陷模型。

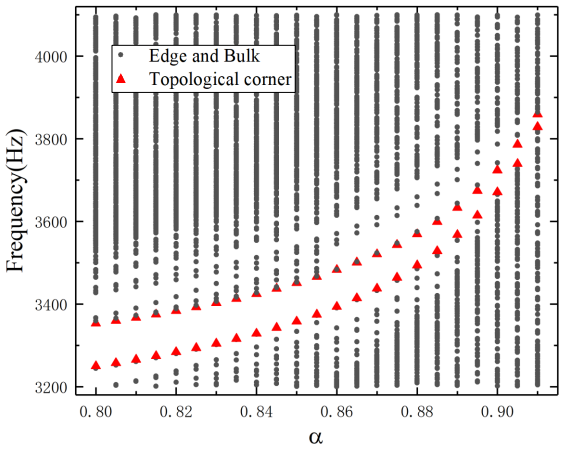


图 6. 有限晶格频谱随压电参数 α 的变化。灰色圆点表示体态和边缘态，红色三角形表示拓扑角态。

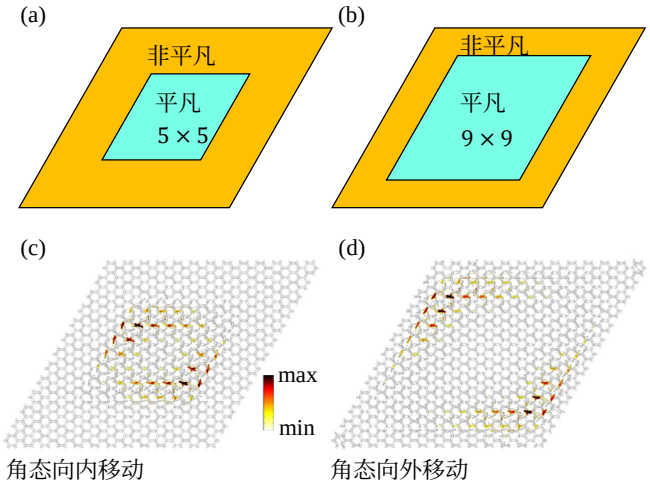


图 7. (a)-(b) 有限晶格（13*13 个单元）中角态向内和向外移动模型示意图。(c)-(d) 角态向内和向外移动后的振型图。

多个频率范围内的拓扑角态，而实现这一点的方法是调节压电参数。此外，与图 4(a) 中的有限晶格模型相比，如图 7(a、b) 所示，通过分别减少和增加 5×5和 9×9 个平庸相晶胞，使单胞总数保持不变。我们对这两个有限晶格进行了谱分析，观察到向内移动（图 7(c)）和向外移动（图 7(d)）中的拓扑角态。实际应用中，只需将负电容电路连接到相应的压电片，即可调节拓扑角态的位置。

IV. 结论

本文设计了一种蜂窝状压电弹性板，以实现弹性波高阶拓扑绝缘体中可调谐的拓扑角态。通过将负电容电路连接到晶胞内侧或外侧的压电片，可相应地改变拓扑相。包含平庸相结构和非平庸相结构的超胞中，边界态存在带隙。对其有限晶格进行谱分析，发现存在受拓扑保护的角态。与理论相符，六角晶格中的拓扑角态仅存在于 $2\pi/3$ 角处。我们设计了受扰动和空缺两种缺陷模型，并绘制了频率—能量谱曲线。通过与无缺陷模型进行比较，验证了拓扑角态具有很强的鲁棒性。此外，为了突出压电弹性板拓扑角态的可调性，我们调节了压电参数 α，以拓宽拓扑角态的工作频率范围。切换负电容电路的连接位置，可使拓扑角态向内或向外移动，这意味着拓扑角态可以出现在平面中的任意位置。这种压电弹性板的可调谐拓扑角态丰富了机械超材料中拓扑物理现象的研究。本研究对弹性波能量局域化、信息传输和能量采集等应用具有参考价值。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12021002、12072225 和 11991031）的资助。感谢基尔大学的 Yibin Fu 教授提供有益的讨论和宝贵的建议。

附录 A：拓扑角态的表征

通过理解这些文章中的理论和方法[46, 57, 58], ，我们验证了压电弹性板的拓扑角态特性。首先，体极化表示为

$$\chi^{(6)} = ([\boldsymbol{M}], [\boldsymbol{K}]) \tag{A1}$$

其中，$[\boldsymbol{M}]$ 和 $[\boldsymbol{K}]$ 分别是 C_2 和 C_3 不变量。它们是整数，可表示为

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{M}] &= \#M_1 - \#\Gamma_1^{(2)} \\ [\boldsymbol{K}] &= \#K_1 - \#\Gamma_1^{(3)} \end{aligned} \tag{A2}$$

其中，M_1 ($\Gamma_1^{(2)}$) 是布里渊区中 M 点（Γ）处带隙以下具有 $C_2(\pi)$ 旋转本征值 $+1$ 的能带数目。K_1 ($\Gamma_1^{(3)}$) 是布里渊区中 K 点（Γ）处带隙以下具有 C_3 $(\pi/3)$ 旋转本征值 $+1$ 的能带数目。从图**??**可以看出，带隙以下三个能带的本征模对于平凡结构 $M_1 = 1$ 和 $\Gamma_1^{(2)} = 1$为 $[\boldsymbol{M}] = 0$。对于非平凡结构 M_1= 1 和 $\Gamma_1^{(2)} = 3$，因此 $[\boldsymbol{M}] = 2$ （忽略负号）。在该压电弹性板模型中，C_3 旋转算符与手征算符互换。由此可得，两种结构的不变量均为$[\boldsymbol{K}] = 0$。两种结构中的拓扑不变量总结如下

$$([\boldsymbol{M}], [\boldsymbol{K}]) = \begin{cases} (0,0) & external \quad powering \\ (2,0) & internal \quad powering. \end{cases} \tag{A3}$$

根据文献中的角电荷 $Q_{corner}^{(6)}$=$[\boldsymbol{M}]/4$+$[\boldsymbol{K}]/6$ ，可得

$$Q_{corner}^{(6)} = \begin{cases} 0 & external \quad powering \\ 1/2 & internal \quad powering. \end{cases} \tag{A4}$$

为解释拓扑角态和平庸角态出现位置的差异，引入了拓扑指标 $\mathcal{N}$ 对其进行表征[40, 57]。拓扑指标 $\mathcal{N}$ 捕捉了体哈密顿量的拓扑与缺陷拓扑之间的相互作用，表示边界角处的稳定模态。从图8可以看出，在菱形有限晶格不包含角的边缘处， N_+=1 和 N_-=1 。在 π/3角处， N_+= 2 和 N_-= 2。因此，压电弹性板的边缘和 π/3角处的拓扑指标为0。而在 2π/3角处， N_+=1、 N_-=2，拓扑指标 $\mathcal{N}$=1 意味着稳定模态出现。因此，蜂窝弹性板中不同拓扑相结构边界的2π/3角处的角态受到拓扑保护。

[1] K. V. Klitzing，《量子化霍尔效应》，《现代物理评论》**58**，519（1986）。[2] M. Hasan 和 C. Kane，专题讨论：拓扑绝缘体，《现代物理评论》**82**，3045（2010）。

[3] A. Khanikaev、S. Mousavi、W. Tse、M. Kargarian、A. MacDonald 和 G. Shvets，《光子拓扑绝缘体》，《自然·材料》**12**，233（2013）。[4] A. Khanikaev、R. Fleury、S. Mousavi 和 A. Alu，

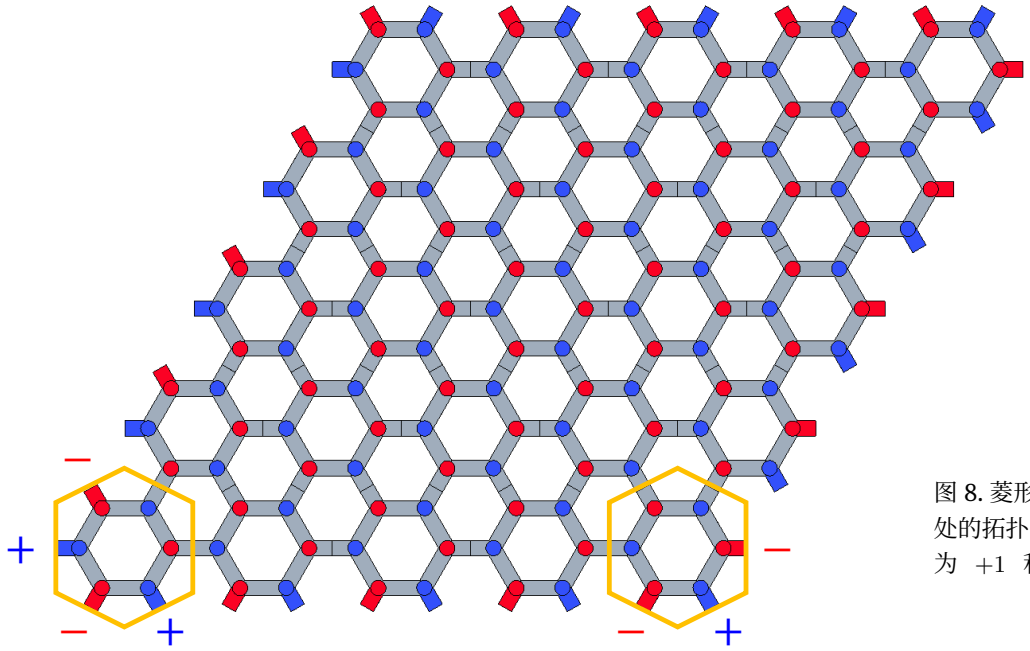


图 8. 菱形有限晶格中位于 $\pi/3$ 和 $2\pi/3$ 处的拓扑角模。蓝色和红色分别表示值为 $+1$ 和 -1 的手征荷。

角动量偏置类石墨烯谐振器晶格中的拓扑稳健声传播，《自然·通讯》**6**，1（2015）。[5] C. He、X. Ni、H. Ge、X. Sun、Y.B.Chen、M. Lu、X. Liu 和 Y. Chen，《声学拓扑绝缘体与稳健的单向声传输》，《自然·物理》**12**，1124（2016）。[6] A. Foehr、O. Bilal、S. Huber 和 C. Daraio，《螺旋结构声子板：从波束定向到拓扑绝缘体》，《物理评论快报》**120**，205501（2018）。[7] O. Gunawan、Y. Shkolnikov、K. Vakili、T. Gokmen、E. D. Poortere 和 M. Shayegan，《相互作用二维电子系统的谷极化率》，《物理评论快报》**97**，186404（2006）。[8] Z. Wang、Y. Chong、J. J oannopoulos 和 M. Solja˘ci´c，《单向抗背向散射拓扑电磁态的观测》，《自然》**461**，772（2009）。[9]L. Wu 和 X. Hu，《利用介电材料实现拓扑光子晶体的方案》，《物理评论快报》**114**，223901（2015）。[10] A. Khanikaev 和 G. Shvets，《二维拓扑光子学》，《自然·光子学》**11**，763（2017）。[11] Z. Chen、X. Ni、Y. Wu、C. He、X. Sun、L. Zheng、M. Lu 和 Y. Chen，《声子晶体中双狄拉克锥的偶然简并》，《科学报告》**4**，1（2014）。[12] M. Xiao、G. Ma、Z. Yang、P. Sheng、Z. Zhang 和 C. Chan，《周期声学系统中的几何相位与能带反转》，《自然·物理》**11**，240（2015）。[13] J. Lu、C. Qiu、M. Ke 和 Z. Liu，《声子晶体中的谷涡旋态》，《物理评论快报》**116**，093901（2016）。[14] R. Fleury、A. Khanikaev 和 A. Alu，《面向声音的弗洛凯拓扑绝缘体》，《自然·通讯》**7**，1（2016）。[15] Y. Deng、M. Lu 和 Y. Ji ng，《基于谷霍尔与量子自旋霍尔效应，美国声学学会期刊**146**，721（2019）。[16] P. Wang、L. Lu 和 K. Bertoldi，具有单向弹性边缘波的拓扑声子晶体，《物理评论快报》**115**，104302（2015）。[17] Y. Wu、R. Chaunsali、H. Yasuda、K. Yu 和 J. Yang，基于双稳态 Stewart 平台的可调拓扑超材料，《科学报告》**8**，1（2018）。[18] H. Chen、H. Nassar 和 G. Huang，一维和二维机械晶格中拓扑效应的研究，《固体力学与物理学杂志》**117**，22（2018）。[19] L. Yang、K. Yu、Y. Wu、R. Zhao 和 S. Liu，穿孔超材料板中弯曲波的拓扑自旋霍尔边缘态，《物理学杂志D：应用物理》**51**，325302（2018）。[20] R. Chaunsali、C. Chen 和 J. Yang，能带折叠诱导的拓扑板中弯曲波的亚波长与定向调控，《物理评论B》**97**，054307（2018）。[21] H. Huang、Z. Tan、S. Huo、L. Feng、J. Chen 和 X. Han，赝自旋霍尔声子晶体中弹性波的拓扑保护零折射，《通讯物理》**3**，1（2020）。[22] H. Huang、J. Chen 和 S. Huo，拓扑弹性超材料的最新进展，《凝聚态物理杂志》（2021）。[23] W. Benalcazar、B. Bernevig 和 T. Hughes，量子化电多极绝缘体，《科学》**357**，61（2017）。[24] F. Schindler、A. Cook、M. Vergniory、Z. Wang、S. Parkin、B. Bernevig 和 T. Neupert，高阶拓扑绝缘体，《科学进展》**4**，eaat0346（2018）。[25] H. Xue、Y. Yang、F. Gao、Y. Chong 和 B. Zhang，笼目晶格上的声学高阶拓扑绝缘体，《自然·材料》**18**，108（2019）。[26] C. Peterson、W. Benalcazar、T. Hughes 和 G. Bahl，具有拓扑

保护角态的量子化微波四极矩绝缘体，《自然》**555**，346（2018）。[27] M. Serra-Garcia、V. Peri、R. S¨ usstrunk、O. Bilal、T. Larsen、L. Villanueva 和 S. Huber，声子四极拓扑绝缘体的观测，《自然》**555**，342（2018）。[28] X. Ni、M. Weiner、A. Alu 和 A. Khanikaev，广义手征对称性保护的高阶拓扑声学态的观测，《自然·材料》**18**，113（2019）。[29]H. Xue、Y. Yang、G. Liu、F. Gao、Y. Chong 和 B. Zhang，声学三阶拓扑绝缘体的实现，《物理评论快报》**122**，244301（2019）。[30] B. Xie、H. Wang、H. Wang、X. Zhu、J. Jiang、M. Lu 和 Y. Chen，具有角态的二阶光子拓扑绝缘体，《物理评论B》**98**，205147（2018）。[31] Z. Chen、C. Xu、R. A. Jahdali、J. Mei 和 Y. Wu，二阶声学拓扑绝缘体中的连续体束缚态角态，《物理评论B》**100**，075120（2019）。[32] X. Zhang、H. Wang、Z. Lin、Y. Tian、B. Xie、M. Lu、Y. Chen 和 J. Jiang，声子晶体中的二阶拓扑与多维拓扑相变，《自然·物理》**15**，582（2019）。[33] S. Kempkes、M. Slot、J. van Den Broeke、P. Ca-piod、W. Benalcazar、D. Vanmaekelbergh、D. Bercioux、I. Swart 和 C. M. Smith，电子高阶拓扑绝缘体中的鲁棒零能模，《自然·材料》**18**，1292（2019）。[34] A. Coutant、V. Achilleos、O. Richoux、G. Theocharis 和 V. Pagneux，无序下拓扑角模的鲁棒性及其在声学网络中的应用，《物理评论B》**102**，214204（2020）。[35] Y. Wu、M. Yan、Z. Lin、H. Wang、F. Li 和 J. Jiang，片上高阶拓扑微机械超材料，《科学通报》**66**，1959（2021）。[36] M. Ezawa，呼吸笼目晶格和烧绿石晶格上的高阶拓扑绝缘体与半金属，《物理评论快报》**120**，026801（2018）。[37] A. E. Hassan、F. Kunst、A. Moritz、G. Andler、E. Bergholtz 和 M. Bourennane，光子波导中的光的角态，《自然·光子学》**13**，697（2019）。[38] H. Wang、L. Liang、B. Jiang、J. Hu、X. Lu 和 J. Jiang，可调谐C对称光子晶体中的高阶拓扑相，《光子学研究》**9**，1854（2021）。[39] B. Xie、G. Su、H. Wang、F. Liu、L. Hu、S. Yu、P. Zhan、M. Lu、Z. Wang 和 Y. Chen，光子晶体中的高阶量子自旋霍尔效应，《自然通讯》**11**，1（2020）。[40] H. Fan、B. Xia、L. Tong、S. Zheng 和 D. Yu，具有拓扑保护角态的弹性高阶拓扑绝缘体，《物理评论快报》**122**，204301（2019）。[41] C. Chen、R. Chaunsali、J. Christensen、G. Theocharis 和 J. Yang，二阶机械拓扑绝缘体中的角态，《通讯材料》**2**，1（2021）。[42] Y. Wang、Y. Wang、B. Wu、W. Chen 和 Y. Wang，可调谐与主动声子晶体和超材料，《应用力学评论》**72**，040801 (2020). [43] N. Gao, S. Qu, L. Si, J. Wang, and W. Chen, 可重构声子晶体板中弹性波的宽带拓扑谷输运，《应用物理学快报》**118**, 063502 (2021). [44] Q. Zhang, Y. Chen, K. Zhang, and G. Hu, 具有可调界面传播路径的可编程弹性谷霍尔绝缘体，《极端力学快报》**28**, 76 (2019). [45] X. Liu, G. Cai, and K. Wang, 亚稳结构中可重构的拓扑保护波传播，《声学与振动杂志》**492**, 115819 (2021). [46] Z. Chen, W. Zhou, and C. Lim, 通过电压控制调节膜型超材料中拓扑保护界面模态的频率响应，《声学与振动杂志》**494**, 115870 (2021). [47] G. Li, T. Ma, Y. Wang, and Y. Wang, 主动调控弹性波超材料的拓扑免疫性，《科学报告》**10**, 1 (2020). [48] R. Forward, 光学结构中振动的电子阻尼，《应用光学》**18**, 690 (1979). [49] F. Casadei, M. Ruzzene, L. Dozio, and K. Cunefare, 通过谐振分流器周期阵列实现宽带振动控制：板材实验研究，《智能材料与结构》**19**, 015002 (2009). [50] L. Airoldi and M. Ruzzene, 通过谐振分流压电元件周期阵列设计可调谐声学超材料，《新物理学杂志》**13**, 113010 (2011). [51]Y. Chen, G. Huang, and C. Sun, 采用负电容压电分流的主动弹性超材料中的带隙控制，《振动与声学杂志》**136** (2014). [52] C. Sugino, M. Ruzzene, and A. Erturk, 局域共振超材料和超结构中机械带隙与机电带隙的融合，《力学与物理学固体杂志》**116**, 323 (2018). [53] Y. Liu, H. Wang, W. Fang, Q. Han, D. Liu, and Y. Liang, 局域共振压电超材料中亚波长拓扑界面模态的可调控制，《复合结构》**276**, 114541 (2021). [54] Y. Liu, W. Fang, Y. Liang, D. Liu, and Q. Han, 通过分流压电片调节局域共振超结构中的亚波长拓扑界面态，《应用物理学杂志》**129**, 245112 (2021). [55] Q. Wu, H. Chen, X. Li, and G. Huang, 弹性 Kagome 晶格中的面内二阶拓扑保护态，《物理评论应用》**14**, 014084 (2020). [56] C. Kane and E. Mele, 石墨烯中的量子自旋霍尔效应，《物理评论快报》**95**, 226801 (2005). [57] J. Noh, W. Benalcazar, S. Huang, M. Collins, K. Chen, T. Hughes, and M. Rechtsman, 光子中间隙缺陷模态的拓扑保护，《自然·光子学》**12**, 408 2018( ). [58] W. Benalcazar, T. Li, and T. Hughes, c_n-对称高阶拓扑晶体绝缘体中分数角电荷的量子化，《物理评论B》**99**, 245151 2019( ).