arXiv:2301.02769v1 [quant-ph] 7 Jan 2023

共形导数下 Bateman 阻尼系统的量子化

Tariq AlBanwa、Ahmed Al-Jamel、Eqab.M.Rabei 和 Mohamed.Al-Masaeed，Al al-Bayt大学理学院物理系，约旦 Mafraq 25113，邮政信箱 130040。albanwatariq@gmail.com aaljamel@aabu.edu.jo，aaljamel@gmail.com eqabrabei@gmail.com moh.almssaeed@gmail.com

2023年1月10日

摘要

本文采用共形导数概念，提出了阻尼谐振子系统的共形Bateman拉格朗日量。换言之，将整数阶导数替换为阶数为α 且 $0 < \alpha \leq 1$的共形导数。随后，得到相应的共形欧拉-拉格朗日运动方程和分数阶哈密顿量。接着对该系统进行正则量子化，并构造共形薛定谔方程。通过适当的变换和扩展分数阶Nikiforov-Uvarov方法，求得能量本征值 E_n^α 和本征函数ψ_n^α 对分数阶的依赖关系。此外，还推导出相应的共形连续性方程，并据此适当地定义概率密度和概率流。本文绘制并分析了概率密度的演化及其对 α 的依赖关系，考察了多种情形。结果发现，能量本征值为实数，且概率密度的行为呈现出某种渐进的有序性。

关键词：耗散系统、共形导数、正则量子化、阻尼量子振子、Bateman系统、共形拉格朗日量

1 引言

耗散是所有真实物理系统中不可避免的一部分，从相对运动的经典表面，到分子、原子、原子核和辐射点电荷等量子系统皆是如此。数十年前，研究人员就开始研究这类非保守系统。历史上，Bateman [1] 为阻尼谐振子提出了一种拉格朗日量，由此可得精确的运动方程。此后，Cardirola 和

Kanai [2, 3]独立构造了与 Bateman 拉格朗日量相对应的哈密顿量。由于这类系统的拉格朗日量和哈密顿量显含时间，其量子化并非易事。非保守系统的量子化问题吸引了众多研究者。在 [4], 中，研究者采用路径积分形式对具有各种耗散形式的阻尼力学系统的拉格朗日量进行了量子化。在 [5], 中，他们重新审视了阻尼谐振子的描述，评估了以 Bateman-Caldirola-Kanai 模型为主的先前研究，并提出了一种能量行为更优的新模型，将其与一些现有的开放系统方法联系起来。此外，在 [6], 中，研究者应用费曼路径积分，并将其拓展至阻尼量子谐振子核的计算。在 [7], 中，研究者还从 Bateman 拉格朗日量出发，构造了一个适用于描述阻尼谐振子的哈密顿量。同时，他们写出了哈密顿-雅可比方程，并求得了作用量函数。随后，采用 WKB 近似和正则量子化对系统进行了量子化。此外，K. Takahashi [8] 将双 Bateman 系统（BDS）分解为两个有效独立、自由度更少的无质量子系统，并据此对其进行了量子化。随后，通过叠加这两个无质量子系统，重建了满足正则量子化条件的原始有质量 BDS。

在过去二十年中，许多研究者将物理系统的量子化拓展至分数阶微积分框架，这已成为物理学中的重要课题。分数阶微积分理论与经典微积分一样古老，可分为广义分数阶积分或导数。目前已有多种分数阶导数定义，其中最为常见的是黎曼-刘维尔、里斯和卡普托定义。每种定义都有其特征性质；一般性综述参见 [9–13]。研究者正日益关注分数阶微积分的应用，因为他们发现，分数阶导数有助于描述现实世界中的许多物理现象。例如，Riewe [14, 15] , 、Rabei 等人 [16, 17] 以及许多其他研究者运用分数阶微积分技术，为非保守系统构造拉格朗日量和哈密顿量。Rabei 等人 [18] 探讨了如何求解某些系统的薛定谔方程；这些系统的拉格朗日量具有分数阶特性，并满足 WKB 近似。此外，Rabei 等人 [19]运用分数阶微积分，对具有布朗运动的系统进行了正则量子化。

2014年，Khalil 等人 [20] 提出了一种新型的分数阶导数，称为共形导数（CD）。它采用经典导数常用的基本极限定义，而非像其他定义那样以积分来定义。给定函数 $f \in [0, \infty) \to R$。f 的 α 阶共形导数定义为

$$D^{\alpha}[f(t)] = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}, \quad t > 0, \tag{1}$$

借助 $0 < \alpha \leq 1$。该共形导数算子是线性的，并满足整数阶导数的一般性质，例如两个函数乘积或商的求导公式以及链式法则，因此优于传统分数阶导数 [20]。本文采用 $D^{\alpha} f$ 表示 f 的 α阶共形导数（共形导数）。

许多研究者认为，这一定义是将经典导数推广至分数阶领域的一种更成熟的候选方案。共形导数已在物理科学中得到多种应用。例如，文献 [21]研究了热共形微分方程，并求得其精确解。此外，文献[22]讨论了共形欧拉-拉格朗日方程和哈密顿形式。Chung等人 [23]利用共形微积分的概念研究了普通量子力学的变形。作者定义了两个基本算符，即 α-位置算符和 α-动量算符，随后构造了 α-哈密顿量算符，并推导出相关的共形薛定谔方程。他们还提出了一种共形量子力学的表述，并通过一些具有说明性的物理应用加以验证。文献 [24], 利用共形导数势模型，研究了重夸克偶素质量谱中的分数阶排序。该研究还讨论了这些短寿命束缚态中由非线性效应导致的饱和效应。文献 [25] 使用共形导数定义共形薛定谔方程，并引入共形尼基福罗夫-乌瓦罗夫方法，以求得能量本征值和本征函数。此外，文献 [26] 运用共形微积分研究正弦-戈登方程，并在共形微积分框架下求得精确的孤立波解。文献 [27], 使用共形分数阶导数研究共形牛顿力学，其中引入了共形变分法，并构建了共形欧拉–拉格朗日方程。文献 [28] 还利用共形导数研究分数阶奇异拉格朗日系统。他们求得了运动方程，随后确定了作用量积分。接着，他们讨论了分数阶 Christ-Lee 模型，并使用 WKB 近似对其进行量子化，以展示其方法的适用性。近年来，借助共形微积分，量子力学中采用的近似方法已得到扩展，从而可应用于共形量子力学（变分法 [29] , 微扰理论 [30] 和 WKB 近似 [31] ）。此外，文献 α 使用 α -产生算符和 [32]-湮灭算符对共形谐振子进行量子化。还有研究在共形导数的背景下阐述了狭义相对论的变形 [33]。最近，研究者利用共形微积分求解了多种方程，并研究其解的行为，例如拉盖尔微分方程 [34], 、薛定谔方程的角方程 [35] 以及氢原子薛定谔方程 [36] 。

本文提出了一种共形拉格朗日量，作为经典巴特曼拉格朗日量的自然扩展 [1]。随后将得到相应的运动方程和共形哈密顿量。将采用 [23] 中所述的共形系统正则量子化方法，以获得关于 α 阶的可能能量本征值和本征函数。在下文中，我们将在第 2 节回顾本研究所需的理论工具。第 3 节将介绍形式体系和量子化过程。最后，在第 4 节将给出总结与结论。

2 带共形导数的扩展 Nikiforov-Uvarov 方法（ENU-CD）

扩展 Nikiforov-Uvarov 方法（ENU）是 Nikiforov-Uvarov 方法的推广，用于求解可化为超几何形式的微分方程的本征值和本征函数 [37]。在一些量子力学研究文章中，该方法已被用于求解波动方程的本征值和本征函数 [38, 39]。考虑如下标准形式的共形微分方程 [25, 37]:

$$D^{\alpha}[D^{\alpha}\psi(s)] + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma} D^{\alpha}\psi(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^{2}(s)}\psi(s) = 0 \tag{2}$$

其中 $\tilde{\tau}(s)$、$\sigma(s)$ 和 $\tilde{\sigma}(s)$ 分别为次数最高为二次、三次和四次的多项式，则该方程可解析求解。利用 CFD [20, 37] 的关键性质:

$$D^{\alpha}\psi(s) = s^{1-\alpha}\psi'(s) \tag{3}$$

and

$$D^{\alpha}[D^{\alpha}\psi(s)] = (1-\alpha)s^{1-2\alpha}\psi'(s) + s^{2-2\alpha}\psi''(s). \tag{4}$$

于是，方程 (2) 转化为

$$\psi''(s) + \frac{(1-\alpha)\sigma(s)s^{-\alpha} + \tilde{\tau}(s)}{s^{1-\alpha}\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{s^{2-2\alpha}\sigma^{2}(s)}\psi(s) = 0. \tag{5}$$

引入相容参数 $\tilde{\tau_f}(s) = (1-\alpha)\sigma(s)s^{-\alpha} + \tilde{\tau}(s)$、$\sigma_f(s) = s^{2-2\alpha}\sigma^2(s)$ 以及 $\tilde{\sigma_f}(s) = \sigma(s)$，则可得到相容扩展 Nikiforov-Uvarov 方法 [38] 的标准方程形式

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau_f}(s)}{\sigma_f(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma_f^{2}(s)}\psi(s) = 0 \tag{6}$$

接下来的自然步骤是提出试探解

$$\psi(s) = \phi(s)Y(s), \tag{7}$$

这将方程 (6) 化为超几何形式,

$$\sigma_f(s)Y'' + \tau(s)Y' + h(s)Y(s) = 0. \tag{8}$$

其中 $\phi(s)$ 满足一阶微分方程

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi_f(s)}{\sigma_f(s)}, \tag{9}$$

且 $h(s)$满足

$$h(s) = \pi_f'(s) + G(s). \tag{10}$$

这里， $Y(s)$是一类超几何函数，其多项式解满足如下形式的罗德里格斯公式

$$Y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} \left[\sigma_f^n(s) \rho(s) \right], \tag{11}$$

其中， B_n 是归一化常数， ρ 称为权函数或密度函数，并且必须满足以下条件

$$(\sigma_f \rho)' = \tau \rho. \tag{12}$$

该方法所需的函数 $\pi_f(s)$和函数 $G(s)$由以下关系定义

$$\pi_f = \frac{\sigma_f'(s) - \tilde{\tau_f}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_f'(s) - \tilde{\tau_f}(s)}{2} \right)^2 - \tilde{\sigma_f}(s) + G(s)\sigma_f(s)}, \tag{13}$$

并选择它们使函数$\pi f(s)$成为次数至多为 2α 的多项式。此外，函数 $h_n(s)$由以下关系确定

$$h_n(s) = -\frac{n}{2}\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{6}\sigma_f''(s) + C_n, \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{14}$$

其中

$$\tau(s) = \tilde{\tau_f}(s) + 2\pi_f(s). \tag{15}$$

然后，方程(10)与方程(14)相等，由此得到能量本征值。

3 形式体系

考虑巴特曼拉格朗日量 [1]

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2 \right) e^{\lambda t}. \tag{16}$$

该拉格朗日量描述了一维阻尼谐振子。我们将相应的共形Bateman拉格朗日量定义为

$$L(q^\alpha, D_t^\alpha q^\alpha, t^\alpha) = \frac{m^\alpha}{2} ([D_t^\alpha q^\alpha]^2 - \omega^{2\alpha} q^{2\alpha}) e^{\frac{\lambda t^\alpha}{\alpha}} \tag{17}$$

引入一个新坐标 y^α ，定义为

$$y^\alpha = q^\alpha e^{\frac{\lambda t^\alpha}{2\alpha}} \tag{18}$$

于是,

$$q^\alpha = \frac{y^\alpha}{e^{\frac{\lambda t^\alpha}{\alpha}}} \tag{19}$$

在两边同时作用 D_t^α，我们得到

$$D_t^\alpha q^\alpha = \frac{e^{\frac{\lambda t^\alpha}{2\alpha}} (D_t^\alpha y^\alpha - y^\alpha \frac{\lambda}{2})}{e^{\frac{\lambda t^\alpha}{\alpha}}} \tag{20}$$

将此结果代入式（17），并进行简单的代数运算，可得

$$L(y^\alpha, D_t^\alpha y^\alpha) = \frac{m^\alpha}{2}([D_t^\alpha y^\alpha]^2 + [\frac{\lambda^2}{4} - \omega^{2\alpha}]y^{2\alpha} - y^\alpha \lambda D_t^\alpha y^\alpha). \tag{21}$$

共形欧拉-拉格朗日运动方程可通过以下方式得到

$$\frac{\partial L}{\partial y^\alpha} - D_t^\alpha(\frac{\partial L}{\partial [D_t^\alpha y^\alpha])} = 0. \tag{22}$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} &= m^\alpha[\frac{\lambda^2}{4} - \omega^{2\alpha}]y^\alpha - \frac{m^\alpha \lambda D_t^\alpha y^\alpha}{2} \\ \frac{\partial L}{\partial [D_t^\alpha y^\alpha]} &= m^\alpha D_t^\alpha y^\alpha - \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2} \\ D_t^\alpha \frac{\partial L}{\partial [D_t^\alpha y^\alpha]} &= m^\alpha D_t^\alpha D_t^\alpha y^\alpha - \frac{m^\alpha \lambda D^\alpha y^\alpha}{2} \end{aligned} \tag{23}$$

运动方程可写为

$$D_t^\alpha D_t^\alpha y^\alpha + (\frac{\lambda^2}{4} - \omega^{2\alpha})y^\alpha = 0 \tag{24}$$

哈密顿量定义为

$$H(y^\alpha, P_y^\alpha) = P_y^\alpha D_t^\alpha y^\alpha - L. \tag{25}$$

动量算符定义为 [40]

$$P_y^\alpha = \frac{\partial L}{\partial [D_t^\alpha y^\alpha]} = m^\alpha D_t^\alpha y^\alpha - \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2} \tag{26}$$

于是，哈密顿量变为

$$H(y^\alpha, P_y^\alpha) = \frac{(P_y^\alpha)^2}{2m^\alpha} + \frac{1}{2}m^\alpha \omega^{2\alpha} y^{2\alpha} + \frac{1}{2}\lambda y^\alpha P_y^\alpha. \tag{27}$$

为了对哈密顿量方程（27）进行正则量子化，我们首先注意到

$$\begin{aligned} [P_y^\alpha + \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2}, e^{-f(y)}]\psi(y) &= [P_y^\alpha, e^{-f(y)}]\psi(y) \\ &= -i\hbar^\alpha D_t^\alpha [e^{-f(y)}, \psi(y)] + i\hbar^\alpha e^{-f(y)} D_t^\alpha \psi(y) \\ &= -i\hbar^\alpha \psi(y) D_t^\alpha e^{-f(y)} \end{aligned} \tag{28}$$

并利用

$$D_t^\alpha e^{-f(y)} = -y^{1-\alpha} f'(y) e^{-f(y)} \tag{29}$$

我们得到对易子

$$[P_y^\alpha + \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2}, e^{-f(y)}] = i\hbar^\alpha y^{1-\alpha} f'(y) e^{-f(y)}. \tag{30}$$

展开该对易子的左侧

$$(P_y^\alpha + \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2})e^{-f(y)} - e^{-f(y)}(P_y^\alpha + \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2}) = i\hbar^\alpha y^{1-\alpha} f'(y) e^{-f(y)} \tag{31}$$

然后在等式两边左乘 $e^{+f(y)}$，稍作代数运算后可得

$$e^{+f(y)}(P_y^\alpha + \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2})e^{-f(y)} = P_y^\alpha + \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2} + i\hbar^\alpha y^{1-\alpha} f'(y) \tag{32}$$

选择 $e^{+f(y)}$，使得

$$f'(y) = -\frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2} * \frac{1}{i\hbar^\alpha y^{1-\alpha}} \tag{33}$$

即可得到

$$f(y) = \frac{i m^\alpha \lambda y^{2\alpha}}{4\alpha \hbar^\alpha} \tag{34}$$

Then

$$e^{\frac{+i m^\alpha \lambda y^{2\alpha}}{4\alpha\hbar^\alpha}}(P_y^\alpha + \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2})e^{\frac{-i m^\alpha \lambda y^{2\alpha}}{4\alpha\hbar^\alpha}} = P_y^\alpha \tag{35}$$

记

$$\eta = e^{\frac{i m^\alpha \lambda y^{2\alpha}}{4\alpha\hbar^\alpha}} \tag{36}$$

我们得到规范变换

$$\eta(P_y^\alpha + \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2})\eta^{-1} = P_y^\alpha. \tag{37}$$

这一结果可推广为

$$\eta(P_y^\alpha + \frac{m^\alpha \lambda y^\alpha}{2})^2\eta^{-1} = (P_y^\alpha)^2. \tag{38}$$

将其应用于方程（27）中的哈密顿量，我们得到

$$\eta H \eta^{-1}\eta = \frac{(P_y^\alpha)^2}{2m^\alpha} + \frac{1}{2}m^\alpha(\omega^{2\alpha} - \frac{\lambda^2}{4})y^{2\alpha} \tag{39}$$

因此，我们不对方程（27）给出的哈密顿量进行正则量子化，而是对方程（39）右侧给出的新哈密顿量进行正则量子化：

$$H = \frac{(P_y^\alpha)^2}{2m^\alpha} + \frac{1}{2}m^\alpha(\omega^{2\alpha} - \frac{\lambda^2}{4})y^{2\alpha}. \tag{40}$$

于是，相应的共形薛定谔方程为

$$[\frac{(P_y^\alpha)^2}{2m^\alpha} + \frac{1}{2}m^\alpha \Omega^2 y^{2\alpha}]\psi = E^\alpha \psi \tag{41}$$

其中 $\Omega^2 = \omega^{2\alpha} - \frac{\lambda^2}{4}$。代入共形动量算符$P_y^\alpha = -i\hbar D_y^\alpha$后，可得

$$\frac{-\hbar^{2\alpha}}{2m^\alpha}(D_y^\alpha)^2\psi + \frac{1}{2}m^\alpha\Omega^2 y^{2\alpha}\psi = E^\alpha\psi \tag{42}$$

Or

$$(D_y^\alpha)^2\psi = y^{2-2\alpha}\psi'' + (1+\alpha)y^{1-2\alpha}\psi' \tag{43}$$

利用方程（27），我们得到

$$\psi'' + \frac{(1+\alpha)}{y}\psi' + \frac{2m^\alpha}{y^2\hbar^{2\alpha}}(E^\alpha y^{2\alpha} - \frac{m^\alpha\Omega^2}{2}y^{4\alpha})\psi = 0 \tag{44}$$

接下来，我们注意到 $\tau_f(y) = (1+\alpha)$、 $\sigma_f = y$，以及 $\tilde{\sigma}_f(y) = \frac{2m^\alpha}{\hbar^{2\alpha}}(E^\alpha y^{2\alpha} - \frac{m^\alpha\Omega^2}{2}y^{4\alpha})$。取 $G(y) = S + Py^{\alpha-1} + Qy^{2\alpha-1}$，则可证明 π_f具有如下形式:

$$\pi_f(y) = \frac{\alpha}{2} + -\sqrt{(A + By^\alpha + Fy^{2\alpha})^2} \tag{45}$$

其中 $A = \pm\frac{\alpha}{2}$、 $S = 0$、 $B = 0$、 $P = 0$ 和 $Q = \frac{2m^\alpha E^\alpha}{\hbar^{2\alpha}}y^{2\alpha} + B^2 + 2AF$，且$F = \frac{m^\alpha}{\hbar^\alpha}\sqrt{\omega^{2\alpha} - \frac{\lambda^2}{4}}$。然后，利用方程（15）、（10）和（14），我们得到:

$$\begin{aligned}
\tau(y) &= 1 + -2(A + Fy^{2\alpha}) && (46)\\
h_n(y) &= -\frac{n}{2}\tau' - \frac{n(n-1)}{6}\sigma_f'' + C_n && (47)\\
h(y) &= 2n\alpha F y^{2\alpha-1} + C_n. && (48)
\end{aligned}$$

令方程（47）与方程（48）相等，我们得到

$$E^\alpha = \alpha\hbar^\alpha\sqrt{\omega^{2\alpha} - \frac{\lambda^2}{4}}(n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{49}$$

这一结果表明，能量本征值为实数。令 $\alpha = 1$，即可得到传统阻尼谐振子的能量本征值，这与 [7] 中得到的结果一致。这一结果与采用不同方法在 [30? ?] 中得到的结果相符。本征函数可通过首先利用方程（7–11）求出所需函数来确定。结果为

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= y^\alpha e^{\frac{F}{2\alpha}y^{2\alpha}} && (50)\\
\rho(y) &= y^{-\alpha}e^{\frac{F}{\alpha}y^{2\alpha}} && (51)\\
Y_n(y) &= B_n y^\alpha e^{\frac{F}{\alpha}y^{2\alpha}}\frac{d^n}{dy^n}\left(y^{n-\alpha}e^{\frac{-F}{\alpha}y^{2\alpha}}\right) && (52)
\end{aligned}$$

于是，本征函数为

$$\psi_n(y) = B_n y^\alpha e^{\frac{F}{2\alpha}y^{2\alpha}}\frac{d^n}{dy^n}\left(y^{n-\alpha}e^{\frac{-F}{\alpha}y^{2\alpha}}\right), \tag{53}$$

其中 B_n 是归一化常数。为了正确地定义概率流密度和概率流，我们推导式（44）的连续性方程。将式（44）乘以 $e^{\frac{-\lambda t^\alpha}{2}}$，然后按照推导传统薛定谔方程连续性方程的类似步骤，可得

$$D_t^\alpha[\psi^*\psi e^{\frac{-\lambda t^\alpha}{2}}]+D_y^\alpha[\frac{\hbar^\alpha}{2im^\alpha}(\psi^* D_y^\alpha\psi-\psi D_y^\alpha\psi^*)e^{\frac{-\lambda t^\alpha}{2}}+\frac{\lambda}{2}y^\alpha\psi^*\psi e^{\frac{-\lambda t^\alpha}{2}}]=0. \quad (54)$$

我们将概率密度 $\rho(y,t)$ 和概率流密度 $j(y,t)$ 分别定义为

$$\rho(y,t)=\psi^*\psi e^{\frac{-\lambda t^\alpha}{2}}, \quad (55)$$

and

$$j(y,t)=\frac{\hbar^\alpha}{2im^\alpha}(\psi^* D_y^\alpha\psi-\psi D_y^\alpha\psi^*)e^{\frac{-\lambda t^\alpha}{2}}+\frac{\lambda}{2}y^\alpha\psi^*\psi e^{\frac{-\lambda t^\alpha}{2}}, \quad (56)$$

分别为。代入方程(53)，我们得到

$$\rho(y,t)=B_n^2 y^{2\alpha}e^{\frac{F}{\alpha}y^{2\alpha}}\left(\frac{d^n}{dy^n}\left[y^{n-\alpha}e^{\frac{-F}{\alpha}y^{2\alpha}}\right]\right)^2 e^{-\frac{\lambda t^\alpha}{2}}. \quad (57)$$

由于耗散，本征函数在初始时刻 $t=0$ 通过以下关系归一化：

$$\int_0^\infty \rho(y,0)dy=1, \quad (58)$$

该关系确定了归一化常数 B_n 在所有时刻的值。为检验计算结果，我们在图(1)中绘出了基态$n=0$ 和第一激发态 $n=1$ 在参数组 $\lambda=0$ 和 $\alpha=1$下的概率密度时间演化。这代表了无耗散的传统量子谐振子。显然，我们在此展示了这一情形下众所周知的行为。在图(2)中，我们绘出了相同的情形 $\alpha=1$，但加入了耗散 $\lambda=0.5$。可以发现，随着系统随时间演化，概率密度逐渐减小。这正如预期，是由耗散引起的。然而，本文发现的概率分布衰减行为表明，随着时间演化，不仅曲线下的面积减小，峰值也逐渐降低。相比之下， [7], 中的结果显示，其分布在保持峰值不变的同时减小。图(3)展示了前三个态 $n=0$、1、2、3在参数 $F=1$下的初始概率密度分布，并对分数阶参数 α的不同取值进行了计算。可以得出结论，随着 α，这些分布呈现出逐渐有序化的趋势。这表明，可以使用共形模型来描述或建模伴随原始Bateman系统的非线性现象。

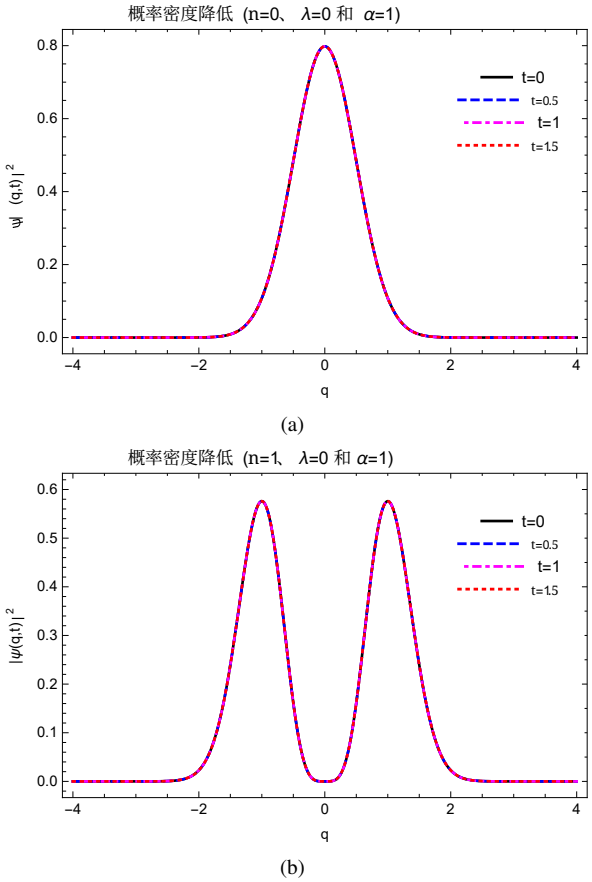
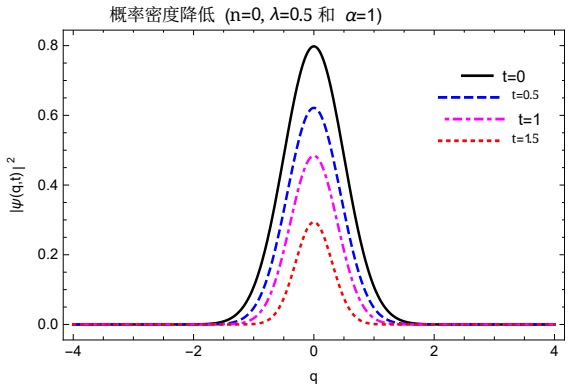
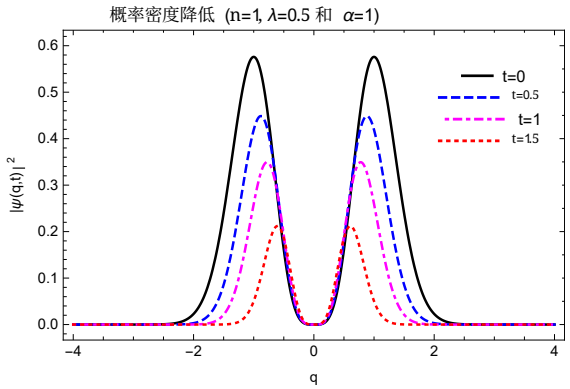


图 1：参数组为 $\lambda = 0$ 和 $\alpha = 1$时，基态 $n = 0$ 和第一激发态 $n = 1$ 的概率密度随时间的演化。

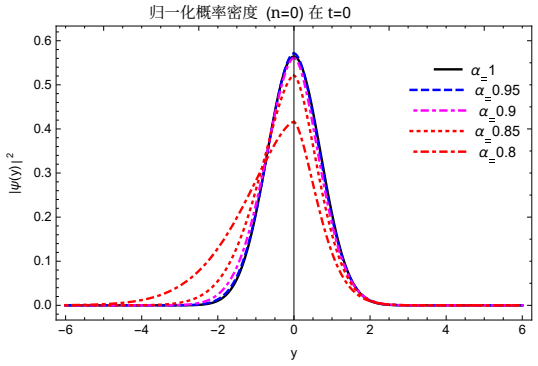


(a)

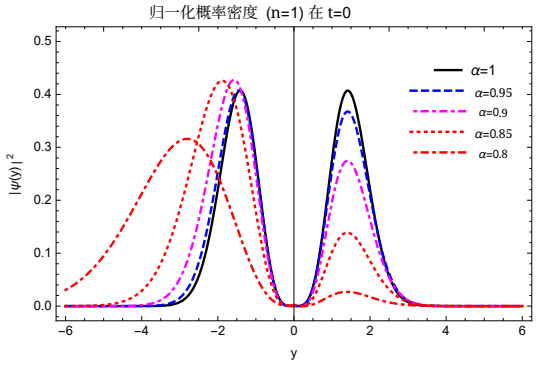


(b)

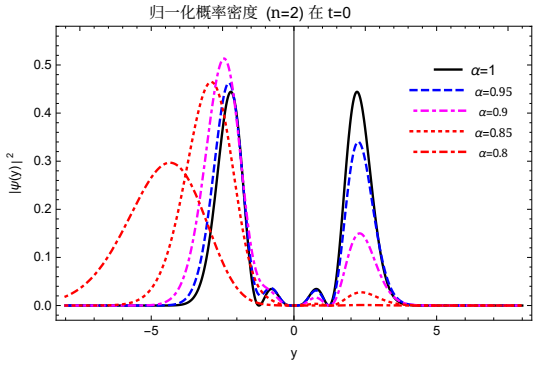
图2：参数组 $\lambda = 0.5$ 和 $\alpha = 1$ 下基态 $n = 0$ 与第一激发态 $n = 1$ 的概率密度时间演化。



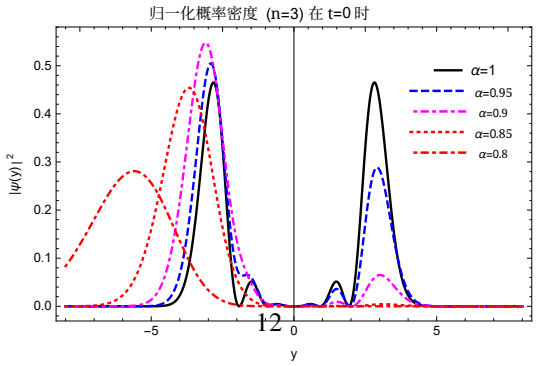
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3：态 $n = 0$、1、2、3 的归一化概率密度随分数阶 α 在时间 $t = 0$ 的变化情况。参数值的选择满足 $F = \frac{m^\alpha}{\hbar^\alpha}\sqrt{\omega^{2\alpha} - \frac{\lambda^2}{4}} = 1$。

4 结论

本文采用共形导数概念构建了阻尼谐振子系统的巴特曼拉格朗日量，并由此得到了相应的相容欧拉-拉格朗日运动方程和共形哈密顿量。随后对该系统进行了正则量子化，得到了适当的共形薛定谔方程。通过一些变换并运用扩展相容尼基福罗夫-乌瓦罗夫方法，我们求解了该方程，得到了能量本征值和本征函数关于 α 阶数的函数关系。结果表明，能量本征值为实数且等间距；令 $\alpha = 1$ 时，可恢复相应的传统阻尼谐振子。我们推导了连续性方程，以定义概率密度和概率流。我们绘制并分析了概率密度的演化及其对 α 阶数的依赖，并考察了多种情形。我们观察到，对于 $0.8 \leq \alpha \leq 1$，这些分布逐渐呈现有序化。

参考文献

[1] H. Bateman, 《耗散系统及相关变分原理》, 《物理评论》, 第38卷第4期, 第815–819页, 1931年8月。[2] P. Caldirola, 《量子力学中的非保守力》, 《新科学杂志》, 第18卷第9期, 第393–400页, 1941年11月。[3] E. Kanai, 《耗散系统的量子化》, 《理论物理进展》, 第3卷第4期, 第440–442页, 1948年12月。[4] D. Jain、A. Das和S. Kar, 《阻尼力学系统的路径积分与波包演化》, 《美国物理学杂志》, 第75卷第3期, 第259–267页, 2007年3月。[5] M. Baldiotti、R. Fresneda和D. Gitman, 《阻尼谐振子的再量子化》, 《物理快报A》, 第375卷第15期, 第1630–1636页, 2011年4月。[6] B. G. M´arkus和F. M´arkus, 《吸收型谐振子势阱中的量子粒子运动》, 《印度物理学杂志》, 第90卷第4期, 第441–446页, 2016年4月。[7] M. Serhan、M. Abusini、A. Al-Jamel、H. El-Nasser和E. M. Rabei, 《阻尼谐振子的量子化》, 《数学物理学杂志》, 第59卷第8期, 文章编号082105, 2018年8月。[8] K. Takahashi, 《有质量巴特曼系统的量子化》, 《数学物理学杂志》, 第59卷第7期, 文章编号072108, 2018年7月。[9] K. Oldham和J. Spanier, 《分数阶微积分, 学术出版社, 纽约》, 《分数阶微积分》, 学术出版社, 纽约, 1974年。

[10] K. Miller和B. Ross，《分数阶积分与导数导论——理论与应用》，John Willey & Sons出版社，纽约，1993年。[11] A. A. Kilbas、H. M. Srivastava和J. J. Trujillo，《分数阶微分方程理论与应用》，Elsevier，2006年，第204卷。[12] M. Klimek，《拉格朗日量与哈密顿量分数阶序列力学》，《捷克斯洛伐克物理学杂志》，第52卷第11期，第1247–1253页，2002年。[13] O. P. Agrawal，《分数阶变分问题的欧拉–拉格朗日方程构造》，《数学分析与应用杂志》，第272卷第1期，第368–379页，2002年。[14] F. Riewe，《非保守拉格朗日量与哈密顿力学》，《物理评论E》，第53卷第2期，第1890–1899页，1996年2月。[15] ——，《带分数阶导数的力学》，《物理评论E》，第55卷第3期，第3581–3592页，1997年3月。[16] E. M. Rabei、S. I. Muslih和D. Baleanu，《使用WKB 近似的分数阶系统量子化》，《非线性科学与数值模拟通讯》，第15卷第4期，第807–811页，2010年4月。[17] E. M. Rabei、A.-W. Ajlouni和H. B. Ghassib，《布朗运动的量子化》，《国际理论物理学杂志》，第45卷第9期，第1613–1623页，2006年11月。[18] E. M. Rabei、I. M. Altarazi、S. I. Muslih和D. Baleanu，《分数阶WKB近似》，《非线性动力学》，第57卷第1–2期，第171–175页，2009年。[19] E. M. Rabei、A.-W. Ajlouni和H. B. Ghassib，《布朗运动的量子化》，《国际理论物理学杂志》，第45卷第9期，第1613–1623页，2006年。[20] R. Khalil、M. Al Horani、A. Yousef和M. Sababheh，《分数阶导数的新定义》，《计算与应用数学杂志》，第264卷，第65–70页，2014年7月。[21] R. Khalil和M. Abu-Hammad，《相容分数阶热微分方程》，《纯粹与应用数学国际杂志》，第94卷，第215–217页，2014年。[22] M. J. Lazo和D. F. Torres，《使用相容分数阶导数的变分法》，《IEEE/CAA自动化学报》，第4卷第2期，第340–352页，2016年。[23] W. S. Chung、S. Zare、H. Hassanabadi和E. Maghsoodi，《分数阶微积分对量子力学算符构成的影响》，《应用科学中的数学方法》，2020年。

[24] A. Al-Jamel, 《重夸克偶素谱中的分数阶探寻》, 《现代物理学国际期刊 A》, 第34卷第10期, 页码1950054, 2019年。[25] H. Karayer、D. Demirhan 和 F. B¨uy¨ukkılıc., 《相容分数阶 Nikiforov—Uvarov 方法》, 《理论物理通讯》, 第66卷第1期, 第12–18页, 2016年7月。[26] H. Karayer、D. Demirhan 和 F. Buyukkilic, 《局部分数阶正弦-戈登方程的解》, 《随机与复杂介质中的波》, 第29卷第2期, 第227–235页, 2019年4月。[27] W. S. Chung, 《具有共形分数阶导数的分数阶牛顿力学》, 《计算与应用数学杂志》, 第290卷, 第150–158页, 2015年12月。[28] E. M. Rabei 和 M. Al Horani, 《利用 WKB 近似量子化分数阶奇异拉格朗日系统》, 《现代物理学国际期刊 A》, 第33卷第36期, 页码1850222, 2018年。[29] M. Al-Masaeed、E. M. Rabei 和 A. Al-Jamel, 《将变分法扩展至共形量子力学》, 《应用科学中的数学方法》, 第45卷第5期, 第2910–2920页, 2022年。 [在线]。链接: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.7963 [30] M. Al-Masaeed、E. M. Rabei、A. Al-Jamel 和 D. Baleanu, 《将微扰理论扩展至具有共形导数的量子系统》, 《现代物理快报 A》, 页码2150228, 2021年。[31] M. Al-Masaeed、E. M. Rabei 和 A. Al-Jamel, 《相容算子的 WKB 近似》, 《现代物理快报 A》, 第37卷第22期, 页码2250144, 2022年。 [在线]。链接: https://doi.org/10.1142/S0217732322501449[32] M. Al-Masaeed、E. M. Rabei、A. Al-Jamel 和 D. Baleanu, 《利用产生与湮灭算符量子化分数阶谐振子》, 《开放物理》, 第19卷第1期, 第395–401页, 2021年。[33]A. Al-Jamel、M. Al-Masaeed、E. Rabei 和 D. Baleanu, 《共形导数对狭义相对论变形的影响》, 《墨西哥物理学杂志》, 第68卷第5期, 9月至10月, 第050 705 1–9页, 2022年8月, 期号: 5, 9月至10月。 [在线]。链接: https://rmf.smf.mx/ojs/index.php/rmf/article/view/5877[34] E. M. Rabei、A. Al-Jamel 和 M. Al-Masaeed, 《利用相容拉普拉斯变换求解相容 Laguerre 微分方程》, 2021年。[在线]。链接: https://arxiv.org/abs/2112.01322[35] E. M. Rabei、M. Al-Masaeed 和 A. Al-Jamel, 《薛定谔方程相容角方程的解》, 2022年。 [在线]。链接: https://arxiv.org/abs/2203.11615

[36]M. Al-Masaeed、E. M. Rabei 和 A. Al-Jamel, 《氢原子共形薛定谔方程的解析研究》, 2022年。 [在线]。链接：https://arxiv.org/abs/2209.02699
[37] H. Karayer、D. Demirhan 和 F. B¨uy¨ukkılıc, 《Nikiforov-Uvarov 方法在求解 Heun 方程中的扩展》, 《数学物理学杂志》, 第56卷第6期, 页码063504, 2015年6月。[38] A. Al-Jamel, 《N 维空间中具有能量依赖型禁闭势的重夸克偶素谱饱和》, 《现代物理快报 A》, 第33卷第32期, 页码1850185, 2018年10月。[39] H. Karayer、D. Demirhan 和 F. B¨uy¨ukkılıc, 《利用扩展 Nikiforov-Uvarov 方法求解两种不同势的薛定谔方程, 以及双合流 Heun 方程的多项式解》, 《数学物理学杂志》, 第59卷第5期, 页码053501, 2018年5月。[40] F. Mozaffari、H. Hassanabadi、H. Sobhani 和 W. Chung, 《论相容分数阶量子力学》, 《韩国物理学会志》, 第72卷第9期, 第980–986页, 2018年。