arXiv:2301.02770v1 [math.NT] 7 Jan 2023

关于素数阶乘数

JONATAN GOMEZ
JGOMEZPE@UNAL.EDU.CO 哥伦比亚国立大学

摘要。由于定义简单且具有引人注目的性质，素数数千年来一直吸引着数学家和爱好者的关注。本文研究素数阶乘数（前若干个素数的乘积），以定义阶乘素数集合、素数阶乘区间、primorial 表和阶乘素数互素数。我们建立了素数与阶乘素数互素数之间的关系，以及素数的可容许 k元组与阶乘素数互素数的可容许 k元组之间的关系。最后，我们研究哥德巴赫猜想，并利用素数阶乘区间、孪生对数、表亲对数和性感素数，推导出四个哥德巴赫猜想。

1. 引言

1.1. 素数。素数是恰好有两个因数（1 和其本身）的自然数 [Nar00]。自然数 1 只有一个因数（1），因此不被视为素数。从现在起，p_n 表示第 n**个**素数，此处 $n \geq 1$。前十一个素数是 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31。尽管已有文献定义了不同类别的素数 [Wika], ，本文尤其关注由可容许 k元组和 k星座 [的概念导出的若干素数类别 For99; Wikc]。

1.2. 可容许元组。 </style}由自然数组成的 k 元组 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ 是可容许的，当且仅当 $a_1 = 0$, $a_{i-1} < a_i$ 对所有 $i = 2, 3, \ldots, k$ 均成立，并且存在一个素数 $p > 3$，使得 $(p, p + a_2, \ldots, p + a_k)$ 是一个由素数组成的 k 元组，即对于所有 $i = 1, 2, \ldots, k$，$p + a_i$ 都是素数。我们称素数 $p > 3$ 满足可容许的 k 元组 a （将这种情况记作 $[p|a]$），当且仅当 $(p, p+a_2, \ldots, p+a_k)$ 是一个由素数组成的 k 元组。可容许 k 元组 a 的直径是 $dia(a) = a_k$，而其间隙是其中两个相邻元素之差的最大值，即 $gap(a) = max\{a_i - a_{i-1} \mid i = 2, 3, \ldots, k\}$。例如，

(1) $a = (0, 2)$ 是一个可容许的二元组。若 $p = 5$，那么 $5 + 0 = 5$ 且 $5 + 2 = 7$，所以 (5, 7) 是一对素数。显然，$dia(a) = a_2 = 2$ 且$gap(a) = max\{2 - 0\} = 2$。(2) $a = (0, 2, 6)$ 是一个可容许的三元组。若 $p = 5$，那么 $5+0 = 5$、$5+2 = 7$和$5+6 = 11$，所以 (5, 7, 11) 是一组三个素数。显然，$dia(a) = a_2 = 6$ 且 $gap(a) = max\{2 - 0, 6 - 2\} = 4$。(3) (0, 1) 不可容许：因为 $p > 3$是素数，所以 $p = 2x+1$（奇数，即不是 2 的倍数）。于是 $p+1 = 2x+1+1 = 2x+2 = 2(x+1)$ 是偶数，因此不是素数（矛盾）。(4) (0, 2, 4) 不是可容许的三元组：因为 $p > 3$，所以 $p = 3x + y$且有 $y = 1$，2（p 是素数，因此不是 3 的倍数）。若 $y = 1$，那么 $p + 2 = 3x + 1 + 2 =$

$3x+3$)3($x+1$)，所以 $p+2$ 是 3 的倍数，因此不是素数（矛盾）。若 $y=2$，那么 $p+4=3x+2+4=3x+6=3(x+2)$。所以$p+4$ 是 3 的倍数，因此不是素数（矛盾）。

1.3. **星座**。可容许的 k 元组 $a=(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ 是 k 星座，当且仅当对于任意可容许的 k 元组 $b=(b_1,b_2,\ldots,b_k)$，都有 $dia(a)\leq dia(b)$。例如，(0, 2)、(0, 4) 和 (0, 6) 都是可容许的二元组，但只有 (0, 2) 是素数二元星座（$2\leq 4\leq 6$）。

1.4. **素数类别**。以下简要列出一些根据可容许的 k 元组和 k 星座定义的素数类别:

(1) **孪生素数**。两个素数 p 和 q 是孪生素数，当且仅当$q=p+2$。例如，素数 5 和 7 是孪生素数，因为它们构成的素数二元组 $(5,5+2)$ 满足素数二元星座 (0, 2)。(2) **表亲素数**。两个素数 p 和 q 称为表亲素数，当且仅当 $q=p+4$。例如，素数 7 和 11 是表亲素数，因为它们构成的素数二元组 $(7,7+4)$ 满足可容许的二元组 (0, 4)。(3) **性感素数**。两个素数 p 和 q 称为性感素数，当且仅当 $q=p+6$。例如，素数 5 和 11 是性感素数，因为它们构成的素数二元组 $(5,5+6)$ 满足可容许的二元组 (0, 6)。(4) **性感素数三元组**。三个素数 p、q 和 r 称为性感素数三元组，当且仅当 $q=p+6$ 和 $r=p+12$。例如，素数 5、11 和 17 构成性感素数三元组，因为它们构成的素数三元组 $(5,5+6,5+12)$ 满足可容许的三元组 (0, 6, 12)。(5) **性感素数四元组**。四个素数 p、q、r 和 s 称为性感素数四元组，当且仅当 $q=p+6$、$r=p+12$ 和 $s=p+18$。例如，素数 5、11、17 和 23 构成性感素数四元组，因为它们构成的素数四元组 $(5,5+6,5+12,5+18)$ 满足可容许的四元组 (0, 6, 12, 18)。

1.5. **素数阶乘**。可以对素数定义许多有趣的运算。例如，我们可以将第 n个 素数的**阶乘素数** 定义为前 $n\in\mathbb{N}^+$ 个素数的乘积 [Dub87], 即 $\#(n)=p_n\#=\prod_{i=1}^{n}p_k$。这个定义类似于阶乘函数的定义，因此可以将阶乘素数定义为递归函数：$\#(0)=1$ 且 $\#(n)=p_n\#(n-1)$，其中$n\geq 1$。前六个素数阶乘分别为 1、2、6、30、210、2310。

1.6. **互素数或相对素数**。当且仅当两个自然数 $a,b\in\mathbb{N}$ 的最大公约数为 1（$gcd(a,b)=1$）时，它们是互素数或相对素数。根据这个定义，*i)* 1 与任何其他正自然数互素，*ii)* 0 不与任何自然数互素，并且*iii)* 任何素数都与任何其他素数互素。注意，我们可以用互素数来定义素数：当且仅当自然数 $p>1$ 与所有自然数$1\leq q<p$ 都互素时，p 是素数。

1.7. 小于 n （$\mathbb{Z}_n$）的自然数。 设 $n \in \mathbb{N}$ 为小于 n 的自然数组成的集合，即 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$。例如， $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 和 $\mathbb{Z}_{\#(2)} = \mathbb{Z}_{2*3} = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 3, 4, 5\}$。在 $\mathbb{Z}_n$ 满足的各项性质中，我们尤其关注与 #(n) 互素的自然数子集的结构（有时称为 #(n) 的互素数）。例如，考虑 $\mathbb{Z}_{\#(2)} = \mathbb{Z}_6$，由与 6 互素的自然数组成的 $\mathbb{Z}_6$ 的子集为 $\{1, 5\}$。显然，任何满足 $p_n < q <$#(n) 的素数 q 都与 #(n) 互素。

1.8. 欧拉函数（$\varphi(n)$）。 欧拉函数 [Eul63] 统计了在 $\mathbb{Z}_n$ 中与 n 互素的自然数个数。例如， $\mathbb{Z}_{\#(3)} = \mathbb{Z}_{30}$，与 30 互素的自然数子集为 $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$，因此 $\varphi(30) = 8$。欧拉函数是一种积性函数，即对于两个互素数 a 和 b，有 $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$。此外，对于素数$p$， $\mathbb{Z}_p - \{0\}$ 是 p 的互素数集合，因此 $\varphi(p) = p - 1$。利用欧拉函数的这两个性质，我们可以轻松计算素数阶乘数的欧拉函数： $\varphi(\#(n)) = \prod_{i=1}^{n}(p_k - 1) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(p_k)$。

2. 前素数集合、素数阶乘区间和前素数互素数

2.1. 前素数集合。 我们通过用 #(n) 和 #(n) $+ 1$ 分别替换 $\mathbb{Z}_{\#(n)}$ 中的 0 和 1，来定义一个 n-前素数集合。这样做是因为数字 1 总是与另一个正自然数互素。令 $n \in \mathbb{N}$，n-前素数集合定义为 $\mathbb{Z}_n^{\#} = \{2, 3, \ldots,$ #(n)、#(n) $+ 1\}$。以下是前五个 n-前素数集合的列表：

(1) $\mathbb{Z}_1^{\#} = \{2, 3\}$(2)
$\mathbb{Z}_2^{\#} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$(3)
$\mathbb{Z}_3^{\#} = \{2, 3, \ldots, 30, 31\}$(4)
$\mathbb{Z}_4^{\#} = \{2, 3, \ldots, 210, 211\}$(5)
$\mathbb{Z}_5^{\#} = \{2, 3, \ldots, 2310, 2311\}$

2.2. 素数阶乘区间。 令 $n \in \mathbb{N}$， n-素数阶乘区间定义为 $\mathcal{I}_n = \{m \mid$#($n-1$) $+ 1 \leq x \leq$#(n) $+ 1\}$。以下是前五个 n-素数阶乘区间的列表：

(1) $\mathcal{I}_1 = \{2, 3\}$(2) $\mathcal{I}_2 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
(3) $\mathcal{I}_3 = \{7, 8, \ldots, 30, 31\}$(4)
$\mathcal{I}_4 = \{31, 32, \ldots, 210, 211\}$(5)
$\mathcal{I}_5 = \{211, 212, \ldots, 2310, 2311\}$

请注意，素数阶乘区间并非互不相交的集合： $\mathcal{I}_n$ 的最后一个元素是 $\mathcal{I}_{n+1}$的第一个元素。

2.3. 素数阶乘 n-互素数。 通过考察 $\mathbb{Z}_n^{\#}$ 中与 #(n) 互素的自然数子集，我们可以将 #(n) 的互素数这一概念扩展到集合$\mathbb{Z}_n^{\#}$ 。以下是前三个 n-互素数集合的列表：

(1) 1-互素数集合为 $tot(1) = \{3\}$(2) 2-互素数集合为 $tot(2)$ $= \{5, 7\}$(3) 3-互素数集合为 $tot(3) = \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$

注意，任何素数 $p \in \mathbb{Z}_n^{\#}$ 必定是某个 $i = 1$、2、.....、 n 的 p_i，或者是一个 n-互素数；也就是说，我们可以用素数阶乘和 n-互素数来表述素数定理。我们将在未来的论文中探讨这种关系。本节中，我们仅将第 1.2–1.4 节中的定义扩展到 n-互素数。

2.4. n-可容许。自然数的一个 k 元组 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ 是 n-可容许的，当且仅当 $a_1 = 0$, $a_{i-1} < a_i$ 对所有 $i = 2, 3, \ldots, k$ 都成立，并且对所有 $m \geq n$，存在一个 m-互素数 t_m，使得 $(t_m, t_m + a_2, \ldots, t_m + a_k)$ 是一个 m-互素的 k 元组。注意，对所有 $m > n$，一个 n- 可容许的 k 元组也是一个 m- 可容许的 k 元组。一个 n- 互素数 t 满足一个 n-可容许的 k 元组 a，当且仅当$a[t] = (t, t + a_2, \ldots, t + a_k)$ 是由 n-互素数构成的 k 元组。 k元组a 的间隙是该 k元组中两个相邻元素之差的最大值，即$gap(a) = max\{a_i - a_{i-1} \mid i = 2, 3, \ldots, k\}$。

2.5. **n-强**。 n-可容许的 k元组 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$是 n-强的，当且仅当对于所有 $m \geq n$，我们都有 $mod(a_i, p_m) \neq mod(a_j, p_m)$，其中 $i = 1, \ldots, k-1$ 和$j = i + 1, \ldots, k$。注意，具有 n-强性意味着 $k \leq p_n$。

2.6. **n-星座**。 n-可容许的 k元组 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$是 n-互素数 k-星座，当且仅当对于 $a_k \leq b_k$，任意 n-可容许的 k元组 $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$均如此。

2.7. **阶乘素数的类别 n-互素数**。 以下简要列出n-互素数类别：

(1) 孤立。设 $a = (0, a_2, \ldots, a_k)$ 是一个 n-可容许的 k-元组，且 t 是一个 n-互素数，使得 $a[t]$ 是一个 n-互素 k-元组。当且仅当 $a[t - a_2]$ 和 $a = [t_2]$ 都不是 n-互素 k-元组时， $a[t]$ 才是孤立的。(2) n-孪生对数。两个 n-互素数 p 和 q 构成一对 n-孪生对数，当且仅当 $q = p + 2$。注意，一对 n-孪生对数满足 n-强 n-互素 2-星座 (0, 2)。此外，当 $n > 2$ 时，它是一个孤立的二元组，因为三元组 (0, 2, 4) 不是 n-可容许的三元组： t、 $t+2$ 和 $t+4$ 都必须与 3 互素，因此对于某个自然数 s， $t = 3s+1$ 或 $t = 3s+2$。如果 $t = 3s+1$，那么 $t + 2 = 3s + 1 + 2 = 3(s + 1)$，所以 $t + 2$ 与 3 不互素。现在，如果 $t = 3s + 2$，那么 $t + 4 = 3s + 2 + 4 = 3(s + 2)$，所以 $t + 4$ 与 3 不互素。(3) n-表亲对数。两个 n-互素数 p 和 q 构成一对 n-表亲对数，当且仅当 $q = p + 4$。注意，一对 n-表亲对数满足 n-强 n-可容许二元组 (0, 4)。此外，当 $n > 3$ 时，它是一个孤立的二元组（(0, 4, 8) 不是 n-可容许的三元组，证明留给读者）。(4) n-性感。两个 n-互素数 p 和 q 构成一对 n-性感素数，当且仅当$q = p + 6$。注意，一对 n-性感素数 $(p, p + 6)$ 满足 n-可容许二元组 (0, 6)。此外，当且仅当 $p - 6$ 和 $p + 12$ 都不是 n-互素数时，它才是孤立的。(5) n-性感三元组。三个 n-互素数 p、 q 和 r 构成一个 n-性感三元组，当且仅当 $q = p + 6$ 和 $r = p + 12$。注意，一个 n-性感三元组 $(p, p + 6, p + 12)$ 满足强 n-可容许三元组 (0, 6, 12)。此外，当且仅当 $p - 6$ 和 $p + 18$ 都不是 n-互素数时，它才是孤立的。(6) n-性感素数四元组。四个 n-互素数 p、 q、 r 和 s 构成一个n-性感素数四元组，当且仅当 $q = p+6$、 $r = p+12$ 和 $s = p+18$。注意，任何n-性感素数四元组都满足 n-强 n-可容许四元组 (0, 6, 12, 18)。

此外，它是一个孤立的四元组（(0,6,12,18,24) 是一个非 n-可容许的五元组，证明留给读者）。

3. 素数阶乘表

素数阶乘集合可以排列成表格，见表 1、表 2 和表 3。请注意：*i)* 素数 $p < p_n$ 的倍数位于 n-素数阶乘表的列中，这些列全部标记为红色，也就是说，列中的元素都不与 #$(n-1)$ 互素；*ii)* 素数 p_n 只会标记每列中的一个元素（ p_n的倍数）；并且 *iii)* 有些列几乎只包含 n-互素数，只有每列中一个元素是 p_n的倍数。我们称这些列为 n-互素列。表 4 仅展示 4-互素列。

2
3

表 1。1-素数阶乘表（# $1 = 2$）。 $(p_1) = 2$ 的倍数以蓝色显示。1-互素数以白色显示。

2	3
4	5
6	7

表 2。2-素数阶乘表（#(2) $= 2 * 3 = 6$）。$p_2 = 3$ 的倍数以蓝色显示， $p_1 = 2$ 的倍数以红色显示， $p_1 = 2$ 和 $p_2 = 3$ 的倍数以黄色显示。2-互素数以白色显示。

2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31

表 3. 3-素数阶乘表 (#(3) $= 2 * 3 * 5 = 30$)。$p_3 = 5$ 的倍数以蓝色显示， $p_1 = 2$ 或 $p_2 = 3$ 的倍数以红色显示，而 $p_1 = 2$ 或 $p_2 = 3$ 及 $p_3 = 5$ 的倍数以黄色显示。3-互素数以白色显示。

我们在 n-阶乘素数表中定义行和列如下：n-阶乘素数表的第 k 行是，对于 $2 \leq j \leq$ #$(n-1)+1\}$且 $0 \leq k < p_n$， $row(n,k) = \{m \mid m = k*$#$(n-1) + j$。由 $(n-1)$-互素数t 定义的 n-互素列是，对于 $0 \leq k < p_n\}$， $col(n,t) = \{m \mid m = t + k *$ #$(n-1)$。例如，4-互素列 col(4, 13) $= \{m \mid m = 13 + k * 30$ （对于 $0 \leq k < 7\}$，即 col(4, 13) $= \{13, 43, 73, 103, 133, 163, 193\}$）由 3-互素数 13 定义。

引理 1. $col(n,\ t)$ 中有且仅有一个元素是 p_n 的倍数。

7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	49	53	59	61
67	71	73	77	79	83	89	91
97	101	103	107	109	113	119	121
127	131	133	137	139	143	149	151
157	161	163	167	169	173	179	181
187	191	193	197	199	203	209	211

表 4. 4-互素列（#(4) $= 2*3*5*7 = 210$）。 $p_4 = 7$ 的倍数以蓝色显示。

证明。 我们需要证明， $col(n,t)$ 中的每个元素都对应模 p_n 的不同剩余。假设 $col(n,t)$ 中有两个元素产生相同的模 c 剩余 p_n，即有两个元素 $t_1 = t + k_1 *\#(n-1) = a * p_n + c$ 和$t_2 = t + k_2 * \#(n-1) = b * p_n + c$ 满足 $0 \le k_1 < k_2 < p_n$ 和 $0 \le c < p_n$。将第一个数从第二个数中减去，得到 $(k_2 - k_1) *\#(n-1) =(b-a) * p_n$，那么 #$(n-1)$ 必须是 p_n 的倍数，因为 $0 < k_2 - k_1 < p_n$，但根据 #$(n-1)$ 的定义，这是不可能的。现在， $col(n,t)$ 中有 p_n 个不同的元素，因此我们需要 p_n 个不同的模剩余，所以必有一个剩余为 0，也就是说， $col(n,t)$ 中只有一个元素是 p_n 的倍数。□

推论 2. 如果 $n > 1$ 和 t 是 n-互素数，那么存在一个$(n-1)$-互素数 t'，使得 t 属于由 t'定义的 n-互素列，即对于某个 $0 \le k < p_n$，有 $t = t' + k *\#(n-1)$。

证明。 对于 n-阶乘素数集合中的任意 t，都存在一个属于 $(n-1)$ 阶乘素数集合的 t'，以及$0 \le k < p_n$，使得 $t = t' + k * \#(n-1)$（ n-表中行的定义）。假设t' 不是 $(n-1)$-互素数，那么 $gcd(t', \#(n-1)) > 1$。因此，存在一个素数 $p < p_n$，使得对于某个 $s \ge 1$, 有 $t' = p * s$。根据 t 的定义，我们有 $t = \overline{p * s + p} *^{\#(n-1)}_{p} = p * \left(s + {}^{)\#(n-1}_{p}\right)$。由于 p 也整除 #(n)，因此$gcd(t, \#(n)) \ge p$；但这是不可能的，因为 t 是 n-互素数，即 $gcd(\#(n)\ t) = 1$。因此， t' 是一个 #$(n-1)$-互素数。□

4. 计算阶乘素数 n-互素数

借助 primorial 表，我们可以计算 n-互素数及其不同类别。数值结果由 C ++ 程序（*onprimorials.cpp*）得出，该程序可在 Jonatan Gómez[Gom]教授的素数 GitHub 仓库中免费下载。

定理 3. n-互素数的数量可递归定义为 $tot(1) = 1$和 $tot(n) = (p_n - 1) * tot(n-1)$，其中 $n > 1$。

证明。 显然 $tot(1) = 1$，见表 1。由于每个 n-互素数列中只有一个 p_n 的倍数，因此会标记该元素（它不是 n-互素数），于是有 $(p_n - 1) * tot(n-1)$ 个元素是 n-互素数。□

定理 3 中的结果是预期之中的，因为 #(n) 和 (#$(n)+1$) 是互素数，因此 n-互素数的数量等于 #(n) 的互素数数量，即 n-互素数的数量为 $\varphi(\#(n)) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(p_k) = \prod_{i=1}^{n} (p_k - 1) = tot(n)$。不过，我们将考虑这样一种做法：只“ 标记 ”$n$- 互素数列中的一个元素，用于

计数 n-互素数 k-元组以及 k-星座。请注意， n-阶乘素数集合中的任何素数都必须是一个 n-互素数，或者对于 $i = 1, 2, \ldots, n$ 而言是 p_i。表5展示了 n-互素数的数量（$tot(n)$）与 n-阶乘素数集合中的素数总数之间的关系，也就是说，直到 $\#(n) + 1\,(\pi(\#(n)+1))$。

n	$\#(n)$	$tot(n)$	$\pi(\#(n) + 1)$	$\frac{tot(n)}{\pi(\#(n)+1)}$
3	30	8	11	0.727273
4	210	48	47	1.02128
5	2310	480	344	1.39535
6	30030	5760	3248	1.7734
7	510510	92160	42331	2.17713
8	9699690	1658880	646029	2.56781
9	223092870	36495360	12283531	2.97108
10	6469693230	1021870080	300369796	3.40204

表5。 n-阶乘素数集合中， n-互素数的数量（$tot(n)$）与素数总数之间的关系，即截至 $\#(n) + 1\,(\pi(\#(n) + 1))$。

4.1. 互素数的可容许元组。为了确定不同n-互素数类别的数量，我们需要一些关于 n-可容许k-元组的技术性定理。

定理4。设 $a = (0, a_2, .., a_k)$ 是一个$(n-1)$-可容许 k-元组，满足$gap(a) < p_n - 1$，且 t 是一个 n-互素数。若 t 满足 a，则存在一个$(n-1)$-互素数 t'，使得 $t = t' + \#(n-1) * j$，其中某个 $j = 0, 1, \ldots, p_n - 1$，且$t'$ 满足 a。

证明。第一个 n-互素数列由素数 p_n 生成（任何大于1且小于 p_n 的自然数都必定是某个 p_i 的倍数，其中 $i = 1$、2、.....、 $n-1$），最后一个 n-互素数列由$\#(n-1)+1$生成。因此，第 r 行最后一个 n-互素数列中的元素与第 $r+1$ 行 n-互素数列中的第一个元素之间的间隙为$(\#(n-1) * r + p_n) - (\#(n-1) * r + 1) = \#(n-1) - 1 = p_n - 1$。由于 $gap(a) < p_n - 1$，第 r 行最后一个 n-互素数列中的元素与第 $r+1$ 行第一列中的元素不可能满足 k-元组 a。因此，不可能有一个 n-互素数 t 定义一个 n-可容许 k-元组（其中 $gap(a) < p_n - 1$）分布在两行或更多不同的行中，也就是说，对于所有 $i = 1$、2、.....、 k，都有 $t + a_i \leq \#(n-1) * (j+1) + 1$。根据推论 2，若某个 $j = 0$为1、.....、 $p_n - 1$，则 $t = t' + \#(n-1)j$，于是$t + a_i = t' + a_i + \#(n-1) * j \leq \#(n-1) * (j+1) + 1$，因此 $t' + a_i \leq \#(n-1) + 1$，也就是说，对于所有 $i = 1$、2、.....、 k， $t' + a_i$都是$(n-1)$-互素数。□

定理 5. 设 $a = (0, a_2, ..., a_k)$ 是一个强 $(n-1)$-可容许 k-元组，满足 $gap(a) < p_n - 1$。对于任意满足 a 的孤立 $(n-1)$-互素 k-元组，存在 $p_n - k$ 个满足 a 的孤立 n-互素 k-元组。

证明。如果 t 是一个 $n-1$-互素数，且 t 满足 a，并且 $a[t]$ 是一个孤立的 $(n-1)$-互素 k-元组，那么就有 p_n 个候选孤立 n-互素 k-元组（每个元组对应阶乘素数表中的一行，且位于孤立的 $(n-1)$-互素 k-元组所在的相同列上。由于 p_n 只在单个 n-互素列中标记一个元素

，该列由 a 定义（引理 1），而 p_n 不能标记两个不同的列 $t + a_i$和 $t + a_j$ $i \neq j$（a 是强的），因此 p_n 标记了由 $a[t]$生成的 k 个不同的候选 n-可容许 k-元组。因此， $count_a(m) = count_a(m-1) * (p_m - k)$。□

4.2. **孪生互素数与孪生素数**。现在我们可以计算孪生 n-互素数，并将其与孪生素数进行比较。

推论6。 n-孪生数对（$twin(n)$）的数量可递归定义为 $twin(1) = 0, twin(2) = 1$ 以及 $twin(n) = (p_n - 2) * twin(n-1)$，其中 $n > 2$。

证明。显然， $twin(1) = 0$ 且 $twin(2) = 1$，分别见表1和表2。注意， $gap((0,2)) = 2$ 且 $p_3 = 5$，因此 $gap((0,2)) < p_3 - 1$。由于 $(0,2)$ 是一个强 3-可容许二元组，并且每个 n-孪生数对对于 $n > 2$ 都是孤立的，因此根据定理 5，对于所有 $n > 2$，我们有 $twin(n) = (p_n - 2) * twin(n-1)$。□

表6展示了 n-阶乘素数集合中， n-余数孪生对数（$twin(n)$）与孪生素数对总数之间的关系；也就是说，范围截至 $\#(n) + 1$ $(twin_*(\#(n) + 1))$。

n	$\#(n)$	$twin(n)$	$twin_*(\#(n) + 1)$	$\frac{twin(n)}{twin_*(\#(n)+1)}$
3	30	3	5	0.6
4	210	15	15	1
5	2310	135	70	1.92857
6	30030	1485	468	3.17308
7	510510	22275	4636	4.80479
8	9699690	378675	57453	6.59104
9	223092870	7952175	896062	8.87458
10	6469693230	214708725	18463713	11.6287

表6。 n-余数孪生对数（$twin(n)$）与n-阶乘素数集合中孪生素数对总数之间的关系；也就是说，范围截至 $\#(n) + 1$ $(twin_*(\#(n) + 1))$。

4.3. **表亲互素数与表亲素数**。现在我们可以统计表亲n-互素数，并将其与表亲素数进行比较。

推论 7。 n-表亲数对的数量（$cousin(n)$）可以递归地定义为 $cousin(1) = cousin(2) = 0$、 $cousin(3) = 3$、 $cousin(n) = (p_n - 2) * cousin(n-1)$，其中 $n > 3$。

证明。显然， $cousin(1) = 0$、 $cousin(2) = 0$ 和 $cousin(3) = 3$，分别见表 1 至表 3。注意， $gap((0,4)) = 4$ 且 $p_4 = 7$，因此 $gap((0,4)) < p_4 - 1$。由于 $(0,4)$ 是强 4-可容许二元组，且每个 n-表亲数对在 $n > 3$ 时都是孤立的，由定理 5 可得，对于所有 $n > 3$，均有 $cousin(n) = (p_n - 2) * cousin(n-1)$。□

推论 8. $twin(n) = cousin(n)$ 对于所有 $n \geq 3$.

表 7 展示了 n-互素表亲对数 $(cousin(n))$ 与 n-阶乘素数集合中的表亲素数对总数之间的关系，即直到 $\#(n) + 1$ $(cousin_*(\#(n) + 1))$.

n	$\#(n)$	$cousin(n)$	$cousin_*(\#(n)+1)$	$\frac{cousin(n)}{cousin_*(\#(n)+1)}$
3	30	3	4	0.75
4	210	15	14	1.07143
5	2310	135	71	1.90141
6	30030	1485	468	3.17308
7	510510	22275	4630	4.81102
8	9699690	378675	57065	6.63585
9	223092870	7952175	896737	8.8679
10	6469693230	214708725	18460319	11.6308

表 7. n 阶乘素数集合中，n-同余表亲对数（$cousin(n)$）的数量与表亲素数对总数之间的关系，即截至 $\#(n)+1$ ($cousin_*(\#(n)+1)$)。

4.4. 性感互素数与性感素数。 现在我们可以统计性感 n-互素数，并将其与性感素数进行比较。

推论 9. n个性感四元组（$quad(n)$）可递归定义为 $quad(1) = quad(2) = 0$, $quad(3) = 1$, $quad(4) = 6$, 以及 $quad(n) =(p_n - 4) * quad(n-1)$，其中 $n > 4$。

证明。显然 $quad(1) = quad(2) = 0$, $quad(3) = 1$ 以及 $quad(4) = 6$, 分别参见表 1 至表 4。注意，$gap((0, 6, 12, 18)) = 6$ 且 $p_5 = 11$, 所以$gap((0, 6, 12, 18)) < p_5 - 1$。由于 (0, 6, 12, 18) 是一个强 5-可容许四元组，且每个 n-四元组对于 $n > 4$都是孤立的，因此由定理 5 可得，对于所有 $n > 4$, $quad(n) = (p_n - 4) * quad(n-1)$。□

引理 10. 孤立的 n-性感三元组（$itriple(n)$）、n-性感三元组（$triple(n)$）、孤立的 n-性感数对（$isexy(n)$）以及 n-性感数对（$sexy(n)$）的数量可定义如下：

(1) $itriple(1) = itriple(2) = 0$, $itriple(3) = 1$, $itriple(4) = 4$, 以及 $itriple(n) =(p_n - 3) * itriple(n-1) + 2 * quad(n-1)$，其中 $n > 4$。(2) 对所有 $n > 0$, $triple(n) = itriple(n) + 2 * quad(n)$。(3) $isexy(1) = isexy(2) = isexy(3) = 0$, $isexy(4) = 4$, 以及 $isexy(n) = (p_n - 2) * isexy(n-1) + 2 * itriple(n-1) + 2 * quad(n-1)$，其中 $n > 4$。(4) $sexy(n) = isexy(n) + 2 * itriple(n) + 3 * quad(n)$。

证明。证明留给读者完成（只需考虑每种情况下由素数 p_n 标记的是哪些列）。□

推论 11。 n-性感数对的数量（$sexy(n)$）可以递归定义为 $sexy(1) = sexy(2) = 0$, $sexy(3) = 5$, $sexy(4) = 30$, 以及 $sexy(n) = (p_n - 2) *sexy(n-1)$ 对所有 $n > 4$ 均成立。

证明。显然，根据引理 10 的定义 4)，通过计算 $sexy(n)$ 可得 $sexy(1) = sexy(2) = 0$、$sexy(3) = 5$ 以及 $sexy(4) = 30$。现在，根据引理 10 的第 4) 项，我们有 $(p_n-2)*sexy(n-1) = (p_n-2)*(isexy(n-1) + 2 * itriple(n-1) + 3 * quad(n-1))$。将右侧的乘积展开，再将 $2(p_n - 2)$ 表示为 $2(p_n -3) + 2$，将 $3(p_n - 2)$ 表示为 $3(p_n - 4) + 2 + 4$，并整理各项，可得 $(p_n - 2) *sexy(n-1) = (p_n - 2) * isexy(n-1) + 2 * itriple(n-1) + 2 * quad(n-1) + 2 *(p_n - 3) * itriple(n-1) + 4 * quad(n-1) + 3 * (p_n - 4) * quad(n-1)$。现在，根据

将 $1-3$、$4-5$ 分组，并利用引理 10，可得 $(p_n-2)*sexy(n-1) = isexy(n) + 2*itriple(n) + 3*quad(n) = sexy(n)$。□

推论12. $sexy(n) = 2*twin(n)$ 对所有 $n >= 4$。

表8展示了 n 阶乘素数集中 n 个余数性感素数对的数量 $sexy(n)$ 与性感素数对总数之间的关系，即直到 $\#(n)+1$ $(sexy_*(\#(n)+1))$。请注意，孪生素数数量与 n 个孪生对数的数量之比的变化趋势，与表亲素数数量与 n 个表亲对数的数量之比的变化趋势相同；性感素数数量与 n 个性感数的数量之比也呈现相同的变化趋势。

n	$\#(n)$	$sexy(n)$	$sexy_*(\#(n)+1)$	$\frac{sexy(n)}{sexy_*(\#(n)+1)}$
3	30	5	6	0.833333
4	210	30	26	1.15385
5	2310	270	140	1.92857
6	30030	2970	951	3.12303
7	510510	44550	9331	4.77441
8	9699690	757350	114189	6.63243
9	223092870	15904350	1792173	8.87434
10	6469693230	429417450	36921295	11.6306

表 8. n 阶乘素数集合中，n-余数性感素数对的数量（$sexy(n)$）与性感素数对总数之间的关系，即截至 $\#(n)+1$ $(sexy_*(\#(n)+1))$。

5. 哥德巴赫猜想

关于素数有许多不同的猜想 [Wikb]。特别是，哥德巴赫猜想认为，任何大于六（6）的偶自然数都可以表示为两个素数之和 [Ras17; Est38]。本节将推导一个适用于素数阶乘区间的哥德巴赫猜想版本，并将哥德巴赫猜想与孪生、表亲对数和性感素数结合起来。从现在起，$\mathcal{P}$ 表示素数集合，$\mathcal{E}$ 表示偶自然数集合，$\mathcal{P}_n$ 表示 n阶乘素数区间内的素数集合，即 $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \bigcap \mathcal{I}_n$；$\mathcal{E}_n$表示 n阶乘素数区间内的偶数集合，即 $\mathcal{E}_n = \mathcal{E} \bigcap \mathcal{I}_n$。

猜想 13.（哥德巴赫）对于任意正偶自然数 $m \geq 4$，至少存在两个素数 p，$q \in P$使得 $m = p + q$。

猜想 14.（哥德巴赫区间）对于任意正自然数 n 以及任意 $m \in \mathcal{E}_{n+1}$，至少存在两个素数 $p \in \mathcal{P}_n$和 $q \in \mathcal{P}_n \bigcup \mathcal{P}_{n+1}$，使得 $m = p + q$。

前两个素数阶乘区间中满足哥德巴赫区间猜想的素数对见表 9。前 10 个素数阶乘区间的哥德巴赫区间猜想可通过 C++ 程序（素数阶乘.*cpp*）验证。该程序可从 Jonatan Gómez [Gom]教授的素数 GitHub 仓库免费下载。

n	$\mathcal{P}_n$	$\mathcal{P}_n \bigcup \mathcal{P}_{n+1}$	$m \in E_{n+1}$	p	q
1	$\{2,3\}$	$\{2,3,5,7\}$	4	2	2
			6	3	3
2	$\{3,5,7\}$	$\{3,5,7,11,13,17,19,23,29,31\}$	8	3	5
			10	3	7
			12	5	7
			14	3	11
			16	3	13
			18	5	13
			20	3	17
			22	3	19
			24	5	19
			26	3	23
			28	5	23
			30	7	23

表 9. 对前两个素数阶乘区间的哥德巴赫区间猜想进行验证。

定理 15. 如果哥德巴赫区间猜想 *18* 成立，那么哥德巴赫猜想*13* 也成立。

猜想 16. (哥德巴赫孪生素数猜想) 对于任意正的偶自然数 n，至少存在两个素数 $p \in \mathcal{P}$和 $q \in \mathcal{P}$，使得 $m = p + q$且 p 或 q 是孪生素数。

猜想 17. (哥德巴赫表亲素数猜想) 对于任意正的偶自然数 n，至少存在两个素数 $p \in \mathcal{P}$和 $q \in \mathcal{P}$，使得 $m = p + q$且 p或 q 是表亲素数。

猜想 18. (哥德巴赫性感素数猜想) 对于任意正的偶自然数 n，至少存在两个素数 $p \in \mathcal{P}$和 $q \in \mathcal{P}$，使得 $m = p + q$且 p 或 q 是性感素数。

前 10 个素数阶乘集的哥德巴赫孪生素数猜想、哥德巴赫表亲素数猜想和哥德巴赫性感素数猜想，可使用 C++ 程序（$onprimorials.cpp$）进行验证；该程序可在 Jonatan Gómez[Gom]教授的素数 GitHub 仓库中免费获取。

6. 结论与未来工作

我们已经证明，阶乘素数有助于理解素数及素数类的某些性质。例如，我们定义了 n-primorial 集合的概念，并建立了区间 $[p_n, \#(n) + 1]$ 中的素数与 n-互素数之间的关系。我们利用素数阶乘区间和 primorial 表定义了用于计数 n-可容许 k-元组的函数，并建立了这些函数与对应的素数可容许 k-元组之间的关系。具体而言，我们证明，孪生素数的数量与 n-孪生对数的数量之比，其变化规律与表亲素数的数量与 n-表亲对数的数量之比相同；而性感素数的数量与 n-性感

数的数量之比的变化规律也与此相同。最后，我们提出了哥德巴赫猜想的一种基于素数阶乘区间的变体，以及三种分别涉及孪生、表亲和性感素数的变体。我们通过计算验证了这些猜想对不超过第 10 个阶乘素数的偶数成立，即不超过 #(10) $= 6469693230$，参见 C++ 程序 *onprimorial.cpp*，该程序位于教授 Jonatan Gomez 的 GitHub 代码库 [Gom]。未来，我们将致力于用阶乘素数和 n-互素数来表述素数定理 [Nar00]。此外，我们将研究 n-互素的可容许 k-元组作为 n-孪生、n-表亲和 n-性感数对时的渐近行为，以及它们与相应的孪生、表亲和性感素数对之间的关系。最后，我们将尝试为所提出的猜想寻找证明。

参考文献

[Eul63] 莱昂哈德·欧拉。《用新方法证明的算术定理》。载于：彼得堡帝国科学院新评论 8（1763），第 74–104 页。[Est38] T. Estermann。《关于哥德巴赫问题：证明几乎所有偶正整数都是两个素数之和》。载于：伦敦数学会会刊 s2-44.1（1938），第 307–314 页。doi：https://doi.org/10.1112/plms/s2-44.4.30

预印本：https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/plms/s2-44.4.307。网址：https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-44.4.307。[Dub87] Harvey Dubner。《阶乘素数和素数阶乘素数》。载于：趣味数学 21(4)（1987）。[For99] Tony Forbes。《素数簇和坎宁安链》。载于：数学计算 68.228（1999 年 10 月），第 1739–1747 页。ISSN：0025-5718。doi：10.1090/S0025-5718-99-01117-5。网址：https://www.ams.org/journals/mcom/1999-68-228/S0025-5718-99-01117-5/S0025-5718-
[Nar00] Władysław Narkiewicz。素数理论的发展：从欧几里得到哈代和利特尔伍德。数学专著。施普林格，2000年。isbn：9783642085574。[Ras17] Michael Rassias。哥德巴赫问题。2017年1月。isbn：978-3-319-57912-2。doi：10.1007/978-3-319-57914-6。[Gom] JonatanGomez。素数程序。网址：https://github.com/jgomezpe/primenumbers。（访问日期：2023年1月5日）。[Wika] 维基百科。素数列表。网址：https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_prime_numbers

（访问日期：2022年11月23日）。[Wikb] 维基百科。素数猜想列表。网址：https://en.wikipedia.org/wiki/Category:Co

（访问日期：2022年11月23日）。[Wikc] 维基百科。素数元组。网址：https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_k-tuple。（访问日期：2022年11月23日）。