arXiv:2301.02776v1 [math.CA] 7 Jan 2023

格点上正交多项式的相干测度对

D. MBOUNA

This work is dedicated to the memory of my beloved friend and mentor J. Petronilho. To him, my eternal gratitude.

Abstract. 我们考虑两列正交多项式 $(P_n)_{n\geq 0}$和 $(Q_n)_{n\geq 0}$ ，它们分别对应正则泛函 u 和 v。我们假设

$$\sum_{j=1}^{M} a_{j,n}\mathrm{D}_x^k P_{k+n-j}(z)=\sum_{j=1}^{N} b_{j,n}\mathrm{D}_x^m Q_{m+n-j}(z)\ ,$$

其中 k,m, $M, N\in\mathbb{N}$, $a_{j,\ n}$ 和 $b_{j,\ n}$ 是复数 序列，

$$2\mathrm{S}_x f(x(s))=(\triangle+2\,\mathrm{I})f(z),\ \mathrm{D}_x f(x(s))=\frac{\triangle}{\triangle x(s-1/2)}f(z),$$

$z=x(s-1/2)$，I 是恒等算子， x 定义一个格点，而 $\triangle f(s)=f(s+1)-f(s)$。我们证明，在某些自然条件下，只要满足 $m=k$，泛函 u 和 v 就由一个有理因子联系；而对于 $k>m$，u 和 S_x^{k-m}v 是半经典泛函，此外 S_xu 和 S_x^{k-m+1}v 也由一个有理因子联系。这引出了 (M,N)-阶为 (m,k) 的相干测度对这一概念，并将其推广到格点上的正交多项式。

1. Introduction

正交多项式序列（OPS）理论中的许多有趣问题都是反问题。也就是说，根据线性泛函所对应的正交多项式系满足某个代数方程这一事实，分析这些线性泛函的性质。例如，Iserles 等人提出了相干测度对这一概念 [16] ，其动机是将其应用于某些 Sobolev内积。在 [18, 20] 这一概念被推广为 (M,N)–阶为 (m,k) 的相干对，其定义如下。给定两个首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$ 和 $(Q_n)_{n\geq 0}$，若存在两个非负整数 M 和 N，以及复数序列 $(a_{n,j})_{n\geq 0}$ ($j=0,1,\ldots,M$) 和 $(b_{n,j})_{n\geq 0}$ ($j=0,1,\ldots,N$)，使得在对系数 $a_{n,j}$ 和 $b_{n,j}$施加自然假设的条件下，结构关系

$$\sum_{j=0}^{M} a_{n,j}P_{n-j}^{[m]}(x)=\sum_{j=0}^{N} b_{n,j}Q_{n-j}^{[k]}(x)\quad (n=0,1,\ldots) \tag{1.1}$$

成立。这里我们记

$$P_n^{[m]}(x):=r_n D^m P_{n+m}(x)$$

Date: 2023年1月10日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 42C05、33C45。
Key words and phrases. 半经典泛函、格点、相干测度对。

为 P_n 关于算子 $D = d/dx$ 的 m 阶“导数”规范化序列。在 [2], 中，这一概念推广到了算子 $D = D_q$ 和 $D = \triangle_\omega$，其中

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \quad \triangle_\omega f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega},\ q \neq 1,\ \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ .$$

最近，在 [1, 6], 中引入了指标为 M、阶为 (m, k) 的 π_N-相干对这一概念，作为 Maroni 和 Sfaxi 在 [22]中提出的指标为 N 的 π_N-相干对概念的推广。这对应于 (1.1) 的情形，其中左端被 $\pi_N P_n^{[m]}$替代，即

$$\pi_N(x) P_n^{[m]}(x) = \sum_{j=n-M}^{N} c_{n,j} Q_j^{[k]}(x)\ , \quad c_{n,n-M} \neq 0\ ,\ (n = 0, 1, \ldots) \tag{1.2}$$

其中 π_N 是一个次数为 N的多项式。关于 (1.2) 的完整历史，读者可参阅 [1, 4, 6, 22] 及其中的参考文献。

设 u 和 v 是矩正则泛函，分别使 $(P_n)_{n\geq 0}$ 和 $(Q_n)_{n\geq 0}$ 正交。在仅对所考虑关系的系数施加某些条件时，值得注意的是，无论满足 (1.1) 还是 (1.2)，对于上述任一算子 d/dx、 D_q 和 $\triangle_\omega$，只要 $m = k$，泛函 u 和 v 就通过有理变换（在分布意义下）相联系；也就是说，存在非零多项式 Φ 和 Ψ 使得

$$\Phi \mathbf{u} = \Psi \mathbf{v}\ .$$

当 $m \neq k$ 时，u 和 v 仍通过有理变换相联系，此外，它们还是半经典的。这意味着存在四个非零多项式 Φ_1、 Φ_2、Ψ_1 和 Ψ_2 ，使得

$$\mathbf{D}(\Phi_1 \mathbf{u}) = \Psi_1 \mathbf{u},\ \mathbf{D}(\Phi_2 \mathbf{v}) = \Psi_2 \mathbf{v}\ .$$

本工作的主要目标是将这一概念扩展到格点上的正交多项式系理论，从而推广文献中关于这一主题的许多已知结果（参见 [12, 13, 14, 15] 及其中的参考文献）。为此，我们考虑由下式定义的格点算子对应的 (1.1)（对于 $k = 0$，则考虑 (1.2)）：

$$D_x f(x(s)) = \frac{\triangle}{\triangle x(s - 1/2)} f(x(s - 1/2))\ ,$$

其中 x（s）是一个格点，且 $\triangle f$（s） $= f$（$s + 1$） $- f$（s），并研究所涉及的正交多项式系的半经典性质。这将借助 [7] 中提出的最新结果来完成。与前面提到的情形相反，该算子的结果出乎意料（参见注释 3.1）。

本文结构如下。第 2 节介绍格点上的正交多项式系的代数理论的一些基本事实。第 3 节陈述并证明我们的主要结果。

2. Background and Preliminary

本文将采用 P. Maroni [21]提出的正交多项式系代数方法。以下介绍该理论的一些基本事实。

令 $\mathcal{P}$ 为所有复系数多项式构成的向量空间，令 $\mathcal{P}^*$ 为其代数对偶。 $\mathcal{P}$ 中的简单集是一个序列 $(R_n)_{n\geq 0}$ ，满足对每个 n都有 $\deg(R_n) = n$ 。若简单集 $(R_n)_{n\geq 0}$ 满足以下条件，则称其为关于 w $\in \mathcal{P}^*$ 的正交多项式系：

$$\langle \mathbf{w}, R_n R_m \rangle = h_n \delta_{n,m}\ , \quad m = 0, 1, \ldots;\ h_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ .$$

在这种情况下，我们称 w 是正则的。泛函 w 与多项式 ϕ 的左乘定义为

$$\langle \phi \mathbf{w}, p \rangle = \langle \mathbf{w}, \phi p \rangle\ , \quad p \in \mathcal{P}\ .$$

简单集多项式序列 $(R_n)_{n\geq 0}$的对偶基 $(\mathbf{r}_n)_{n\geq 0}$是 $\mathcal{P}^*$中的一个序列，满足 $\langle \mathbf{r}_n, R_m \rangle = \delta_{n,m}$，对所有 n, m均成立。此外，任何泛函 v $\in \mathcal{P}^*$（当 $\mathcal{P}$具有

适当的严格归纳极限拓扑时，见 [21]）都可以按 $\mathcal{P}^*$ 中的弱拓扑意义写成

$$\mathbf{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathbf{v}, R_n \rangle \, \mathbf{r}_n \ ,$$

其中，$(\mathbf{r}_n)_{n\geq 0}$ 是与简单集多项式序列 $(R_n)_{n\geq 0}$相关联的对偶基。因此，若 $(R_n)_{n\geq 0}$ 是关于 $\mathbf{w} \in \mathcal{P}^*$ 的（首一）正交多项式系，则相应的对偶基可显式表示为

$$\mathbf{r}_n = \left\langle \mathbf{w}, R_n^2 \right\rangle^{-1} R_n \mathbf{w} \ . \tag{2.1}$$

众所周知（见 [9]），首一正交多项式系 $(R_n)_{n\geq 0}$ 可由以下三项递推关系（TTRR）刻画:

$$R_{-1}(z) = 0, \quad R_{n+1}(z) = (z - B_n) R_n(z) - C_n R_{n-1}(z) \ , \quad C_n \neq 0 \ , \tag{2.2}$$

因此,

$$B_n = \frac{\left\langle \mathbf{w}, z R_n^2 \right\rangle}{\left\langle \mathbf{w}, R_n^2 \right\rangle}, \quad C_{n+1} = \frac{\left\langle \mathbf{w}, R_{n+1}^2 \right\rangle}{\left\langle \mathbf{w}, R_n^2 \right\rangle}. \tag{2.3}$$

在我们的框架中，格点 x 是一个映射，其定义如下（见 [3]）：

$$x(s) := \begin{cases} \mathfrak{c}_1 q^{-s} + \mathfrak{c}_2 q^{s} + \mathfrak{c}_3, & q \neq 1 \\ \mathfrak{c}_4 s^2 + \mathfrak{c}_5 s + \mathfrak{c}_6, & q = 1, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中，$q > 0$ 和 $\mathfrak{c}_j (1 \leq j \leq 6)$ 是满足 $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2) \neq (0, 0)$（若 $q \neq 1$）的复数。注意，$x\big(s + \frac{1}{2}\big) + x\big(s - \frac{1}{2}\big) = 2\alpha x(s) + 2\beta$，其中

$$\alpha = \frac{q^{1/2} + q^{-1/2}}{2}, \quad \beta = \begin{cases} (1-\alpha)\mathfrak{c}_3, & q \neq 1, \\ \mathfrak{c}_4/4, & q = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

我们定义 $\alpha_n := (q^{n/2} + q^{-n/2})/2$ 和

$$\gamma_n := \begin{cases} \dfrac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1. \end{cases}$$

我们令 $\gamma_{-1} := -1$ 和 $\alpha_{-1} := \alpha_\circ$ 我们还定义作用于 $\mathcal{P}$ 上的两个算子 D_x 和 S_x，其定义为

$$\mathrm{D}_x f(x(s)) = \frac{\triangle}{\triangle x(s - 1/2)} f(x(s - 1/2)) \ ,$$
$$\mathrm{S}_x f(x(s)) = \frac{1}{2}(\triangle + 2\,\mathrm{I}) f(x(s - 1/2)) \ .$$

通过以下定义，这些算子在 $\mathcal{P}^*$ 上诱导出两个元素，记为 D_x 和 S_x（见 [10]）：

$$\langle \mathbf{D}_x \mathbf{u}, f \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathrm{D}_x f \rangle, \quad \langle \mathbf{S}_x \mathbf{u}, f \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathrm{S}_x f \rangle.$$

定义 2.1. [10] *A regular functional* $\mathbf{u}$ *is said to be semiclassical if there exist two nonzero polynomials* ϕ *and* ψ *such that the following distributional equation*

$$\phi \mathbf{D}_x \mathbf{u} = \psi \mathbf{S}_x \mathbf{u}$$

holds. We also say that the corresponding OPS is semiclassical. If polynomials ϕ *and* ψ *are of degrees at most two and one respectively then is said classical functional.* , ,$\mathbf{u}$

设 f、$g \in \mathcal{P}$ 和 $\mathbf{u} \in \mathcal{P}^*$。则以下性质成立（例如参见 [7, 10, 11]）：

$$\mathrm{D}_x\big(fg\big) = \big(\mathrm{D}_x f\big)\big(\mathrm{S}_x g\big) + \big(\mathrm{S}_x f\big)\big(\mathrm{D}_x g\big), \tag{2.6}$$

$$\mathrm{S}_x\big(fg\big) = \big(\mathrm{D}_x f\big)\big(\mathrm{D}_x g\big)\mathtt{U}_2 + \big(\mathrm{S}_x f\big)\big(\mathrm{S}_x g\big), \tag{2.7}$$

$$f\mathrm{D}_x g = \mathrm{D}_x\left[\Big(\mathrm{S}_x f - \frac{\mathtt{U}_1}{\alpha}\mathrm{D}_x f\Big)g\right] - \alpha^{-1}\mathrm{S}_x\Big(g\mathrm{D}_x f\Big), \tag{2.8}$$

$$\mathbf{D}_x(f\mathbf{u}) = \Big(\mathrm{S}_x f - \alpha^{-1}\mathtt{U}_1\mathrm{D}_x f\Big)\mathbf{D}_x\mathbf{u} + \alpha^{-1}\mathrm{D}_x f\ \mathbf{S}_x\mathbf{u}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{S}_x(f\mathbf{u}) = \Big(\alpha\mathtt{U}_2 - \alpha^{-1}\mathtt{U}_1^2\Big)\mathrm{D}_x f\ \mathbf{D}_x\mathbf{u} + \Big(\mathrm{S}_x f + \alpha^{-1}\mathtt{U}_1\mathrm{D}_x f\Big)\mathbf{S}_x\mathbf{u}, \tag{2.10}$$

$$f\mathbf{D}_x\mathbf{u} = \mathbf{D}_x\left(S_x f\ \mathbf{u}\right) - \mathbf{S}_x\left(D_x f\ \mathbf{u}\right), \tag{2.11}$$

$$\alpha\mathbf{D}_x^n\mathbf{S}_x\mathbf{u} = \alpha_{n+1}\mathbf{S}_x\mathbf{D}_x^n\mathbf{u} + \gamma_n\mathtt{U}_1\mathbf{D}_x^{n+1}\mathbf{u}, \tag{2.12}$$

其中

$$\mathtt{U}_1(z) = \begin{cases} (\alpha^2-1)\big(z-\mathfrak{c}_3\big), & q \neq 1 \\ 2\beta, & q = 1, \end{cases}$$

$$\mathtt{U}_2(z) = \begin{cases} (\alpha^2-1)\big((z-\mathfrak{c}_3)^2 - 4\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\big), & q \neq 1 \\ 4\beta(z-\mathfrak{c}_6) + \mathfrak{c}_5^2/4, & q = 1. \end{cases}$$

我们将由 $R_n^{[k]}(k = 0, 1, \ldots)$ 表示次数为 n 的首一多项式，其定义为

$$R_n^{[k]}(z) = \frac{\gamma_n!}{\gamma_{n+k}!}\mathrm{D}_x^k R_{n+k}(z)\ ,$$

其中 $\gamma_0! = 1, \gamma_{n+1}! = \gamma_1\cdots\gamma_n\gamma_{n+1}$。若 $(\mathbf{r}_n^{[k]})_{n\geq 0}$ 是与序列 $(R_n^{[k]})_{n\geq 0}$ 相关联的对偶基，则已知

$$\mathbf{D}_x^k\mathbf{r}_n^{[k]} = (-1)^k\frac{\gamma_{n+k}!}{\gamma_n!}\mathbf{r}_{n+k}\ , \quad k = 0, 1, \ldots\ . \tag{2.13}$$

以下结果很有帮助。

命题 2.1. [7] *Let* $\mathbf{u} \in \mathcal{P}^*$ *and* $f \in \mathcal{P}$. *Then*

$$\mathbf{D}_x^n\big(f\mathbf{u}\big) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{T}_{n,k}f\,\mathbf{D}_x^{n-k}\mathbf{S}_x^k\mathbf{u} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.14}$$

where $\mathrm{T}_{n,k}f$ *is a polynomial defined by* $\mathrm{T}_{0,0}f = f$ *and*

$$\mathrm{T}_{n,k}f := \mathrm{S}_x\mathrm{T}_{n-1,k}f - \frac{\gamma_{n-k}}{\alpha_{n-k}}\mathtt{U}_1\mathrm{D}_x\mathrm{T}_{n-1,k}f + \frac{1}{\alpha_{n+1-k}}\mathrm{D}_x\mathrm{T}_{n-1,k-1}f\ , \tag{2.15}$$

with $\mathrm{T}_{n,k}f = 0$ *whenever* $k > n$ *or* $k < 0$. *Moreover* T 的次数为 $_{n,k}f \leq$ 的次数为 $f - k$.

定义 **2 2** *Two functionals and are connected by a rational modification (in .. u v u v the distribution sense) if there exist two nonzero polynomials* ϕ *and* ψ *such that* $\phi = \psi$.

3. MAIN RESULTS

以下算子 $\big\{\frac{d}{dx}, \triangle_\omega, D_q\big\}$ 的这一事实已为人所知，其中 D_q 是 q-Jackson 算子；但据我们所知，对于 D_x 算子而言，这还是一个新结果。

命题 **3 1** *Let and be two functionals connected by a rational modification. .. u v ,* *Then if one of them is semiclassical then so is the other one.*

Proof. 设 u 和 v 是两个泛函，并假设 u 是半经典的。那么

$$\pi_2\mathbf{u} = \pi_1\mathbf{v}\ , \quad \phi\mathbf{D}_x\mathbf{u} = \psi\mathbf{S}_x\mathbf{u}\ ,\ , \tag{3.1}$$

对于某些非零多项式 ϕ、 ψ、 π_1 和 π_2 .
我们首先利用（2 .9）对（3 .9）以获得

$$\big(\mathrm{S}_x\pi_2 - \frac{\mathtt{U}_1}{\alpha}\mathrm{D}_x\pi_2\big)\mathbf{D}_x\mathbf{u} + \frac{1}{\alpha}\mathrm{D}_x\pi_2\mathbf{S}_x\mathbf{u} = \big(\mathrm{S}_x\pi_1 - \frac{\mathtt{U}_1}{\alpha}\mathrm{D}_x\pi_1\big)\mathbf{D}_x\mathbf{v} + \frac{1}{\alpha}\mathrm{D}_x\pi_1\mathbf{S}_x\mathbf{v}\ .$$

因此

$$K_1\mathbf{S}_x\mathbf{u} = \phi\Big(\big(\mathrm{S}_x\pi_1 - \frac{\mathtt{U}_1}{\alpha}\mathrm{D}_x\pi_1\big)\mathbf{D}_x\mathbf{v} + \frac{1}{\alpha}\mathrm{D}_x\pi_1\mathbf{S}_x\mathbf{v}\Big)\ , \tag{3.2}$$

其中 $\alpha K_1 = \phi\mathrm{D}_x\pi_2 + (\alpha\mathrm{S}_x\pi_2 - \mathtt{U}_1\mathrm{D}_x\pi_2)\psi$，由将上述方程乘以 ϕ 并利用 (3.1) 中的第二个方程即可得到。
其次，我们利用 (2.10) 将 S_x 作用于 (3.1) 中的第一个关系式，并重复这一过程，得到

$$K_2\mathbf{S}_x\mathbf{u} = \phi\Big(\big(\alpha\mathtt{U}_2 - \frac{\mathtt{U}_1^2}{\alpha}\big)\mathrm{D}_x\pi_1\mathbf{D}_x\mathbf{v} + \big(\mathrm{S}_x\pi_1 + \frac{\mathtt{U}_1}{\alpha}\mathrm{D}_x\pi_1\big)\mathbf{S}_x\mathbf{v}\Big)\ , \tag{3.3}$$

其中 $\alpha K_2 = \phi\big(\alpha\mathrm{S}_x\pi_2 + \mathtt{U}_1\mathrm{D}_x\pi_2\big) + \psi\big(\alpha^2\mathtt{U}_2 - \mathtt{U}_1^2\big)\mathrm{D}_x\pi_2$。通过消去 (3.2)–(3.3) 中的 $\mathrm{S}_x\mathtt{u}$，最终得到

$$\Phi\mathbf{D}_x\mathbf{v} + \Psi\mathbf{S}_x\mathbf{v} = 0\ ,$$

其中

$$\begin{aligned}
\Phi &= \Big(\phi\mathrm{D}_x\pi_2 + (\alpha\mathrm{S}_x\pi_2 - \mathtt{U}_1\mathrm{D}_x\pi_2)\psi\Big)\big(\mathtt{U}_1^2 - \alpha^2\mathtt{U}_2\big)\mathrm{D}_x\pi_1 \\
&\quad + \big(\alpha\mathrm{S}_x\pi_1 - \mathtt{U}_1\mathrm{D}_x\pi_1\big)\Big(\phi\big(\alpha\mathrm{S}_x\pi_2 + \mathtt{U}_1\mathrm{D}_x\pi_2\big) + \psi\big(\alpha^2\mathtt{U}_2 - \mathtt{U}_1^2\big)\mathrm{D}_x\pi_2\Big)\ , \\
\Psi &= \big(\alpha\mathrm{S}_x\pi_1 + \mathtt{U}_1\mathrm{D}_x\pi_1\big)\Big(\phi\mathrm{D}_x\pi_2 + (\alpha\mathrm{S}_x\pi_2 - \mathtt{U}_1\mathrm{D}_x\pi_2)\psi\Big) \\
&\quad - \Big(\phi\big(\alpha\mathrm{S}_x\pi_2 + \mathtt{U}_1\mathrm{D}_x\pi_2\big) + \psi\big(\alpha^2\mathtt{U}_2 - \mathtt{U}_1^2\big)\mathrm{D}_x\pi_2\Big)\mathrm{D}_x\pi_1,
\end{aligned}$$

所需结果由此得证。 □

我们首先利用 [2, 23] 中提出的思想给出以下引理。

引理 **3 1** *Let , be a pair of regular functionals and $P_{n\ n\geq 0}$ $Q_{n\ n\geq 0}$ the cor-。 . (uv) (() , ()) , , , , responding pair of monic OPS. Assume that for some k m M N ∈ ℕ we have*

$$\sum_{j=0}^{M} a_{j,n}P_{n-j}^{[k]}(z) = \sum_{j=0}^{N} b_{j,n}Q_{n-j}^{[m]}(z)\ , \qquad n = 0, 1, \dots\ , \tag{3.4}$$

for some complex sequences $a_{\text{、}\ n}$ and $b_{\text{、}\ n-1}$、 with $a_{n\ n} = 1 = b_{0\ n}$ and $a_{M\ n}b_{N\ n} \neq 0$ for alln. Let $\mathcal{A}_{M+N} = \big[l_{\text{、}\ j}\big]_{i\ \text{、}\ j=0}^{M+N-1}$ be the following matrix of order $M+N$ 、

$$l_{i,j} = \begin{cases} a_{j-i,j},\ \textit{if } 0 \leq i \leq N-1 \textit{ and } i \leq j \leq M+i \\ b_{j-i+N,j},\ \textit{if } N \leq i \leq M+N-1 \textit{ and } i-N \leq j \leq i \\ 0,\ \textit{else} \end{cases}$$

Assume that det($\mathcal{A}_{M+N}$) $\neq 0$ and $k \geq m$. Then there exist two polynomials ψ_{N+k+n} and ϕ_{M+m+n} with degrees $N+k+n$ and $M+m+n$, respectively, such that

$$\psi_{N+k+n}\mathbf{u} = \mathbf{D}_x^{k-m}\Big(\phi_{M+m+n}\mathbf{v}\Big)\ , \qquad n = 0, 1, \dots\ . \tag{3.5}$$

Proof. 定义

$$R_n(z)=\sum_{j=0}^{M} a_{j,n}P_{n-j}^{[k]}(z)\ ,\qquad n=0,1,\dots\ .$$

那么，$(R_n)_{n\geq 0}$ 是一个简单多项式组。设 $(\mathsf{a}_n)_{n\geq 0}$、$(\mathfrak{b}_n)_{n\geq 0}$、$(\mathsf{a}_n^{[k]})_{n\geq 0}$、$(\mathfrak{b}_n^{[m]})_{n\geq 0}$和 $(\mathfrak{r}_n)_{n\geq 0}$ 分别为序列 $(P_n)_{n\geq 0}$、$(Q_n)_{n\geq 0}$、$(P_n^{[k]})_{n\geq 0}$、$(Q_n^{[m]})_{n\geq 0}$ 和 $(R_n)_{n\geq 0}$所对应的对偶基。我们将证明

$$\mathbf{a}_n^{[k]}=\sum_{l=n}^{n+M} a_{l-n,l}\mathbf{r}_l\ ,\quad \mathbf{b}_n^{[m]}=\sum_{l=n}^{n+N} b_{l-n,l}\mathbf{r}_l\ ,\quad n=0,1,\dots\ . \tag{3.6}$$

事实上，根据 R_n 的定义，我们得到

$$\left\langle \mathbf{a}_n^{[k]},R_l\right\rangle=\sum_{i=0}^{M} a_{i,l}\left\langle \mathbf{a}_n^{[k]},P_{l-i}^{[k]}\right\rangle=\begin{cases} a_{l-n,l} & \text{if } n\leq l\leq n+M\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

类似地，利用 (3.4)，我们写出

$$\left\langle \mathbf{b}_n^{[m]},R_l\right\rangle=\sum_{i=0}^{N} b_{i,l}\left\langle \mathbf{b}_n^{[m]},Q_{l-i}^{[m]}\right\rangle=\begin{cases} b_{l-n,l} & \text{if } n\leq l\leq n+N\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

因此，通过写出下式，(3.6)成立

$$\mathbf{a}_n^{[k]}=\sum_{l=0}^{\infty}\left\langle \mathbf{a}_n^{[k]},R_l\right\rangle\mathbf{r}_l\ ,\quad \mathbf{b}_n^{[m]}=\sum_{l=0}^{\infty}\left\langle \mathbf{b}_n^{[m]},R_l\right\rangle\mathbf{r}_l\ ,$$

并利用前面的结果。分别将 $n=0,1,\dots,N-1$ 和 $n=0,1,\dots,M-1$ 代入 (3.6) 的第一个和第二个方程，我们得到一个方程组，其矩阵为 $\mathcal{A}_{M+N}$。由于 $det(\mathcal{A}_{M+N})\neq 0$，因此我们可以写出

$$r_n=\sum_{i=0}^{N-1}\widehat{a}_{n,i}\mathbf{a}_i^{[k]}+\sum_{j=0}^{M-1}\widehat{b}_{n,j}\mathbf{b}_j^{[m]}\ ,\quad n=0,1,\dots,M+N-1,$$

对于某些复数序列 $\widehat{a}_{n,i}$ 和 $\widehat{b}_{n,j}$。此外，我们还可以写成

$$\sum_{i=0}^{n+N} a'_{n,i}\mathbf{a}_i^{[k]}=\sum_{j=0}^{n+M} b'_{n,j}\mathbf{b}_j^{[m]}\ ,\quad n=0,1,\dots\ . \tag{3.7}$$

其中 $a'_{n,i}$ 和 $b'_{n,j}$ 是复数序列，且 $a'_{n,n+N}=b_{N,M+N+n}$ 和 $b'_{n,n+M}=a_{M,M+N+n}$。现在，由于 $k\geq m$，我们利用 (2.13) 对 (3.7) 应用 $\mathbf{D}_x^k$，得到

$$\sum_{i=0}^{n+N}(-1)^k\frac{\gamma_{k+i}!}{\gamma_i!}a'_{n,i}\mathbf{a}_{k+i}=\mathbf{D}_x^{k-m}\Big(\sum_{j=0}^{n+M}(-1)^m\frac{\gamma_{m+j}!}{\gamma_j!}b'_{n,j}\mathbf{b}_{m+j}\Big)\qquad (n=0,1,\dots)$$

因此，(3.5) 成立，其中

$$\psi_{N+k+n}(z)=\sum_{i=0}^{n+N}\frac{(-1)^k\gamma_{k+i}!}{\gamma_i!\left\langle \mathbf{u},P_{k+i}^2\right\rangle}a'_{n,i}P_{k+i}(z)\ ,$$

$$\phi_{M+m+n}(z)=\sum_{j=0}^{n+M}\frac{(-1)^m\gamma_{m+j}!}{\gamma_j!\left\langle \mathbf{v},Q_{m+j}^2\right\rangle}b'_{n,j}Q_{m+j}(z)\ .$$

此外，由于 $a'_{n\,n+N}b'_{n\,n+M}=b_{N\,M+N+N}a_{M\,M+N+n}\neq 0$ $\phi_{M+m+n}=M+m+n$ $\psi_{N+k+n}=_{,,,,}$，显然有 deg，deg。因此，所需结果得证。 □

现在陈述第一个结果。

定理 **3 1** *Let , be a pair of regular functionals with respect to the pair of monic . . (u v) ( ) , OPS (P_n $_{n\geq 0}$ Q_n $_{n\geq 0}$). Assume that* 3 4 *holds with $k \geq m$. Under the assumptions,* det( ) , *and conclusion of Lemma 3.1 assume further that $\mathcal{B}_{m-k+4} \neq 0$ where $\mathcal{B}_{k-m+3}$ z = ( ) $\Big[c_{i,j}(z)\Big]_{i}^{k-m+2}$ $_{,j=0}$ is the following polynomial matrix of order $k-m+3$*

$$c_{i,j}(z) = \begin{cases} \mathrm{U}_1 \mathrm{D}_x \psi_{N+k+i}(z) - \alpha \mathrm{S}_x \psi_{N+k+i}(z), & \text{if } j = 0 \\ \alpha \mathrm{T}_{k-m+1,j} \phi_{M+m+i}(z), & \text{otherwise .} \end{cases}$$

Then the following hold.

i. *If $m = k$ then and are connected by a rational modification and so is , semiclassical if and only if is so.*

u v u v ii. *If $k > m$, then* u *and* S_x^{k-m}v *are semiclassical functionals and in addition* S_xu *and* S_x^{k-m+1}v *are connected by a rational modification. That is, there exist six nonzero polynomials ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 ϕ_3, ψ_2 and ψ_3, such that*

$$\phi_1 \mathbf{D}_x \mathbf{u} = \psi_1 \mathbf{S}_x \mathbf{u} \ , \ \phi_2 \mathbf{S}_x \mathbf{u} = \psi_2 \mathbf{S}_x^{k-m+1} \mathbf{v} \ , \ \phi_3 \mathbf{D}_x \mathbf{S}_x^{k-m} \mathbf{v} = \psi_3 \mathbf{S}_x^{k-m+1} \mathbf{v} \ .$$

Proof. 情形 $k = m$ 是平凡的。假设 $k > m$。现在我们利用 (2.9) 和 (2.14) 对 (3.5) 应用 D_x ，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_x \psi_{N+k+n} \mathbf{S}_x \mathbf{u} = & \Big(\mathrm{U}_1 \mathrm{D}_x \psi_{N+k+n} - \alpha \mathrm{S}_x \psi_{N+k+n} \Big) \mathbf{D}_x \mathbf{u} \\ & + \alpha \sum_{j=0}^{k-m+1} \mathrm{T}_{k-m+1,j} \phi_{M+m+n} \mathbf{D}_x^{k-m+1-j} \mathbf{S}_x^j \mathbf{v} \ , \end{aligned}$$

当 $n = 0$, 1, ...时。取 $n = 0$, 1, 2, ..., $k-m+2$, 我们得到以下方程组

$$\begin{bmatrix} \mathrm{D}_x \psi_{N+k} \mathbf{S}_x \mathbf{u} \\ \mathrm{D}_x \psi_{N+k+1} \mathbf{S}_x \mathbf{u} \\ \mathrm{D}_x \psi_{N+k+2} \mathbf{S}_x \mathbf{u} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{D}_x \psi_{N+m+2} \mathbf{S}_x \mathbf{u} \\ \mathrm{D}_x \psi_{N+m+3} \mathbf{S}_x \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathcal{B}_{k-m+3} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \mathbf{u} \\ \mathbf{D}_x^{k-m+1} \mathbf{v} \\ \mathbf{D}_x^{k-m} \mathbf{S}_x \mathbf{v} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{D}_x \mathbf{S}_x^{k-m} \mathbf{v} \\ \mathbf{S}_x^{k-m+1} \mathbf{v} \end{bmatrix} .$$

由于 $B(z) = \det(\mathcal{B}_{k-m+3}(z)) \neq 0$, 因此我们可以求解该方程组，得到 D_xu、$\mathrm{D}_x \mathrm{S}_x^{k-m}$v 和 S $_x^{k-m+1}$v。也就是说，存在非零多项式 π_1、 π_2 和 π_3 ，使得

$$B \mathbf{D}_x \mathbf{u} = \pi_1 \mathbf{S}_x \mathbf{u} \ , \tag{3.8}$$

$$B \mathbf{D}_x \mathbf{S}_x^{k-m} \mathbf{v} = \pi_2 \mathbf{S}_x \mathbf{u} \ , \tag{3.9}$$

$$B \mathbf{S}_x^{k-m+1} \mathbf{v} = \pi_3 \mathbf{S}_x \mathbf{u} \ . \tag{3.10}$$

此外，由 (3.9) 和 (3.10) 可得

$$\pi_3 \mathbf{D}_x \mathbf{S}_x^{k-m} \mathbf{v} = \pi_2 \mathbf{S}_x^{k-m+1} \mathbf{v} \ . \tag{3.11}$$

结论由 (3.8)、(3.9) 和 (3.11) 得出。 □

注释 3.1. *It is important to notice that for a (M, N)-coherent pair of measures of order m k on nonuniform lattices with $k \neq m$ only one of the involved OPS is semi- (,) , , classical and the semiclassical character of the other one cannot be insured. In addition even the rational modification of such OPS cannot be insured. These make the difference with known results with operators d/dx $\triangle_\omega$ and D_q in* [2, 12, 13, 15, 18, 19, 20] *and some , references therein.*

注释 3.1 也适用于阶为 (m,k)、指标为 M 的 π_N-相干测度对概念。这是 (1.2) 的情形。例如，运用相同的思路，可以推导并严格证明下面的结论，它对应于 $k=0$ 时的 (1.2)。

定理 3.2 *Let , be a pair of regular functionals with respect to the pair of monic . . (u v) ( ) ,( ) OPS ($P_{n\ n\geq 0}$ $Q_{n\ n\geq 0}$). Assume that the following equation holds*

$$\pi_N(x)P_n^{[m]}(z)=\sum_{j=n-M}^{N}c_{n,j}Q_j(z)\ ,\quad c_{n,n-M}\neq 0\ ,\ (n=0,1,\ldots)\ , \tag{3.12}$$

where π_N is a polynomial of degree N $c_{n\,j}$ $j=0\ 1$ n $n=0\ 1$ are complex,,, , ,... , , , , ..., , numbers and M $m\in\mathbb{N}_0$. Assume that

$$c_{n,n-M}\neq 0 \qquad (n=0,1,\ldots)\ .$$

Let's define

$$\rho_{M+m+n}(z)=\sum_{j=n-N}^{n+M}(-1)^m c_{j,n}\frac{\gamma_{m+j}!\left\langle \mathbf{v},Q_n^2\right\rangle}{\gamma_j!\left\langle \mathbf{u},P_{m+j}^2\right\rangle}P_{m+j}(z)\quad (n=0,1,\ldots)\ ,$$

so that 度 ρ_{M+m+n}, $=M+m+n$. Assume further that 行列式($\mathcal{C}_{m+3}$) $\neq 0$, where $\mathcal{C}_{m+3}(z)$ $=\left[e_{i,j}(z)\right]_{i,j=0}^{m+2}$ is the following polynomial matrix of order $m+3$

$$e_{i,j}(z)=\begin{cases} \upsilon_1\mathrm{D}_x\rho_{M+m+i}(z)-\alpha\mathrm{S}_x\rho_{M+m+i}(z), & \text{if } j=0\\ \alpha\mathrm{T}_{m+1,j}(\pi_N Q_i)(z), & \text{otherwise .}\end{cases}$$

Then the following hold.

i. *If $m=0$ then and are connected by a rational modification and so is , semiclassical if and only if is so.*

u v u v ii. *If $m\neq 0$, then u and S_x^mv are semiclassical functionals and in addition S_xu and S_x^{m+1}v are connected by a rational modification.*

注释 3.2. *For q-quadratic lattices, we emphasize that some particular cases of (3.12) have been considered by several authors. For instance, the case of (3.12) where $(P_n)_{n\geq 0}\equiv$($Q_{n\ n\geq 0}$ $N\leq 2$ $M=1$ and $m=1$ is solved in [8] as an answer to a conjecture posed) , , , (.) ( ) by M. E. H. Ismail in [17]. Furthermore the case of 3 12 where $P_{n\ n\geq 0}\equiv$ $Q_{n\ n\geq 0}$ ( ) ,$N\leq 2k$ and $M=N$ is treated in a recent work available in [5].*

尽管定理 3.1 和定理 3.2 给出了这些结果，已建立的理论仍有一些值得探讨的问题。首先，式 (1.2) 中 $k\neq 0$ 所对应的情形仍是一个悬而未决的问题。其次，一个有趣的问题是为本文讨论的式 (1.1) 和 (1.2) 提供非平凡的例子。正如 [2, p.8], 所指出的，这并非易事。最后，正如引言中提到的，相干测度对这一概念与 Sobolev 正交多项式系相关联，并可应用于逼近理论。对于格点上的正交多项式系，这是一个值得在未来工作中探讨的问题。

Acknowledgements

作者的研究经费部分由 CMUP 提供。CMUP 是 LASI 的成员，该机构由国家资金通过 FCT - 科学与技术基金会（FCT），I.P. 在项目 UIDB/00144/2020 和 UIDP/00144/2020 的资助下提供经费。作者还感谢 CMUC-UIDB/00324/2020，该项目由葡萄牙政府通过 FCT/MCTES 资助，为作者提供了为期一个月的研究访问机会；本研究正是在这段时间内，在 Kenier Castillo 博士的指导下启动的。

References

[1] R. ´Alvarez-Nodarse、K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho，《离散相干测度对》，J. Difference Equ. Appl.，第 28 卷，第 7 期（2022），853-868。[2] R. ´Alvarez-Nodarse、J. Petronilho、N.C. Pinz´on-Cort´es、R. Sevink-Adig¨uzel，关于离散正交多项式差分导数的线性相关序列，J. Comput. and Appl. Math. 284（2015）26-37。[3] N.M. Atakishiev、M. Rahman 和 S. K. Suslov，关于经典正交多项式，Constr. Approx. 11（1995）181-226。[4] S. Bonan、D. Lubinsky、P. Nevai，正交多项式及其导数 II，SIAM J. Math. Anal. 18（1987）1163–1176。[5] K. Castillo 和 D. Mbouna，关于 Askey-Wilson 多项式的两个猜想的证明，Proc. Amer. Math. Soc.，DOI: 10.1090/proc/16250。[6] K. Castillo 和 D. Mbouna，关于相干测度对的另一种推广，Indag. Math.（2020）31 223-234。[7] K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho，*On the functional equation for classical orthogonal polynomials on lattices* **515** 2022 126390，J. Math. Anal. Appl.（ ）。[8] K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho，连续 q-Jacobi 多项式、第一类 Chebyshev 多项式和 Al-Salam Chihara 多项式的刻画，J. Math. Anal. Appl. 514（2022）126358。[9] T. S. Chihara，《正交多项式导论》。Gordon and Breach，纽约；1978。[10] M. Foupouagnigni、M. Kenfack-Nangho 和 S. Mboutngam，非均匀格点上经典正交多项式的刻画定理：函数方法，Integral Transforms Spec. Funct. 22（2011）739-758。[11] S. Mboutngam、M. Foupouagnigni、P. Njionou Sadjang，非均匀格点上半经典正交多项式的修正，J. Math. Anal. App. 445（2017）819-836。[12] K.H. Kwon、J.H. Lee、F. Marcell´an，广义相干对，J. Math. Anal. Appl. 253（2001）482–514。[13] F. Marcell´an、A. Branquinho、J. Petronilho，正交多项式的反问题 I，J. Comput. Appl. Math. 49（1993）153–160。[14] F. Marcell´an、A. Branquinho、J. Petronilho，经典正交多项式：函数方法，Acta Appl. Math. 34 (3)（1994）283–303。[15] F. Marcell´an、A. Mart´ınez-Finkelshtein、J. Moreno-Balc´azar，k-非经典权下测度的相干性，载于：Luis Espanol、Juan L. Varona（编），《Margarita Mathematica en Memoria de Jos´e Xavier Guadalupe Hern´andez》，拉里奥哈大学出版服务，西班牙洛格罗尼奥，2001。[16] A. Iserles、P. E. Koch、S. P. Nørsett 和 J. M. Sanz-Serna：关于相对于某些 Sobolev 内积正交的多项式，J. Approx. Theory 65（1991）151–175。[17] M. E. H. Ismail，《单变量经典与量子正交多项式》。另有 W. Van Assche 撰写的两章，R. Askey 作序。数学及其应用百科全书 98，剑桥大学出版社，剑桥，2005。[18] M. N. de Jesus、F. Marcell´an、J. Petronilho 和 N.C. Pinz´on-Cort´es：（M，N）–阶相干测度对与 Sobolev 正交多项式，J. Comput. Appl. Math. 256（2014）16–35。[19] M. N. de Jesus 和 J. Petronilho：关于正交多项式导数的线性相关序列，J. Math. Anal. Appl. 347（2008）482–492。[20] M. N. de Jesus 和 J. Petronilho：Sobolev 正交多项式与（M，N）–相干测度对，J. Comput. Appl. Math. 237（2013）83–101。[21] P. Maroni，《正交多项式的代数理论：其在半经典正交多项式中的应用》，载于 C. Brezinski 等编，《正交多项式及其应用》，埃里切 1990 年会议论文集，IMACS，Ann. Comp. App. Math. 9（1991）95-130。[22] P. Maroni 和 R. Sfaxi：*Diagonal orthogonal polynomial sequences*，Methods Appl. Anal. 7（2000）769–791。[23] J. Petronilho，关于与线性相关正交多项式序列相关联的线性泛函，J. Math. Anal. Appl. 315（2006）379-393。

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Porto, Campo Alegre st., 687, 4169-007 Porto, Portugal*Email address*: dieudonne.mbouna@fc.up.pt