arXiv:2301.02787v1 [math.PR] 7 Jan 2023

时间变换广义混合分数布朗运动的长程依赖

B.L.S. Prakasa Rao，C. R. Rao 高等数学、统计学与计算机科学研究所，海得拉巴，印度

摘要：我们将广义混合分数布朗运动（gmfBm）定义为两个赫斯特指数可能不同的相互独立分数布朗运动的线性组合，并研究由截尾稳定子ordinator或伽马过程诱导时间变换时，时间变换的 gmfBm 呈现长程依赖的条件。

关键词：分数布朗运动；混合分数布朗运动；广义混合分数布朗运动；截尾稳定子ordinator；伽马过程。

AMS 学科分类（2020）：主要分类 60G22。

1 引言

由标准布朗运动驱动的几何布朗运动，已被广泛用于对股票市场中股票价格波动进行建模。然而，尝试通过由分数布朗运动驱动的过程，对具有长程依赖的金融市场波动进行建模并未成功，因为人们注意到，这类模型会产生套利机会，这与理性市场行为模型中不存在套利机会这一基本假设相悖。Cheridito（2001）提出通过由混合分数布朗运动驱动的过程进行建模。Cheridito（2001）证明，当且仅当赫斯特指数 H等于$_{1\ 2}$ 时，混合分数布朗运动才是半鞅，此时该过程退化为维纳过程或 $H \in (3/4,1)$。此外，如果 $H = 1/2$ 或 $H \in (3/4,1)$，则由此类过程生成的概率测度相对于由维纳过程生成的概率测度绝对连续。这进而意味着，通过由混合分数布朗运动驱动的过程来模拟金融市场行为时，不会产生套利机会。以上简要讨论旨在引出对由混合分数布朗运动驱动的过程的研究。

关于由独立布朗运动与分数布朗运动混合而成的过程所驱动过程的参数估计问题，始于 Cheridito （ 2001 ）的研究，随后 Prakasa Rao （ 2015a,b ）等人也对此进行了研究。Mishura（2008）和 Prakasa Rao（2010）研究了混合分数布朗模型。Prakasa Rao（ 2022）对分数过程及其统计推断作了全面综述。

研究某些随机过程表现出长程依赖的充分条件，对于对互联网流量、金融以及其他领域中的随机现象进行建模具有重要意义。当过程的赫斯特指数超过1 2时，分数布朗运动（ fBm）就是这样一种过程。如果能够扩大具有长程依赖的随机过程类，将有助于随机建模。本文旨在引入一类称为广义混合分数布朗运动（gmfBm）的新过程，并研究分别由截尾稳定子ordinator或伽马过程进行时间变换的广义多分数布朗运动具有长程依赖性质的条件。Kumar 等人（2019）研究了由截尾稳定子ordinator和逆截尾稳定子ordinator延迟的分数布朗运动的性质；Kumar 等人（2017）则研究了分数布朗运动在由伽马过程或逆伽马过程进行时间变换时具有长程依赖性质的情形。在近期的工作中，Alajmi 和 Mliki（ 2020,2021）研究了当底层过程为截尾稳定子ordinator或伽马过程时，时间变换的混合分数布朗运动具有长程依赖的条件。本文旨在研究当广义多分数布朗运动由截尾稳定子 ordinator或伽马过程进行时间变换时，其具有长程依赖性质的条件。

设 $(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)\ P)$ 是一个满足通常条件的随机基。随机过程的自然滤过是指由该过程生成的滤过的 P-完备化。设 $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ 是一个赫斯特参数为 $H \in (0,1)$ 的分数布朗运动（fBm），即一个具有连续样本路径的高斯过程，满足 $B_0^H = 0, E(B_t^H) = 0$ 且

$$E(B_s^H B_t^H) = \frac{1}{2}[s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}], t \geq 0, s \geq 0. \quad (1.\ 1)$$

Let

$$N_t^{H_1,H_2}(a,b) = aB_t^{H_1} + bB_t^{H_2}, t \geq 0.$$

其中， B^{H_1} 和 B^{H_2} 是相互独立的分数布朗运动，且 a、$b \in R$ 不同时为零。过程 $\{N_t^{H_1,H_2}(a,b)\ t \geq 0\}$ 称为具有赫斯特指数 H_1 和 H_2.的广义混合分数布朗运动（gmfBm）

时间变换广义混合分数布朗运动是由下式定义的过程$Y_{\beta}^{H_1.H_2}(a,b)$

$$Y_{\beta}^{H_1.H_2}(a,b) \equiv \{Y_{\beta_t}^{H_1.H_2}(a,b), t \geq 0\} = \{N_{\beta_t}^{H_1,H_2}(a,b), t \geq 0\}$$

其中，过程 $N^{H_1,\ H_2}(a,b)$ 是参数为 a,b 和 $H_1,H_2 \in (0,1)$ 的广义多分数布朗运动，而过程 $\beta = \{\beta_t, t \geq 0\}$ 是与分数布朗运动 $B^{H_i}, i = 1$ 独立的次 subordinators。2. 次 subordinators 是具有独立增量的平稳过程。

令 $s > 0$ 固定，并设 $t > s.$。假设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是一个随机过程，且对于所有 $t \geq 0.$，$E(X_t^2) < \infty$。如果对于任意固定的 s，则称过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 具有长程依赖:

$$Corr(X_t, X_s) \simeq c(s)t^{-d}$$

当 $t \to \infty$ 时，对于某个仅依赖于 $s.$ 的常数 $c(s)$

现在我们将讨论时间变换过程 $Y_{\beta}^{H_1.H_2}(a,b)$ 的长程依赖性质，其中次 subordinators $\{\beta_t, t \geq 0\}$ 是截尾稳定子ordinator（TSS）或伽马过程，并且与分数布朗运动 $B^{H_i}, i = 1$ 独立。2..

2 经截尾稳定子ordinator进行时间变换的广义多分数布朗运动

指标为 $\alpha \in (0,1)$、截尾参数为 $\lambda > 0$ 的截尾稳定次 subordinators (TSS)，是非负非减 Lévy 过程 $S^{\lambda,\alpha} = \{S_t^{\lambda,\alpha}, t \geq 0\}$，其中随机变量 $S^{\lambda}{}_{,t}{}^{\alpha}$ 的概率密度函数为

$$f_{\lambda,\alpha}(x,t) = \exp(-\lambda x + \lambda^{\alpha} t) f_{\alpha}(x,t), \lambda > 0, \alpha \in (0,1),$$

whe

$$f_{\alpha}(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xy} e^{-ty^{\alpha} \cos \alpha\pi} \sin(ty^{\alpha} \sin \alpha\pi) dy.$$

引理 2.1：对于 $q > 0$,

$$E[(S_t^{\lambda,\alpha})^q] \simeq (\alpha \lambda^{\alpha-1} t)^q$$

当 $t \to \infty.$ 时

关于引理 2.1 的证明以及有关截尾稳定次 subordinators 过程的更多细节，请参阅 Kumar 等人（2017）。为方便起见，在以下计算中，我们将 $Y^{H_1}{}_{,S^{\lambda}}{}^{H_2}{}_{,t}{}^{\alpha}(a,b)$ 记作 $Y^{H_1}{}_{,S^{\lambda}}{}^{H_2}{}_{,t}{}^{\alpha}$。

现在我们探讨广义多分数布朗运动 N^{H_1,H_2} 经截尾稳定次 subordinators $S^{\lambda,\alpha}$ 进行时间变换后具有长程依赖性的充分条件。注意到

$$\begin{aligned}
&Cov(Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b), Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s}(a,b)) \\
&= \frac{1}{2}E[(Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t})^2 + (Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s})^2 - (Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t} - Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s})^2] \\
&= \frac{1}{2}E[(N^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t})^2 + (N^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s})^2 - (N^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t} - N^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s})^2] \\
&= \frac{1}{2}E[(aB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_t} + bB^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t})^2 + (aB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_s} + bB^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s})^2] \\
&\quad -\frac{1}{2}E[(a(B^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_t} - B^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_s}) + (B^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t} - B^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s}))^2].
\end{aligned}$$

S由于分数布朗运动具有平稳增量，因此可得 t

$$\begin{aligned}
&Cov(Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b), Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s}(a,b)) \\
&= \frac{1}{2}E[(aB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_t} + bB^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t})^2 + (aB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_s} + bB^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s})^2 \\
&\quad -(aB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_{t-s}} + bB^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_{t-s}})^2] \\
&= \frac{1}{2}E[(aB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_t})^2 + (bB^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t})^2 + 2abB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_t}B^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}] \\
&\quad +\frac{1}{2}E[(aB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_s})^2 + (bB^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s})^2 + 2abB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_s}B^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s}] \\
&\quad -\frac{1}{2}E[(aB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_{t-s}})^2 + (bB^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_{t-s}})^2 + 2abB^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_{t-s}}B^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_{t-s}}].
\end{aligned}$$

由分数布朗运动 B^{H_1} 和 B^{H_2} 相互独立，且它们与截尾稳定次 subordinators $S^{\lambda,\ \alpha}$相互独立，可得

$$\begin{aligned}
&Cov(Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b), Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s}(a,b)) \\
&= \frac{a^2}{2}[E(B^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_t})^2 + E(B^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_s})^2 - E(B^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_{t-s}})^2] \\
&\quad +\frac{b^2}{2}[E(B^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t})^2 + E(B^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s})^2 - E(B^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_{t-s}})^2]
\end{aligned}$$

通过观察到

$$\begin{aligned}
E[B^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_t}B^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}] &= E[E(B^{H_1}_{S^{\lambda,\alpha}_t}B^{H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}|S^{\lambda,\alpha}_t)] \\
&= \int E[B^{H_1}_z B^{H_2}_z]F_{S^{\lambda,\alpha}_t}(dz)
\end{aligned}$$

$$= \quad 0$$

其中 $F_{S^{\lambda,\ t}{}^{\alpha}}(.)$ 是随机变量 $S^{\lambda,\ t}{}^{\alpha}$. 的分布函数。因此

$$\begin{aligned} & Cov(Y^{H_1,H_2}_{S_t^{\lambda,\alpha}}(a,b), Y^{H_1,H_2}_{S_s^{\lambda,\alpha}}(a,b)) \\ = \quad & \frac{a^2}{2}E[B^{H_1}(1)]^2[E(S_t^{\lambda,\alpha})^{2H_1} + E(S_s^{\lambda,\alpha})^{2H_1} - E(S_{[}t-s]^{\lambda,\alpha})^{2H_1}] \\ & + \frac{b^2}{2}E[B^{H_2}(1)]^2[E(S_t^{\lambda,\alpha})^{2H_2} + E(S_s^{\lambda,\alpha})^{2H_2} - E(S_{[}t-s]^{\lambda,\alpha})^{2H_2}]. \end{aligned}$$

固定 s. 应用引理 2.1 可得，当 $t > s$ 较大时，

$$\begin{aligned} & Cov(Y^{H_1,H_2}_{S_t^{\lambda,\alpha}}(a,b), Y^{H_1,H_2}_{S_s^{\lambda,\alpha}}(a,b)) \\ \simeq \quad & \frac{a^2}{2}(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}t^{2H_1}(2H_1\frac{s}{t} + E(S_{s,\alpha}^{\lambda,\alpha})^{2H_1}t^{-2H_1} + O(t^{-2}) \\ & + \frac{b^2}{2}(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}t^{2H_2}(2H_3\frac{s}{t} + E(S_{s,\alpha}^{\lambda,\alpha})^{2H_2}t^{-2H_2} + O(t^{-2}) \\ \simeq \quad & a^2H_1s(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}t^{2H_1-1} + b^2H_2s(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}t^{2H_2-1} \end{aligned}$$

通过与 Alajmi 和 Milki (2021) 中类似的论证，得到以下结果。

定理 2.1：设 $\{Y^{H_1,H_2}_{S_t^{\lambda,\alpha}}(a,b)\ t \geq 0\}$ 为由过程 $S^{\lambda\alpha}$. 进行时间变换的广义多分数布朗运动。则对于固定的 s，当 $t > s$ 较大时，

$$Cov(Y^{H_1,H_2}_{S_t^{\lambda,\alpha}}(a,b), Y^{H_1,H_2}_{S_s^{\lambda,\alpha}}(a,b)) \simeq a^2H_1s(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}t^{2H_1-1} + b^2H_2s(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}t^{2H_2-1}$$

下一个结果讨论过程 $\{Y^{H_1,H_2}_{S_t^{\lambda,\alpha}}(a,b)\ t \geq 0\}$ 的增量的二阶矩在固定 s 且 t. 较大时的渐近行为

定理 2.2：设 $\{Y^{H_1,H_2}_{S_t^{\lambda,\alpha}}(a,b)\ t \geq 0\}$ 是经过程 $S^{\lambda\alpha}$. 时间变换的广义多分数布朗运动。那么，对于固定的 s 和较大的 $t > s$,

$$\begin{aligned} & (2.\ 1)E[(Y^{H_1,H_2}_{S_t^{\lambda,\alpha}}(a,b) - Y^{H_1,H_2}_{S_t^{\lambda,\alpha}}(a,b))^2] \\ \simeq \quad & a^2H_1(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}t^{2H_1} - 2a^2H_1(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}t^{2H_1-1} + a^2H_1(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}s^{2H_1} \\ & + b^2H_2(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}t^{2H_2} - 2b^2H_2(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}t^{2H_2-1} + b^2H_2(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}s^{2H_2}. \end{aligned}$$

证明：设 $s>0$ 为固定值，并令 $t>s$ 且 $t\to\infty.$。则

$$\begin{aligned}
&E[(Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b)-Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b))^2]\\
&= E[Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b)]^2+E[Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s}(a,b)]^2\\
&\quad +E[Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b)Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s}(a,b)]\\
&\simeq a^2H_1(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}t^{2H_1}-2a^2H_1(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}t^{2H_1-1}+a^2H_1(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}s^{2H_1}\\
&\quad +b^2H_2(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}t^{2H_2}-2b^2H_2(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}t^{2H_2-1}+b^2H_2(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}s^{2H_2}
\end{aligned}$$

通过观察到 $E[Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b)]=0, t\geq 0$ 和

$$Cov[Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b),Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s}(a,b)]=E[Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b)Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_s}(a,b)].$$

现在我们将探讨赫斯特指数 H_1,H_2 满足何种条件时，过程$\{Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b)\ t\geq 0\}$ 具有长程依赖行为。

定理 2.3：设 $N^{H_1,H_2}(a,b)$ 是一个广义多分数布朗运动，且 $0<H_1\leq H_2<1.$。设 $S^{\lambda,\alpha}$ 是一个 TSS 过程，且 $\lambda>0$ 和 $0<\alpha<1.$。那么，由过程 $S^{\lambda,\alpha}$ 进行时间变换的广义多分数布朗运动具有长程依赖性质，当且仅当 $2H_1-H_2<1.$

证明：固定 $s>0$，并令 $t>s$ 满足 $t\to\infty.$。那么，根据定理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}
&Corr(Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b),Y_{S^{\lambda,\alpha}_s})\\
&\simeq \frac{a^2H_1s(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}t^{2H_1-1}+b^2H_2s(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}t^{2H_2-1}}{\sqrt{a^2H_1(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_1}t^{2H_1}+b^2H_2(\alpha\lambda^{\alpha-1})^{2H_2}t^{2H_2}}\sqrt{E[(Y^{H_1,H_2}_{S^{\lambda,\alpha}_t}(a,b))^2]}}\\
&\simeq \frac{c_1t^{2H_1-1}+c_2t^{2H_2-1}}{\sqrt{d_1t^{2H_1}+d_2t^{2H_2}}}\\
&\simeq \frac{c_3t^{2H_1-1}+c_4t^{2H_2-1}}{\sqrt{t^{2H_2}}}\ \ (\text{since } H_2>H_1)\\
&\simeq c_5t^{2H_1-H_2-1}+c_6t^{H_2-1}
\end{aligned}$$

其中 c_i、$i=1$、...、6 是依赖于 a、b、s、α、λ、H_1、H_2，但不依赖于 $t.$ 的常数。由于根据假设，$0<H_2<1$ 且 $2H_1-H_2<1$，因此最后一项在 $t\to\infty.$ 时趋于零。于是，过程 $S^{\lambda,\ \alpha}$ 的时间变换广义多分数布朗运动具有长程依赖性质。

备注：定理 2.3 将 Alajmi 和 Milki（2021）关于多分数布朗运动的结果推广到了广义多分数布朗运动，并给出了一个关于赫斯特指数 H_1、H_2（其中 $H_1 < H_2$.）的长程依赖性质充分条件。

3 由伽马过程进行时间变换的广义多分数布朗运动

伽马过程 $\Gamma = \{\Gamma_t, t \geq 0\}$ 是一种平稳独立增量过程，其 $\Gamma_{t+s} - \Gamma_s$ 服从伽马分布，概率密度函数为

$$f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(t/\nu)} x^{(t/\nu)-1} e^{-x}, x > 0; f(x,t) = 0, x \leq 0$$

其中 $\nu > 0$.

引理 3.1：对于任意 $q > 0$,

$$E[\Gamma_t^q] \simeq (t\nu^{-1})^q$$

当 $t \to \infty$. 时

引理 3.1 的证明见 Kumar 等人（2017）。

设 $N^{H_1,\ H_2}(a,b) = \{N_t^{H_1,H_2}(a,b)\ t \geq 0\}$ 是广义多分数布朗运动，且 $\Gamma = \{\Gamma_t, t \geq 0\}$ 是一个次 subordinators。定义

$$Y_{\Gamma_t}^{H_1,H_2} = N_{\Gamma_t}^{H_1,H_2}(a,b) = aB_{\Gamma_t}^{H_1} + bB_{\Gamma_t}^{H_2}, a, b \in R$$

不同时为零。现在我们研究广义多分数布朗运动 $N^{H_1,\ H_2}(a,b)$ 经由 Γ 过程进行时间变换后呈现长程依赖的充分条件。

为便于表述，在以下计算中，我们用 $Y^{H_1}{}_{,\Gamma_s}{}^{H_2}$ 表示 $Y^{H_1}{}_{,\Gamma_t}{}^{H_2}(a,b)$。假设 $0 < H_1 < H_2 < 1$. 固定 $s > 0.$，并令 $t > s$ 满足 $t \to \infty.$。设 $0 < H_1 < H_2 < 1$.。应用与第 2 节中所用论证类似的方法，容易证明

$$\begin{aligned} & Cov(Y_{\Gamma_t}^{H_1,H_2}, Y_{\Gamma_s}^{H_1,H_2}) \\ \simeq\ & \frac{2a^2 H_1 s}{\nu^{2H_1}} t^{2H_1-1} + \frac{2b^2 H_2 s}{\nu^{2H_2}} t^{2H_2-1} \\ \simeq\ & c_1 t^{2H_1-1} + c_2 t^{2H_2-1} \\ \simeq\ & c_3 t^{2H_1-H_2-1}, \end{aligned}$$

(3. 1) $$Var(Y_{\Gamma_t}^{H_1,H_2}) \simeq c_4 t^{2H_1} + c_5 t^{2H_2}$$

and

$$\begin{aligned} & E[(Y_{\Gamma_t}^{H_1,H_2} - Y_{\Gamma_s}^{H_1,H_2})^2] \\ \simeq\ & \frac{2a^2H_1}{\nu^{2H_1}}t^{2H_1} - \frac{4a^2H_1 s}{\nu^{2H_1}}t^{2H_1-1} + \frac{2a^2H_1}{\nu^{2H_1}}s^{2H_1} \\ & + \frac{2b^2H_2}{\nu^{2H_2}}t^{2H_2} - \frac{4b^2H_2 s}{\nu^{2H_2}}t^{2H_2-1} + \frac{2b^2H_2}{\nu^{2H_2}}s^{2H_2}. \end{aligned}$$

此外，对于固定的 s 以及满足 $t \to \infty$ 的 $t > s$，可得

$$\begin{aligned} & Corr(Y_{\Gamma_t}^{H_1,H_2}, Y_{\Gamma_s}^{H_1,H_2}) \\ \simeq\ & \frac{|a|(2H_1)^{1/2}s}{t_1^H \nu^{H_1}\sqrt{E(Y_{\Gamma_s}^{H_1,H_2})^2}}t^{2H_1-1} \\ & + \frac{|b|(2H_2)^{1/2}s}{t_2^H \nu^{H_2}\sqrt{E(Y_{\Gamma_s}^{H_1,H_2})^2}}t^{2H_2-1}. \end{aligned}$$

注意到

$$E(Y_{\Gamma_s}^{H_1,H_2})^2 \simeq \frac{2a^2H_1 s^{2H_1-1}}{\nu^{2H_1}} + \frac{2b^2H_1 s^{2H_2-1}}{\nu^{2H_2}}.$$

结合上述估计可得

$$\begin{aligned} & Corr(Y_{\Gamma_t}^{H_1,H_2}, Y_{\Gamma_s}^{H_1,H_2}) \\ \simeq\ & c_6 t^{2H_1-H_2-1} + c_7 t^{H_2-1} \end{aligned}$$

对于固定的 s和 $t > s$，其中 $t \to \infty$.。常数 c_i、$i = 1$、.....、7 取决于 a、b、H_1、H_2 和ν.。注意，若 $2H_1 - H_2 < 1$，则最后一项在 $t \to \infty$ 时趋于零，因为 $0 < H_2 < 1$.。现在我们得到以下结果。

定理 3.1：设 $N^{H_1,H_2}(a,b)$ 是一个广义多分数布朗运动，且 $0 < H_1 < H_2 < 1$.。设 Γ 为参数为 $\nu > 0$的伽马过程。那么，由过程 Γ 进行时间变换的广义多分数布朗运动在 $2H_1 - H_2 < 1$.时具有长程依赖性

致谢：本研究得到印度国家科学学院位于印度海得拉巴 500046 的 C. R. Rao 高等数学、统计学与计算机科学研究所“INSA 高级科学家”计划的资助。

参考文献

Alajmi，S. 和 Milki，E.（2020）经逆 α-稳定次 subordinators 进行时间变换的混合分数布朗运动，《应用数学科学》，14，755-763。

Alajmi, S. 和 Milki, E.（2021）关于时间变换混合分数布朗运动模型的长程依赖，arXiv:2102.10180v1 [math.PR] 18 2021年2月。

Cheridito, P.（2001）混合分数布朗运动，Bernoulli，7，913-934。

Kumar, A.、Wylomanska, A.、Polozanski, R. 和 Sundar, S.（2017）由伽马过程和逆伽马过程进行时间变换的分数布朗运动，Physica A：统计力学及其应用，468，648-667。

Kumar, A.、Gajda, G. 和 Wylomanska, A.（2019）由截尾稳定次 subordinators 和逆截尾稳定子ordinator 延迟的分数布朗运动，Methodol. Comput. Appl. Probab.，21，185-202。

Mishura, Y. (2008)《分数布朗运动及相关过程的随机微积分》，Springer：柏林。

Prakasa Rao, B.L.S. (2010)《分数扩散过程的统计推断》，伦敦：Wiley。

Prakasa Rao, B.L.S. (2015a) 混合分数布朗运动叠加跳跃所驱动过程的期权定价，《工程与信息科学中的概率》，29，589-596。

Prakasa Rao, B.L.S. (2015b) 混合分数布朗运动环境下几何亚洲幂期权的定价，《Physica A》，446，92-99。

Prakasa Rao, B.L.S. (2022) 分数过程及其统计推断：综述，《印度科学研究所学报》，102，1145-1175。